



MATEMATICA II

ÍNDICE

Presentación	5
Red de contenidos	6
UNIDAD DE APRENDIZAJE 1	
SEMANA 1 : MATRICES Y DETERMINANTES	7
SEMANA 2 : MATRICES Y DETERMINANTES	27
UNIDAD DE APRENDIZAJE 2	
SEMANAS 3 : GEOMETRÍA ANALÍTICA	43
SEMANAS 4 : ECUACIONES DE LA RECTA	57
SEMANAS 5 : GEOMETRÍA ANALÍTICA	67
SEMANAS 6 : GEOMETRÍA ANALÍTICA	77
UNIDAD DE APRENDIZAJE 3	
SEMANA 8 : FUNCIONES Y GRÁFICAS	89
SEMANAS 9 : FUNCIONES Y GRÁFICAS	97
SEMANAS 10 : FUNCIONES Y GRÁFICAS	105
UNIDAD DE APRENDIZAJE 4	
SEMANAS 11 : LÍMITES Y CONTINUIDAD	119
SEMANAS 12 : LÍMITES Y CONTINUIDAD	131
SEMANAS 13 : LÍMITES Y CONTINUIDAD	137
UNIDAD DE APRENDIZAJE 5	
SEMANAS 14 : LA DERIVADA	149
SEMANAS 15 : LA DERIVADA	161
SEMANAS 16 : LA DERIVADA	175

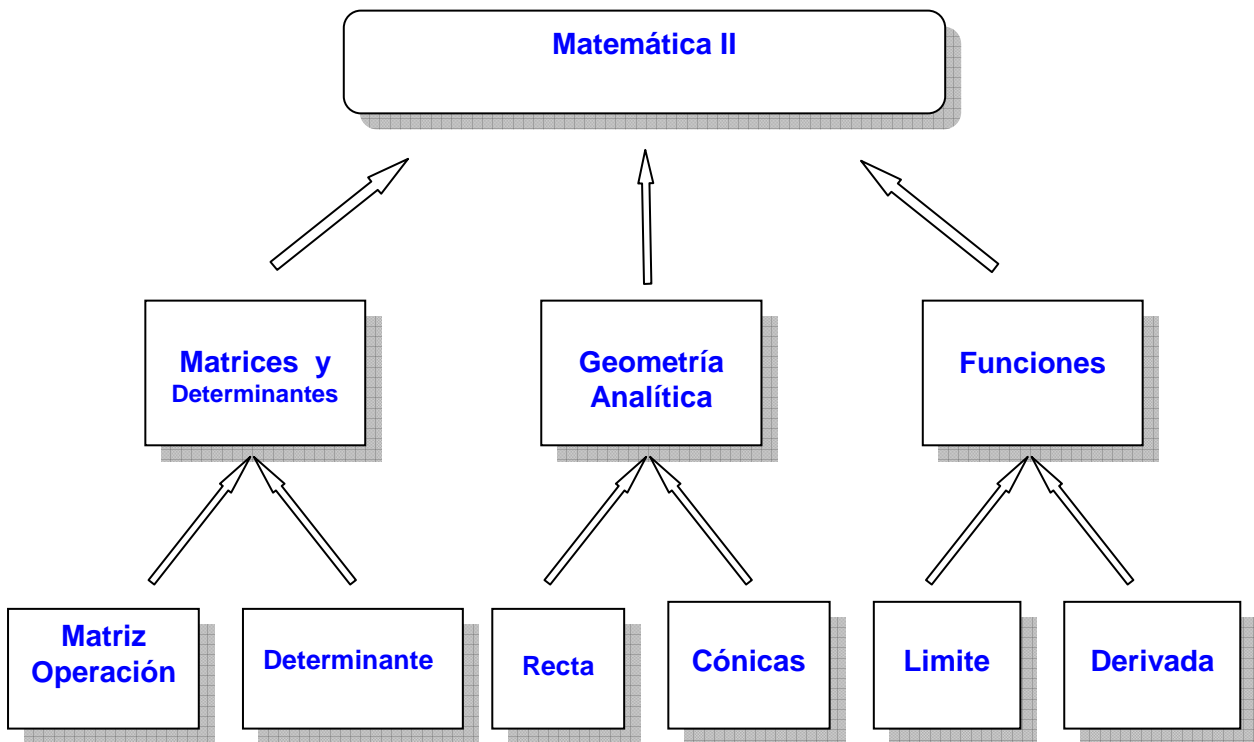
PRESENTACIÓN

Matemática II pertenece a la línea formativa, analítica y de solución de problemas, propios del cálculo diferencial y se dicta en todas las Carreras Profesionales de Cibertec. El curso brinda un conjunto de herramientas algebraicas y geométricas que permitirán el desarrollo de las capacidades de abstracción y de resolución de problemas. La forma didáctica en que presentamos los temas permitirá que sea un material complementario para afianzar el aprendizaje de nuestros alumnos.

El presente manual de matemática II, ha sido diseñado bajo la modalidad de unidades de aprendizaje (UA), las que se desarrollarán durante las 15 semanas de clases programadas. En cada una de ellas, se hallarán los logros que se deben alcanzar al final del desarrollo de la unidad. El tema tratado de cada UA, será ampliamente desarrollado tanto en el fundamento teórico del tema, como en la parte práctica, los mismos que tendrán problemas desarrollados, problemas propuestos y auto-evaluaciones que en su mayoría son problemas de evaluaciones continuas, parciales y finales propuestas en semestres pasados. Las sesiones de aprendizaje fomentarán la participación activa de los alumnos mediante ejercicios dirigidos, dinámicas individuales y grupales, además de la práctica de ejercicios y problemas tipos, que le garanticen un nivel óptimo de aprendizaje. Se utilizarán controles de desempeño con el fin de promover el trabajo en equipo, el pensamiento crítico, la argumentación y justificación de sus ideas así como la comunicación

El curso es de naturaleza práctica. Se inicia manejando las herramientas básicas del álgebra matricial, efectuando las operaciones básicas con matrices: la adición, multiplicación y otras aplicaciones; seguidamente, en el plano cartesiano, aprenderemos a construir gráficas de rectas y cónicas como circunferencias y parábolas, así como reconocer dichas cónicas a partir de sus ecuaciones. Del mismo modo, se analizarán las gráficas y el comportamiento en el plano de funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Finalmente, se analizarán la continuidad o discontinuidad de funciones algebraicas resolviendo los diferentes casos de límites indeterminados, a fin de hallar y manejar las diferentes aplicaciones del cálculo diferencial.

RED DE CONTENIDOS



UNIDAD DE
APRENDIZAJE**1**

SEMANA

1

MATRICES Y DETERMINANTES

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos, aplicando las propiedades de las operaciones con matrices y de su clasificación, resuelven problemas de operaciones con matrices y calculan la determinante de una matriz.

TEMARIO

- Matrices:
 - Notación de matrices
 - Orden de una matriz
 - Igualdad de matrices
 - Tipos de matrices:
 - Nula
 - Columna
 - Fila
 - Cuadrada
- Operaciones con matrices:
 - Suma y diferencia de matrices
 - Producto de un escalar por una matriz
 - Producto de matrices
 - Potencia de una matriz
- Matrices especiales:
 - Matriz Diagonal
 - Matriz Escalar
 - Matriz Identidad
 - Matriz Transpuesta
 - Matriz Simétrica
 - Matriz Antisimétrica
 - Superior e Inferior

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Escribe explícitamente matrices de orden $M \times N$.
- Identifica los tipos de matrices y sus características.
- Efectúa operaciones con matrices: Adición, producto de un escalar por una matriz, multiplicación de matrices.

1.1 MATRICES

Las matrices son herramientas matemáticas de mucha aplicabilidad en el campo de las ciencias económicas, sociales, administrativas entre otras áreas. Durante muchos años, los matemáticos puros fueron los únicos que se dedicaron al estudio de las matrices y de sus propiedades, pero en la actualidad existe un gran interés por el conocimiento de este tema, debido a sus numerosas aplicaciones en el estudio y solución de problemas concretos, sobre todo, por parte de quienes se dedican al estudio de la ciencias administrativas y sociales.

Es sumamente importante, para quienes se inician en el estudio de estos temas, tener muy presente que el concepto de matriz es completamente diferente al de “determinante”, tal como lo haremos notar más adelante.

La rápida difusión de las calculadoras y, en particular, de las computadoras electrónicas, han creado la necesidad de impulsar el uso de las matrices en el planeamiento y solución de problemas concretos.

1.1.1 Definición

Una matriz **A** de orden **m** por **n** es un arreglo rectangular de elementos a_{ij} ordenados en filas y columnas, que tienen la forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{columna } 1 & & \text{columna } j & & \text{columna } n & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \leftarrow \text{Fila 1} \\
 & & & & & \leftarrow \text{Fila } i \\
 & & & & & \leftarrow \text{Fila } m
 \end{array}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 8 & 15 & 20 \\ 40 & 60 & 70 \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} 50 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Nota 1. Una matriz usualmente se denota por letras mayúsculas A, B, C etc. y a sus elementos por letras minúsculas a_{ij} , b_{ij} y c_{ij} etc.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Nota 2. Los elementos a_{ij} de una matriz “A” pueden ser números reales, números complejos, funciones, vectores o cualquier objeto no numérico, como por ejemplo, las fichas de un ajedrez o los apellidos de personas cuando son codificados en orden alfabético, etc.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \sqrt{7} & \pi \\ 0,5 & \frac{8}{3} & \frac{4}{5} \\ \sqrt{7} & \sqrt{5} & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \text{Sen}x & \text{Cos}x \\ \text{Cos}x & -\text{Sen}x \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 3i^2 & 4i \\ 3i - 1 & i \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} \text{Abad} & \text{Baldin} \\ \text{Castro} & \text{Cruz} \\ \text{Flores} & \text{Hilario} \end{bmatrix}$$


Nota 3. La matriz no tiene valor numérico; es decir, no puede identificarse con un número.


1.1.2 ORDEN DE UNA MATRIZ

El orden de una matriz es el producto indicado del número de filas por el número de columnas de la matriz.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & 5 \\ \sqrt{3} & \pi & e \\ 5 & 8 & 15 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$





Luego, la matriz tiene 3 filas y 3 columnas, entonces es de orden 3x3.

1.1.3 IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices A y B son iguales, si y sólo si, son del mismo orden y sus respectivos elementos son iguales

$$A = B \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}], \forall_{ij}$$

Ejemplo:

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ -e & -\pi \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ -e & -\pi \end{bmatrix}$$

Averiguar si son iguales o no:

SOLUCIÓN

A y B tienen el mismo orden (2 x 2). Veamos si tienen los mismos elementos:

$$a_{11} = b_{11} = 10$$

$$a_{12} = b_{12} = 20$$

$$a_{21} = b_{21} = -e$$

$$a_{22} = b_{22} = -\pi$$

Luego, $A = B$

1.1.4 TIPOS DE MATRICES

1.1.4.1 MATRIZ NULA

Una matriz, en la cual todos sus elementos son ceros, se denomina matriz nula y se denota 0.

Ejemplo:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0 = [0] \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.4.2 MATRIZ COLUMNA

Tiene m filas y una columna.

Ejemplos:

$$M = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} ; \quad N = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} ; \quad P = [8]$$

1.1.4.3 MATRIZ FILA

Está formada por una fila y n columnas

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \text{Sen}x & \text{Cos}x & \text{Tan}x \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} x^2 & 3x-1 & 4x^3 & -5x \end{bmatrix}$$

1.1.4.4 MATRIZ CUADRADA

Una matriz A es cuadrada, cuando el número de filas es igual al número de columnas,

(m = n).

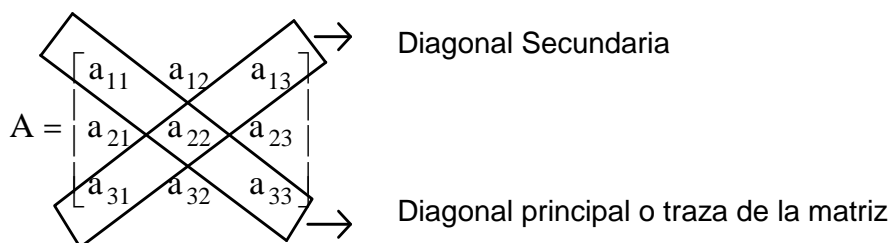
Ejemplos:

La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ es cuadrada de orden 3 x 3

La matriz $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & \sqrt{7} \end{bmatrix}$ es cuadrada de orden 2 x 2

Diagonal principal de una matriz cuadrada, es la línea formada por los elementos a_{11} , a_{22} , a_{33} ..., a_{nn} , llamada traza de la matriz.

Ejemplo:



1.1.4.5 MATRIZ DIAGONAL

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada cuyos elementos son todos iguales a cero, excepto los que pertenecen a su diagonal principal.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.4.6 MATRIZ ESCALAR

Es aquella matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales:

Ejemplos:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

1.1.4.7 MATRIZ IDENTIDAD

Una matriz identidad es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales al número uno.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1.4.8 MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Una matriz cuadrada $A=[a_{ij}]$ se llama triangular inferior si y solo si, sus elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1. \quad A &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 1/3 \end{bmatrix} \\ 2. \quad B &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ \pi & e & 0 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \\ 3. \quad C &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{7} & \sqrt{7} & \sqrt{7} & \sqrt{7} \end{bmatrix} \\ 4. \quad D &= \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \\ 5. \quad E &= \begin{bmatrix} e_{11} & 0 \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.1.4.9 MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ se llama triangular superior si y sólo si, sus elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$

$$\begin{aligned} 1. \quad D &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ 2. \quad M &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1/3 & 4/5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\ 3. \quad R &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.1.4.10 MATRIZ SIMÉTRICA

Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$.

A es simétrica, si $A = A^T$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow P^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

1.1.4.11 MATRIZ ANTISIMÉTRICA

Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$.

A es antisimétrica, si y sólo si $A = -A^t$.

Los elementos de la diagonal principal de la matriz antisimétrica son ceros y los elementos equidistantes de la diagonal principal son números opuestos.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & -8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -8 \\ -3 & 8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.5 MATRIZ TRANSPUESTA

La transpuesta de una matriz A de orden m x n es una matriz de orden n x m, denotada por A^T , cuyas filas son las columnas de A, y cuyas columnas son las filas de A.

Ejemplos:

$$\textcircled{1} \text{ Si } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \text{ entonces } A^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 5 & 20 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\textcircled{2} \text{ Si } P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 2/7 & 3/5 \\ 1/5 & 7/8 \\ 17/3 & \pi/4 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \text{ entonces } P^T = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/7 & 1/5 & 17/3 \\ 1/4 & 3/5 & 7/8 & \pi/4 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

1.1.5.1 Propiedades de la matriz transpuesta

$$1. \quad \boxed{I^T = I}$$

Ejemplos:

Si:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow I^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad \boxed{(B^T)^T = B}$$

Ejemplo:

$$\text{Si : } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ entonces } B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego: } (B^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Por tanto : } (B^T)^T = B$$

$$3. \quad \boxed{(KB)^T = K \cdot B^T}, \quad \text{“K” es un escalar}$$

$$\text{- Si } B = \begin{bmatrix} 3 & 1/4 \\ 2 & 5/6 \end{bmatrix} \text{ y } k = 5$$

$$\rightarrow KB = 5 \begin{bmatrix} 3 & 1/4 \\ 2 & 5/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5/4 \\ 10 & 25/6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (KB)^t = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 5/4 & 25/6 \end{bmatrix}$$

$$\text{- Si } B = \begin{bmatrix} 3 & 1/4 \\ 2 & 5/6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad K = 5$$

$$\rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1/4 & 5/6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow KB^T = 5 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1/4 & 5/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 5/4 & 25/6 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto verificamos que:

$$(KB)^t = KB^t$$

4. $(A + B)^t = A^t + B^t$

Ejemplo:

$$* \quad \text{Si } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}; \quad (A + B)^t = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$** \quad \text{Si } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{entonces } A^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{entonces } B^t = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^t + B^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^t + B^t = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto: $(A + B)^t = A^t + B^t$

5. $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

* Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow (AB)^t = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

** Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow B^t \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

Luego verificamos que:

$$(AB)^t = B^t \cdot A^t$$

1.1.5 OPERACIONES CON MATRICES

1.1.5.1. SUMA DE MATRICES

Sean las matrices: $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, ambas del mismo orden $m \times n$.

La matriz suma de A y B es otra matriz

$C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$, la cual también es de orden $m \times n$.

Ejemplos:

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Entonces:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 5+2 & 6+5 \\ 3+3 & 2+5 & 4+(-2) \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 11 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

2. Sean las matrices:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Entonces:

$$M + N = \begin{bmatrix} 2+3 & 2+2 & 2+(-3) \\ 1+1 & -1+2 & 1+3 \\ 0+(-3) & 3+2 & -3+(-1) \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$M + N = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

PROPIEDADES:

Consideremos las matrices A, B y C del mismo orden y " λ " es un escalar. Entonces:

- a) $A + B = B + A$, Conmutativa
- b) $A + (B+C) = (A+B) + C$, Asociativa
- c) $\lambda (A+B) = \lambda A + \lambda B$, Distributiva
- d) Existe una matriz 0 tal que para todo A, $A + 0 = A$.

1.1.5.2. SUSTRACCIÓN DE MATRICES

Consideremos dos matrices A y B del mismo orden. Entonces, la diferencia de las matrices A y B definiremos por:

$$A - B = A + (-1) B$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A - B = A + (-1) B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.1.5.3. MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $m \times n$, y λ un número.

Entonces $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$.

Ejemplo:

$$\text{Sea } \lambda = 5 \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Entonces } \lambda A = \begin{bmatrix} 5(2) & 5(3) & 5(5) \\ 5(6) & 5(7) & 5(-1) \\ 5(2) & 5(4) & 5(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 30 & 35 & -5 \\ 10 & 20 & -15 \end{bmatrix}$$

1.1.5.4. PRODUCTO DE UN VECTOR FILA POR UN VECTOR COLUMNA

$$\text{Sean: } A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Entonces: } A \times B = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n] = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Ejemplo:

$$A = [4 \quad 8 \quad -2] \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = [4 \quad 8 \quad -2] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = [4(1) + (8)(-2) + (-2)(3)]$$

$$A \times B = [4 + (-16) + (-6)] = [4 - 16 - 6] \quad \text{Por tanto } A \times B = [-18]$$

1.1.5.5. PRODUCTO DE DOS MATRICES

Dos matrices se pueden multiplicar sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas en la otra.

Dada las matrices:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n \times p} \quad \text{y} \quad C = [c_{ij}]_{m \times p}$$

Entonces: $A \cdot B = C$

$$[a_{ij}]_{m \times n} \cdot [b_{ij}]_{n \times p} = [c_{ij}]_{m \times p}$$

La matriz C será de orden m x p

Ejemplo:

Calcular AB si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} [2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & [2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\ [0 \ 1 \ 3] \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [0 \ 1 \ 3] \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & [0 \ 1 \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\ [4 \ 1 \ 5] \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [4 \ 1 \ 5] \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & [4 \ 1 \ 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2(5) + 3(1) + 4(3) & 2(6) + 3(3) + 4(0) & 2(2) + 3(4) + 4(7) \\ 0(5) + 1(1) + 3(3) & 0(6) + 1(3) + 3(0) & 0(2) + 1(4) + 3(7) \\ 4(5) + 1(1) + 5(3) & 4(6) + 1(3) + 5(0) & 4(2) + 1(4) + 5(7) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 25 & 21 & 44 \\ 10 & 3 & 25 \\ 36 & 27 & 47 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

- a) AB no es igual BA (no conmuta)
- b) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- c) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- d) $(B + C) A = B \cdot A + C \cdot A$
- e) $K(A \cdot B) = A \cdot (K \cdot B)$, K es un escalar.

1.1.5.6. POTENCIA DE UNA MATRIZ

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$.

Definiremos:

1. $A^0 = I$ $A^3 = A \cdot A \cdot A$
 $A^1 = A$
 $A^2 = A \cdot A$ $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots}_{n \text{ veces}}$
2. $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$
3. $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$
4. A y B se llaman conmutables $\leftrightarrow AB = BA$

1.2.7 GUÍA DE PROBLEMAS

Operaciones con matrices

1) Si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a-b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b-x & a-x & 4 \end{bmatrix} \text{ es una matriz simétrica}$$

Hallar: $M = A^2 - 4I + 2E$; donde E = matriz escalar, $k=2$

Solución Si A es una matriz simétrica

$$\begin{aligned} \rightarrow a - b &= 2 \dots\dots\dots ① \\ b - x &= -1 \rightarrow \boxed{x = b + 1} \dots\dots\dots ② \\ a - x &= b \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

Reemplazando (2) en (3) tenemos: $a - x = b$
 $a - (b+1) = b$

$$\begin{array}{l} a-b-1 = b \\ \boxed{a-2b-1=0} \dots\dots\dots ④ \end{array}$$

De (1) y (4)

$$\begin{array}{l} \rightarrow -1 (a-b) = (2) (-1) \\ a-2b = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -a+b = -2 \\ a-2b = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -b = -1 \\ \boxed{b=1} \rightarrow \boxed{x=2} \end{array}$$

$$\boxed{a=3}$$

→ la matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Nos piden:

$$M = A^2 - 4I + 2E$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 7 & 14 & 5 \\ -3 & 5 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sumando las tres matrices tenemos:

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 7 & 14 & 5 \\ -3 & 5 & 18 \end{bmatrix}$$

2. Sea A una matriz de 3x3, tal que $A = aI + bD$, en donde D es una matriz, tal que todos sus elementos de la diagonal principal son ceros y todos los demás son unos. Halla "a" y "b" de manera que $A^2 = I$

Solución:

"A" es una matriz de 3x3 →

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pero:

$$A = aI + b.D$$

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

Además: $A^2 = I \rightarrow A.A = I$

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + b^2 + b^2 & 2ab + b^2 & 2ab + b^2 \\ 2ab + b^2 & 2b^2 + a^2 & b^2 + 2ab \\ b^2 + 2ab & b^2 + 2ab & a^2 + 2b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{a^2 + 2b^2 = 1} \dots\dots\dots (1) \quad \wedge \quad 2ab + b^2 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$b(b + 2a) = 0$$

$$\boxed{b = 0} \quad \vee \quad \boxed{b + 2a = 0}$$

En (1): Si $b = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow \boxed{a = \pm 1}$

Si $b = 2a \rightarrow a^2 + 8a^2 = 1$

$$\rightarrow a^2 = \frac{1}{9}$$

$$\rightarrow a = \pm \frac{1}{3}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Escribir un ejemplo de una matriz de orden 2×2 que cumpla con las condiciones siguientes:

- a) Triangular inferior, diagonal y no escalar
- b) Triangular inferior y no diagonal
- c) Triangular inferior y escalar
- d) Simétrica, diagonal y no escalar
- e) Simétrica, escalar y no diagonal
- f) Simétrica y escalar
- g) Simétrica y no escalar
- h) Antisimétrica

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

a)
$$\begin{bmatrix} 2x + y \\ 2x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} x - y & 3u + v \\ x + y & u - 2v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} x^2 & 3y \\ 2u & (v+1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} x - 2 & 0 \\ 1 & y + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & w + 2 \\ 1 - z & 0 \end{bmatrix}$$

3. Consideramos las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{ii.} \quad A &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} -2 & 6 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 8 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- a) Calcular $A \pm B$
 b) Calcular $A^t, B^t, (A \pm B)^t$

4. Consideramos las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcular:

- a) $A + B$ b) $A - B$
 c) $(A + B) + C$ d) $(A - B) + C$

5. Si:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Hallar $2A^t + B^t - 3B$

6. Si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Hallar $A^2 + B, B^2 - A$

7. Dadas las matrices A, B y C, donde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Verificar que $(AB)C = A(BC)$

8. Dadas las matrices A, B y C donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificar que $AC = BC$

9. Si: $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+2y \\ z+w & z \end{bmatrix}$ hallar $x + y + z + w$

10. Hallar a, b, c y d para que satisfaga la ecuación.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

11. Si: $\begin{bmatrix} 2 & b & 1 & d \\ a & -2 & c & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & a & 0 \\ -5 & 7 & 1 & -b \end{bmatrix}$

Hallar el valor de : $m = a + b + c + d$

12. Si: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

Calcular $E = x + y + z$

Hallar $77x - 3y$

13. Hallar x, y, z, si:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

14. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad y \quad C = [1, -2, 3]$$

Si $B^t A = C$, hallar $E = x + y + z$

Autoevaluación

1) Escribe explícitamente las siguientes matrices y halla sus transpuestas.

a) $A = [a_{ij}]_{(3 \times 3)}$ tal que: $a_{ij} = 2^i + j$

b) $B = [b_{ij}]_{(3 \times 4)}$ tal que: $b_{ij} = i - 2j$

2) Sean las matrices cuadradas A y B.

Determina si las siguientes proposiciones son Verdaderas (V) o Falsas (F).

- a) Toda matriz tiene un valor numérico.
- b) $A = B$ si y sólo si tienen el mismo orden.
- c) Una matriz diagonal es también escalar (da un ejemplo).
- d) Una matriz transpuesta es siempre una matriz cuadrada (da un ejemplo).

3) Halla los elementos de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} y+1 & 0 & z^2+x-3 \\ y-x-1 & z+3 & 0 \\ 0 & 2x-z-3 & x+2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & a-b & -1 \\ 2 & 0 & b \\ b-x & x-a & 0 \end{bmatrix}$$

donde A es una matriz escalar y C una matriz antisimétrica.

4) Halla los elementos de la siguiente matriz, Si :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 19 & y-12z \\ 10x-9z & 6 & 10 \\ 10 & 8x-y & 5 \end{bmatrix} \text{ es una matriz simétrica.}$$

BIBLIOGRAFIA:

Espinoza Ramos, Eduardo	Matrices y Determinantes	J.J Servicios	Lima	2005
Lázaro, Moisés Vera, Carlos	Algebra Lineal	Colección Moshera	Lima	2004
http://descartes.cnice.mec.es www.eneayudas.cl/geomanal.html				

MATRICES Y DETERMINANTES

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos aplicando las propiedades de las operaciones con matrices y de la clasificación de matrices, resuelven problemas de operaciones con matrices y calculan la determinante de una matriz.

TEMARIO

- Determinante:
 - Definición
 - Orden 2 y 3
 - Propiedades
- Inversa de una matriz:
 - Propiedades

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Calcula determinantes de matrices cuadradas de orden 2 y 3.
- Halla la inversa de una matriz, con el método del determinante.

1.2. DETERMINANTES

DEFINICIÓN

Se llama determinante de una matriz cuadrada a un número real asociado a dicha matriz.

1.2.1 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN DOS

Se llama determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Al número real asociado a ella, denotado por $\det(A)$ o por $|A|$

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ y se define como sigue:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

entonces $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Ejemplo (1)

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Entonces de $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (2 \times 6 - 3 \times 5) = 12 - 15 = -3$

$\rightarrow \boxed{\det(A) = -3}$

Ejemplo (2)

Si $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Entonces $|B| = 2 - 3 = -1$

Luego $|B| = -1$

TEOREMA

La matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ tiene inversa A^{-1}

Si y solo si $|A|$ no es igual a CERO

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

Solución:

i) Cálculo de la determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 2(6) - (-1)(3) = 12 + 3 = 15$$

ii) Cálculo de la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \text{ vemos que : } \begin{cases} a_{22} = 6 \\ a_{21} = -1 \\ a_{11} = 2 \\ a_{12} = 3 \end{cases}$$

Luego, reemplazando valores tenemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -(-1) & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6/15 & -3/15 \\ 1/15 & 2/15 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/15 & 2/15 \end{bmatrix}$$

1.2.2 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE TERCER ORDEN**1.2.2.1 MENOR COMPLEMENTARIO**

El menor complementario de un elemento de una matriz de tercer orden es el determinante de la matriz cuadrada de segundo orden, que se obtiene después de borrar la fila i y la columna j .

Al menor complementario de a_{ij} denotaremos M_{ij} .

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

- * El menor complementario M_{11} de a_{11} se obtiene eliminando la primera fila y la primera columna de la matriz A :

$$\text{Así: } M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow M_{11} = (6)(5) - 7(2) \\ M_{11} = 30 - 14 = 16 \rightarrow M_{11} = 16$$

- ** El menor complementario M_{12} de a_{12} se obtiene eliminando la primera fila y la segunda columna de A :

$$\text{Así: } M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow M_{12} = - (2(5) - 5(2))$$

$$M_{12} = -(10 - 10)$$

$$\boxed{M_{12} = 0}$$

- *** El menor complementario M_{13} de a_{13} se obtiene eliminando la primera fila y la tercera columna de A :

$$\text{Así: } M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow M_{13} = 2(7) - 6(5)$$

$$M_{13} = 14 - 30$$

$$\boxed{M_{13} = -16}$$

Nota:

Obsérvese que los menores complementarios M_{ij} de a_{ij} son números, debido a que están definidas como determinantes de submatrices de A .

1.2.2.2 COFACTOR DE UN ELEMENTO DE UNA MATRIZ

El cofactor de una componente de a_{ij} es denotado por A_{ij} y esta definida por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Ejemplo: Sea la matriz $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

El cofactor correspondiente a $a_{11} = 1$ es $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$

El cofactor correspondiente a $a_{12} = 3$ es $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$

El cofactor correspondiente a $a_{13} = 4$ es $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}$

DEFINICIÓN

Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz A es un número real denotado por $\det(A)$ o $|A|$ y es igual a la suma algebraica de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos cofactores.

Es decir:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$|A| = a_{11}M_{11} + a_{12}(-M_{12}) + a_{13}M_{13}$$

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Ejemplo:

1. Calcular el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Det (A)} = |A| &= 4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ |A| &= 4[2(5) - 1(-3)] - 7[(-2)5 - 3(-3)] + 6[(-2)(1) - (3)(2)] \\ |A| &= 4(10 + 3) - 7[-10 + 9] + 6[(-2) + (-6)] \\ |A| &= 4(13) - 7(-1) + 6(-8) \\ |A| &= 52 + 7 - 48 \\ |A| &= 11 \end{aligned}$$

1.2.3. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

- i. Si se intercambian las filas de una matriz, el determinante cambia de signo, es decir, $|B| = -|A|$

- ii. Al multiplicar todos los elementos de una fila por un mismo número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\text{Es decir } |B| = k|A|$$

- iii. Si a una fila se le suma un múltiplo de otra fila, el determinante no cambia su valor.

$$\text{Es decir: } |B| = |A|$$

- iv. El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de los cofactores .

En general:

$$\text{Para matrices } \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B} \text{ de orden } n \text{ se cumple que: } |A \cdot B| = |A| |B|$$

1.2.4 MATRIZ DE COFACTORES

Consideremos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Si sustituimos cada elemento de A por su cofactor, obtenemos una matriz que denotamos por

$$\text{Cofact } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

al cual llamaremos matriz de cofactores.

1.2.4.1 MATRIZ ADJUNTA

A la transpuesta de la matriz de cofactores de A llamaremos matriz adjunta de A.

Es decir:

$$\underbrace{[\text{Cofact}(A)]^t}_{\text{Adj}(A)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz adjunta de A = adj(A) = [cofactor(A)]^T

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

1.2.5 MATRIZ INVERSA

Consideremos una matriz A, si |A| ≠ 0. Entonces, a la inversa de la matriz A la definiremos de la siguiente manera:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{|A|} (\text{Cofact } A)^T$$

Ejemplo:

Obtener la inversa de la matriz A si existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$|A| = 1(35 - 18) - 2(28 - 30) + 3(12 - 25)$$

$$|A| = 17 - 2(-2) + 3(-13)$$

$$|A| = 17 + 4 - 39$$

$$|A| = -18$$

Como $|A| \neq 0$, entonces existe inversa calculando la matriz de cofactores:

$$\text{Cofact}(A) = \begin{bmatrix} 17 & 2 & -13 \\ -5 & -8 & 7 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 17 & -5 & -3 \\ 2 & -8 & 6 \\ -13 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Nos piden:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} 17 & -5 & -3 \\ 2 & -8 & 6 \\ -13 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -17/18 & 5/18 & 1/6 \\ -1/9 & 4/9 & -1/3 \\ 13/18 & -7/18 & 1/6 \end{bmatrix}$$

1.2.5.1 Propiedades de la matriz inversa

1. La matriz inversa es única
2. A tiene inversa si y sólo si $|A| \neq 0$
3. La inversa de una matriz inversa de la matriz original:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

4. La inversa del producto de un número por una matriz, es igual al recíproco del número por la inversa de la matriz.

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

5. La inversa del producto de dos matrices es igual al producto de las inversas de los factores, pero con el orden cambiado:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

6. La inversa de la potencia “n” de una matriz es igual a la potencia “n” de la inversa de dicha matriz:

$$\boxed{(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n}$$

1.2.5.2 PROPIEDADES

Si “A” es una matriz cuadrada de orden n, tal que $|A| \neq 0$, entonces:

- a) $|\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$
- b) $\text{Adj}(\text{Adj}(A)) = |A|^{n-2} \cdot A$
- c) $\text{Cofact}[\text{Cofact}(A)] = |A|^{n-2} \cdot A$
- d) $\text{Cofact}[\text{Adj}(A)] = \text{Adj}[\text{Cofact}(A)]$

1.2.6 GUÍA DE PROBLEMAS

Determinante e Inversa de una Matriz

Ejercicios resueltos

- 1) Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 \\ -2 & y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & z \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{Si } A+B \text{ es Antisimétrica}$$

$$\text{Hallar: } |A^{-1} \cdot B^t|$$

Solución:

$$A + B = \begin{bmatrix} x-3 & z+4 \\ 2 & y-8 \end{bmatrix}$$

- 1) Por dato $(A+B)$ Antisimétrica $\rightarrow x=3, y=8, z=-6$

- 2) Luego:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 24 - (-8) = 32$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{32} \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^{-1} \cdot B^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego: } |A^{-1} \cdot B^t| = -3/2$$

2) Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a-b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b-x & a-x & 4 \end{bmatrix} \text{ es una matriz simétrica}$$

$$\text{Hallar: } |A|^{-1}$$

Solución: Si A es una matriz simétrica

$$a - b = 2 \dots\dots\dots(1)$$

$$\rightarrow b - x = -1 \dots\dots\dots(2) \quad \rightarrow \boxed{x = b + 1} \dots\dots\dots(*)$$

$$a - x = b \dots\dots\dots(3)$$

Reemplazando (*) en (3)

$$a - (b + 1) = b$$

$$a - b - 1 = b$$

$$\boxed{a - 2b = 1} \dots\dots\dots(4)$$

De (1) y (4) tenemos:

$$\begin{array}{rcl} a - b = 2 & \rightarrow & -a + b = -2 \\ a - 2b = 1 & & \underline{a - 2b = 1} \\ & & -b = -1 \\ & & \underline{b = 1} \rightarrow \underline{a = 3} \end{array}$$

$$\text{en (*) } \boxed{x=2}$$

Luego, la matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Nos pide: $|A|^{-1}$

$$\Rightarrow |A| = 1(12 - 1) - 2(8 + 1) + (-1)(2 + 3)$$

$$|A| = 11 - 18 - 5$$

$$|A| = -12 \quad \text{Por tanto} \quad \Rightarrow \quad |A|^{-1} = \frac{-1}{12}$$

- 3) Sea "A" una matriz de orden 2 cuyo determinante es igual a 4. La diferencia entre la suma de los elementos de la diagonal principal y la suma de los elementos de la diagonal secundaria es 8. Si se suma "x" a cada elemento de la matriz "A", entonces el valor de su determinante es igual a (-4). Calcula el valor de "x".

Solución:

I) Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 4$

Luego : $\boxed{a \cdot d - cb = 4}$

II) $\boxed{(a+d) - (c+b) = 8}$

III) $B = \begin{bmatrix} a+x & b+x \\ c+x & d+x \end{bmatrix} \rightarrow |B| = -4$

Luego: $(a+x)(d+x) - (c+x)(b+x) = -4$

$$ad + ax + xd + x^2 - cb - cx - xb - x^2 = -4$$

$$(ad - cb) + x(a+d - b - c) = -4$$

$$4 + 8x = -4$$

$$8x = -8$$

$$\boxed{x = -1}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla la matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

2. Halla la matriz inversa de $B = \begin{bmatrix} x \cos a & -\operatorname{sena} \\ x \operatorname{sena} & \cos a \end{bmatrix}$

3. Halla la traza de la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

4. Hallar x si la traza de A es 10, de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & x & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Si: $A = \begin{bmatrix} k-1 & 3 & -3 \\ -3 & k+5 & -3 \\ -6 & 6 & k+4 \end{bmatrix}$ halla el valor de "k" de manera que $|A| = 0$

6. Si: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ k & k+2 & k-2 \\ 4 & k & 8 \end{bmatrix}$ halla el valor de "k" de manera que $|A| = 0$

7. Dada la matriz

$$\operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & k & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad |A| = 2,$$

Determinar "k" y "A"

8. Resuelve: $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$

Autoevaluación

1) Sean A y B matrices cuadradas tales que $AB = I$

$$\text{Si } |A| = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ a & 6 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}, \text{ halla } |B| = ?$$

2) Dada cuatro matrices A, B, C y D tales que:

$$C^{-1} = B^{-1}A \quad \text{y} \quad D^{-1} = AC \quad \text{siendo} \quad B^T = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{hallar la matriz D.}$$

- 3) Halla el determinante de $(X^T + Y^T)$ si $X - 2Y = A2 \dots\dots (I)$
 $2X + 3Y = B-1 \dots\dots (II)$

Siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix}$

PROBLEMAS SELECTOS DE MATRICES

1. Si : $M = \begin{bmatrix} 1 & b-a & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2a-b & 2 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica y N una matriz escalar con

$k = a + b$, halla la matriz $P = M^2 - abN$

2. Si : $M = \begin{bmatrix} 0 & a+b & 1 \\ -3 & 0 & 2b-a \\ -1 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz antisimétrica y $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b^2 & -b & 0 \end{bmatrix}$,

halla la matriz $P = M.N - 3I$

3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & \end{pmatrix}$$

Halle la traza de: $3Ax - 4A^T + 3I$

4. Una compañía tiene cuatro fábricas, cada una cuenta con Administradores, Supervisores y Obreros calificados en la siguiente forma:

Puestos	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4
Administradores	2	1	3	2
Supervisores	4	6	5	3
Obreros	80	70	100	60

- a-) Si los administradores ganan \$500, los supervisores \$300 y los obreros \$200, establecer la matriz SUELDO vs. FÁBRICA e indicar la planilla de cada fábrica .
- b-) Si se incrementan los sueldos de todos los trabajadores en un 30%, establecer la nueva matriz SUELDO vs. FÁBRICA e indicar la nueva planilla.

5. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} y & x \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determina $A+C$, si $A = B$.

6. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ se le pide que:

a) Halle la matriz $M = 3.A^t.A - 2I$

b) Halle la matriz X de: $X.M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Sean las matrices A y B. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones :

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla $(AB)^{-1}$.

8. Sean las matrices:

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 2}, \text{ donde } a_{ij} = 3i + j \quad \text{y} \quad B = [b_{ij}]_{2 \times 2}, \text{ donde } b_{ij} = \begin{cases} i + j, & i < j \\ i - 2j, & i \geq j \end{cases}$$

Si $B^2 X = 4A^T$, halla $|X|$.

9. Sean las matrices :

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 2} \text{ donde } a_{ij} = \max(i, j), \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

halla $|X|$, si se sabe que : $XB = 2C + A^T$

10. Sean las matrices :

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 2} \text{ donde } a_{ij} = \min(i, j), \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

halla $|X|$, si se sabe que : $XC = 2B + 4A^T$

BIBLIOGRAFIA:

Espinoza Ramos, Eduardo	Matrices y Determinantes	J.J Servicios	Lima	2005
Lázaro, Moisés Vera, Carlos	Algebra Lineal	Colección Moshera	Lima	2004

<http://descartes.cnice.mec.es>
www.eneayudas.cl/geomanal.html

**UNIDAD DE
APRENDIZAJE****2****SEMANA****3**

GEOMETRÍA ANALÍTICA

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos utilizando diferentes métodos, deducen la ecuación de la recta, circunferencia y parábola, con ayuda del docente y utilizando el plano cartesiano construye gráficos que servirán para la resolución de ejercicios y problemas, también señala la pendiente recta y elementos básicos de la circunferencia y la parábola.

TEMARIO

- El plano cartesiano:
 - Regiones en el plano
 - Distancias entre dos puntos, Perímetros y áreas
 - Punto medio de un segmento
 - Angulo de inclinación de la recta
 - Pendiente de una recta

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Calcula la distancia entre dos puntos y lo grafica en el plano cartesiano.
- Calcula perímetros y áreas tanto analítica como geométricamente.
- Calcula la pendiente de la recta en forma analítica y geométrica.

2.3 EL PLANO CARTESIANO

2.3.1 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Es

X	Y
-3	-5
0	1
$\frac{1}{2}$	2

aquel que posee dos ejes de coordenadas que se cortan formando un ángulo de 90° al eje horizontal. A éste se le denomina abscisa (x) y al eje vertical ordenada (y). En este sistema cada punto tiene dos elementos abscisa y ordenada

Ejercicios Propuestos

1. Grafique los siguientes puntos en un plano cartesiano.

A (2,1)

C $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

B $(\sqrt{2}, -3)$

D $(2, -\sqrt{2})$

2. Grafique las siguientes funciones evaluando los valores de X indicados (tabla de valores)

a) $y = 2x + 1$

b) $y = -3x + 1$

c) $y = x^2 + 1$

Ejemplo:

Gr $y = 2x + 1$

utilizando los valores de X dados en la tabla.

X	Y
-3	
0	
$\frac{1}{2}$	

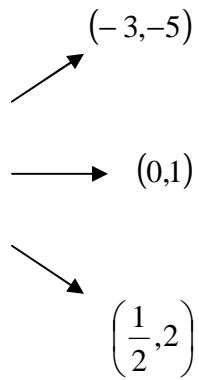
-3

$$y = 2x + 1 \rightarrow y = 2(-3) + 1 = -6 + 1 = -5$$

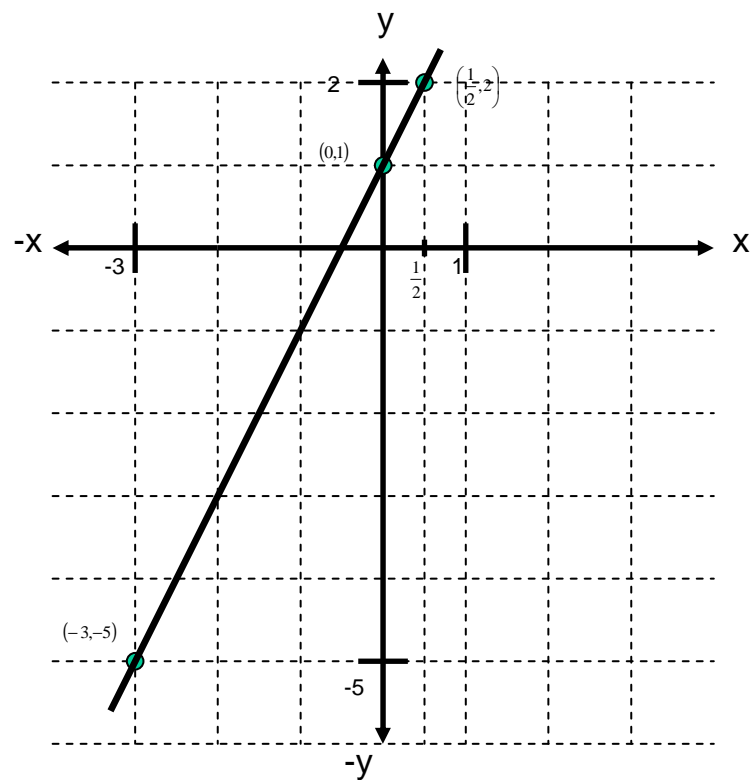
Evaluando $x =$

Evaluando en $x = 0$

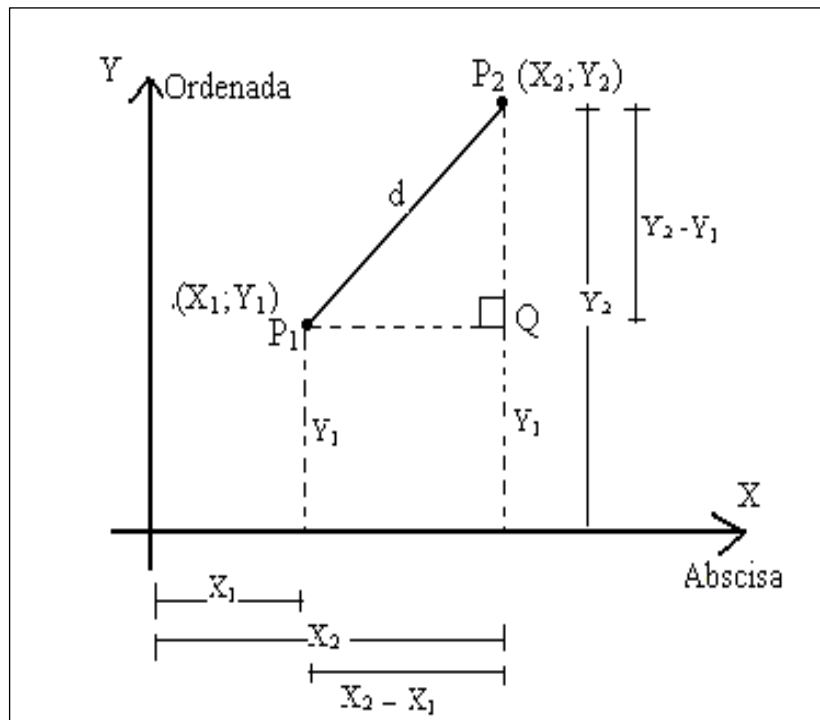
Al completar la tabla con los valores, queda de la siguiente manera:



Al graficar los puntos obtenidos, podemos esbozar la gráfica de la ecuación en los valores indicados.



2.3.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



El $\triangle P_1QP_2$ es recto en Q. Entonces, aplicando Teorema de Pitágoras a dicho triángulo, obtenemos: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ de donde: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, d = distancia entre los puntos P_1 y P_2 .

Ejemplo:

1. Calcule la distancia entre los puntos $P = (3; 5)$ y $Q = (-3; -3)$.

Solución:

$$d_{\overline{QP}} = \sqrt{(3+3)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$d_{\overline{PQ}} = d_{\overline{QP}} = 10$$

2. Demuestre que el triángulo con vértices en $A = (-2, 4)$, $B = (-5, 1)$ y $C = (-6, 5)$ es isósceles.

Solución:

Demostraremos que el \triangle tiene dos lados iguales.

$$a) d_{\overline{AB}} = \sqrt{(-2+5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$d_{\overline{AB}} = 3\sqrt{2}$$

$$b) d_{\overline{BC}} = \sqrt{(-5+6)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2}$$

$$d_{\overline{BC}} = \sqrt{17}$$

$$c) d_{\overline{AC}} = \sqrt{(-2+6)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$d_{\overline{BC}} = d_{\overline{AC}} = \sqrt{17}$$

$\therefore \Delta_{ABC}$ es isósceles.

3.- Calcule la distancia entre los siguientes puntos.

- a) A (2, 7) y B (-2, 4)
- b) T (-2, 5) y R (4,-3)
- c) M (4, 0) y N (11, $\sqrt{5}$)
- d) L (0,4) y S ($-\sqrt{11}$, 9)
- e) S ($\sqrt{5}$, 1) y Q ($-\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$)
- f) W (4,1) y Z (-6, 21)

4.- Calcule el perímetro y el área del polígono cuyos vértices son los puntos:

- a) A(4,1) , B(7, 1) , C(9, 3) , D(7, 5) , E(4, 5) y F(2, 3)
- b) $P_1(2,-5)$, $P_2(9,-5)$, $P_3(11,-1)$, $P_4(9,3)$, $P_5(2,3)$ y $P_6(0,-1)$

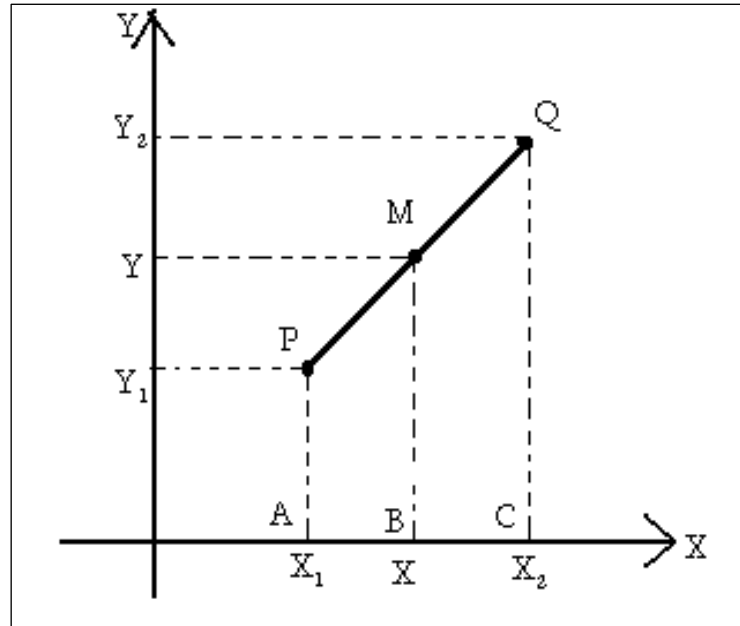
Ejercicios Propuestos

- Demuestre que el triángulo con vértices en A (3, -6), B (8, -2) y (-1, -1) es un triángulo rectángulo. (Sugerencia: Recuerde el teorema que deben satisfacer las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo)
- La distancia entre A y B es de 5 unidades. Si A (7; 1), B (3; y), entonces ¿Cuál es el producto de los valores de "y"?
- F es el punto simétrico de (5,2) respecto al origen; A es el punto simétrico de (2;-6) respecto al eje X; C es el punto simétrico de (4; 3) respecto al eje Y. Si p es el perímetro del triángulo FAC, entonces el valor numérico de la expresión es:
- Si M (k, $(p - \sqrt{113})^2 - 1 + k$) es un punto que equidista de R(2,1) y T(-6,5). Halla el valor de k.

5. Si $M(k, 1+k)$ es un punto que equidista de $R(2,1)$ y $T(-6,5)$. Halla el valor de k .

2.3.4 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Nuestro objetivo es hallar las coordenadas X e Y del punto M ubicado a igual distancia de los extremos P y Q del segmento \overline{PQ} .



Para el caso, digamos que se trata de los puntos:

$$P(x_1; y_1), \quad Q(x_2; y_2), \quad M(x, y)$$

Obtención de la Abscisa X de M :

- a. Por los puntos P , M y Q tracemos perpendiculares al eje X .
($\overline{PA} \parallel \overline{MB} \parallel \overline{QC}$ por ser perpendiculares a una misma recta).

- b. Aplicando el teorema de Thales se tiene:

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{AB}{BC}, \text{ pero como } M \text{ es un punto medio, } PM = MQ.$$

$$\text{Entonces,} \quad 1 = \frac{AB}{BC}$$

- c. Observamos que $\overline{AB} = X - X_1$, $\overline{BC} = X_2 - X$. Sustituyendo en 2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = 1 \quad \Leftrightarrow x - x_1 = x_2 - x \quad \Leftrightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por igual procedimiento se demuestra que la ordenada "y" de M es $Y = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$ **(Queda como ejercicio para los alumnos)**

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio de un segmento de extremos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ son: **P (x, y)**, donde

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplos:

1. Halle el punto medio (coordenadas) de los puntos A (-8,-2) y B (4,8)

Solución:

Se tiene que:

$$x = \frac{-8 + 4}{2} = -2 \quad y = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

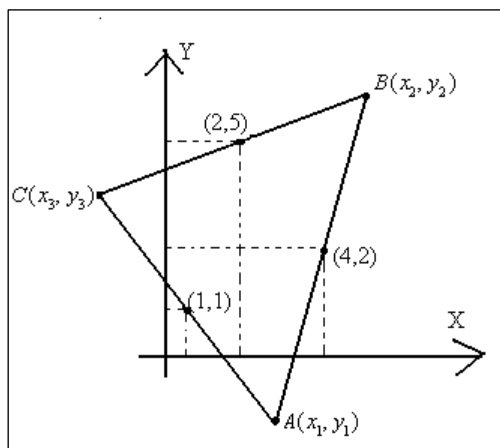
$$\therefore P = (-2, 3)$$

2. Los puntos medios de los lados de un triángulo son: P (2,5), Q (4,2), R (1,1).

Halle las coordenadas de los tres vértices.

Solución:

Se tiene la gráfica:



P = punto medio de \overline{CB}

$$2 = \frac{x_3 + x_2}{2} = x_2 + x_3 = 4 \dots\dots\dots(1)$$

$$5 = \frac{y_2 + y_3}{2} = y_2 + y_3 = 10 \dots\dots\dots(2)$$

Q = punto medio de \overline{AB}

$$4 = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + x_2 = 8 \dots\dots\dots(3)$$

$$2 = \frac{y_1 + y_2}{2} = y_1 + y_2 = 4 \dots\dots\dots(4)$$

R = punto medio de \overline{AC} :

$$1 = \frac{x_1 + x_3}{2} = x_1 + x_3 = 2 \dots\dots\dots(5)$$

$$1 = \frac{y_1 + y_3}{2} = y_1 + y_3 = 2 \dots\dots\dots(6)$$

(1)-(5)

$$x_2 - x_1 = 2$$

$$\underline{x_2 + x_1 = 8}$$

$$2x_2 = 10$$

$$x_2 = 5 \quad , \quad x_3 = -1 \quad , \quad x_1 = 3$$

(2)-(6):

$$y_2 - y_1 = 8$$

$$\underline{y_2 + y_1 = 4}$$

$$2y_2 = 12$$

$$y_2 = 6 \quad , \quad y_1 = -2 \quad , \quad y_3 = 4$$

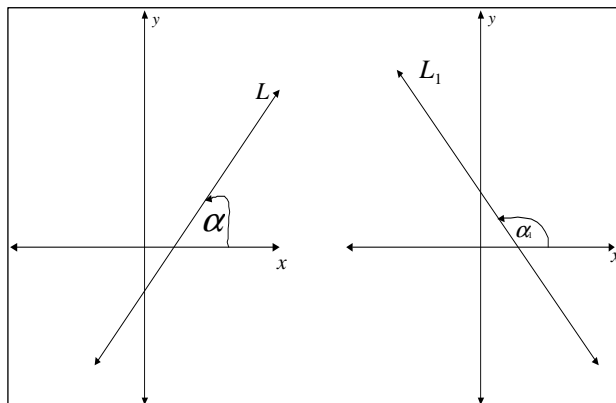
Luego:

$$A (3,-2) \quad , \quad B = (5,6) \quad y \quad C = (-1,4)$$

ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE UNA RECTA

Dada una recta “ L ” ubicada en el plano cartesiano, se llama ángulo de inclinación de una recta, al ángulo que forma dicha recta respecto a la horizontal (eje x), medido en sentido antihorario.

Así, en los gráficos siguientes, α y α_1 son los ángulos de inclinación de las rectas L y L_1 respectivamente.



El ángulo de inclinación α (alfa) de cualquier recta está comprendido entre 0° y 180° .

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

Si la recta es paralela al eje x, su ángulo de inclinación es 0° .

Si la recta es perpendicular al eje x, su ángulo de inclinación es 90° .

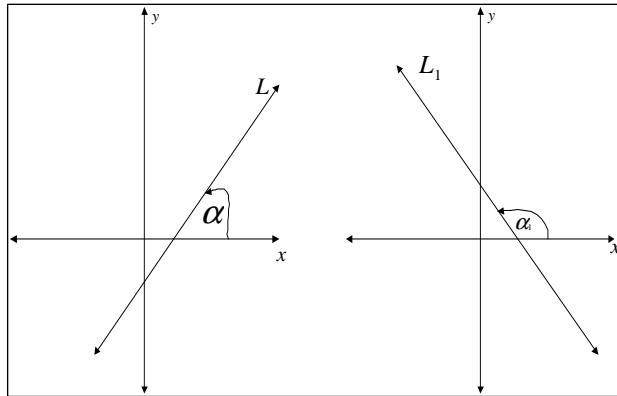
En forma particular:

2.3.5 Pendiente de una recta

La pendiente de la recta L se denota con la letra m y su valor está dado por la función tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación α .

$$m = \tan \alpha$$

NOTAS IMPORTANTES SOBRE PENDIENTES



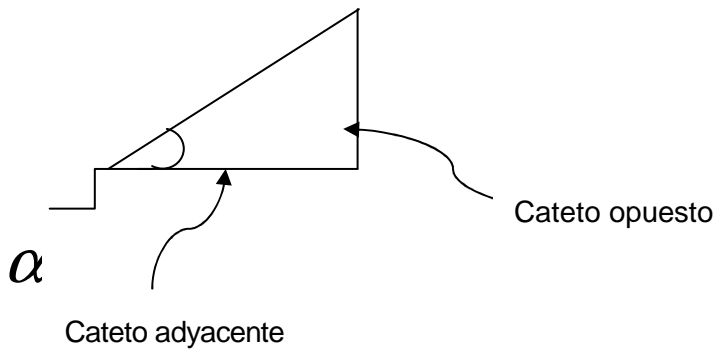
1. Si $\alpha = 37^\circ$ entonces la pendiente de la recta L es $m = \text{tg}(37^\circ) = \frac{3}{4}$
2. Si $\alpha = 127^\circ$ entonces la pendiente de la recta L_1 es $m_1 = \text{tg}(127^\circ) = \text{tg}(180^\circ - 53^\circ)$

$$m_1 = -\text{tg}(53^\circ) = -\frac{4}{3}$$

3. Si $\alpha = 120^\circ$ entonces la pendiente de la recta L_2 es $m_2 = \text{tg}(120^\circ) = \text{tg}(180^\circ - 60^\circ)$

$$m_2 = -\text{tg}(60^\circ) = -\sqrt{3}$$

4. Si $\alpha = 30^\circ$ entonces la pendiente de la recta L_3 es $m_3 = \text{tg}(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \quad ; m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance o recorrido}}$$

Ejercicios Propuestos

- Encuentre la longitud y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos dados.
 - $A = (-1, 5)$ $B = (2, -3)$
 - $E = (0, -1)$ $D = (-3, -1)$
 - $Q = (-2, 1)$ $W = (-2, 0)$
- Encuentre los puntos medios de los lados del cuadrado si los puntos $A = (0, 1)$ $B = (3, 5)$ $C = (7, 2)$ $D = (4, -2)$ son sus vértices. También halle el área del cuadrado construido con sus puntos medios.
- Dos vértices de un triángulo equilátero son $A = (-1, 1)$ $B = (3, 1)$. Encuentre las coordenadas del tercer vértice. (Recuerde tomar en cuenta ambos casos).
- El punto medio de un segmento es $M = (-1, 2)$ y uno de sus extremos es $N = (2, 5)$, encuentre las coordenadas del otro extremo.
- Encuentre las coordenadas de los extremos de A y B de un segmento, que se divida en tres partes iguales por los puntos P (2; 2) y Q(1,5).
- ¿Hasta qué punto debe prolongarse el segmento que une a $A = (1, -1)$ y $B = (4, 5)$ en la dirección de AB para que su longitud se triplique?
- En el triángulo rectángulo con vértices en los puntos $A(-2, 2)$, $B(4, 5)$ y $C(6.5, 0)$. Calcule el valor de k, si $k = AC/BM$. M está en AC y BM es la mediana relativo al vértice B.
- El área de un triángulo es $6u^2$, dos de sus vértices son: $A(3, 1)$ y $B(1, -3)$, si el tercer vértice C está en el eje Y. Hallar las coordenadas del vértice C.
- Hallar el área del triángulo formado por los ejes coordenados: X, Y y la recta $L: 5x + 4y - 2 = 0$. Construya su gráfica en cada caso

Autoevaluación

1. Halla la longitud de cada segmento cuyos extremos son los puntos siguientes:

- | | | |
|----------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| a) A(-3;2) y B(5;2) | b) E(-2;-1) y F(3;4) | c) P(6;4) y Q(8;2) |
| d) R(-2;-1) y S(7;3) | e) $M(0; \frac{1}{2})$ y N(9; 0) | f) T(2,5; 8) y $k(-3; \frac{3}{4})$ |

2. Se sabe que $|EF| = 6$ siendo E(x;2) ,F(5;8) y que $|CD| = 8$ cuando C(-3;4), D(5;y).

Entonces el valor de $\sqrt[3]{2x(3y)}$ es:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| a) $2\sqrt[3]{15}$ | b) $3\sqrt[3]{15}$ | c) $\sqrt[3]{15}$ | d) $4\sqrt[3]{15}$ |
|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|

3. Conociendo que $|PQ| = \sqrt{72}$; P(2;y) ,Q(8;7) y que $|RS| = 5\sqrt{2}$; R(x;-1) ,S(5;-2). el producto del mayor valor de “y” por el menor valor de x, es:

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| a) -24 | b) -18 | c) -12 | d) -26 |
|--------|--------|--------|--------|

4. Los vértices del Δ EFG son E (4; 3), F (6;-2), G (-11;-3). Por tanto el triángulo es:

- | | | | |
|--------------|----------------|---------------|---------------|
| a) Isósceles | b) obtusángulo | c) equilátero | d) rectángulo |
|--------------|----------------|---------------|---------------|

5. \overline{AC} es la base del Δ isósceles ABC cuyos vértices son A (-8;-1), B (6; 7), C (-2; y). Si C pertenece al II cuadrante, entonces la distancia de C al origen es:

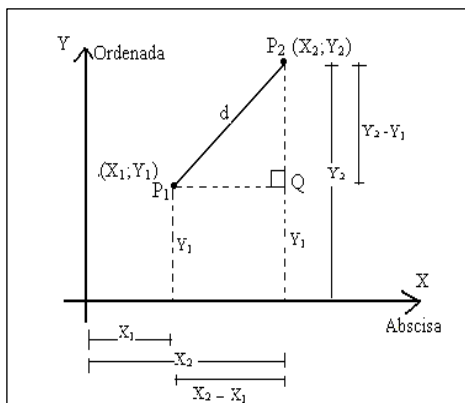
- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $\sqrt{445}$ | b) $\sqrt{443}$ | c) $71 + 6\sqrt{130}$ | d) $41 + 4\sqrt{127}$ |
|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|

6. El valor de x para que los puntos K(-2 ;5), T(1; 3), Q (x ;-1) sean colineales es:

- | | | | |
|------|--------|--------|------|
| a) 8 | b) 6,8 | c) 7,2 | d) 7 |
|------|--------|--------|------|

RESUMEN

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



El $\triangle P_1QP_2$ es recto en Q, Entonces, aplicando Teorema de Pitágoras a dicho triángulo,

obtenemos: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ de donde: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,

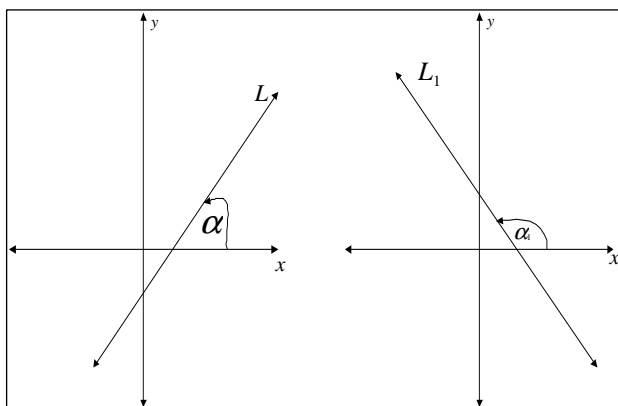
d = distancia entre los puntos P_1 y P_2 .

punto medio de un segmento :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Pendiente de una recta: $m = \tan \alpha$

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$



BIBLIOGRAFIA:

Lehman, Charles	Geometría Analítica	Editorial LIMUSA	USA	2001
LARSON Roland; HOSTETLER Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001

**UNIDAD DE
APRENDIZAJE****2****SEMANA****4**

ECUACIONES DE LA RECTA

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos, utilizando diferentes métodos, deducen la ecuación de la recta, circunferencia y parábola, con ayuda del docente y utilizando el plano cartesiano construyen gráficos que servirán para la resolución de ejercicios y problemas, también señalan la pendiente recta y elementos básicos de la circunferencia y la parábola.

TEMARIO

- **Ecuación de la recta :**

Forma general, punto pendiente y que pasa por dos puntos

Angulo de inclinación de una recta

Distancia de un punto a una recta

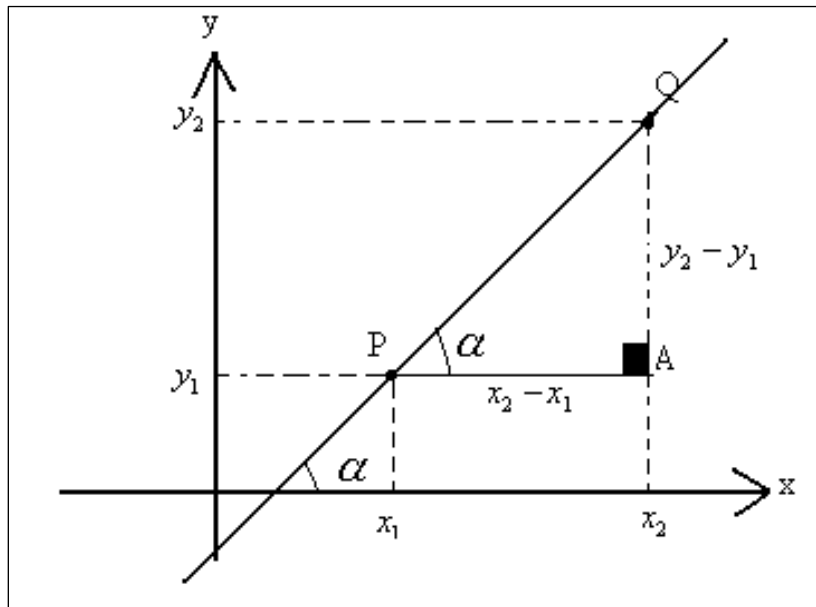
ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Halla las diferentes formas de la ecuación de la recta.
- Encuentra el ángulo que forman dos rectas.
- Halla la distancia de un punto a una recta

2.4.1 Pendiente de una recta conociendo dos puntos

La pendiente m de una recta L que pasa por los puntos

$$P_1(x_1, y_1) \text{ y } P_2(x_2, y_2) \text{ es el número: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Por los puntos P y Q de L tracemos paralelas a los ejes X e Y .

En el triángulo rectángulo PAQ : $\angle QPA = \alpha$
(\angle correspondientes)

Demostración

$$QA = y_2 - y_1 \quad ; \quad AP = x_2 - x_1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{QA}{AP} \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

Determine la pendiente de una recta que pasa por los puntos $P_1(1,2)$ y $P_2(-3,4)$.

Aplicando la fórmula de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

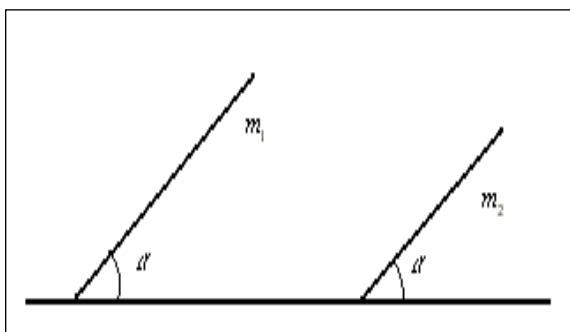
$$m = \frac{4-2}{-3-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}; m = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

2.4.1.1 Rectas paralelas

Si dos rectas son paralelas, entonces tiene igual pendiente.

Si las pendientes de dos rectas son iguales, entonces son paralelas.

Así:



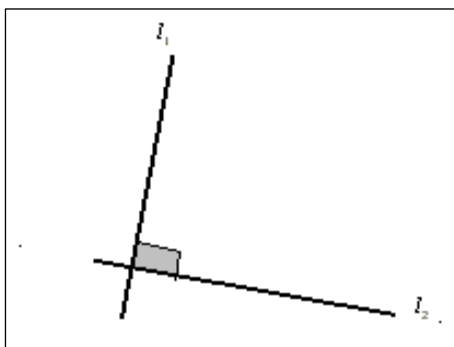
$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

2.4.1.2 Rectas perpendiculares

Si dos rectas son perpendiculares entonces el producto de sus pendientes es -1 .

Si el producto de las pendientes de dos rectas es -1 , entonces las rectas son perpendiculares.

Así:



$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

Ejemplo:

Se definen 2 pares rectas $\left\{ \begin{array}{l} L1: (1,3) \text{ y } (2,5) \\ L2: (3,11) \text{ y } (-4,-3) \end{array} \right\}$ y $\left\{ \begin{array}{l} L3: (-2,3) \text{ y } (4,9) \\ L4: (0,2) \text{ y } (2,0) \end{array} \right\}$

Determine que rectas son paralelas y en cuales son perpendiculares.

Calculamos las pendientes de L1 y L2.

$$mL1 = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2 \quad mL2 = \frac{-3-11}{-4-3} = \frac{-14}{-7} = 2$$

Las pendientes de ambas rectas son iguales. Luego, cumplen con la condición de paralelismo (L1 y L2 son rectas paralelas).

Ahora, calculamos las pendientes de L3 y L4.

$$mL3 = \frac{9-3}{4-(-2)} = \frac{6}{4+2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$mL4 = \frac{0-2}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$$

Las pendiente de las rectas

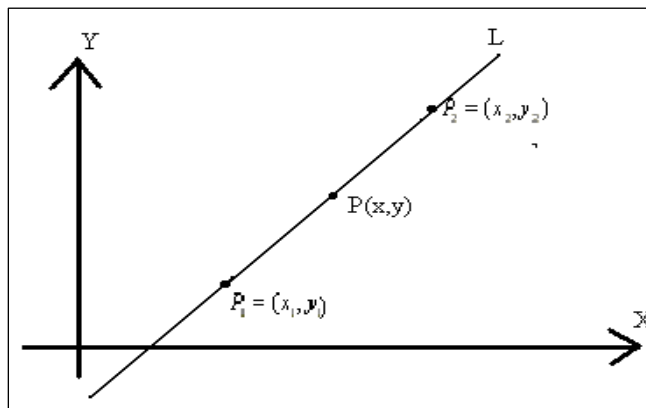
no son iguales, pero su producto es -1. Luego, cumplen con la condición de Perpendicularidad (L3 y L4 son perpendiculares).

2.4.2 ECUACIONES DE UNA RECTA

Es el conjunto de puntos que cumplen con la misma regla de correspondencia lineal.

2.4.2.1 CONOCIENDO DOS PUNTOS

DATOS:



$$P_1 = (x_1, y_1) \quad , \quad P_2 = (x_2, y_2)$$

Por división de segmento con una razón dada: $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r$ luego:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \dots\dots\dots(1)$$

y

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \dots\dots\dots(2)$$

Igualando ambas ecuaciones (1) = (2): $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$

y resolviendo, obtenemos la ecuación: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

que llamamos ecuación Punto-Punto.

Ejemplos:

1. Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,3) y (2,5).

Solución:

Ya que conocemos 2 puntos de la recta, podemos utilizar la ecuación Punto-Punto.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Para aplicar esta ecuación, debemos escoger cuál de los puntos será $P1 : (x_1, y_1)$ y $P2 : (x_2, y_2)$. Recordemos que es irrelevante cuál sea P1 y cual P2 a nivel del resultado.

$$P1 : (1,3) \quad P2 : (2,5)$$

$$y - 3 = \frac{5 - 3}{2 - 1}(x - 1) \longrightarrow y - 3 = \frac{2}{1}(x - 1) \longrightarrow y = 2x + 1$$

2. Dado el trapecio A (-4,-2), B (8,2), C (4,6) y D (-2,4). Halle las ecuaciones de sus diagonales. (figura A)

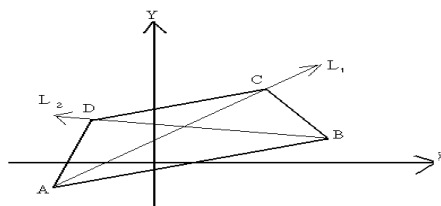


Figura A

Solución:

Primero, calcularemos la ecuación de AC.

$$P_1 : (-4, -2) \text{ y } P_2 : (4, 6)$$

$$y - (-2) = \frac{6 - (-2)}{4 - (-4)}(x - (-4)) \longrightarrow y + 2 = \frac{6 + 2}{4 + 4}(x + 4)$$

$$y + 2 = \frac{8}{8}(x + 4) \longrightarrow y + 2 = x + 4 \longrightarrow x - y + 2 = 0$$

Aplicando el mismo procedimiento, podemos obtener la ecuación de la diagonal que pasa por BD y verificar que es $x + 5y - 18 = 0$

2.4.2.2 Conociendo un punto y la pendiente

Si analizamos las ecuaciones $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$

Nos damos cuenta que tienen en común la expresión de la pendiente.

Entonces, al sustituir una expresión en la otra nos queda:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

a la que llamaremos ecuación Punto Pendiente.

Ejemplo:

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,3) y tiene pendiente igual a 2.

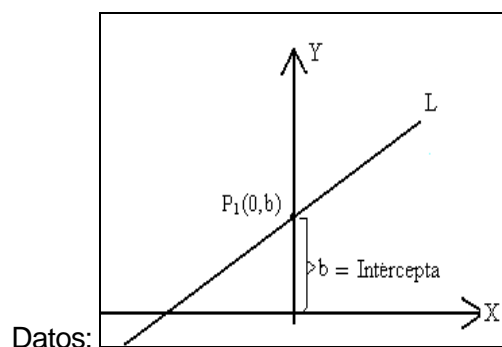
Solución: Aplicando la ecuación Punto Pendiente

$$y - 3 = 2(x - 2) \longrightarrow y - 3 = 2x - 4 \longrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

En los últimos dos ejemplos hemos expresado la ecuación de la recta pedida escribiendo a x e y en el mismo miembro e igualando toda la expresión a cero. Podemos generalizar estas expresiones de la forma $Ax + By + C = 0$, siendo ésta la ecuación general de la recta.

2.4.2.3 Ecuación pendiente – intercepto

Conociendo la pendiente y el intercepto con el eje “y”



$$P_1 = (0, b)$$

Pendiente = m

$$L: y - b = m(x - 0)$$

$$L: y = m x + b \text{ (Pendiente Intercepto)}$$

Ejemplos

Dada la ecuación de la recta $L: 3x + 4y = 7$, halle la pendiente y el intercepto de dicha recta.

Solución:

De la ecuación L tenemos: $4y = -3x + 7$

$$\rightarrow y = \frac{-3}{4}x + \frac{7}{4} \quad \text{Luego:} \quad m = -\frac{3}{4} \quad \text{y} \quad b = \frac{7}{4}$$

2.4.3 Distancia de punto a recta

$L: Ax + By + C = 0$

$$; d = \frac{|Ax_0 + By_0 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejercicios Propuestos

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_1(-2,-3)$ y tiene la misma pendiente que la recta $2x + 3y = 1$.
2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_1(-3,2)$ y su pendiente es inversa y con signo contrario de la pendiente de la recta $x + 2y = 3$.
3. Hallar la ecuación de la mediatriz de un segmento cuyos extremos son: $P_1(-3,-1)$ y $P_2(-5,3)$.
4. Un punto P de abscisa 2, pertenece a una recta cuya pendiente 1 y que pasa por $P_1(-2,-1)$ Calcule la ordenada de P.
5. Determine la pendiente, la ordenada en el origen y grafique, dadas las rectas:

$$a) \quad y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$b) \quad 4x - 3 = y - 3$$

6. El punto de intersección de las rectas $L_1 : x - y = 0, L_2 : x - 2y - 2 = 0$, Es el punto medio del segmento cuyos extremos son: M (a,2) y N(2,b) .Halle el valor de a y b.
7. Se tienen las rectas $L_1 : x - y - 4 = 0, L_2 : 4x + 5y - 20 = 0$, encuentre el área de la región limitada por las rectas L_1, L_2 y el eje x.
8. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto P (2,-1) y cuyo ángulo de inclinación es 8° .
9. En las ecuaciones $L_1: a x + (2 - b) y - 23 = 0, L_2: (a - 1) x + by = 15$. Halle los valores de a y b para que representen rectas que pasan por el punto P (2,-3).
10. Determine la ecuación de la recta cuya pendiente es $-\frac{1}{2}$ y que corta al eje de las y en (0,5).

Autoevaluación

1. Halle la ecuación de la recta que es mediatriz del segmento que une a los puntos A (7,4) y B (-1,-2).
2. Si la recta L_1 que contiene a los puntos A(a ,2) y B (0 , 2 a) es paralela a la recta L_2 que contiene a los puntos C (-a ,3) y D(1 ,-2 a), Hallar el valor de “a”
3. Dado el triángulo de vértices A (-4,3), B (5,-1) y C(7,5). Halle las ecuaciones de las rectas que pasan por el vértice C y trisecan al lado opuesto \overline{AB} .
4. Una recta pasa por el punto P (2,3) y la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 10. Halle la ecuación de la recta.
5. Calcule la ecuación de la recta cuya ordenada y abscisa en el origen suman 2 y cuya pendiente es 9/5.
6. El producto de los interceptos de una recta con los ejes coordenadas es igual a -6. Halle la ecuación de la recta, si su pendiente es igual a 3.
7. Calcule la ecuación de una recta cuya ordenada al origen es el doble de la ordenada de la recta $2x-3y+5=0$, sabiendo que pasa por el punto P, siendo P el punto medio de A(3,-1) y B(-2,8).

BIBLIOGRAFIA:

Lehmman, Charles	Geometría Analítica	Editorial LIMUSA	USA	2001
LARSON Roland; HOSTETLER Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001
http://descartes.cnice.mec.es www.eneayudas.cl/geomanal.html www.elrincondelvago.com/algebra-y-geometriaanalitica.html				

UNIDAD DE
APRENDIZAJE**2**

SEMANA

5

GEOMETRÍA ANALÍTICA

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos, utilizando diferentes métodos, deducen la ecuación de la recta, circunferencia y parábola, con ayuda del docente y utilizando el plano cartesiano construyen gráficos que servirán para la resolución de ejercicios y problemas, también señalan la pendiente recta y elementos básicos de la circunferencia y la parábola.

TEMARIO

- La circunferencia, Gráficas, Ecuaciones
 - Ecuación canónica
 - Ecuación ordinaria
 - Ecuación general

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Halla las ecuaciones canónica y ordinaria de la circunferencia.
- Encuentra el centro y radio de la circunferencia por medio de la ecuación general.
- Construye gráficos de la circunferencia en sus distintos métodos.

2.5 LA CIRCUNFERENCIA

La Circunferencia se llama al conjunto de puntos del plano que se encuentran equidistantes de un punto fijo llamado **centro**. (La distancia constante se llama **radio**)

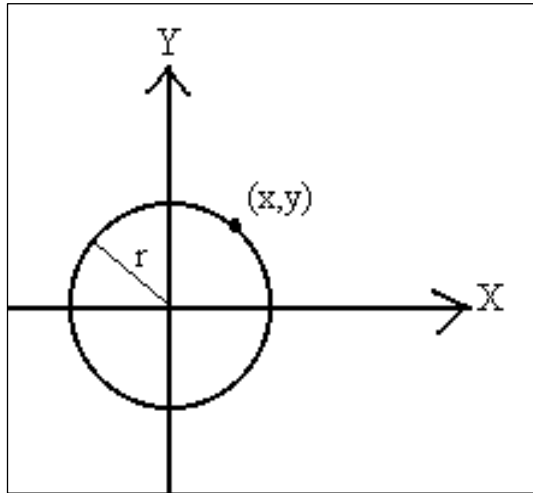
Elementos:

$C(h,k)$: centro

r : radio

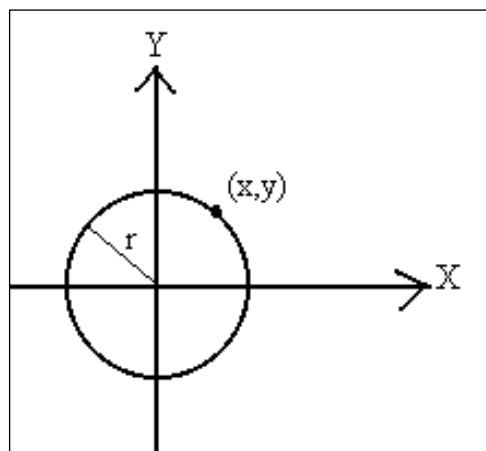
(x, y) : punto de circunferencia

D_1D_2 : Diámetro



2.5.1 ECUACIÓN CANÓNICA

Cuando el centro está en el origen de coordenadas.



$$C : (x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

$$C : x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{Ecuación canónica}$$

Ejemplo

1.- Calcule la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto (3,4).

Solución:

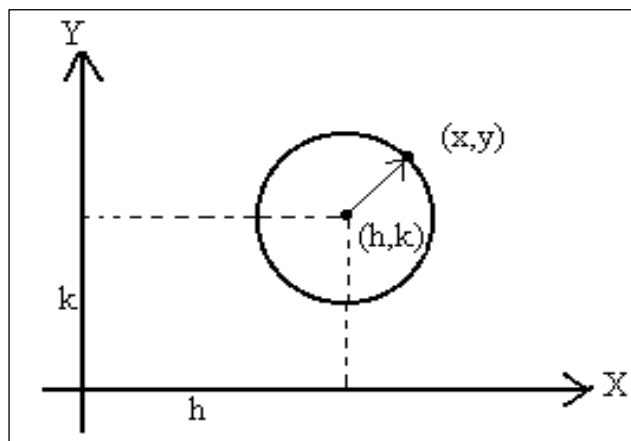
$$C = x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{ecuación canónica}$$

$$(3)^2 + (4)^2 = r^2 \rightarrow r^2 = 25$$

$$\therefore C : x^2 + y^2 = 25$$

2.5.2 ECUACIÓN ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA

Cuando el centro está en el punto (h, k) y de radio r



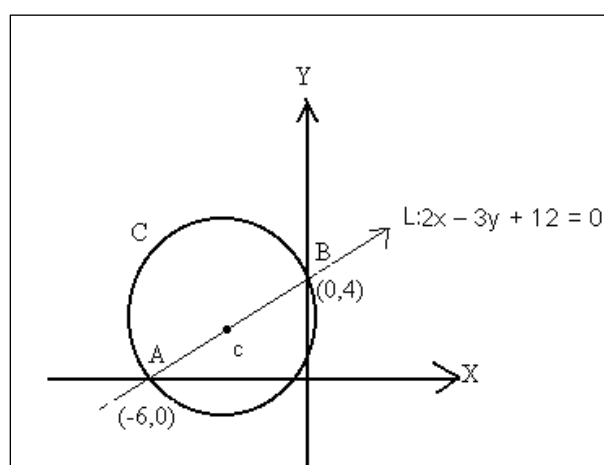
$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 \dots\dots\dots (II) \text{Ecuación ordinaria}$$

Ejemplo

1. Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro la porción de la recta $L : 2x - 3y + 12 = 0$ comprendido en el segundo cuadrante.

Solución: Se tiene el siguiente gráfico:



Nota: al intersectarse la recta L con los ejes coordenados, se tienen los puntos $A(-6, 0)$ y el punto $B(0, 4)$. C = punto medio de \overline{AB}

$$C = \left(\frac{0-6}{2}, \frac{4+0}{2} \right) \quad C = (-3, 2)$$

$$D = \text{diámetro} = \overline{AB} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}, \quad D = 2\sqrt{13}$$

$$r = \frac{D}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$$

$$C: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$$

2.5.3. ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

De : $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$ (II) Ecuación ordinaria ,

desarrollamos los binomios :

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

$$D = -2h, E = -2k, F = h^2 + k^2 - r^2$$

$$C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Luego: $C_0 = \left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2} \right)$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Ejemplo

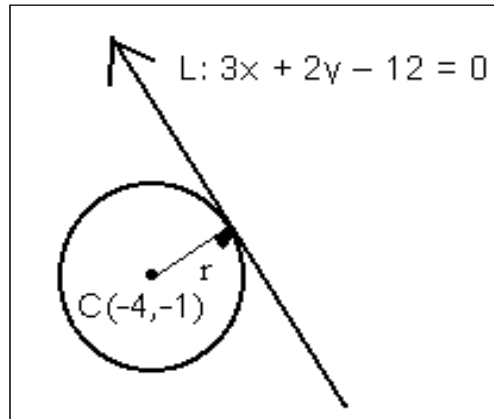
Determine la ecuación de la circunferencia cuyo centro es C (-4,-1) y que es tangente a la recta L: $3x + 2y - 12 = 0$

Solución:

Sea la ecuación:

$$d(P_0 L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{distancia de } P_0 \text{ a la recta } L$$

$$L : Ax + By + c = 0$$



GRAFICA

r = distancia del centro a la recta L

$$r = \frac{|-4(3) + 2(-1) - 12|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{26}{\sqrt{13}}$$

$$r = 2\sqrt{13}$$

$$C : (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = (2\sqrt{13})^2$$

$$C : (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 52$$

Ejercicios Propuestos

1. Determine el centro y radio de cada una de las circunferencias representadas por las ecuaciones:

$$a) \quad (x+3)^2 + y^2 = 6 \qquad b) \quad x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$$

2. Calcule la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $X^2 + y^2 + 4x - 6y - 15 = 0$ y que pasa por el punto $(-1,1)$.
3. Calcule la ecuación de la circunferencia de centro $C(-2;4)$ y que pasa por la intersección de las rectas $4x - 7y + 10 = 0$; $3x + 2y - 7 = 0$
4. Calcule la ecuación de la circunferencia que es concéntrica con la circunferencia $X^2 + y^2 + 6x - 6y + 13 = 0$; y que pasa por el punto $P(-2;-4)$.
5. Halle la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: $P(7,8), Q(4,-1)$ y $R(1,2)$.
6. Halle el área de la región encerrada por la circunferencia que es tangente a las rectas $L_1: 4x - 5y + 30 = 0$, $L_2: 4x - 5y - 10 = 0$, si uno de sus puntos de tangencia es $B(0,-2)$.
7. Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y cuyo centro está sobre las rectas: $L_1: 3x - 2y - 24 = 0$ y $L_2: 2x + 7y + 9 = 0$
8. La circunferencia C es tangente a las rectas $L_1: 3x = 4y - 30$ y $L_2: 3x - 4y = 10$, si su centro está en la recta $L: y = x$, calcule:
 - a. La ecuación de C .
 - b. El área del triángulo formado por uno de los puntos de tangencia y los extremos del diámetro paralelo a L_1 y a L_2

Autoevaluación

Halle el radio

Determine un punto de la circunferencia.

1. Escriba, en cada caso, la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el origen de coordenadas y tiene por radio a) 2 b) $2\sqrt{3}$
2. La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 100$
3. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 25$. Determine:
 - a) Un punto de la circunferencia
 - b) Un punto interior y otro exterior de la circunferencia
4. Halle la ecuación de la circunferencia que tiene:
 - a) Su centro en el origen y radio 2
 - b) Su centro en el punto $(-2, 0)$ y radio 3
 - c) Su centro en el punto $(0, 3)$ y radio 4
 - d) Su centro en el punto $(1, 2)$ y radio 5

5. Determine el centro y radio de cada una de las circunferencias representadas por las ecuaciones:

$$a) x^2 + y^2 = 4 \qquad c) x^2 + (y-1)^2 = 9$$

6. Determine la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(-5, 0)$ y contiene al punto $P(-2, 4)$.
7. Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-2, 3)$ y pasa por el punto $(1, 1)$.
8. Encuentre el valor de "h", si la circunferencia $x^2 + (y - h)^2 = 36$ pasa por el origen de coordenadas.
9. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 - 8x + y^2 + 10y - 8 = 0$
10. Determine la ecuación de la circunferencia de manera que uno de sus diámetros sea el segmento que une los puntos $(-3, 2)$ y $(-7, 4)$.
11. Halle la ecuación de la circunferencia tangente al eje y en el punto $S(0, 3)$ y que pasa por $T(-2, -1)$.
12. Dada la ecuación C: $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 3 = 0$, halle las coordenadas del centro y el radio de C.
13. Calcule el área del círculo cuya circunferencia es C: $9x^2 + 9y^2 + 12x - 72y = 77$.

14. Demuestre que la recta $L: 4x + 3y - 40 = 0$ es tangente al círculo cuyo radio es 5 y con centro en $C(3, 1)$.
15. Una circunferencia de centro en el origen de coordenadas es tangente a la recta $L: 5x - 12y + 13 = 0$ en el punto P . Halle la ecuación de otra circunferencia con centro en P y que pasa por el origen de coordenadas.
16. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 5$, una cuerda de la circunferencia pasa por los puntos $P(-1, 8)$ y $Q(5, 8)$. Halle el área del triángulo formado por P , Q y el centro de la circunferencia.
17. Halle la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en la recta $2x + 5y - 26 = 0$ y que pasa por los puntos $A(-4, 3)$ y $B(-2, -1)$.
18. Encuentre la ecuación ordinaria de la circunferencia que pasa por los puntos $S(2, 2)$ y $T(6, 2)$ si su centro pertenece a la recta $L: y - x = 0$.
19. Halle la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en la recta $L: y - x = 0$ y que pasa por los puntos $S(2, 2)$ y $T(6, 2)$.
20. Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ y $C(-1, 4)$.
21. Halle la ecuación ordinaria de la circunferencia que pasa por los puntos $P(2, 0)$ y $Q(4, 2)$. El centro de la circunferencia se encuentra en la recta $y = x$.
22. Halle la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia, $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$; cuyo radio es un tercio del radio de esta circunferencia.
23. En cada caso siguiente, halle el centro, radio, gráfica y los puntos extremos de las circunferencias:
- A) $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$
 B) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
 C) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 6 = 0$
24. En un laboratorio se producen dos cultivos: A y B. Las cantidades x e y de estas marcas que se producen en cierto período, están relacionados por el modelo
- $$x^2 + y^2 + 8x + 250y - 6859 = 0$$
- Graficar la curva y determinar las cantidades máximas de estos cultivos
25. Si el centro de la circunferencia es $(3, -4)$ y es tangente a la recta $3x - 4y + 6 = 0$. Hallar su ecuación y gráfica.

BIBLIOGRAFIA:

Lehman, Charles	Geometría Analítica	Editorial LIMUSA	USA	2001
LARSON Roland; HOSTETLER Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001
http://descartes.cnice.mec.es www.eneayudas.cl/geomanal.html www.elrincondelvago.com/circunferencia.html www.cci@quimbaya.udea.edu.co				

**UNIDAD DE
APRENDIZAJE****2****SEMANA****6**

GEOMETRÍA ANALÍTICA

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos ,utilizando diferentes métodos, deducen la ecuación de la recta, circunferencia y parábola, con ayuda del docente y utilizando el plano cartesiano construyen gráficos que servirán para la resolución de ejercicios y problemas, también señalan la pendiente recta y elementos básicos de la circunferencia y la parábola.

TEMARIO

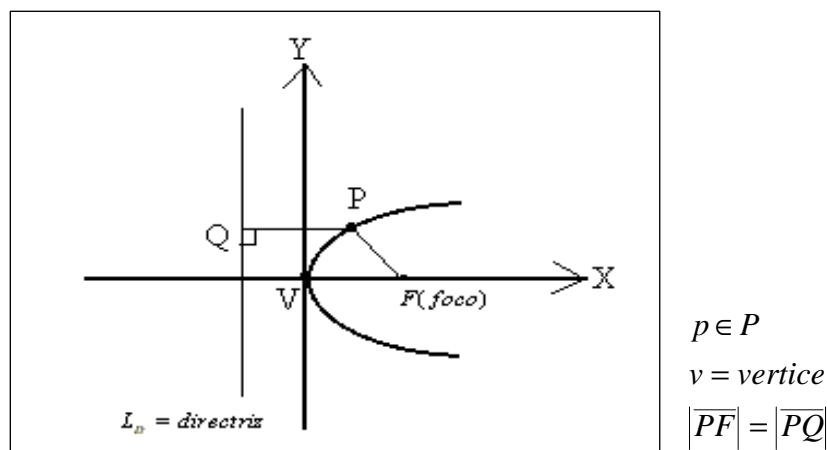
- La parábola, Gráficas, Ecuaciones
Ecuación canónica
Ecuación ordinaria
Ecuación general

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Halle las ecuaciones canónica y ordinaria de la parábola.
- Encuentre los elementos de la parábola: vértice, foco, directriz y lado recto, a partir de la ecuación general.
- Construya gráficos de la parábola en sus distintos métodos.

2.6 LA PARÁBOLA

Es el conjunto de puntos ubicados en el plano cartesiano, que equidistan de una recta fija llamada directriz y de un punto fijo llamado foco.



2.6.1 ELEMENTOS

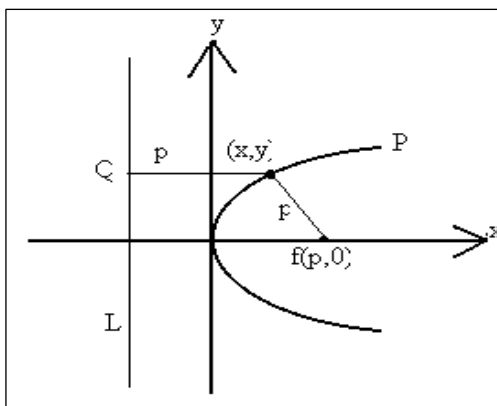
- a. **Vértice (V):** Es el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría.
- b. **Foco (F):** Es el punto fijo, situado sobre el eje de simetría, ubicado a p unidades del vértice.
- c. **Eje de simetría (l_1):** Es la recta perpendicular a la directriz y pasa por el vértice y foco.
- d. **Cuerda (\overline{AB}):** Es el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola.
- e. **Directriz (l):** Es la recta fija perpendicular al eje de simetría ubicada a p unidades del vértice, en sentido opuesto al foco.
- f. **Cuerda focal (\overline{ST}):** Segmento de recta que une dos puntos de la parábola, pasando por el foco.
- g. **Lado recto (\overline{LR}):** Es una cuerda focal, perpendicular al eje de simetría.
- h. **Radio vector (\overline{FP}):** Segmento de recta que une el foco con un punto de la parábola.

2.6.2 ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA

La **ecuación canónica** modela parábolas cuyo vértice está en el origen de coordenadas. El eje de simetría de la parábola puede ser horizontal o vertical.

2.6.2.1 Horizontal

Cuando el eje de simetría coincide con el eje x.



Se sabe que:

$$|PQ| = |PF|$$

$$|p+x| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

$$|p+x| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

$$(p+x)^2 = (x-p)^2 + y^2$$

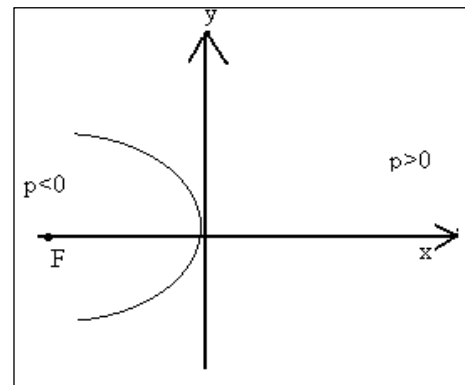
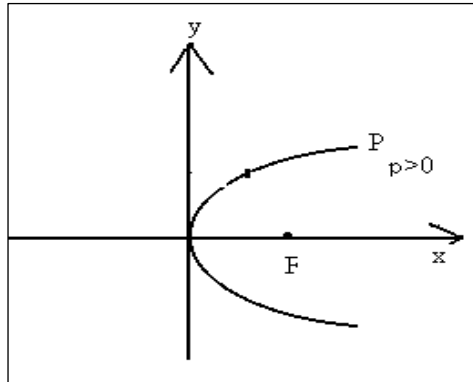
$$p^2 + 2px + x^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

P: $y^2 = 4px$(1). Esto es conocido como la ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y su eje de simetría coincide con el eje x. El gráfico de la parábola se abre dirigido hacia el eje x, porque en la ecuación se ve que es lineal en la variable x.

Analizando: $y = \pm\sqrt{4px} = \pm 2\sqrt{px}$

p y x deben tener el mismo signo, es decir que $p < 0$ ó $p > 0$, de donde se concluye que:

- Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha. y el foco está en la parte positiva del eje x.
- Si $p < 0$ la parábola se abre hacia la izquierda y el foco está en la parte negativa del eje x.



2.6.2.2 Vertical

Cuando el eje de simetría coincide con el eje y.

Se sabe que:

$$P: |\overline{PQ}| = |\overline{PF}|$$

$$|p + y| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

$$(p + y)^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2$$

$$p^2 + 2px + y^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2$$

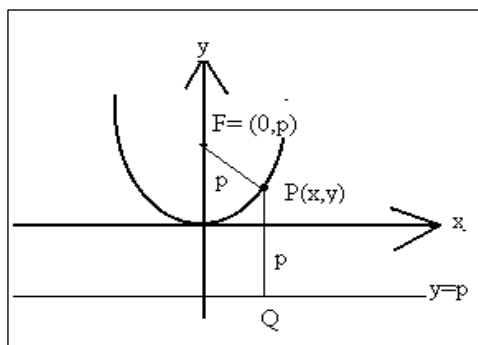
$$x^2 = 4px \dots (2) \quad . \text{ Parábola de eje vertical}$$

Analizando la ecuación (2):

$$x = \pm \sqrt{4py} = \pm 2\sqrt{py}, \text{ de donde se concluye que } p \text{ y } x$$

deben tener el mismo signo . $p > 0$ ó $p < 0$.

- Si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba y el foco está en la parte positiva de y.
- Si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo y el foco está en la parte



negativa del eje y.

Ejemplos:

1. Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice es el origen de coordenadas, sabiendo que es simétrica respecto al eje Y; y que pasa por el punto (4,-8)

$$P : x^2 = 4py \rightarrow (4)^2 = 4p(-8)$$

$$\rightarrow 16 = -32p$$

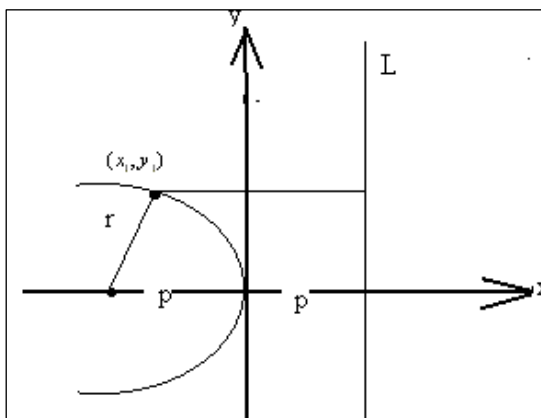
$$\rightarrow p = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore x^2 = 4\left(\frac{-1}{2}\right)y \rightarrow x^2 = -2y$$

2. Halle en la parábola $y^2 = -12x$ los puntos cuyos radios vectores son iguales a 6

Solución:

Se tiene

**Solución**

$$y^2 = 4px \rightarrow 4p = -12 \rightarrow p = -3$$

$$|x_1 + p| = r, \quad r = 6$$

$$|x_1 + p| = 6 \rightarrow x_1 + p = 6 \vee x_1 + p = -6$$

Sabemos que

$$\rightarrow x_1 - 3 = 6 \vee x_1 - 3 = -6$$

$$\rightarrow x_1 = 9 \vee x_1 = -3$$

$$\rightarrow y^2 = -12(-3)$$

$$\therefore y^2 = 36 \rightarrow y = \pm 6$$

$$\rightarrow (-3, 6) \vee (-3, -6)$$

Ejercicios Propuestos

- Una parábola tiene su vértice en el origen y su eje coincide con el eje x. Si P (2,-2) es un punto de la parábola, halle la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco y la ecuación de su directriz.
- Halle las coordenadas del vértice, del foco y la ecuación de la directriz de las parábolas cuyas ecuaciones son:

a) $y^2 = 3x$	b) $y^2 = -12x$	c) $x^2 = 4y$	d) $x^2 = -8y$
---------------	-----------------	---------------	----------------
- Una cuerda de parábola $y^2 - 4x = 0$ es el segmento de recta $2x - y = 0$. Halle la longitud de dicha cuerda.

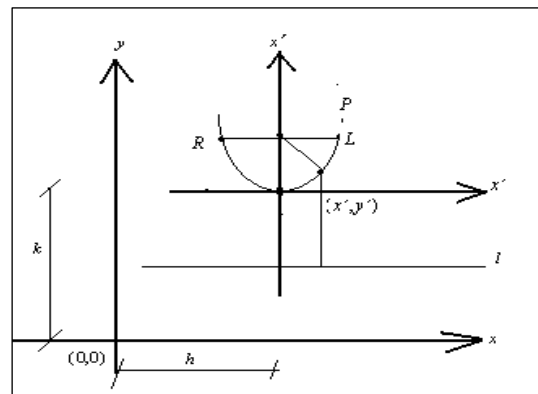
2.6.3 ECUACIÓN ORDINARIA DE LA PARÁBOLA.

La **ecuación ordinaria** modela una parábola cuyo vértice está en un punto (x,y) que no coincide con el origen del sistema de coordenadas. La ecuación canónica es un caso particular de la ecuación ordinaria cuando las coordenadas del vértice son (0,0). La forma de la ecuación varía con el eje de simetría de la parábola a la que representa.

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$\text{Foco} : (h, k + p)$$

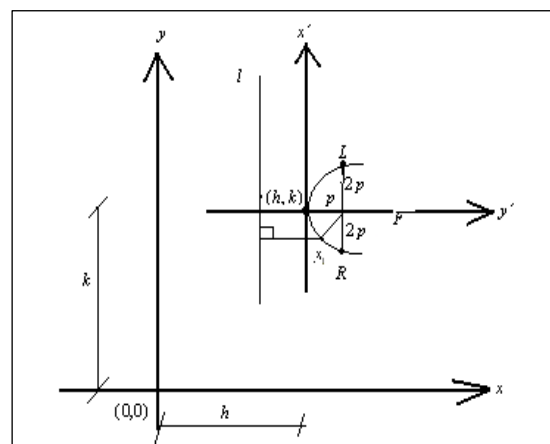
$$\text{Directriz} : y = k - p$$



$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$\text{Foco} : (h + p, k)$$

$$\text{Directriz} : x = h - p$$



Ejemplos:

- Calcule el vértice, el foco y la directriz de las siguientes parábolas.

$$x^2 + 6x - 2y + 13 = 0$$

$$6y^2 + 24y + 2x + 23 = 0$$

Solución:

Resolvamos en primer lugar $x^2 + 6x - 2y + 13 = 0$

Las parábolas están expresadas en forma de ecuación general $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ o $Ay^2 + By + Cx + D = 0$. Para calcular las coordenadas $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ y $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ de sus elementos (foco, vértice y directriz) vamos a expresarlas en su ecuación ordinaria siguiendo los siguientes pasos.

Determina si el eje de simetría de la parábola es Horizontal o Vertical.

Esto lo puedes determinar analizando cuál es la variable que NO ESTÁ ELEVADA AL CUADRADO, ya que ésta determina a cuál de los ejes del sistema de referencia es paralelo el eje de simetría de la parábola.

En el caso concreto de la parábola, $x^2 + 6x - 2y + 13 = 0$ el eje de simetría es paralelo al eje Y.

Escoge la ecuación según el eje de simetría y completa cuadrado.

En nuestro ejemplo, la ecuación a utilizar es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

El proceso de completar cuadrado y obtener la ecuación es como sigue:

$$x^2 + 6x = 2y - 13$$

$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 2y - 13 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = 2y - 4$$

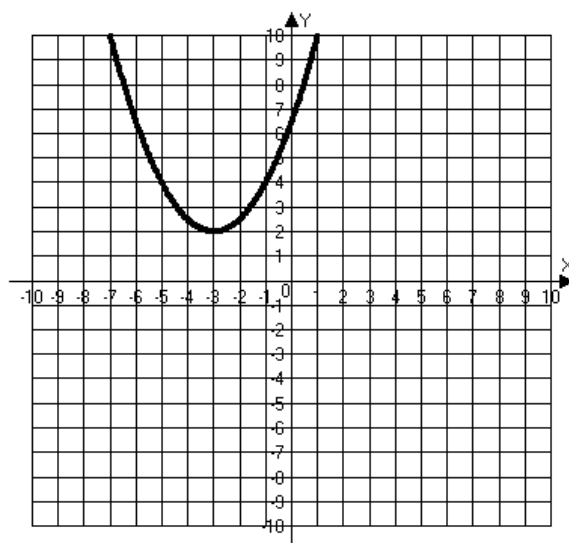
$$(x + 3)^2 = 2(y - 2)$$

Coordenadas del vértice: $(-3, 2)$

Valor de : $p = \frac{1}{2} > 0$

Coordenadas del foco: $F(-3, 2 + \frac{1}{2}) \rightarrow F(-3, \frac{5}{2})$

Recta directriz: $y = 2 - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}$



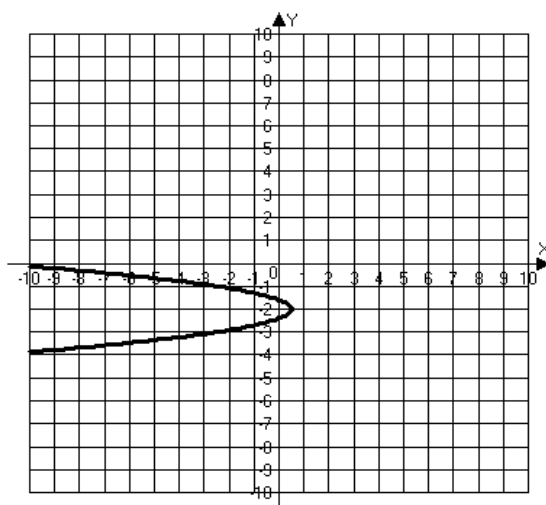
Aplicando el mismo procedimiento para $6y^2 + 24y + 2x + 23 = 0$
Se tiene:

Coordenadas del Vértice: $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

Valor de P: $4p = \frac{1}{3} \rightarrow p = \frac{1}{12} < 0$ (La parábola se abre a la izquierda)

Coordenadas del foco: $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}, -2\right) \rightarrow \left(\frac{5}{12}, -2\right)$

Recta Directriz: $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \rightarrow x = \frac{7}{12}$



2. Calcule la ecuación de la recta que pasa por los vértices de las parábolas $3x^2 - 18x + y + 26 = 0$ y $y^2 + 8y + x + 18 = 0$

Solución:

Calculamos las ecuaciones canónicas de cada parábola.

$$3x^2 - 18x + y + 26 = 0$$

$$3x^2 - 18x = -y - 26$$

$$(x - 3)^2 = -\frac{y}{3} + \frac{1}{3}$$

$$(x - 3)^2 = -\frac{1}{3}(y - 1)$$

$$\text{vertice} : (3, 1)$$

$$y^2 + 8y + x + 18 = 0$$

$$y^2 + 8y = -x - 18$$

$$y^2 + 8y + 16 = -x - 18 + 16$$

$$(y + 4)^2 = -x - 2$$

$$(y + 4)^2 = -(x + 2)$$

$$\text{vertice} : (-2, -4)$$

Utilizando las coordenadas de los vértices y la ecuación Punto-Punto, calculamos la ecuación de la recta.

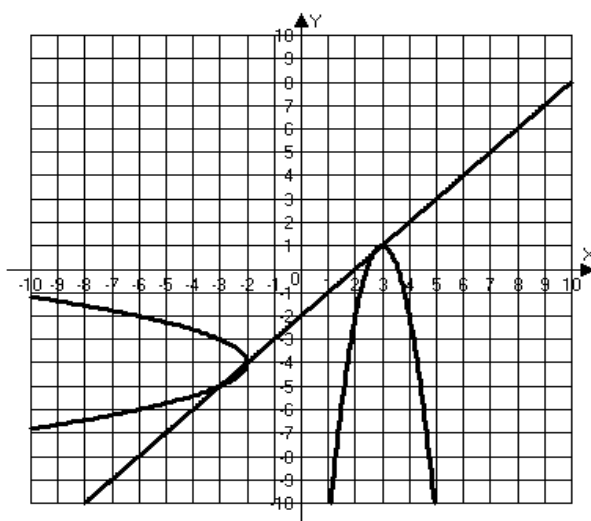
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{-2 - 3}(x - 3)$$

$$y - 1 = x - 3$$

$$\Leftrightarrow y = x - 2$$

$$\Leftrightarrow x - y - 2 = 0$$



Ejercicios Propuestos

1. Calcule la distancia del vértice de la parábola $y^2+2y+x-4=0$ a su punto $P(x;4)$:
2. $P(6;y)$ es un punto de la parábola $2x^2-4x-y+6=0$. calcule la ecuación de la circunferencia que pasa por P y cuyo centro es el vértice de la parábola.
3. En los ejercicios a y b, halle la ecuación y gráfica de la parábola, conociendo:
 - a. Vértice (2, 1) y foco (2, -4)
 - b. Foco (4, -3) y directriz $y = 1$
4. Halle las coordenadas del vértice, foco, lado recto, ecuación de la directriz y gráfica, conociendo
 - a. $x^2 - 4x + 8y - 16 = 0$
 - b. $y^2 + 2x + 6y - 5 = 0$
5. Encontrar los puntos máximos o mínimos, según el caso, en:
 - a. $4y = x^2 - 4x - 4$
 - b. $x^2 + 4x + 6y - 8 = 0$
6. El propietario de un terreno rectangular, donde uno de los lados está cercado, desea cercar el resto que llega a 200 m. ¿Cuál será el área máxima que podrá cercarse?

Autoevaluación

- P y Q, ambos de abscisa -21, son puntos de la parábola $y^2 + 2y + x + 6 = 0$.
Calcule la ecuación de una circunferencia, sabiendo que uno de sus diámetros tiene como extremos a P y Q.
- Calcule vértice, foco y directriz de las siguientes parábolas:
 - $2y^2 - 20y - x + 53 = 0$
 - $2x^2 - 8x - y + 9 = 0$
 - $2y^2 - 12y + x + 17 = 0$
 - $x^2 + 2x + 2y + 5 = 0$
- Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro es la intersección de las rectas $L_1: x - 2y + 4 = 0$ y $L_2: 2x - y - 4 = 0$; además pasa por P(5, 6)
- Una parábola tiene su vértice en el origen de coordenadas y pasa por el punto el (2; 4). Halle su ecuación
- Una parábola, con vértice en el origen de coordenadas, tiene por directriz $2x - 5 = 0$. Halle su ecuación.
- Halle la ecuación de la parábola de vértice en el origen, cuyo eje es el Eje Y, y que pasa por el punto (8, -4)
- Encuentre el foco y la directriz de la parábola: $2y - 7x^2 = 0$
- Encuentre el valor de k, para que la longitud del lado recto de la parábola sea Igual al radio de la circunferencia.
Si la circunferencia es $C: x^2 + y^2 + 4y + k = 0$ y la parábola con eje horizontal es $P: y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$
- Halle la ecuación general de la Circunferencia cuyo centro es la intersección de las rectas $L_1: 7x + 4y - 13 = 0$ y $L_2: 5x - 2y - 19 = 0$, y pasa por el foco de la parábola $y^2 - 16x = 0$

BIBLIOGRAFIA:

Lehman, Charles	Geometría Analítica	Editorial LIMUSA	USA	2001
LARSON Roland; HOSTETLER Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001
http://descartes.cnice.mec.es www.eneayudas.cl/geomanal.html				

**UNIDAD DE
APRENDIZAJE****3****SEMANA****8**

FUNCIONES Y GRÁFICAS

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos señalarán dominio y rango de los diferentes tipos de funciones básicas, trascendentales y funciones seccionadas, construyen además sus representaciones gráficas en el plano cartesiano y aplican las restricciones del dominio de cada función.

TEMARIO

- Conceptos básicos: Dominio y rango de una función

Identifica y evalúa las Restricciones de dominio

ACTIVIDADES

1. Identifican una función real de variable real y su gráfica en el plano cartesiano.
2. Calcula el dominio de funciones polinómicas, racionales, irracionales y logarítmicas; evaluando sus restricciones.

3.8.1 DEFINICIÓN INTUITIVA.

¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Caso 1

Supongamos que un cultivo de bacterias se inicia con 5 000 de ellas y la población se duplica cada hora, entonces el número N de bacterias **depende** del número t de horas transcurridas.

El biólogo observa que el número de bacterias del cultivo se incrementa con el transcurso del tiempo y trata de determinar la regla o **función** que relaciona ambos.

Un cálculo sencillo nos permite determinar que esta relación se puede expresar como:

$$N = 5000 \times 2^t$$

t (horas)	N
0	5 000
1	10 000
2	20 000
3	40 000
....

Caso 2

Un físico se da cuenta que el peso de un astronauta depende de la distancia a la que se encuentra del centro de la tierra, entonces intenta descubrir la regla o **función** que relaciona el peso F con la distancia h a la superficie de la Tierra.

$$F = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

Siempre que una variable dependa de otra, genera una relación funcional, por ello podríamos definir a la función de la siguiente manera:

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, denotado por $f(x)$, de un conjunto B .

Si x está en el conjunto A , entonces $f(x)$ es llamado la imagen de x bajo f .

El conjunto A es llamado Dominio de la función f y se denota por $\text{Dom}(f)$. Al dominio de f , se le llama conjunto de preimágenes

El conjunto $\text{Ran}(f) = \{f(x) / x \in A\}$ es llamado el rango de f ; el cual nos indica el conjunto de las imágenes de x .

Ejemplo básico

- Indique cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones.

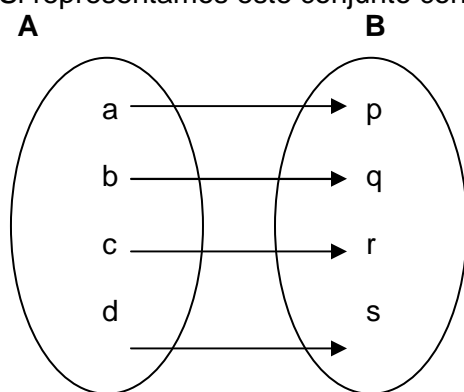
$$f_1 = \{(a, p), (b, q), (c, r), (d, s)\}$$

$$f_2 = \{(1,1), (1,3), (1,4), (1,5)\}$$

Solución:

Comencemos analizando f_1 .

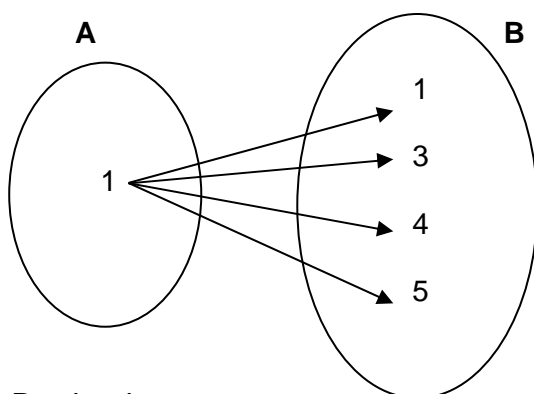
Si representamos este conjunto con un diagrama sagital tendremos lo siguiente:



En este diagrama, vemos fácilmente que cada elemento del primer conjunto (conjunto de partida) se relaciona con un único elemento del segundo conjunto (conjunto de llegada).

Luego f_1 es una función.

Analicemos ahora f_2 .



En este diagrama vemos fácilmente que el elemento del conjunto de partida se relaciona con varios elementos del conjunto de llegada.

Luego f_2 **no** es una función.

De donde:

$$\text{Do}(f_1) = \{a, b, c, d\} \quad \text{y} \quad \text{Ra}(f_1) = \{p, q, r, s\}$$

$$\text{Do}(f_2) = \{1\} \quad \text{y} \quad \text{Ra}(f_2) = \{1, 3, 4, 5\}$$

3.8.2 FUNCION REAL DE VARIABLE REAL

Gráfica de una Función

Si f es una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) en R_2 , para los cuales, (x, y) es una pareja ordenada en f . (Es un punto de la gráfica y satisface su ecuación).

Ejemplo:

Grafique la función $y = x + 2$ y verifique que algún punto geométrico de la gráfica satisface la ecuación.

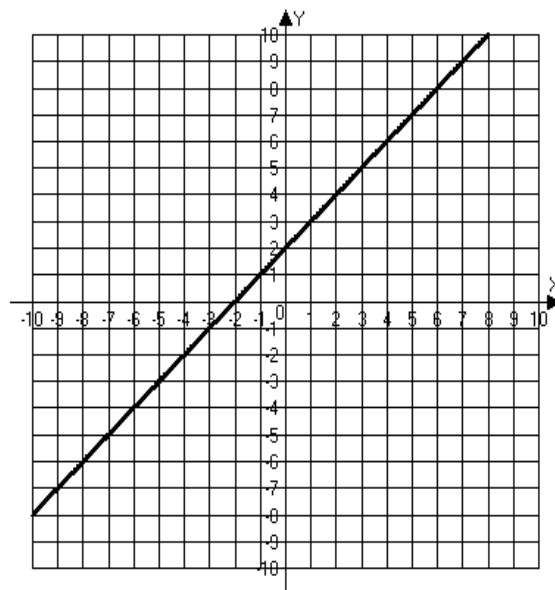
Usando esta tabla de valores graficamos la función.

Verifiquemos ahora los puntos de la gráfica, por ejemplo $(1, 3)$

$$y = x + 2$$

$$3 = 1 + 2$$

$$3 = 3$$



PROPIEDAD FUNDAMENTAL:

Si al trazar una vertical a la gráfica de f , ésta debe cortarla a lo más en un punto, caso contrario no es la gráfica de una función real

3.8.3 RESTRICCIÓN DEL DOMINIO: CASOS

3.8.3.1 Función Polinómica

Un polinomio es de la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

Las funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, etc. son ejemplos de este tipo de funciones.

Restricción de dominio: Cualquier valor real de x genera una imagen real en y . Luego, el dominio de toda función polinómica son TODOS LOS NUMEROS REALES. $Dom f = R$

3.8.3.2 Función Racional

Tiene la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es decir, el cociente de 2 funciones polinomiales.

Restricción de dominio: El polinomio del denominador debe ser distinto de cero. $Q(x) \neq 0$

Ejemplos:

1. Calcule el Dominio de $y = \frac{2}{x+1}$

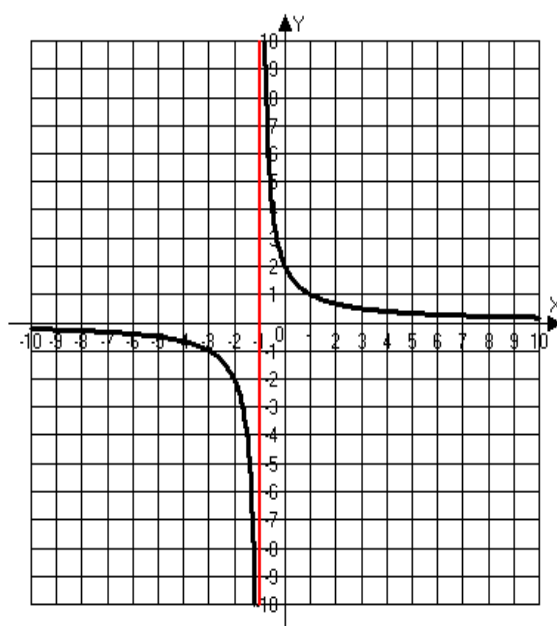
Aplicando la restricción

$$x+1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

Luego el dominio es:

$$R - \{-1\}$$



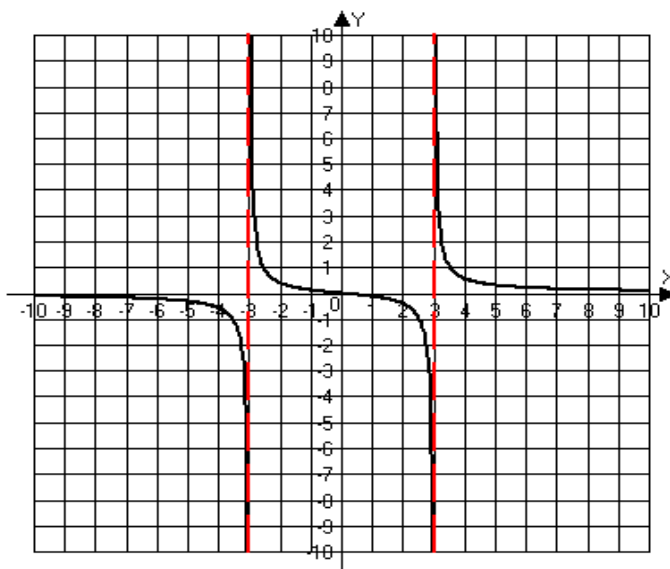
2. Calcule el dominio de $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

$$x^2 - 9 \neq 0$$

$$x \neq \sqrt{9}$$

$$x \neq \pm 3$$

$$\text{Dom}f = R - \{-3, 3\}$$



3.8.3.3 Función Irracional

Cuando la regla de correspondencia esta afectado por un radical como $y = \sqrt[n]{P(x)}$.

Si n es impar positivo, $P(x)$ no tiene restricción para calcular el dominio entonces $Domf = R$

Si n es par positivo, $P(x)$ tiene restricción para calcular el dominio, $P(x) \geq 0$ **entonces** $Domf = D(f) = \{x \in R / P(x) \geq 0\}$

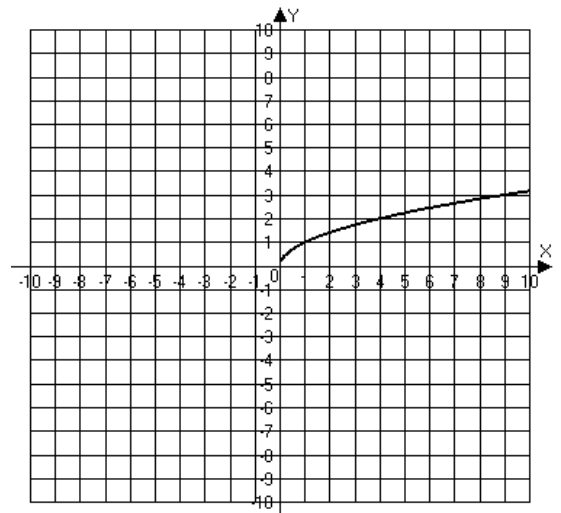
Ejemplos:

1. Calcule el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$

Aplicando la restricción

$$x \geq 0$$

$Domf = \{x \in R / x \geq 0\}$
que también se expresa
 $[0, +\infty)$

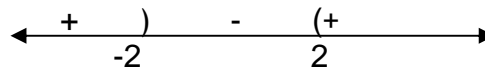


2. Calcule el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$(x + 2)(x - 2) \geq 0$$

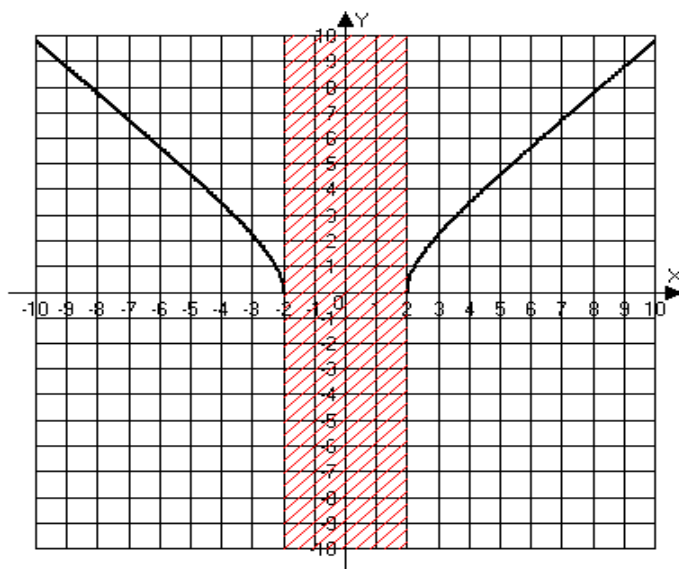
Un método interesante para resolver la inecuación es mediante el método de los puntos críticos, para dos factores, el cual nos dice que el conjunto solución son las regiones laterales, al dividir la recta en tres regiones.



Dado que la inecuación está definida para valores positivos, se toman como solución las regiones positivas.

$$Domf : \langle -\infty, -2 \rangle \cup [2, \infty)$$

GRAFICA



3.8.3.4 Función Logarítmica

La variable independiente está en el argumento de un logaritmo.

$$f(x) = \text{Log}_b P(x)$$

Restricción de Dominio: Por definición de logaritmos, el argumento debe ser mayor que cero.

$$f(x) = \text{Log}_b P(x) \rightarrow \text{Dom}f : P(x) > 0$$

Ejemplo:

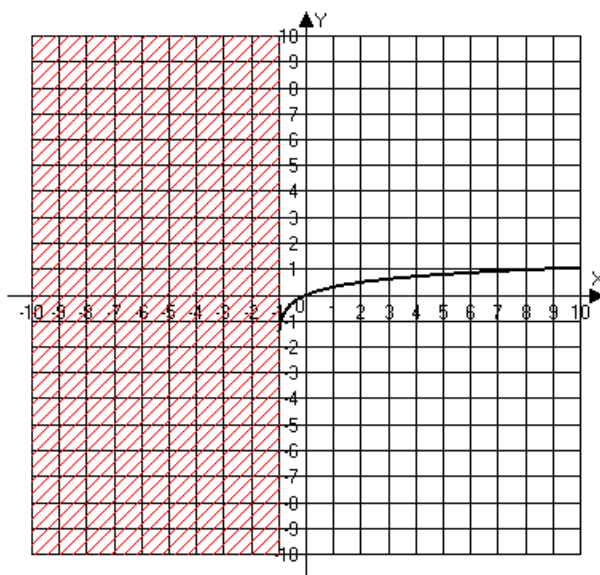
Calcule el Dominio de $f(x) = \log(x+1)$

Aplicando la restricción.

$$x+1 > 0$$

$$x > -1$$

$$\text{Dom}f : \langle -1, \infty \rangle$$



Ejercicios Propuestos

1. Halle el dominio de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \log \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x^2}{x^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$b) f(x) = \log(1 - 2x) + \sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{x - x^3}$$

$$c) f(x) = (2 - 3x)(x + 1) + \sqrt{3 - 5x - 2x^2} + \sqrt{x^2 - 3x}$$

$$d) f(x) = \log(9 - x^2) + \log\left(\frac{1-x}{x^2-4}\right) + \sqrt{x+2}$$

$$e) f(x) = \sqrt{\log \frac{5x-x^2}{4}} + \frac{x}{\log(1+x)} + \frac{3x^2}{\sqrt{20-x^2-x}}$$

$$f) f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}} + 4\sqrt{\frac{x^6 - 9x^4 - x^2 + 9}{x^2 - 5}} + \log(1 - 2x)$$

BIBLIOGRAFIA:

FIGUEROA, Ricardo	Matemática Básica	Edit Gráficas América S.R.L	Lima	2004
LARSON Roland; HOSTETLER Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001
http://descartes.cnice.mec.es				

**UNIDAD DE
APRENDIZAJE****3****SEMANA****9**

FUNCIONES Y GRÁFICAS

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos señalarán dominio y rango de los diferentes tipos de funciones básicas, trascendentales y funciones seccionadas. Construyen, además, sus representaciones gráficas en el plano cartesiano y aplican las restricciones del dominio de cada función.

TEMARIO

- **FUNCIONES ESPECIALES**
 - Función lineal
 - Función valor absoluto
 - Función raíz cuadrada
 - Funciones seccionadas

ACTIVIDADES

- Construye la gráfica y calcula dominio y rango de funciones lineales.
- Construye la gráfica y calcula dominio y rango de función valor absoluto.
- Construye la gráfica y calcula dominio y rango de función raíz cuadrada.
- Calcula dominio y rango de funciones seccionadas

3.9 FUNCIONES ESPECIALES

3.9.1 FUNCIÓN CONSTANTE

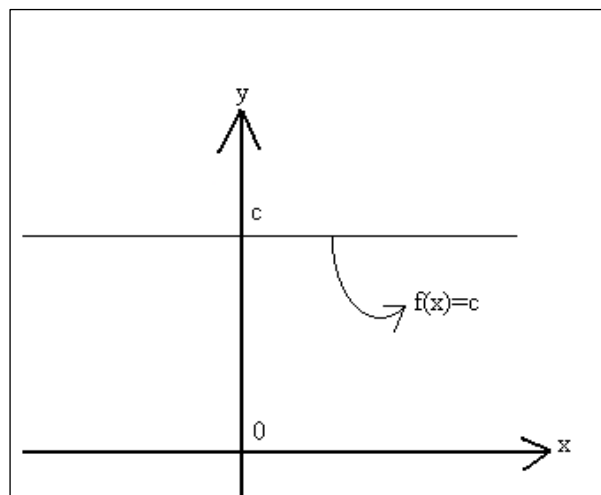
A la función f , la llamaremos función constante, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = C, \text{ donde } c \text{ es una constante.}$$

También la función constante, se puede definir por:

$$f = \{(x, y) \in R \times R / y = c.\} \text{ donde } c \text{ es constante}$$

donde su dominio es $D_f = R$, su rango es $R_f = \{c\}$ y su gráfica es:



3.9.2 . FUNCIÓN IDENTIDAD

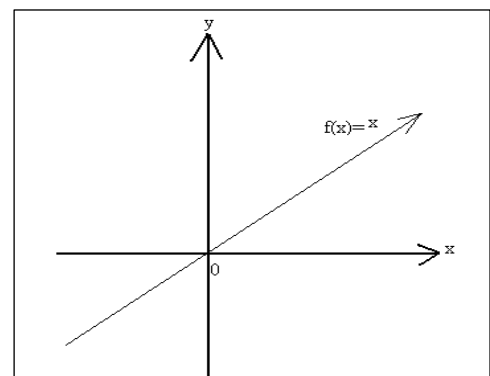
A la función f , le llamaremos función identidad, si su regla de correspondencia es:

También $f(x) = x$ la función identidad se define:

$$f = \{(x, y) \in R \times R / y = x.\}$$

Donde: $D_f = R$ $R_f = R$

Y su gráfica es:



3.9.3 FUNCIÓN LINEAL

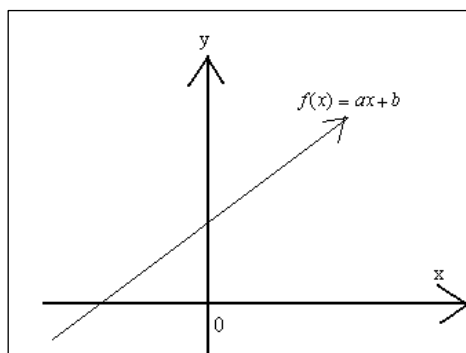
A la función f , le llamaremos función lineal, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = ax + b$$

Donde a y b son constantes y $a \neq 0$. También a la función lineal se puede expresar en la forma:

$$f = \{(x, y) \in R \times R / y = ax + b.\}$$

Donde $D_f = R$ y $R_f = R$; $a, b \in R$ y $a \neq 0$ cuya gráfica es:



3.9.4 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

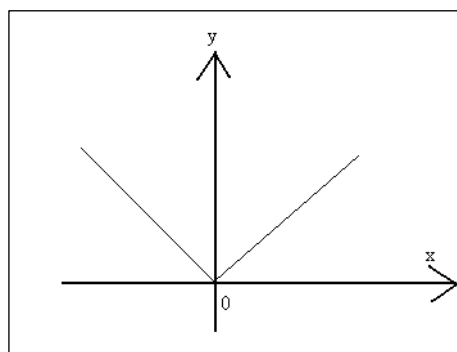
A la función f , le llamaremos función valor absoluto, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = |x|, \text{ donde } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

También se puede expresar en la forma: $f = \{(x, y) \in R \times R / y = |x|\}$

Donde $D_f = R$ y $R_f = [0, \infty)$

y su gráfica es:



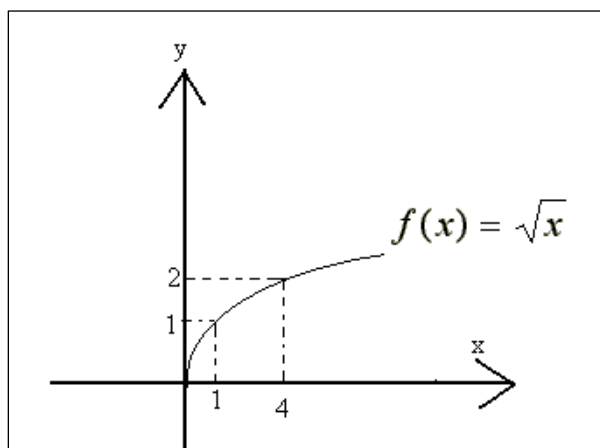
3.9.5 FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

A la función f , le llamaremos función raíz cuadrada, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = \sqrt{U(x)} \Leftrightarrow U(x) \geq 0$$

Un caso particular es de la forma: $f = \{(x, y) \in R \times R / y = \sqrt{x}\}$

Donde $D_f = R_0^+$ y $R_f = [0, \infty)$ y su gráfica es:



3.9.6 FUNCIONES SECCIONADAS

Son aquellas que tienen varias reglas de correspondencia

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in A_2 \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} Do(f) = A_1 \cup A_2 \\ Ra(f) = Ra(f_1) \cup Ra(f_2) \end{cases}$$

Ejercicios Propuestos

1. En una campaña por limitar el consumo de agua de cierta ciudad se establece la siguiente tarifa: Se cobran S/.4 por metro cúbico de consumo, si este llega hasta los primeros 10 m^3 de agua. Si superan el consumo de 10 m^3 se cobran S/.5 por m^3 adicionales.
 - a. Establecer el modelo que representa el gasto por el consumo de agua
 - b. Graficar el modelo
 - c. Hallar el costo por el consumo de 8 m^3 , 10 y 15 m^3
2. Construya la gráfica y calcule el dominio y rango de:

$$f(x) = 4 - |2x - 5|, \quad \text{para } |x - 2| \leq 3$$

Autoevaluación

- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se definen de A en N las funciones f y g tales que:
 $f = \{(1, k), (2, 5), (3, 5), (1, 3), (p, k)\}$ $g(x) = kx + 2p$.
 - Halle la suma de los elementos del rango de $g(x)$
 - Encuentre el valor de : $E = f(3) + g[f(1)] - g[f(4)] + 2f[f(1)]$
- Sea $f(x)$ una función lineal y $g(x) = x^2 - 8$. Si $f(2) = g(3)$ y la gráfica de f pasa por el punto $(3, 4)$; Halla el rango de f si su dominio es $Dom(f) = \langle -2, 6 \rangle$
- Sea la función $f = \{(7, 8), (5, m^2), (7, m+a), (5, 9), (a, 8)\}$
 - Halle $Do(f) \cap Ra(f)$.
 - Si g es una función definida en el $Do(f)$, mediante $g(x) = mx + n$ tal que $f(5) = g(2)$ halle $Ra(g)$
- Halle dominio, rango y esbozar la gráfica de la función :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \in [9, 30] \\ |x-5| & , x \in \langle 3, 6 \rangle \\ x^2 + 10x + 24 & , x \in \langle -\infty, -3 \rangle \\ 4 & , x \in [-3, -2 > \cup \langle -2, 2 \rangle \cup < 2, 3] \\ \sqrt{x} & , x \in [6, 9 > \end{cases}$$

- Halle dominio ,rango y esbozar la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & ; x \in \langle -\infty, -9 \rangle \\ -x & ; x \in [-9, -6] \\ -\frac{1}{5}x + \frac{1}{3} & ; x \in \langle -5, 0 \rangle \\ |x-4| & ; x \in [0, 6 > \\ 6 & ; x \in < 6, \infty > \end{cases}$$

6. Halle dominio ,rango y esbozar la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{-(x+4)} & , \quad x \in [-13, -4] \\ \frac{x}{2} & , \quad x \in \langle -4, -2 \rangle \\ (x-2)^2 - 1 & , \quad x \in \langle -2, 4 \rangle \\ |x-8| - 1 & , \quad x \in \langle 4, \infty \rangle \end{cases}$$

7. Halle dominio ,rango y esbozar la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & , \quad si \quad x < 0 \\ x - |x-2| & , \quad si \quad 0 \leq x < 4 \\ 2 + \sqrt{x-4} & , \quad si \quad 4 \leq x < 8 \\ 12 - 2x & , \quad si \quad x \geq 8 \end{cases}$$

- 8 El índice de contaminación atmosférica en alguna ciudad fue evaluada y definida por el siguiente modelo matemático:

$$C(t) = \begin{cases} 2t + 4, & 0 \leq t < 4 \\ 3t + 5, & 4 \leq t < 10 \\ 14, & 10 \leq t < 15 \\ 48 - 2t, & 15 \leq t < 20 \end{cases}$$

Donde t es el tiempo medido en horas, t = 0 corresponde a las 2 am. **C** representa el nivel de contaminación

- A) Graficar el modelo
- B) A qué hora la contaminación es la más alta, y a qué hora es más baja?
- C) Determinar el nivel de contaminación a las 8 am, a las 2 pm y a las 7 pm
- D) En qué intervalos de tiempo, la contaminación es creciente o decreciente.

- 9 Halle el dominio, rango y esbozar la grafica de la función.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x + 4 & , \quad x \in <-2, 2] \\ 2^x & , \quad x \in \langle 2, 4 \rangle \\ |2x - 10| & , \quad x \in [4, 8] \\ -4 & , \quad x \in \langle 8, 10 \rangle \\ -x + 6 & , \quad x \in [10, +\infty) \\ 3x^2 - x + 6 & , \quad x \leq -2 \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA:

FIGUEROA, Ricardo	Matemática Básica	Edit Gráficas América S.R.L	Lima	2004
LARSON Roland; HOSTETLER Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001
http://descartes.cnice.mec.es www.sok.com.ar/matem/matematica/logaritmo				

**UNIDAD DE
APRENDIZAJE****3****SEMANA****10**

FUNCIONES Y GRAFICAS

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos señalarán dominio y rango de los diferentes tipos de funciones básicas, trascendentales y funciones seccionadas, construyen además sus representaciones gráficas en el plano cartesiano y aplican las restricciones del dominio de cada función.

TEMARIO

- **FUNCIONES ESPECIALES**

- Función cuadrática
- Función exponencial
- Función logarítmica

ACTIVIDADES

- Construye la gráfica y calcula dominio y rango de funciones cuadráticas.
- Construye la gráfica y calcula dominio y rango de funciones exponenciales.
- Construye la gráfica y calcula dominio y rango de funciones logarítmica.

3.9 FUNCIONES ESPECIALES

3.10.1 FUNCIÓN CUADRÁTICA

A la función f , le llamaremos función cuadrática, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad , \quad a \neq 0$$

También, la ecuación cuadrática se expresa así:

$$f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = ax^2 + bx + c \quad , a, b, c \in \mathbb{R} \quad , \quad a \neq 0 \right\}$$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola con eje perpendicular al eje x en el cual se presenta dos casos.

- Si $a > 0$ la gráfica se abre hacia arriba.
- Si $a < 0$ la gráfica se abre hacia abajo.

El dominio de la función cuadrática es: $D_f = \mathbb{R}$. El rango se determina completando cuadrados.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

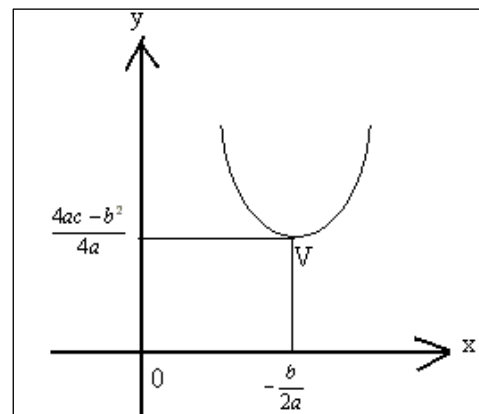
Como

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Luego el vértice de la parábola es: $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

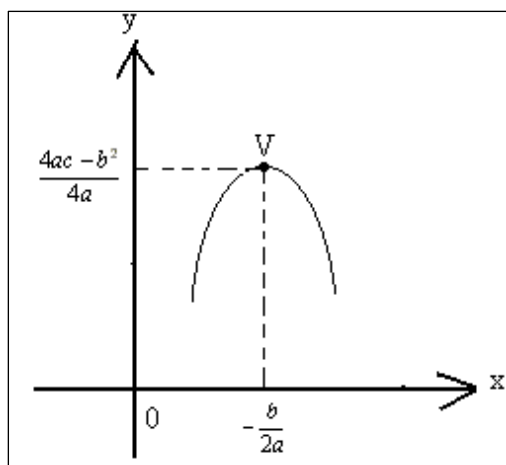
Si $a > 0$ se tiene :

$$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty \right)$$



Si $a < 0$ se tiene :

$$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$$



3.10.2 FUNCIÓN EXPONENCIAL

Sea $F(x) = e^x$ donde $e = 2.7182.....$

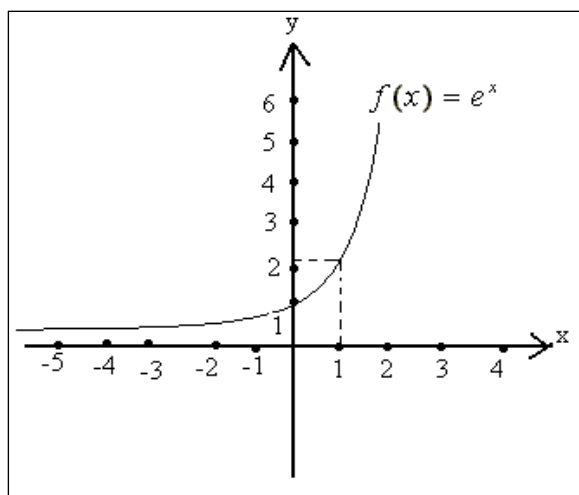
Si su $Dom_f = \mathbb{R}$ $Ran = \langle 0, +\infty \rangle$

Se tiene: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Tabulando:

x	-1	0	1	2	-2	3
y	$1/e$	1	e	e^2	$1/e^2$	e^3

Graficando:



3.10.3 FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Se define una función logarítmica :

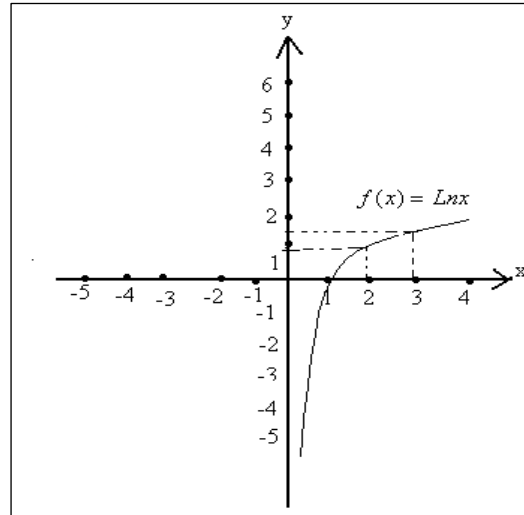
$$f(x) = y = \ln x$$

Donde: $Dom_f = \langle 0, \infty \rangle$ $Rang_f = \langle -\infty, \infty \rangle$

$$\ln x = \log_e x$$

$$e = 2.7182$$

X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1	2	3
Y	-0.69	-1.1	-1.39	0	0.69	1.1



3.10.4 APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

Cierta empresa tiene costos variables de producción de cierto artículo, de \$ 25 por unidad; y los costos fijos de producción mensual es de \$ 2 000. El ingreso I mensual por la venta de x unidades producidas es de $I = 60x - 0.01x^2$. Determinar:

- La función costo C
- El nivel de ventas para maximizar el ingreso.
- El máximo ingreso.
- El nivel de producción y venta para hallar la máxima ganancia o utilidad.
- La máxima utilidad.

Solución

- Si x es el número de unidades producidas al mes del artículo mencionado y \$ 25 el costo unitario, entonces el costo variable de producción es

$$CV = \$25x.$$

como el costo fijo es \$ 2 000, entonces el costo total será

$$C = 25x + 2\,000$$

- De la función ingreso conocido $I = 60x - 0.01x^2$

Se observa que es una ecuación cuadrática en la variable x , es decir, es la parábola. Por lo tanto, transformamos esta ecuación a la forma canónica para obtener las coordenadas del vértice que darán el nivel de venta y el máximo ingreso.

$$0.01x^2 - 60x = I$$

$$x^2 - 6000x = -100I$$

$$x^2 - 6000x + 9000000 = -100I + 9000000$$

$$(x - 3000)^2 = -100(I - 90000)$$

De donde, el vértice de la parábola es $V(3000, 90000)$

Por lo tanto, nivel de venta que da la máxima ganancia es 3000 unidades.

C) El máximo ingreso es de \$90 000

D) La Utilidad U es el Ingreso I menos el Costo total C

$$U = I - C$$

$$U = (60x - 0.01x^2) - (25x + 2000)$$

$$U = 35x - 0.01x^2 - 2000$$

$$0.01x^2 - 35x = -U - 2000$$

$$x^2 - 3500x = -100U - 200000$$

$$(x - 1750)^2 = -100(U - 28625)$$

De donde el vértice de la parábola que se abre hacia abajo es

$$V(1750, 28625)$$

Por lo tanto el nivel producción y venta que da la máxima utilidad es de 1750 unidades.

E) La máxima utilidad obtenida es 28,625 dólares.

Autoevaluación

1. Dada la siguiente función $f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left(y + \frac{3}{4} \right) = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \right\}$

Halle $A = \text{Dom}(f) \cap \text{Rang}(f)$

2. Dada la siguiente función $f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (y - 4) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 \right\}$

Halle $B = \text{Dom}(f) \cap \text{Rang}(f)$

3. Halle la longitud de la cuerda común de $f(x) = 4x^2 + 16x - 15$ y $g(x) = -x^2 + x - \frac{5}{4}$

4. Halle dominio, rango y esbozar la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4} \right)^{x+2} & ; x \in (-10, -5] \\ 2^{x+4} & ; x \in (-5, 1] \\ \log(2x - 7) & ; x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

5. Determine el dominio, rango y construya su gráfica

$$f(x) = 10^x$$

6. Halle dominio, rango y esboce la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4} \right)^{x-3} & , x \in (-2, 6] \\ 2 \log_3 x & , x > 6 \\ -\frac{1}{2}x^2 - x + 1 & , x \leq -2 \end{cases}$$

7. Halle el dominio de la función :

$$f(x) = \sqrt{2x+4} + \ln(9-x^2) + \frac{x}{x^2-25}$$

8. Halle dominio, rango y esbozar la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x-3} & , \quad x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 4 & , \quad x \in \langle -1, 2 \rangle \\ \ln(x-4) & , \quad x \geq 4 \end{cases}$$

9. Halle el dominio de la función :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{\log \frac{5x - x^2}{4}} + \frac{2x}{1 + x^2}$$

10. Halle el dominio de la función :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} + \ln\left(\frac{1-x}{x^2 - 4}\right) + \frac{1}{2x-3}$$

11. Halle el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \log(3x - 1) + \sqrt{x^2 - 9}$$

12. El gerente de producción de una empresa cree que el departamento de ventas y mercadotecnia puede vender diariamente 126 unidades de un producto, y quiere producir esa cantidad. Si supone este funcionario que todos los factores que no sean el número de trabajadores y la producción resultante, se mantendrán constantes dentro de los límites de esa producción total, la función producción puede expresarse por la ecuación

$$2x^2 + 4x - y = 0$$

en la que **x** representa el número de trabajadores y **y**, las unidades producidas. Dicho gerente asegura que necesita 7 hombres para producir las 126 unidades.

- Suponiendo que la ecuación es adecuada ¿Está en lo correcto el gerente con respecto al número de empleados que necesitará?
- ¿Qué tipo de curva representa la ecuación? Trace la curva.
- Construya una tabla que muestre las unidades producidas por trabajador empleado, en el intervalo de 1 a 7 obreros. Indique el cambio en el número de unidades producidas en este intervalo a medida que se va agregando cada trabajador.

13. El costo promedio por unidad, en soles, al producir x artículos está dado por

$$C(x) = 20 - 0.06x + 0.002x^2. \text{ ¿Cuántas unidades producidas minimiza el costo promedio? Y ¿Cuánto será dicho costo mínimo?}$$

14. Si la demanda mensual de x artículos al precio de y soles por unidad está dada por la relación $x + 45y = 1350$ El costo por mano de obra y materiales por la fabricación de cada artículo es de S/. 5 y los costos fijos son de S/. 2 000 mensuales. Determinar:
- La relación del costo total
 - La relación que defina el Ingreso
 - La relación de Utilidad
 - ¿A qué precio unitario se venderá para optimizar la utilidad?
 - ¿Qué precio se fijará para no ganar ni perder, es decir obtener utilidad 0?

MISCELÁNEA DE PROBLEMAS SOBRE FUNCIONES

SOBRE FUNCIONES ESPECIALES

I. Asocia cada función con su gráfica:

a. $y = -x + 5$

b. $y = \frac{3}{2}x + 3$

c. $y = \frac{1}{2}x$

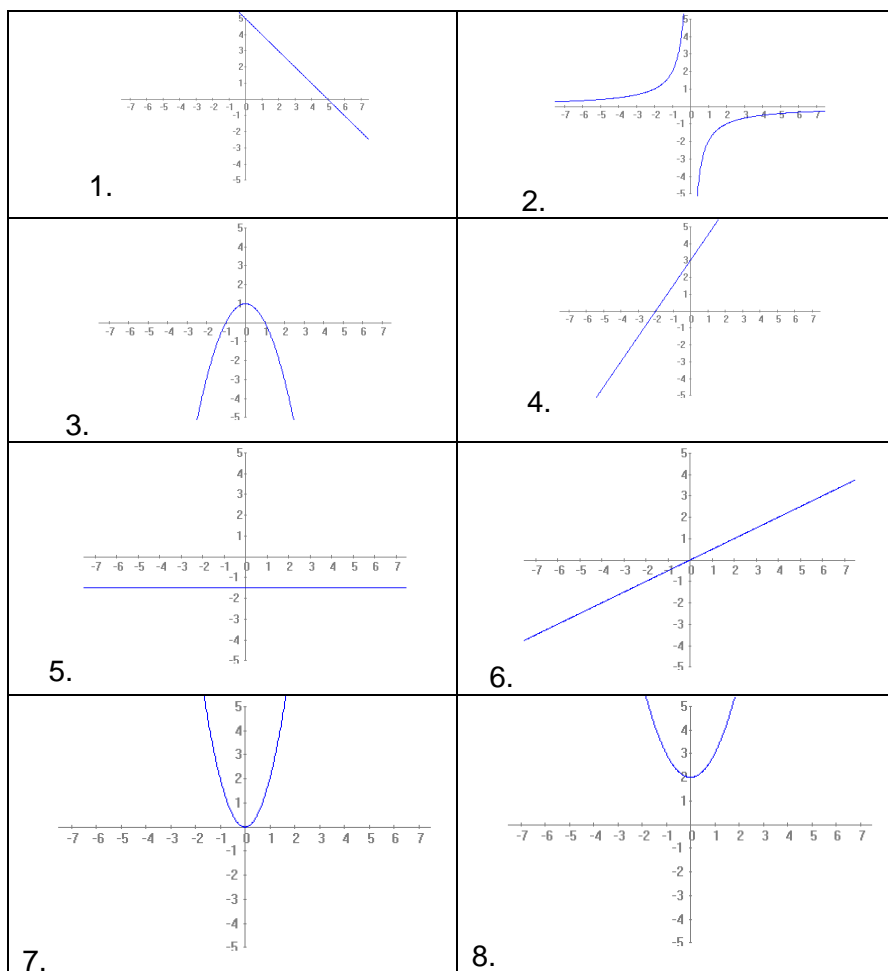
d. $y = x^2 + 2$

e. $y = -x^2 + 1$

f. $y = -\frac{2}{x}$

g. $y = -\frac{3}{2}$

h. $y = 2x^2$



Rp. a. (1) b.(4) c.(6) d.(8) e.(3) f.(2) g.(5) h.(7)

II. Problemas sobre funciones

- a. Un cántaro vacío con capacidad para 20 litros pesa 2550 gramos. Escribe la función del peso total del cántaro (en Kilogramos) según la cantidad de agua (en litros) que contiene.

Rp. $\begin{cases} y = x + 2.55 \\ y : \text{peso del cántaro (Kg)} \\ x : \text{cantidad de agua (1litro = 1Kg)} \end{cases}$

- b. El precio por establecimiento de llamada en cierta tarifa telefónica es de S/. 0,12. Si hablamos durante 5 minutos, la llamada cuesta S/. 0,87 en total. Halla la función del precio total de la llamada según los minutos que estemos hablando.

$$\text{Rp. } \begin{cases} y = 0,15x + 0,12 \\ y : \text{precio de la llamada (S/.)} \\ x : \text{cantidad de minutos} \end{cases}$$

- c. El perímetro de un rectángulo es de 30 cm. Obtén la función del área del rectángulo en función de la longitud de la base.

$$\text{Rp. } \begin{cases} y = 15x - x^2 \\ y : \text{área del rectángulo (u}^2\text{)} \\ x : \text{longitud de la base (u)} \end{cases}$$

III. Determine el dominio de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = \sqrt{\frac{9x^2 + 6x + 1}{x^3}}$$

$$\text{Rp. } \text{Dom } f(x) = \langle 0, \infty \rangle \cup \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

$$2. f(x) = \ln\left(\frac{3x^2 - 11x - 4}{x}\right)$$

$$\text{Rp. } \text{Dom } f(x) = \left\langle -\frac{1}{3}, 0 \right\rangle \cup \langle 4, \infty \rangle$$

$$3. f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 - e^{5-x}}$$

$$\text{Rp. } \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{5\}$$

$$4. f(x) = \sqrt{\frac{1-3x}{x^3+8}} - \frac{x^2}{\log(2-x)}$$

$$\text{Rp. } \text{Dom } f(x) = \left\langle -2, \frac{1}{3} \right\rangle - \{-1\}$$

$$5. f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-10}}{2 - \log(75-5x)} + \sqrt{\frac{x^2-25}{2x^2-11x+5}} + \frac{7}{\sqrt{24+5x-x^2}}$$

$$\text{Rp. } \text{Dom } f(x) = \left\langle \frac{1}{2}, 8 \right\rangle - \{5\}$$

$$6. f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^3+1}{4x^2-28x+49}} + \frac{x-1}{49-7^{x^2+7x-16}} + \frac{x^2-5x+9}{\sqrt{5x-x^2}}$$

$$\text{Rp. } \text{Dom } f(x) = \langle 0, 5 \rangle - \left\{ 2, \frac{7}{2} \right\}$$

IV. Determina el dominio, el rango y esboza la gráfica de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = \begin{cases} 3 - |x + 8| & , \quad -10 \leq x < -5 \\ 2x + 9 & , \quad x \geq -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Dom } f(x) = [-10, \infty) \\ \text{Ran } f(x) = [-1, \infty) \end{array}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 1 & , \quad x < -2 \\ |x - 1| & , \quad -2 \leq x < 3 \\ -1 & , \quad x \geq 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \\ \text{Ran } f(x) = [-8, \infty) \end{array}$$

IV. Problemas de exponenciales y cuadráticas

- El valor de un reloj está dado por $v(t) = 200x2^{-0,2t}$, donde "t" es el tiempo en años desde que el reloj era nuevo.
 - ¿Cuánto costo el reloj cuando era nuevo?
 - ¿Cuánto costará 20 años después?
 - ¿Cuánto costará 10 años después?
 - Trace un gráfico aproximado de la función.
- En una comunidad cualquiera la propagación de un cierto virus de gripe fue tal que, "t" semanas después de su brote, f(t) personas se habían contagiado, si:

$$f(t) = \frac{1449225}{1 + 224(\log 100)^{-0,2t}}$$

- ¿Cuántas personas tenían gripe durante el brote?
 - ¿Cuántas personas tenían gripe después de 10 semanas?
 - ¿Cuántas personas tenían gripe después de 35 días?
- La utilidad U obtenida por elaborar y vender x unidades de cierto producto fármaco está dado por: $U = 40x - x^2$
 - Determinar el número de unidades que se deben elaborar y vender para obtener la máxima utilidad.
 - ¿Cuánto será la máxima utilidad?

4. El peso aproximado del cerebro de una persona es directamente proporcional al peso de su cuerpo, y una persona que pesa 65 Kg. tiene un cerebro cuyo peso aproximado es 1.8 Kg.
 - a) Encuentre un modelo matemático que exprese el peso aproximado del cerebro como una función del peso de la persona.
 - b) Determine el peso aproximado del cerebro de una persona cuyo peso corporal es 75 Kg.

5. Un mayorista vende un producto por kilos (o fracción de Kg.); Si se ordenan no más de 10 Kg., el mayorista cobra \$ 2.00 por Kg. Sin embargo, para atraer órdenes mayores, el mayorista cobra sólo \$ 1.80 por Kg. si se ordenan más de 10 Kg.
 - a) Encuentre un modelo matemático que exprese el costo total de la orden como una función de la cantidad de Kg. ordenadas del producto. Dibuje.
 - b) Determine el costo total de una orden de 9.5 Kg. y de 12.5 Kg.

6. En un bosque un depredador se alimenta de su presa, y para las primeras 15 semanas a partir del fin de la temporada de caza, la población de depredadores es una función f de x , el número de presas en el bosque, la cual a su vez, es una función g de t , el número de semanas que han pasado desde el fin de la temporada de caza. Si :

$$F(x) = \frac{1}{48}x^2 - 2x + 50 \quad , \quad y \quad g(t) = 4t + 52$$

Donde $0 \leq t \leq 15$, haga lo siguiente: Encuentre un modelo matemático que exprese la población de depredadores como una función del número de semanas a partir del fin de la temporada de caza

7. En un laboratorio, el costo variable (y soles) por la producción de x (docenas) de cierto medicamento se define por:

$$y = \begin{cases} 2x + 3, & 0 < x \leq 5 \\ 3x - 2, & x > 5 \end{cases} \quad , \quad \text{Graficar el modelo y determinar}$$

- a) El costo por la producción de 4 docenas
- b) El costo por la producción de 9 docenas
- c) Cuántos medicamentos se producen con S/. 10? y con S/. 90?

BIBLIOGRAFIA:

FIGUEROA, Ricardo	Matemática Básica	Edit Gráficas América S.R.L	Lima	2004
LARSON Roland; HOSTETLER Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001
LEITHOLD, Louis	Cálculo con Geometría analítica	Editorial Oxford	México	2004
http://descartes.cnice.mec.es				

**UNIDAD DE
APRENDIZAJE****4****SEMANA****11**

LÍMITES Y CONTINUIDAD

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos, utilizando las propiedades de límites y las condiciones de continuidad, resolverán problemas de límites indeterminados, en el infinito y trigonométricos, y problemas de continuidad de una función en un punto dado, haciendo uso del álgebra básica y de las representaciones gráficas en el plano.

TEMARIO

- Límites de funciones :
 - Límites indeterminados
 - Algebraicos
 - Con radicales
 - Límites cuando variable tiende al infinito

ACTIVIDADES

- Calcula límites indeterminados de funciones algebraicas, racionales e irracionales.
- Calcula límites indeterminados cuando la variable tiende al infinito.

4.11 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

4.11.1 IDEA DE LÍMITE

$F(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2}$	5	5.75	6.5	7.25	7.7	7.97	7.997	8.003	8.03	8.3	8.75	9.5	10.25
x	1	1.25	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1	2.25	2.5	2.75

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2} = 8; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8$$

4.11.2 DEFINICIÓN:

Sea $F(x)$ una función definida en un intervalo que contiene o no al número "a". Se dice que cuando x se aproxima al número "a" la función

$F(x)$ tiende al número L (que se denota por: $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$), sí para todo

número positivo $\varepsilon > 0$ existe un número positivo δ tal que $|F(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in D(F) \wedge 0 < |x - a| < \delta$

EJEMPLOS:

1. Si $\varepsilon = 0.03$ halla el valor positivo δ tal que $|(3x + 7) - 1| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - (-2)| < \delta$

Solución

$$|3x + 6| < \varepsilon, \quad 0 < |x + 2| < \delta$$

$$3|x + 2| < \varepsilon \rightarrow |x + 2| < \frac{\varepsilon}{3} \rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3} \quad \therefore \delta = 0.01$$

2. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x + 3)}{x - 1} = 8$, $a = 1$, $L = 8$,

$|F(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a|$

$$F(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}{x - 1} = x^2 + 4x + 3$$

$$|x^2 + 4x + 3 - 8| < \varepsilon \rightarrow |x^2 + 4x + 5| < \varepsilon \rightarrow |(x - 1)(x + 5)| < \varepsilon$$

$$|x - 1||x + 5| < \varepsilon; \quad \delta = 1 \rightarrow -1 < x - 1 < 1 \rightarrow 5 < x + 5 < 7 \rightarrow 5 < |x + 5| < 7$$

$$\text{acotando } |x + 5| = 7 \rightarrow 7|x - 1| < \varepsilon \rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{7}, \text{ asumiendo } \delta = \frac{\varepsilon}{7}$$

por lo tanto $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\}$, con lo cual queda demostrado el Límite.

4.11.3 TEOREMAS SOBRE LÍMITES

1. $\text{Si } f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$
2. $\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \text{ entonces :}$
 - a) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$
 - b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$
 - c) $\text{Si } L_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{1}{L_2}$
 - d) $\text{Si } L_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$
 - e) $\lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C \cdot L_1, \quad C \in \mathbb{R}.$
 - f) $\text{Si } f(x) = C = \text{Constante} \quad \therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$
 - g) $\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^m = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^m = (L_1)^m, m \in \mathbb{N}$

4.11.4 CÁLCULO DE LÍMITES

Calcule:

a)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2) - \lim_{x \rightarrow 2} (3x) + \lim_{x \rightarrow 2} (4) \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) - 3 \lim_{x \rightarrow 2} (x) + 4 \\
 &= 2(2^2) - 3(2) + 4 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 13} \sqrt[3]{x-5} = \lim_{x \rightarrow 13} (x-5)^{\frac{1}{3}} = (13-5)^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = 2$

FORMAS INDETERMINADAS

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

4.11.5 LÍMITES ALGEBRAICOS :

1) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3} = \frac{0}{0} \text{ (forma indeterminada)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 - x^2 - 3x - 1)}{(x-1)(x^3 + 3x^2 + 5x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - x^2 - 3x - 1)}{(x^3 + 3x^2 + 5x + 3)}$$

$$= \frac{1-1-3-1}{1+3+5+3} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}, \text{ luego } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3} = \frac{-1}{3}$$

2) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - 2} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \right) \left(\frac{\sqrt{2x} + 2}{\sqrt{2x} + 2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{1/3} - 1)((x^{1/3})^2 + x^{1/3} + 1)}{(x - 1)(x^{2/3} + x^{1/3} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(x^{2/3} + x^{1/3} + 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

4) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{12 - 4x} = \frac{3 - 3}{12 - 4 \times 3} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$$

Levantamos la indeterminación: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x)}{4(3 - x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x)}{(3 - x)} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

5) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} = \frac{\sqrt{3+0} - \sqrt{3}}{0} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

Levantando la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+x} - \sqrt{3})}{x} \times \frac{(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x) - 3}{x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})}, x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1 - 3 + 2}{1 - 4 + 3} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

Levantando la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} \quad x \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)}{(x-3)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

4.11.6 LÍMITES AL INFINITO

Casos:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm \infty$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty$$

Ejercicios Propuestos

1. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 1}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2}}{\frac{2x + 5}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{4 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{\frac{2}{\infty} + \frac{5}{\infty}} = \frac{4 + 0 + 0}{0 + 0} = \frac{4}{0} = +\infty$$

2. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x^2})}{x^2(3 + \frac{2}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{\infty}}{3 + \frac{2}{\infty}} = \frac{1}{3}$$

3. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x+2)(x+5)} - x) = \infty - \infty \text{ (Forma indeterminada)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7x + 10} - x) \cdot \frac{(\sqrt{(x+2)(x+5)} + x)}{(\sqrt{x^2 + 7x + 10} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 10 - x^2}{\sqrt{x^2 + 7x + 10} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + 10}{\sqrt{x^2 + 7x + 10} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(7 + \frac{10}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{10}{x}}{\sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}} + 1} = \frac{7}{2}, x > 0$$

4. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 3x^2 + x + 1}{2x^4 + x^3 - 3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^4}} = 3$$

5. Calcule:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{(5 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 3)}{243x - 11}} = \frac{\infty}{\infty} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{x} + 15 - x - 3\sqrt{x}}{243x - 11}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)} \\
 & = \sqrt[5]{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 2\sqrt{x} + 15}{243x - 11}} = \sqrt[5]{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{15}{x}}{243 - \frac{11}{x}}} = \sqrt[5]{\frac{-1 + \frac{2}{\infty} + \frac{15}{\infty}}{243 - \frac{11}{\infty}}} = \\
 & L = \sqrt[5]{\frac{-1}{243}} = \frac{-1}{3}
 \end{aligned}$$

6. Calcule:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{2x}} - \sqrt{x - \sqrt{2x}}) = \infty - \infty \text{ (Forma indeterminada)} \\
 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{2x} - (x - \sqrt{2x})}{(\sqrt{x + \sqrt{2x}} + \sqrt{x - \sqrt{2x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2x}}{(\sqrt{x + \sqrt{2x}} + \sqrt{x - \sqrt{2x}})} \\
 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{x}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{x}}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{\infty}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{\infty}}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Autoevaluación

I. CALCULE LOS SIGUIENTES LÍMITES:

$$1. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{4x+6}{3x-3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+8}{x-8}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x^3-4x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+2x^2}{x^2-4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x+16}{x+4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{25x^2-4}{5x-2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{27+x^3}{x+3}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -7} \frac{49-x^2}{x+7}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-x^2+64}{x+8}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2-2x}{x^2-4x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+8x+15}{x^2+x-6}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{2x^2-21x+27}{x^2-3x-54}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2-21x+5}{2x^2-11x+5}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+7x-8}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10x^2-16x-8}{x^3-8}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2x^2-19x+24}{x^2-16x+64}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{32x^2-4x-1}{64x^3-1}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{3x^2+x-4}{9x^2+24x+16}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{-3x^2+4x-1}{6x^2+x-1}$$

II. CALCULE LOS SIGUIENTES LÍMITES:

$$1. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x+9}{\sqrt{x}-3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}-3}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{x^2+3}}{1-x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2-49}{2-\sqrt{x}-3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow k} \frac{x^7-k^7}{x^3-k^3}$$

RESPUESTAS DE I:

1)2 2)-6/5 3)0 4)-1 5) $-\infty$ 6)4 7)27 8)14 9)16 10)1/2 11)3 12)-2/5 13)1 14)19/9
15)1/3 16)2 17) ∞ 18)1 19) $-\infty$ 20)2/5

RESPUESTAS DE II:

1) ∞ 2)1/8 3)2 4)-56 5)4 6)-1/6 7)60 8)1/2 9) $2\sqrt{5}$ 10) $2\sqrt{6}$

ADICIONALES

1.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 6}}{7x + 10}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^3 - 2x + 1}{2x^7 + 3x^5 - x^2 + 2x}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16x^4 + x^3 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 10}}$$

RESPUESTAS

1) 0 2) 1/7 3) 0 4) 2

MISCELÁNEA SOBRE LÍMITES

Calcula los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{6 - 3\sqrt{5x - 1}} \quad \text{Rp. } -\frac{4}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{40 - 5x}{\sqrt[4]{10x + 1} - 3} \quad \text{Rp. } -54$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 7x^2 + 4}{x^5 - 8x^2} \quad \text{Rp. } \frac{1}{6}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{(x - 4)^2} \quad \text{Rp. } \frac{1}{16}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{3}{x - 1} \quad \text{Rp. } -\frac{5}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - x}{x^3 + x} \quad \text{Rp. } +\infty$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{4 - 12x}{1 - \sqrt{6x - 9x^2}} \quad \text{Rp. } +\infty$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{(x - a)(x - b)} \quad \text{Rp. } \frac{a + b}{2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + \sqrt{3x^2 + \sqrt{3x^2}}} - \sqrt[3]{x + 1}}{4x} \quad \text{Rp. } \frac{3}{4}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(8x + 1)^2}}{\sqrt[3]{5x + 2} + (x + 3)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{Rp. } 4$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x + \sqrt{2x + \sqrt{2x}}} - x \quad \text{Rp. } -\infty$$

12. Hallar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$, para las siguientes funciones:

12.1) $F(x) = x^2 - 2x$

12.2) $F(x) = 5x^2 - 7x + 4$

12.3) $F(x) = x^2 + 3x - 5$

12.4) $F(x) = 4\sqrt{2x+5}$

12.5) $F(x) = \sqrt[3]{2x - x^2}$

12.6) $F(x) = \frac{3x+2}{2-x}$

BIBLIOGRAFIA:

FIGUEROA, Ricardo	Matemática Básica	Edit Gráficas América S.R.L	Lima	2004
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001
LEITHOLD, Louis	Cálculo con Geometría analítica	Editorial Oxford	México	2004
http://descartes.cnice.mec.es				

UNIDAD DE
APRENDIZAJE**4**

SEMANA

12

LÍMITES Y CONTINUIDAD

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos utilizando las propiedades de límites y las condiciones de continuidad, resolverán problemas de límites indeterminados, en el infinito y trigonométricos, y problemas de continuidad de una función en un punto dado, haciendo uso del álgebra básica y de las representaciones gráficas en el plano.

TEMARIO

- Límites de funciones :
 - Límites de funciones trigonométricas

ACTIVIDADES

- Calcula límites indeterminados de funciones Trigonométricas.
- Calcula límites indeterminados de funciones algebraicas y trascendentes.

4.12 LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

4.12.1 Límites trigonométricos fundamentales

$$1.- \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$$

$$2.- \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$3.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen} x}{x} = 1$$

$$4.- \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$$

$$5.- \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Cos} x = 1$$

$$6.- \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Sen} x = 0$$

$$7.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Tg} x}{x} = 1$$

$$8.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$9.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$10.- \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{4}{\pi\sqrt{2}}$$

$$11.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4} = 0$$

$$12.- \lim_{x \rightarrow \pi/6} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$13.- \lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} x = 1$$

4.12.2 Ejercicios de aplicación

Calcule los siguientes límites:

1)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{\cos t} - \cos t}{t^2} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos t}}{t^2} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos t}}{t^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos t}}{1 + \sqrt{\cos t}} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos t}} + \frac{1}{2} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{\cos t}} + \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 2\pi x}{x} = 2\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 2\pi x}{2\pi x} = 2\pi(1) = 2\pi$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 10x}{\text{Sen} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{Sen} 10x}{x}}{\frac{\text{Sen} 5x}{x}} = \frac{10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 10x}{10x}}{5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 5x}{5x}} = \frac{10(1)}{5(1)} = 2$$

4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

5)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right) = \infty \cdot 0 \text{ (forma indeterminada)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)}{\frac{\pi}{t}} = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)}{\frac{\pi}{t}} = \pi(1) = \pi$$

6)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \frac{k}{\infty}$$

$$-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1 \rightarrow -\frac{1}{t} \leq \frac{\operatorname{sen} t}{t} \leq \frac{1}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \rightarrow -\frac{1}{\infty} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \leq \frac{1}{\infty}; \quad \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 0$$

7)

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \operatorname{Cosec}(\pi x) = 0 \times \infty \text{ (forma indeterminada)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{\operatorname{Sen}(\pi x)} \Rightarrow \text{hacemos } x-3 = z \Rightarrow x = z+3$$

$$\text{Si } x \rightarrow 3, \quad z \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{\operatorname{Sen} \pi x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{Sen} \pi(z+3)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{Sen}(3\pi + \pi z)}$$

$$= -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{Sen} \pi z} = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z}{\pi \operatorname{Sen} \pi z} = -\frac{1}{\pi}$$

8)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen} \sqrt{5}x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{5} \frac{\operatorname{Sen} \sqrt{5}x}{\sqrt{5}x} \\ &= \sqrt{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen} \sqrt{5}x}{\sqrt{5}x} = (\sqrt{5})(1) = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Autoevaluación

I. CALCULE LOS SIGUIENTES LÍMITES:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin x}{x^2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 \sin x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)(x + 4)}{x^2}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{5}x}{\sqrt{2}x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^3 + 3x^2}$$

Respuestas:

1) 1/8 2) ∞ 3) 5 4) 1 5) 1 6) 2 7) 1 8) 2 9) 2 10) 1 11) 3/2

12) 2 13) 4 14) 1 15) 0 16) 2 17) 1/2 18) 2/3 19) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ 20) 1/3

II. CALCULE LOS LÍMITES:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 2x} = 4$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x^2 + 4x} = \frac{3}{4}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^3 + x^2} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 5x}{(x - x^3)^2} = 5$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x} = 1$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} 5x}{x + \operatorname{sen} 7x} = -\frac{1}{2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos x + \cos 2x}{x^2} = -1$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\operatorname{sen}(2x-10)}{(x-5)} = 2$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{4x^2} = \frac{1}{16}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(1-x)}{\sqrt{x}-1} = -2$$

BIBLIOGRAFIA:

FIGUEROA, Ricardo	Matemática Básica	Edit Gráficas América S.R.L	Lima	2004
LARSON, Ron	Cálculo	Editorial McGraw-Hill	México	2006
LEITHOLD, Louis	Cálculo con Geometría analítica	Editorial Oxford	México	2004
STEWART J.	Cálculo de una variable trascen-dente temprana	Thompson Edit	México DF	2001
http://descartes.cnice.mec.es				

**UNIDAD DE
APRENDIZAJE****4****SEMANA****13**

LÍMITES Y CONTINUIDAD

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos, utilizando las propiedades de límites y las condiciones de continuidad, resolverán problemas de límites indeterminados, en el infinito y trigonométricos, y problemas de continuidad de una función en un punto dado, haciendo uso del álgebra básica y de las representaciones gráficas en el plano cartesiano.

TEMARIO

- Límites laterales
- Continuidad de una función en un punto

ACTIVIDADES

- Calcula Límites laterales por la derecha y por la izquierda.
- Evalúa la Continuidad de una función en un punto y en un intervalo.

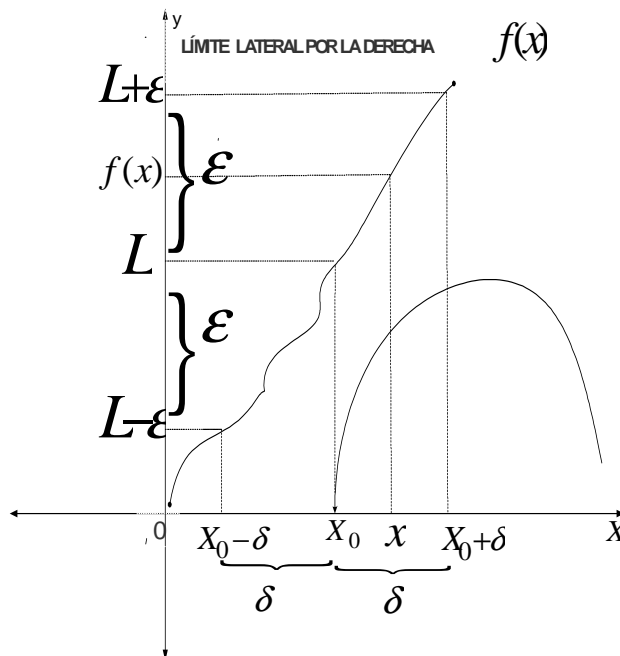
4.13 CONTINUIDAD DE FUNCIONES

4.13.1 LÍMITES LATERALES POR LA DERECHA

Dada una función $f(x)$. Si " x_0 " es un punto de acumulación de $D_f \cap \langle x_0, \infty \rangle$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |f(x) - L| < \varepsilon,$$

siempre que $x \in D_f \wedge 0 < x - x_0 < \delta$



$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (Se lee límite de la función $f(x)$ al acercarse a x_0 por la derecha)

EJEMPLOS:

1) Calcule: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

$$\text{Si } f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 + (x-1)^2} & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{2 + (x-1)^2} = \sqrt{11}$$

2) Calcule: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

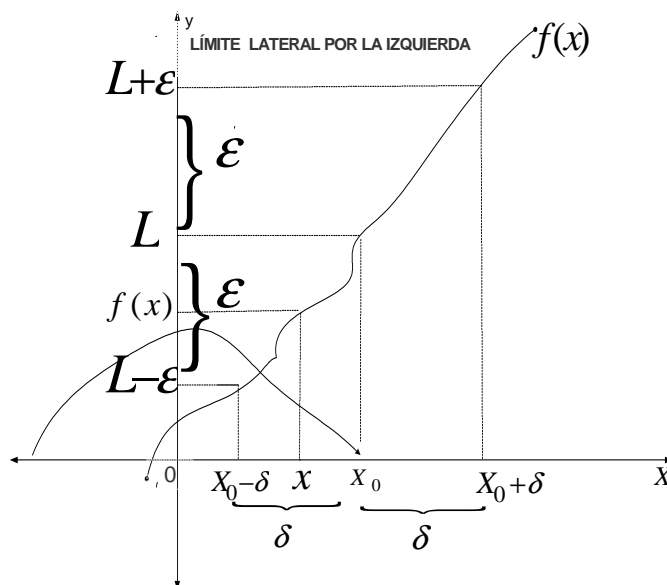
$$\text{Si } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x \in \langle -3, 0 \rangle \\ x^2 + 4, & x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 4 = 4$$

4.13.2 LÍMITE LATERAL POR LA IZQUIERDA

Dada una función $f(x)$, si " x_0 " es un punto de acumulación de $D_f \cap \langle -\infty, x_0 \rangle$; entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |f(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } x \in D_f \wedge 0 < x_0 - x < \delta$$



$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (Se lee límite de la función $f(x)$ al acercarse a x_0 por la izquierda)

EJEMPLOS:

1) Calcule: $\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x)$

$$\text{Si } f(x) = \begin{cases} (x-8)^3 & , \quad x \geq 8 \\ -(x-8)^3 & , \quad x < 8 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} -(x-8)^3 = 0$$

2) Calcule: $\lim_{x \rightarrow -(\frac{1}{2})^-} f(x)$

$$\text{Si } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 & , \quad x < -\frac{1}{2} \\ 2x - 3 & , \quad x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{1}{2}(x^3) + 4x^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

3) Calcule: $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

$$\text{Si } f(x) = \begin{cases} \frac{-8}{|x|^3} & , \quad |x| \geq 2 \quad , \quad x \geq 2 \quad \text{o} \quad \leq -2 \\ -\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2} & , \quad x \geq 8 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-8}{x^3} = -\frac{8}{(-2)^3} = 1$$

OBSERVACIÓN:

- Una función $f(x)$ tiene límite en $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, se dice que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$ no existe.

EJEMPLO:

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ si es que existe.

$$\text{Si } f(x) = \begin{cases} (x^2 + 2) & , \quad x \geq 1 \\ \sqrt[3]{2^3 x + 19} & , \quad x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[3]{8x+19} = 3$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe, puesto que sus límites laterales son iguales

4.13.3 LÍMITES IMPROPIOS

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

$$-\frac{a}{\infty} = 0$$

$$\frac{a}{-\infty} = 0$$

$$-\frac{a}{-\infty} = 0$$

$$\frac{-a}{0} = -\infty$$

$$\frac{a}{-0} = -\infty$$

$$\frac{a}{-0} = -\infty$$

$$-\frac{a}{0} = -\infty$$

EJEMPLOS:

Calcule los siguientes límites laterales:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{(x+3)(x-3)} = \frac{3+1}{(-0)(6)} = \frac{4}{-0} = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{16-x^2}{(x-4)\sqrt{16-x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(4-x)(4+x)}{-(4-x)\sqrt{16-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4+x}{-\sqrt{16-x^2}} = \frac{8}{-0} = -\infty \end{aligned}$$

4.13.4 CONTINUIDAD EN UN PUNTO

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 , del dominio de la función, si cumple las siguientes condiciones :

- i) $f(x_0)$ existe, es decir, es un número real.
- ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, es decir, sus límites laterales son iguales
- iii) $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Si cualquiera de las tres condiciones no se cumple, la función no es continua o se dice que es discontinua.

Una función es continua en un intervalo, si es continua en cada uno de los puntos de dicho intervalo. Una función polinomial es continua en todos los reales y una función racional es continua en todos los reales con excepción de los puntos que anule el denominador.

EJEMPLOS:

- 1) Probar si $f(x)$ es continua en $x = 0$ para :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 0 \\ 2 - x, & x > 0 \end{cases}$$

$$i) \quad x_0 = 0 \quad f(x_0) = f(0) = 0 + 2 = 2$$

$$ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - x) = 2 - 0 = 2$$

$$iii) \quad f(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

$$2 = 2$$

$\therefore f(x)$ es continua en $x = 0$

- 2) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 2 \\ \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}, & x \neq 2 \end{cases}$$

¿Será continua en $x = 2$? $x_0 = 2$

$$i) \quad x_0 = 2 \quad f(x_0) = f(2) = 3$$

$$ii) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x - 1)(x - 2)}{(x - 2)} = 5$$

$$iii) \quad f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ 3 \neq 5$$

Por lo tanto $f(x)$ no es continua en $x = 2$

3) Halle las constantes a y b , para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio si

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in \langle -5, 0 \rangle \\ ax + b, & x \in [0, 1) \\ x - 2, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

La función debe ser continua en $x = 0$ y $x = 1$

* Para $x = 0$

$$i) \quad f(x_0) = f(0) = a(0) + b = b$$

$$ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = 0 - 1 = -1$$

$$iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \\ -1 = b$$

** Para $x_0 = 1$

$$i) \quad f(x_0) = f(1) = 1 - 2 = -1$$

$$ii) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b$$

$$iii) \quad -1 = a(1) + b \\ -1 = a - 1 \rightarrow a = 0$$

4) Calcule los puntos de discontinuidad para la función definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x}$$

Solución

$$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) \neq 0$$

La ecuación polinomial del denominador forma una restricción, por ello el dominio:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, -2, 2\}$$

Por lo tanto $f(x)$ es discontinua en $x=0$, $x=-2$ y $x=2$.

4.13.5 PROBLEMAS SOBRE CONTINUIDAD

I. Determina si las siguientes funciones son continuas en todos los números reales.

$$a. f(x) = \begin{cases} e^x & , x < 1 \\ 4 & , x = 1 \\ -x + e + 1 & , x > 1 \end{cases} \quad \text{Rp. No es continua}$$

$$b. f(x) = \begin{cases} (x-5)^2 & , x < 5 \\ -x + 5 & , 5 \leq x < 11 \\ -6 & , x \geq 11 \end{cases} \quad \text{Rp. Sí es continua}$$

$$c. f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{2-x} & , x \leq 1 \\ \frac{8-3x}{x+1} & , 1 < x < 2 \\ \frac{x}{3} & , x \geq 2 \end{cases} \quad \text{Rp. Sí es continua}$$

II. Resuelve.

1. Halla los valores de c y k para que la función dada sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4-x}}{x} & , x < 0 \\ 3kx + 2c & , 0 \leq x \leq 5 \\ k - 2cx & , x > 5 \end{cases} \quad \text{Rp. } \begin{cases} c = \frac{1}{4} \\ k = -\frac{3}{14} \end{cases}$$

2. Halle los valores de m y n para que la función dada sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2-\sqrt{x^3+3}}, & x < 1 \\ nx+2m, & 1 \leq x \leq 3 \\ 13+2nx-mx^2, & x > 3 \end{cases} \quad \text{Rp. } \begin{matrix} m=1 \\ n=-\frac{2}{3} \end{matrix}$$

3. Halle los valores de a y b para que la función dada sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2-bx+13, & x < -5 \\ b-4ax, & -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{x^3+2x^2-5x-6}{x+1}, & x > -1 \end{cases} \quad \text{Rp. } \begin{matrix} a=-1 \\ b=-2 \end{matrix}$$

4. Halle $m \in \mathbb{R}$, de tal manera que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2-\sqrt{x^3+3}}, & \text{si } x \neq 1 \\ m, & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{sea continua en } x_0 = 1$$

5. Sea la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+2m, & \text{si } x < -2 \\ 2mx+n, & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x-n, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Halle el valor de m y n para que la función sea continua en los puntos -2 y 1 .

6. Determine los valores de a y b , de modo que la función sea continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -3 < x \leq 0 \\ x-a & \text{si } 0 < x < 2 \\ b-x^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Autoevaluación

1. Calcule si existe, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, Donde: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , si \ x \leq 1 \\ x + 1 & , si \ x > 1 \end{cases}$
2. Calcule si existe, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, Donde: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , si \ x \leq 2 \\ 8 - 2x & , si \ x > 2 \end{cases}$
3. En los siguientes ejercicios trace la gráfica y halle el límite si existe. Si no existe, explique por qué no existe.
 - a) $f(x) = \begin{cases} 2 & , si \ x < 1 \\ -1 & , si \ x = 1 \\ -3 & , si \ 1 < x \end{cases}$
 - b) $f(x) = \begin{cases} x + 5 & , si \ x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & , si \ -3 \leq x \leq 3 \\ 5 - x & , si \ 3 < x \end{cases}$
 - c) $f(t) = \begin{cases} t + 4 & , si \ t \leq -4 \\ 3 - t & , si \ -4 < t \end{cases}$
 - d) $f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t} & , si \ t < 0 \\ \sqrt{t} & , si \ 0 \leq t \end{cases}$
4. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & , si \ x < 4 \\ 5x + k & , si \ 4 \leq x \end{cases}$. Halle el valor de K para que $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ exista.
5. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x}$
6. Calcule $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 5}{x^2 - 9}$
7. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^3}$

8. Para $g(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}; & x \geq 5 \\ \frac{x^2-12x+35}{x-5}; & x < 5 \end{cases}$ ¿existe $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$?

9. Halle los valores A y B para que la función f(x) sea continua en su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 4 & ; \text{ si } x < -1 \\ Ax + B & ; \text{ si } -1 \leq x < 3 \\ \sqrt{x-3} & ; \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

10. Calcule $b \in \mathbb{R}$, de tal manera que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{sea continua en } x_0 = 0$$

11. Halle $c \in \mathbb{R}$, de tal manera que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ c & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{sea continua en } x_0 = 1$$

BIBLIOGRAFIA:

FIGUEROA, Ricardo	Matemática Básica	Edit Gráficas América S.R.L	Lima	2004
LARSON, Ron	Cálculo	Editorial McGraw-Hill	México	2006
LEITHOLD, Louis	Cálculo con Geometría analítica	Editorial Oxford	México	2004
STEWART J.	Cálculo de una variable trascendente temprana	Thompson Edit	México DF	2001
http://descartes.cnice.mec.es				

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

5

SEMANA

14

LA DERIVADA

LOGROS DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos, aplicando las propiedades de la derivación, resuelven ejercicios y problemas de derivación de funciones algebraicas y trascendentes, señalan la ecuación de la recta tangente y normal de una función en un punto dado, haciendo uso del álgebra básica y de las representaciones gráficas en el plano cartesiano y muestra sus aplicaciones en situaciones reales.

TEMARIO

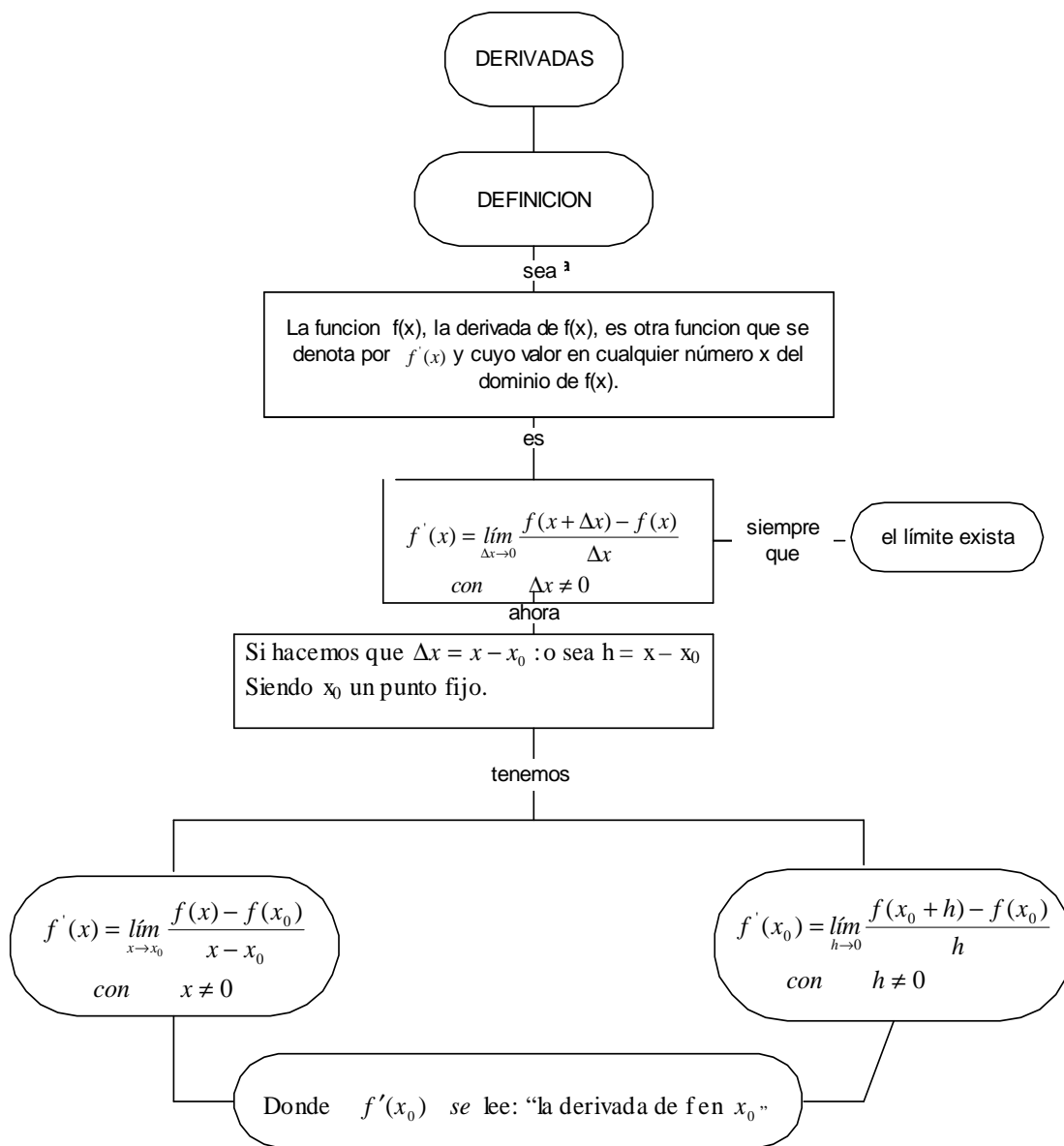
- La derivada y sus aplicaciones
 - Definición de la derivada como un límite
 - Interpretación geométrica de la derivada
 - Fórmulas de derivación
 - Derivada de funciones algebraicas

ACTIVIDADES

- Calcula la derivada como el límite de una función, siempre que esta exista.
- Interpreta la definición de la derivada como una aproximación de la secante a una tangente.
- Calcula derivadas de funciones algebraicas básicas.

5.14 DEFINICION DE DERIVADA

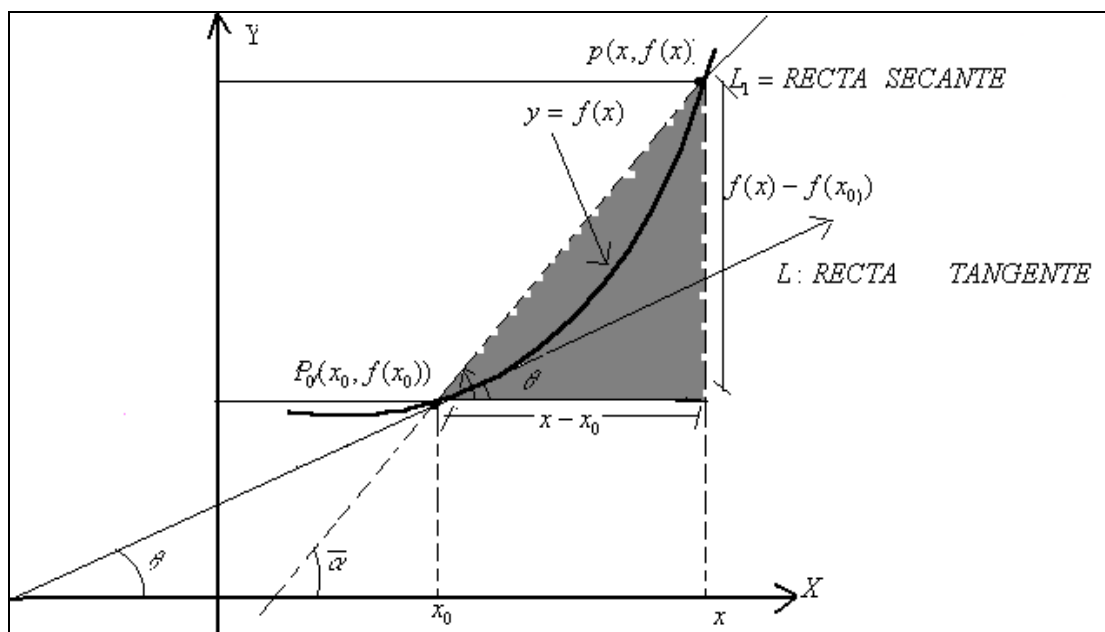
5.14.1 DEFINICIÓN GENERAL



Otras notaciones de la derivada: $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = D_x y = \dot{y}$

5.14.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

En la figura podemos apreciar:



1° La pendiente de la RECTA SECANTE L_1 que pasa por los puntos $P_0(x_0, f(x_0))$ y $P(x, f(x))$, es:

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0$$

2° La pendiente de la RECTA TANGENTE L es: $\operatorname{Tg} \theta$

3° Supongamos que el punto $P_0(x_0, f(x_0))$ pertenece a la curva f y es fijo. $P(x, f(x))$ es un punto de la curva que se mueve acercándose al punto $P_0(x_0, f(x_0))$.

A medida que $P(x, f(x))$ se acerca a $P_0(x_0, f(x_0))$ resultará que la variable x se acerca a x_0 cada vez más, de modo que el incremento $\Delta x = x - x_0$ tiende a cero, pero nunca será cero. Este incremento es infinitésimo y se denota:

$$\text{Si } x \rightarrow x_0 \text{ entonces } \Delta x = (x - x_0) \rightarrow 0$$

Desde el momento en que el acercamiento (aproximación) es INFINITÉSIMO, entonces se hace uso del concepto de LÍMITE.

4° Así, llegamos a la siguiente conclusión:

Cuando el punto $P(x, f(x))$ tiende a acercarse a $P_0(x_0, f(x_0))$, entonces la RECTA SECANTE L_1 tiende a TRANSFORMARSE EN RECTA TANGENTE L .

Además, la **Pendiente de la recta secante** $L_1 =$
 $Tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$, tiende a convertirse en :

Pendiente de la recta tangente $L =$

$$Tg\theta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0$$

Además:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

Donde $h = \Delta x$ y la pendiente de la tangente es $m_t = f'(x_0)$ entonces:

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ejemplos de Aplicación:

1. Calcule la derivada de $f(x) = 8x^2 + 2x$

Por definición.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{ó} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \dots\dots$$

(2)

Calculando $f(x + \Delta x)$, reemplazando x por $(x + \Delta x)$ en la función f .

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= 8(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) \\ &= 8[x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2] + 2x + 2(\Delta x) \\ &= 8x^2 + 16x.\Delta x + 8(\Delta x)^2 + 2x + 2(\Delta x) \end{aligned}$$

Calculando:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 8x^2 + 16x.\Delta x + 8(\Delta x)^2 + 2x + 2(\Delta x) - (8x^2 + 2x)$$

Simplificando:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 16x.\Delta x + 8(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)$$

Reemplazando en (2) y factorizando :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(16x + 8(\Delta x) + 2)}{\Delta x}$$

Cancelando Δx :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (16x + 8(\Delta x) + 2) = 16x + 8(0) + 2$$

$f'(x) = 16x + 2$. Esta función es conocida como la función derivada.

2. Haciendo uso de la definición de la derivada de una función. Halle $f'(x)$

si $f(x) = \frac{3}{2x^2 - 3x + 3}$

Solución:

Por definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = \frac{3}{2x^2 - 3x + 3}, f(x+h) = \frac{3}{2(x+h)^2 - 3(x+h) + 3},$$

estos datos reemplazando en la fórmula.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2(x+h)^2 - 3(x+h) + 3} - \frac{3}{2x^2 - 3x + 3}}{h}$$

$$f'(x) = 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^2 - 3x + 3 - (2(x+h)^2 - 3(x+h) + 3)}{(2(x+h)^2 - 3(x+h) + 3)(2x^2 - 3x + 3)}}{\frac{h}{1}}$$

$$f'(x) = 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x + 3 - 2x^2 - 4hx - 2h^2 + 3x + 3h - 3}{h(2(x+h)^2 - 3(x+h) + 3)(2x^2 - 3x + 3)},$$

simplificando y factorizando.

$$f'(x) = 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4x - 2h + 3)}{h(2(x+h)^2 - 3(x+h) + 3)(2x^2 - 3x + 3)},$$

simplificando h.

$$f'(x) = 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-4x - 2h + 3)}{(2(x+h)^2 - 3(x+h) + 3)(2x^2 - 3x + 3)}$$

$$f'(x) = 3 \frac{(-4x - 2(0) + 3)}{(2(x+(0))^2 - 3(x+(0)) + 3)(2x^2 - 3x + 3)}$$

$$f'(x) = 3 \frac{(-4x + 3)}{(2x^2 - 3x + 3)(2x^2 - 3x + 3)}$$

Por lo tanto la función derivada es:

$$f'(x) = - \frac{3(4x - 3)}{(2x^2 - 3x + 3)^2}$$

3. Halle la derivada de $f(x) = \sqrt{2x+1}$, utilizando la definición de la derivada.

Solución:

Por definición

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots\dots\dots(1)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 2\Delta x + 1} - \sqrt{2x + 1}}{\Delta x}$$

Racionalizando el numerador para obtener un factor común Δx en el numerador y denominador:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x + 2\Delta x + 1} - \sqrt{2x + 1})(\sqrt{2x + 2\Delta x + 1} + \sqrt{2x + 1})}{\Delta x(\sqrt{2x + 2\Delta x + 1} + \sqrt{2x + 1})}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x + 1 - (2x + 1)}{\Delta x(\sqrt{2x + 2\Delta x + 1} + \sqrt{2x + 1})}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2x + 2\Delta x + 1} + \sqrt{2x + 1})}, \text{ Cancelando } \Delta x :$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x + 2\Delta x + 1} + \sqrt{2x + 1}}$$

Evaluando el límite se obtiene la función derivada

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

4. Usando definición de la derivada, Calcule $f'(x)$ y $f'(5)$ si $f(x) = (x^2 - 5x)^{10}$

Solución:

Por definición

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x) = (x^2 - 5x)^{10}$, $f(x+h) = ((x+h)^2 - 5(x+h))^{10}$,
reemplazando en la fórmula estos datos.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h)^2 - 5(x+h))^{10} - (x^2 - 5x)^{10}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - 5(x+h) - (x^2 - 5x)][((x+h)^2 - 5(x+h))^9 +$$

$$\frac{((x+h)^2 - 5(x+h))^8(x^2 - 5x) + (x^2 - 5x)^9}{h}]$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^2 + 2hx + h^2 - 5x - 5h - x^2 + 5x][\dots\dots\dots]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[2x + h - 5][\dots\dots\dots]}{h}, \text{ simplificando h}$$

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} [2x + h - 5] \frac{[(x+h)^2 - 5(x+h))^9 + ((x+h)^2 - 5(x+h))^8(x^2 - 5x) + \dots + (x^2 - 5x)^9]}{10 \text{ términos}}$$

$$f'(x) = (2x-5)\left[(x^2-5x)^9 + (x^2-5x)^8(x^2-5x) + \dots + (x^2-5x)^9\right]$$

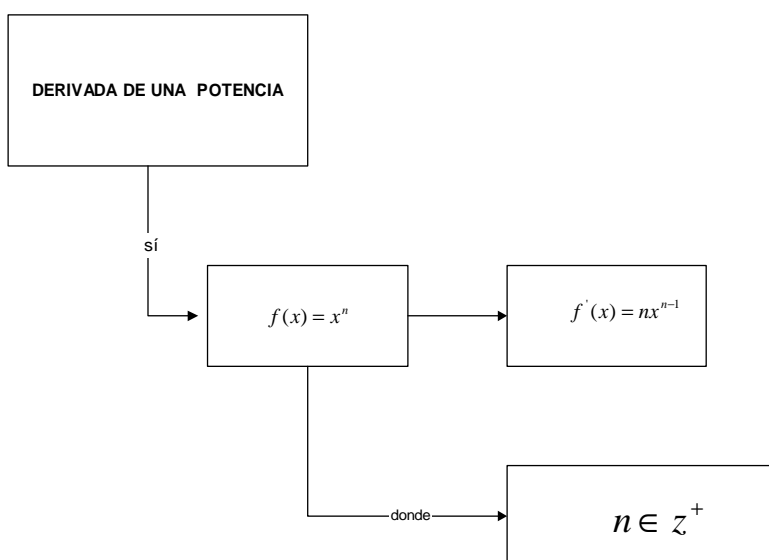
$$f'(x) = (2x-5).10(x^2-5x)^9$$

Por lo tanto la función derivada es:

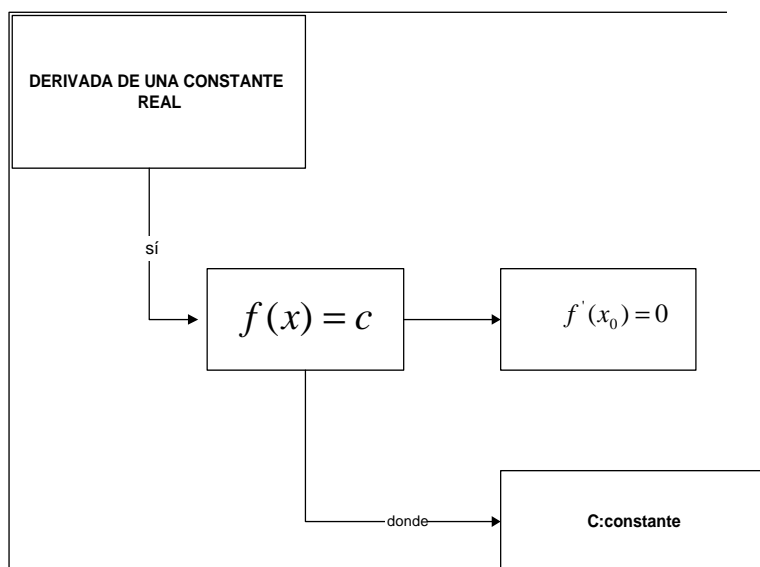
$$f'(x) = 10(x^2-5x)^9(2x-5); f'(5) = 0.$$

5.14.3 DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

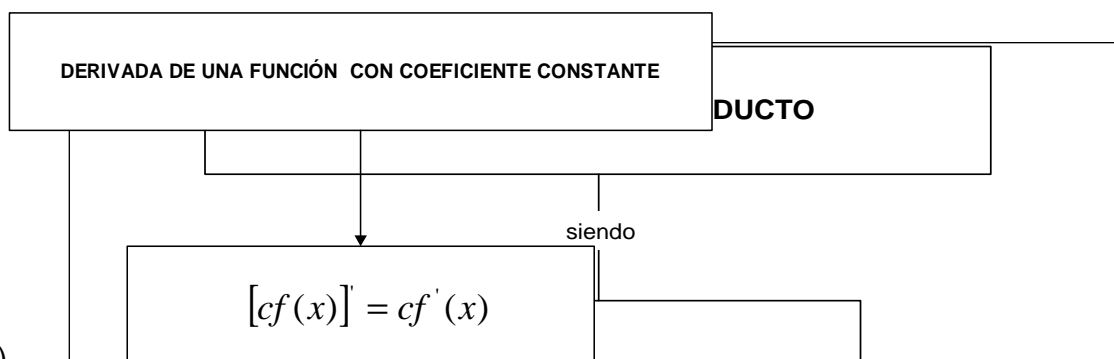
a)



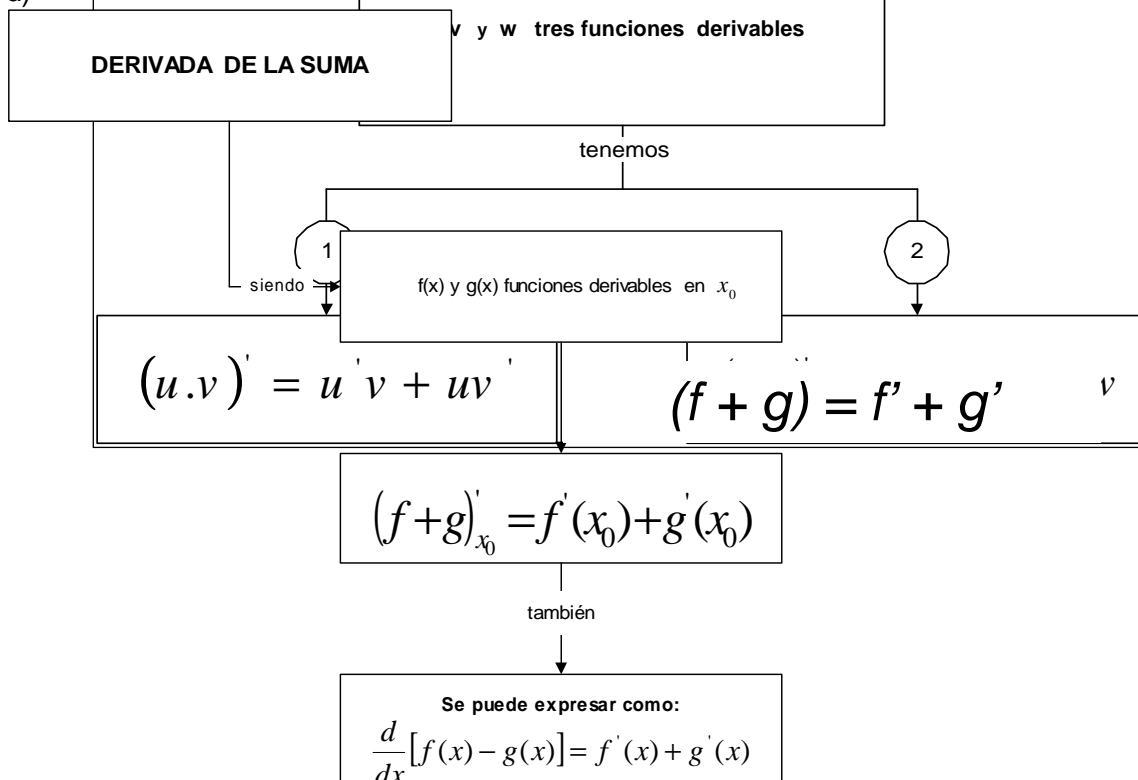
b)



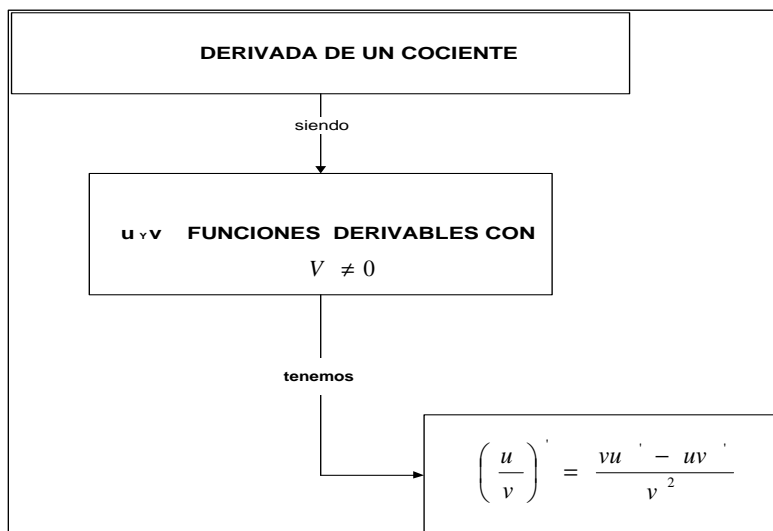
c)



d)



e)



EJEMPLOS:

1. Halle y' si $y = (3x^2 + 2)\sqrt[4]{1+5x^2}$

Solución:

$$y' = (3x^2 + 2) \frac{10x}{4\sqrt[4]{(1+5x^2)^3}} + \sqrt[4]{1+5x^2} (6x)$$

2. Halle y' si $f(x) = \sqrt[4]{(x^3 - \sqrt{x})^3} \cdot (\sqrt{x^3 - 1} + x\sqrt{x})^5$

Solución:

$$f'(x) = \left[\frac{3}{4\sqrt[4]{(x^3 - \sqrt{x})}} \cdot (3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}) \right] (\sqrt{x^3 - 1} + x\sqrt{x})^5$$

$$+ 5(\sqrt{x^3 - 1} + x\sqrt{x})^4 \left[\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right] \sqrt[4]{(x^3 - \sqrt{x})^3}$$

3. Halle $f'(x)$ si $y = f(x) = -3x^3 + x + 8$

Solución:

$$y' = f'(x) = \frac{d}{dx}(-3x^3) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(8)$$

$$f'(x) = -3 \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x) + 0$$

$$f'(x) = -3(3)(x^2) + 1(x)^0 + 0$$

$$f'(x) = -9x^2 + 1$$

Autoevaluación

I. Utilizando la definición de la derivada halle y ' en las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

e) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{4x} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{5}$, $f'(\frac{1}{16})$

f) $f(x) = \frac{1 + \sqrt[3]{x^2}}{4 - x^5}$

g) $f(x) = \frac{x^5 + 3}{(x^2 - 4x + 1)^2}$

II. Encuentre el valor de verdad o falsedad en las siguientes proposiciones:

a) La gráfica de la función derivada de $y = 0.5x^2$, es la función identidad.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, es una derivada en $x = 2$.

c) La derivada de $f(x) = \frac{5}{x}$, existe en $x = 0$.

d) El $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(5+h)^3 - 2(5)^3}{h}$, es una derivada de $f(x) = 2x^3$

en $x = 5$.

e) $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^3 + t - 30}{t - 3} = f'(3)$

RESPUESTAS:

VVFVV

III. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x^2 + x^{-1} + 2x^{0,1}$

b) $f(x) = 3\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 2x + 8$

c) $f(x) = 3x^{-1} + \sqrt{x^{-1}} + 4\sqrt[3]{x^6} - x^{-0,7}$

d) $f(x) = (3x^2 + 1)(-2 + x^3)$

e) $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^{-2} + x^{-1} + 1)$

f) $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$

g) $f(x) = \frac{2x^{-3}}{x^2 + x + 1}$

h) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x}$

BIBLIOGRAFIA:

FIGUEROA, Ricardo	Matemática Básica	Edit Gráficas América S.R.L	Lima	2004
LARSON, Ron	Cálculo	Editorial McGraw-Hill	México	2006
LEITHOLD, Louis	Cálculo con Geometría analítica	Editorial Oxford	México	2004
STEWART J.	Cálculo de una variable trascendente temprana	Thompson Edit	México DF	2001
http://descartes.cnice.mec.es				

**UNIDAD DE
APRENDIZAJE****5****SEMANA****15**

LA DERIVADA

LOGROS DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos, aplicando las propiedades de la derivación, resuelven ejercicios y problemas de derivación de funciones algebraicas y trascendentes, señalan la ecuación de la recta tangente y normal de una función en un punto dado, haciendo uso del álgebra básica y de las representaciones gráficas en el plano cartesiano y muestran sus aplicaciones en situaciones reales.

TEMARIO

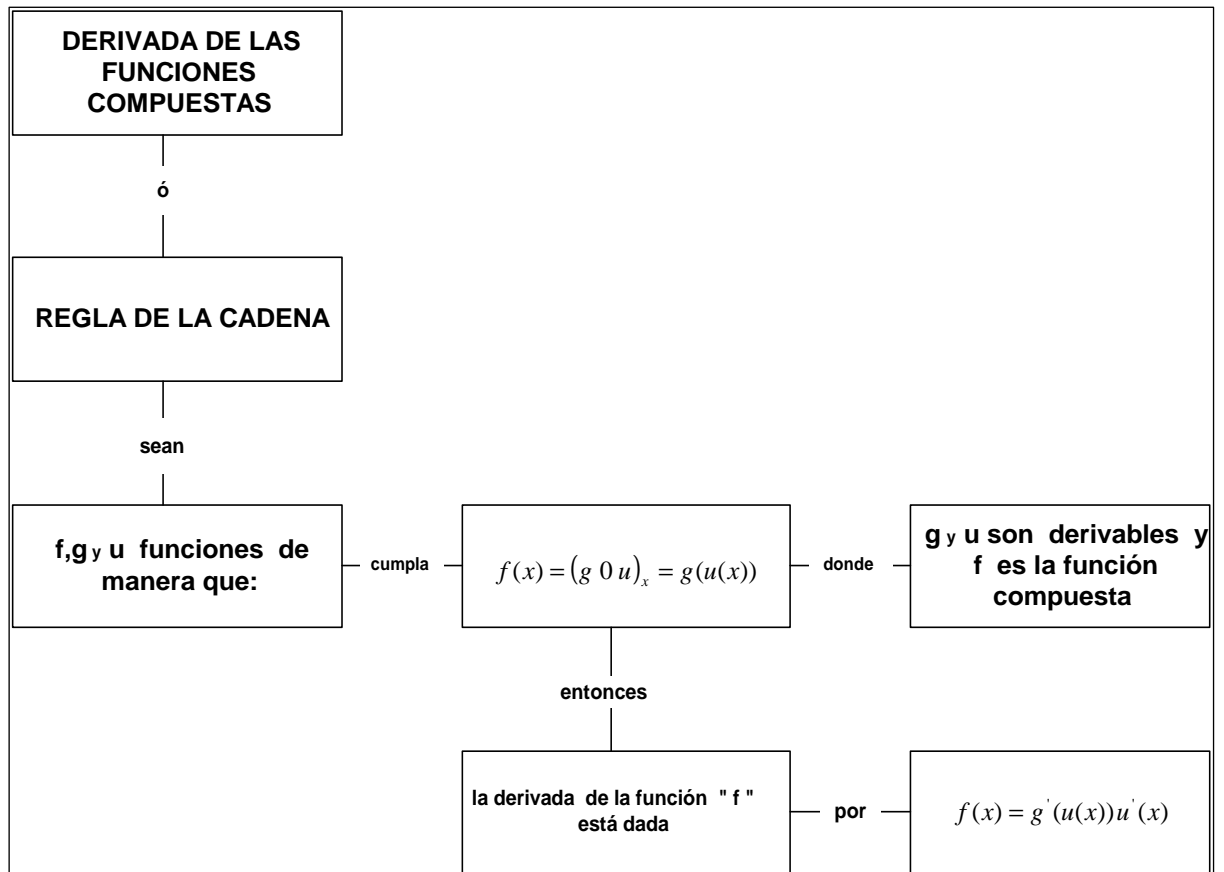
- La derivada y sus aplicaciones
 - La regla de la cadena
 - Recta tangente y normal
 - Relación entre continuidad y las derivadas de una función

ACTIVIDADES

- Hallan la derivada de funciones compuestas, aplicando la regla de la cadena para 2 ó 3 variables.
- Hallan las ecuaciones de la recta tangente y normal de curvas de funciones algebraicas.

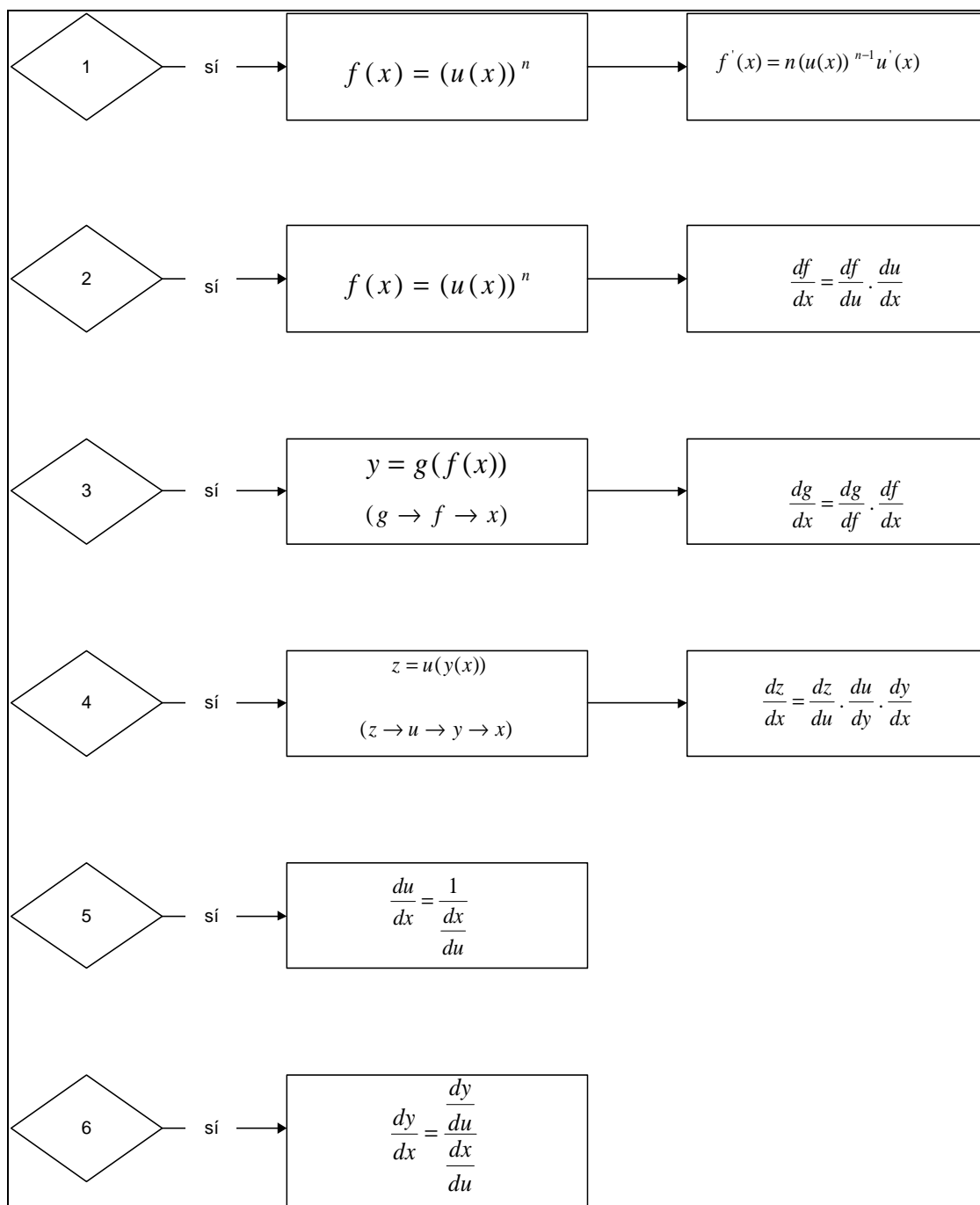
5.15. LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES

5.15.1 DERIVACIÓN DE UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

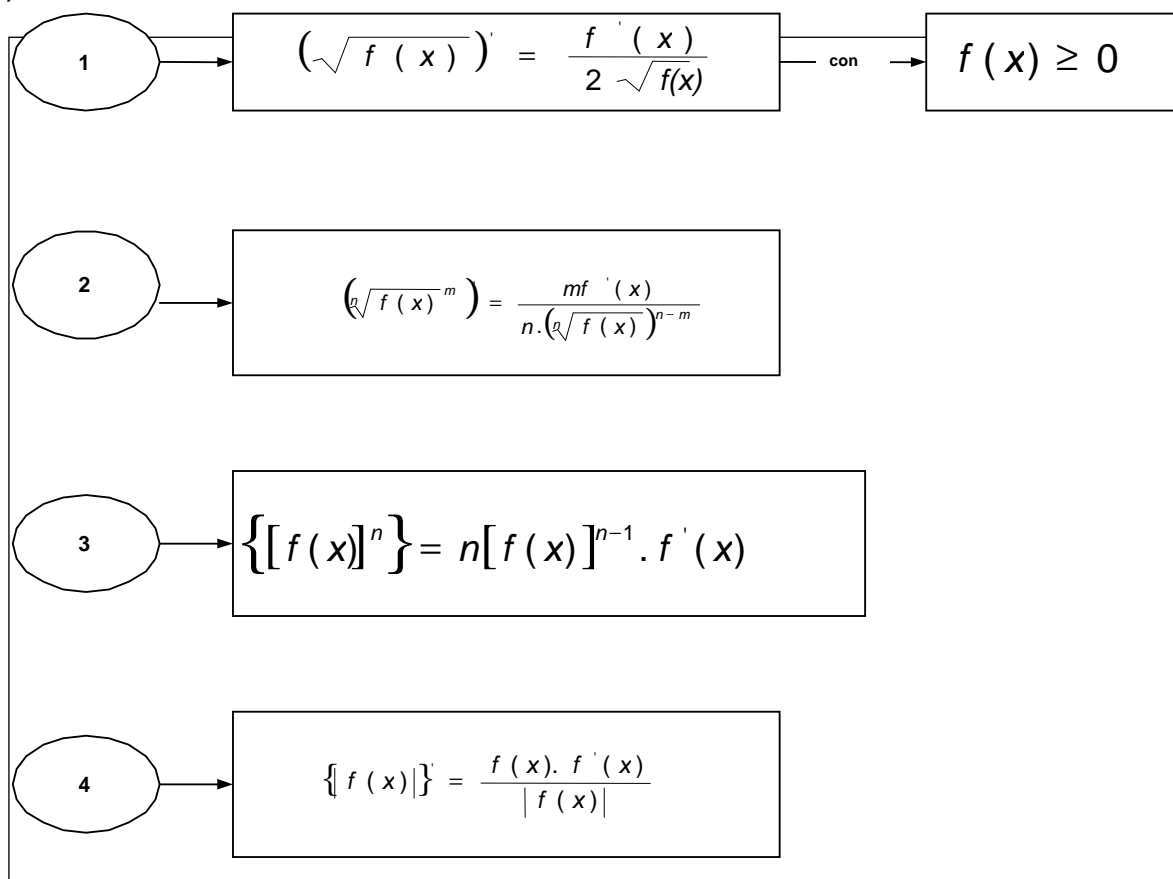


5.15.2 REGLAS PRÁCTICAS DE DERIVACIÓN

a) CASO 1



b) CASO2



EJEMPLOS :

1. Si $f(x) = 4 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + x^2}}}}$

Calcule $f'(1)$

Sugerencia: Use regla de la cadena .

Hacer: $z = 3 + x^2$

Solución:

Sea $z = 3 + x^2$, $u = 2 + \sqrt{z}$, $v = 2 + \sqrt{u}$

$$w = 2 + \sqrt{v}, \quad f = 4 + \sqrt{w}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{w}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot (2x) \dots \dots \dots (\beta)$$

Si $x = 1 \Rightarrow z = 4, u = 4, v = 4, w = 4$

De (β)

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 2(1)$$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{1}{128}}$$

2. Si $y = \sqrt[3]{v}$, $v = u^2$, $u = t^3 + 3t^2 - t + 1$. Calcule $\frac{dy}{dt}$

Solución:

Utilizando regla práctica para el cálculo de $\frac{dy}{dt}$

$$y = (t^3 + 3t^2 - t + 1)^{\frac{2}{3}} \text{ entonces } y' = \frac{2(t^3 + 3t^2 - t + 1)^{-\frac{1}{3}} (3t^2 + 6t - 1)}{3}$$

3. Si $f(x) = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{1}{24(2x-1)^6} - \frac{1}{40(2x-1)^5}$, calcule $\frac{dy}{dx}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{-42}{56(2x-1)^8} + \frac{12}{24(2x-1)^7} + \frac{10}{40(2x-1)^6}$$

EJERCICIOS:

I. Determine la primera derivada para las siguientes funciones :

a) $y = (x^4 - 3x^2 + x - 5)^{50}$

b) $y = 4(x^8 + 8x^2 - 3x - 1)^{-30}$

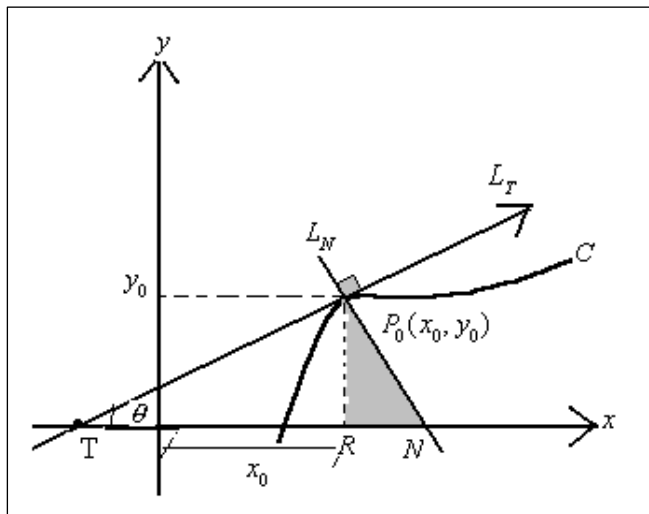
c) $y = (x^5 + x + 1)^{10} (x^4 - 3x^2 + x - 5)^{50}$

d) $y = \frac{(x^4 - 3x^2 + x - 5)^{50}}{(x^5 + x + 1)^{10}}$

5.15.3 APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA DERIVADA

5.15.3.1 Ecuaciones de las rectas Tangente y normal

- Sea la curva C cuya ecuación es $F(x,y)=0$
- Sea la recta L_T que es tangente a la curva C en el punto (x_0, y_0) .



La ecuación de la recta L_t es: $y - y_0 = m (x - x_0)$.

Donde $m = \text{Tg } \theta$ pendiente de L_t

Pero la pendiente “m”, desde el punto de vista del cálculo diferencial, es la

DERIVADA DE y CON RESPECTO A x EN EL PUNTO (x_0, y_0) .

Es decir: $m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)}$

Entonces, la ecuación de la recta tangente es $L_t: y - y_0 = m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)$

Si $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = \pm \infty$, entonces $L_t: x - x_0 = 0$

Como la recta normal es perpendicular a la recta secante en el punto (x_0, y_0) . Entonces, la ecuación de la recta normal

$$\text{será } L_N : y - y_0 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_0)$$

$$\text{Si } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = 0 \text{ entonces } L_N : x - x_0 = 0$$

NOTAS:

Una función es derivable en un punto, si se puede hallar una única recta tangente en dicho punto.

Si f es continua en x_0 , y $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ entonces, se dice que la función es derivable o diferenciable en x_0 .

$f'(x_0^+)$ es la derivada de f al acercarse a x_0 por la derecha y $f'(x_0^-)$ es la derivada de f al acercarse a x_0 por la izquierda.

EJEMPLOS:

1. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + x + 1$ en el punto cuya abscisa es 2.

Solución:

Por definición; la ecuación de la recta tangente.

$$y - f(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{Por dato } x_0 = 2 \dots \dots \dots (2)$$

$$\Rightarrow f(x_0) = f(2) = 2^2 + 2 + 1$$

$$\therefore f(x_0) = 7 \dots \dots \dots (3)$$

Cálculo de $f'(x_0)$

$$f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = 2(2) + 1 = 5 \dots \dots (4)$$

Reemplazando (4), (3), (2) en (1)

$$y - 7 = 5(x - 2)$$

2. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $f(x) = x^3 + 1$ en el punto cuya ordenada es 2.

Solución:

Por definición; la ecuación de la recta tangente.

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \dots \dots \dots (1)$$

Por dato $f(x_0) = 2 = x^3 + 1 \dots \dots \dots (2)$

$$\Rightarrow x^3 = 1 \quad \therefore x_0 = 1 \dots \dots \dots (3)$$

Cálculo de $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = 3x^2$$

$$f'(1) = f'(1)^2 = 3 \dots \dots \dots (4)$$

Reemplazando (4) , (3), (2) en (1)

$$y - 2 = 3(x - 1)$$

3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 8$ que pasa por el punto (2,-44)

Solución:

- 1.- Verificamos si el punto (2,-44) está en la curva $f(x) = 3x^2 - 8$

$$\text{El punto } (2, -44) \Rightarrow x = 2 \wedge y = -44 \Rightarrow -44 = 3(2)^2 - 8 \Rightarrow -44 \neq 4$$

\therefore Como no se cumple la igualdad, el punto no está en la curva.

- 2.- Se sabe que la recta tangente:

$$L_t = y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \dots \dots \dots (1)$$

El punto de tangencia es (x_0, y_0)

$$f'(x) = 6x \Rightarrow f'(x_0) = 6x_0$$

Reemplazando en (1)

$$L_t = y - (3x_0^2 - 8) = 6x_0(x - x_0)$$

Pero L_t pasa por el punto de tangencia (2,-44), entonces éste verifica la ecuación de L_t :

$$-44 - (3x_0^2 - 8) = 6x_0(2 - x_0)$$

$$-44 - 3x_0^2 + 8 = 12x_0 - 6x_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 6)(x_0 + 2) = 0$$

$$x_0 = 6 \vee x_0 = -2$$

$$y_0 = 100 \vee y_0 = 4$$

Hay dos respuestas:

$$L_1 = y - 100 = 6(6)(x - 6)$$

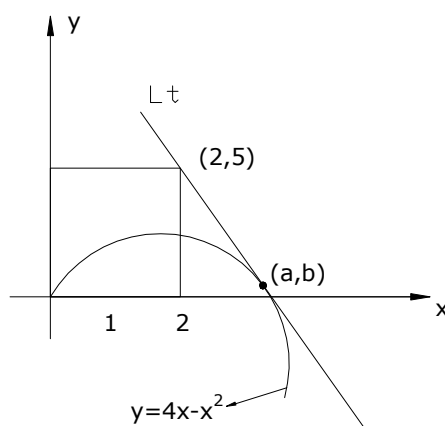
$$y - 100 = 36x - 216 \Rightarrow 36x - y - 116 = 0$$

$$L_2 = y - 4 = 6(-2)(x + 2)$$

$$y - 4 = -12x - 24 \Rightarrow 12x + y + 20 = 0$$

4. Hay dos tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto $(2,5)$. Encuentre la ecuación general de ambas tangentes.

Solución:



Como (a,b) pertenece a la función, entonces se tiene

$$b = 4a - a^2 \dots\dots\dots(1)$$

$$m_{L_t} = f'(a), \quad f'(x) = 4 - 2x, \quad m_{L_t} = \frac{5-b}{2-a}$$

$$f'(a) = 4 - 2a \rightarrow 4 - 2a = \frac{5-b}{2-a} \Rightarrow 8 - 4a + 2a^2 = 5 - b$$

$$2a^2 - 8a + 3 + b = 0 \dots\dots\dots(2)$$

reemplazando (1) en (2)

$$2a^2 - 8a + 3 + 4a - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 3 = 0 \Rightarrow (a - 3)(a - 1) = 0$$

$$a = 1 \quad \text{ó} \quad a = 3$$

Entonces, los puntos de tangencia son: $P_1(1,3)$, $P_2(3,3)$



$$b = 3$$

$$b = 3$$

Hallando la ecuación de la recta tangente en el punto $P_1(1,3)$

$$x_0 = 3, \quad y_0 = 3, \quad f'(3) = -2$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 3, \quad f'(1) = 2$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow \text{Lt}_1: 2x - y + 1 = 0$$

Hallando la ecuación de la recta tangente en el punto $P_2(3,3)$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), (y - 3) = -2(x - 3), \text{Lt}_2: 2x + y - 9 = 0$$

Ejercicios Propuestos

1. Halle la función derivada para las siguientes funciones :

$$a) y = \frac{\sqrt[5]{x^5 - 4x^2 - 5}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x - 2}}$$

$$b) y = \frac{\sqrt[10]{x^9 + 7x^2 + 1}}{\sqrt[5]{x^4 - 5x^3 + 6}}$$

$$c) y = \frac{(x^3 - x^2 + 4)^{10} \sqrt[10]{x^9 + 7x^2 + 1}}{\sqrt[5]{x^4 - 5x^3 + 6}}$$

$$d) y = \frac{\sqrt[5]{x^3 - 4x + 15}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x - 2} \sqrt{x^4 - 3x + 5}}$$

2. Aplicando la derivada, halle la pendiente a cada una de las siguientes curvas en el punto cuya abscisa se indica.

$$a) y^2 = x^2 - 2 \quad \text{siendo} \quad x_0 = 1$$

$$b) y = \frac{4}{x-1} \quad \text{siendo} \quad x_0 = 2$$

$$c) y = x^3 - 3x^2 \quad \text{siendo} \quad x_0 = 1$$

3. Calcule las ecuaciones de la tangente y de la normal, a las curvas siguientes, en el punto dado.

$$a) y = x^3 - 3x \quad ; \quad (2,2)$$

$$b) y = \frac{2x+1}{3-x} \quad (2,5)$$

i. Usando definición de la derivada, calcule $f'(x)$ si :

$$3.1 f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 8x + 3}}$$

3.2 Dado $G(x) = \frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+4}}$, halle el valor de “m”, para que se cumpla que

$$G'(x) = \frac{m}{(\sqrt{x^2+3x+4})^3}$$

3.3 Determine todos los puntos sobre la curva $G(x) = x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x - 16$, tales que la recta tangente en dichos puntos, sea horizontal.

3.4 Si $G(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$, calcule el valor de k en la ecuación

$$\left(k^3 - \frac{f'(0)}{2}\right)f(0) + k^2 f'(2) = k \cdot f(-1) - 2$$

3.5 Determine la ecuación de la recta ortogonal a la gráfica g en el punto cuya abscisa es 0, si $g(x) = (x^3 - 3x + 2)$

Respuestas:

a) $\frac{2(x-4)}{(\sqrt{x^2+8x+3})^3}$ b) 7 c) (1,1), (-2,80), (4,80) d) 0,12 e) $x-3y+4=0$

Problemas Complementarios

1. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola con ecuación $y = x^2$, y que es paralela a la recta con ecuación $y = 4x$. Rp. $y = 4x - 4$
2. Encuentra la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y = x^3 + 1$, que es paralela a la recta de ecuación: $x + 12y - 6 = 0$. Rp. $x + 12y + 86 = 0$
3. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 3x + 5$ en el punto de abscisa $x = 3$. Rp. $3x - y - 4 = 0$

4. Usa las reglas de derivación para calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a. } f(x) = \left(\frac{1-x}{2x+5} \right)^3 \quad \text{Rp. } \frac{-21(1-x)^2}{(2x+5)^4}$$

$$\text{b. } g(t) = \sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[4]{t^2 + 4t + 1} \quad \text{Rp. } \frac{5t^2 + 14t + 2}{6 \sqrt[3]{t^2} \sqrt[4]{(t^2 + 4t + 1)^3}}$$

$$\text{c. } h(x) = (2 - x^2) \cos x^2 + 2x \sin x^3$$

$$\text{Rp. } -2x \cos x^2 - 2x(2 - x^2) \sin x^2 + 2 \sin x + 6x^3 \cos x^3$$

$$\text{d. } t(s) = \operatorname{tg}^4(s^2 + 3s)$$

$$\text{Rp. } t'(s) = \frac{4(2s+3) \operatorname{sen}^3(s^2 + 3s)}{\cos^5(s^2 + 3s)}$$

5. Calcula $h'(x)$, si $h(x) = e^{3x \operatorname{sen}(\cos x)}$

$$\text{Rp. } h'(x) = 3e^{3x \operatorname{sen}(\cos x)} [\operatorname{sen}(\cos x) - x \operatorname{sen} x \cos(\cos x)]$$

6. Calcula $g'(x)$, si $g(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{2x+3}{x^2-5}}$

$$\text{Rp. } g'(x) = \frac{1}{4x+6} - \frac{x}{2x^2-10}$$

7. Si $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x-1} \right)^2$, determina el valor de k en: $3 \cdot f(-1) + 5k = 4 \cdot f'(0)$

$$\text{Rp. } k = 1$$

8. Halle la ecuación de la tangente y de la normal, a las curvas dadas, en los puntos indicados.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & y = x^2 + 2x + 2 \quad ; x = 2 \\ \text{b)} & y = 4x^3 - 13x^2 + 4x - 3 \quad ; x = -1 \end{array}$$

9. Halle la derivada y' de las funciones siguientes:

$$\text{a)} \quad y = \sqrt[3]{x^3 - 2x} \quad \text{en } x = 2$$

$$\text{b)} \quad y = \sqrt{(x^2 + 1) \frac{x-2}{2x+4}}, \quad \text{en } x = 3$$

$$\text{c)} \quad y = (4x^3 - 3x + 1)^4 \cdot (2 - x^2 - x^3)^2; \quad \text{en } x = 0$$

$$\text{d)} \quad y = \frac{(4x^3 - 3)^2 (5 - 6x^2)^3}{(4 - 3x^4)}; \quad \text{en } x = 1$$

BIBLIOGRAFIA:

FIGUEROA, Ricardo	Matemática Básica	Edit Gráficas América S.R.L	Lima	2004
LARSON, Ron	Cálculo	Editorial McGraw-Hill	México	2006
LEITHOLD, Louis	Cálculo con Geometría analítica	Editorial Oxford	México	2004
STEWART J.	Cálculo de una variable trascendente temprana	Thompson Edit	México DF	2001
http://descartes.cnice.mec.es				

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

5

SEMANA

16

LA DERIVADA

LOGROS DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad de aprendizaje, los alumnos, aplicando las propiedades de la derivación, resuelven ejercicios y problemas de derivación de funciones algebraicas y trascendentes, señala la ecuación de la recta tangente y normal de una función en un punto dado, haciendo uso del álgebra básica y de las representaciones gráficas en el plano cartesiano y muestran sus aplicaciones en situaciones reales.

TEMARIO

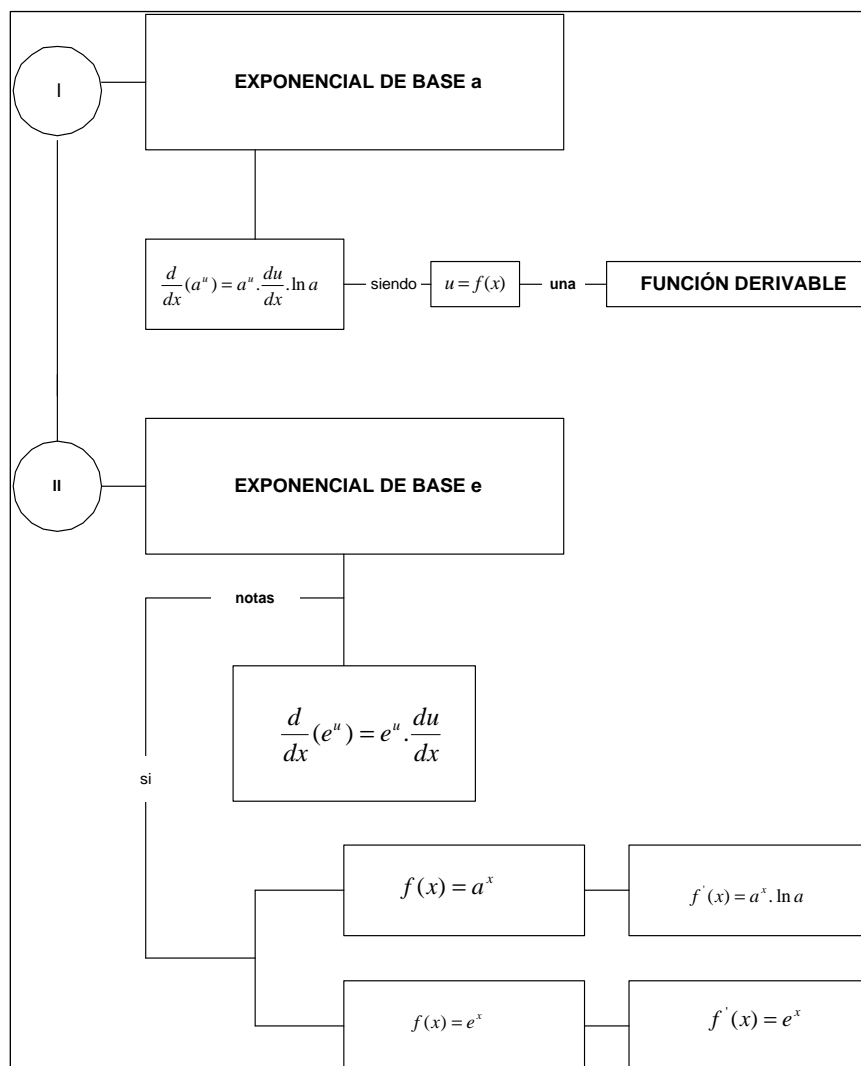
- La derivada y sus aplicaciones
 - Derivadas de funciones trascendentes
 - Aplicaciones de máximos y mínimos

ACTIVIDADES

- Reconoce y calcula la derivada de funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas.
- Reconoce y evalúa los máximos y mínimos de funciones algebraicas y trascendentes.

5.16 A DERIVADA Y SUS APLICACIONES

5.16.1 DERIVADA DE FUNCIÓN EXPONENCIAL



EJEMPLO:

1. Calcule y

$$\text{Si } y = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}$$

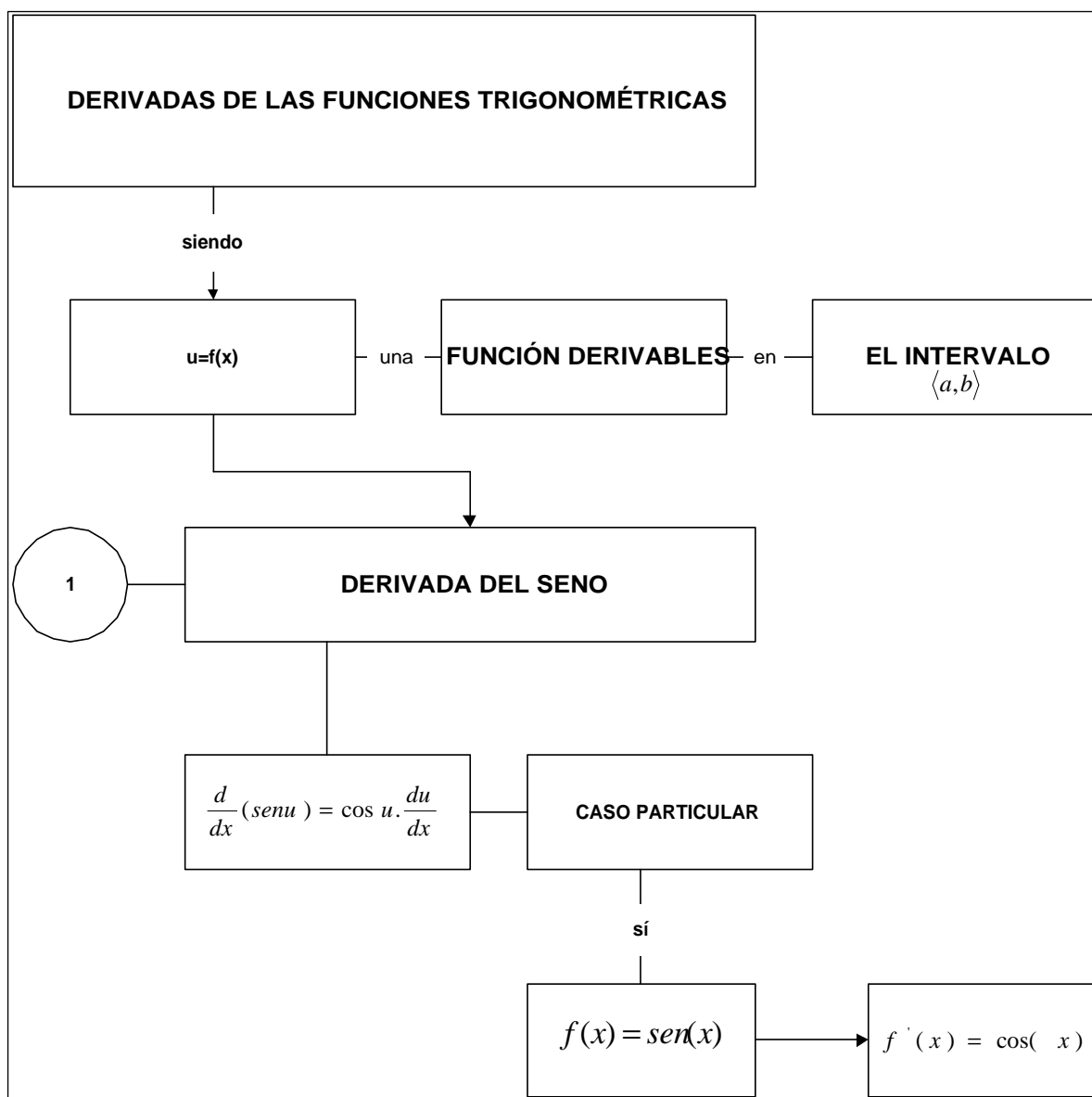
Solución:

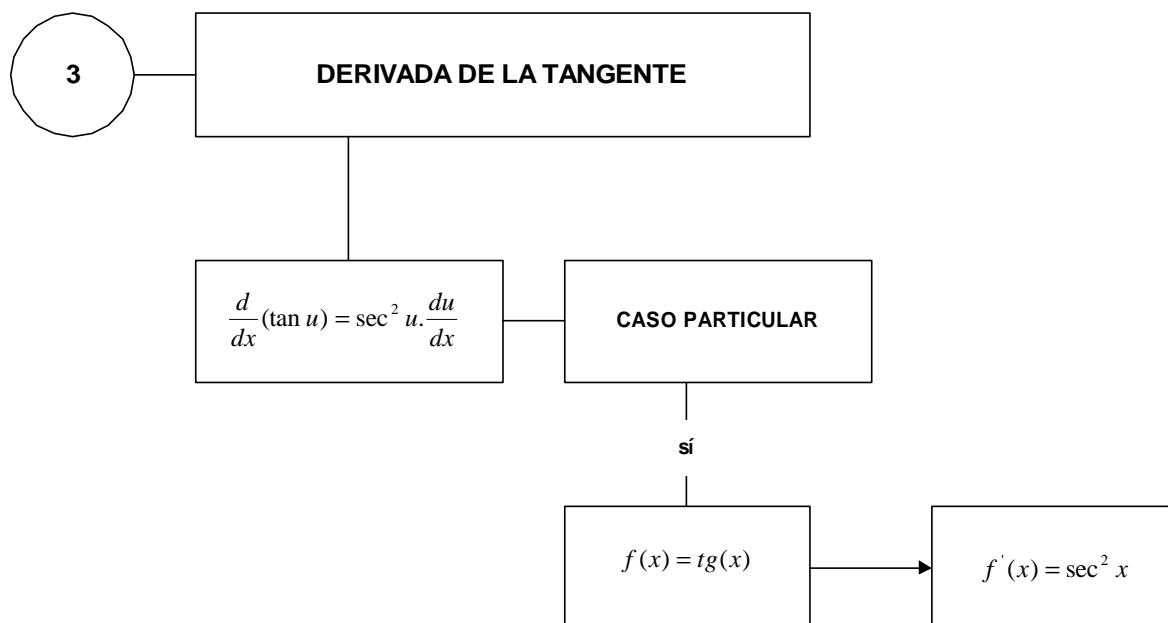
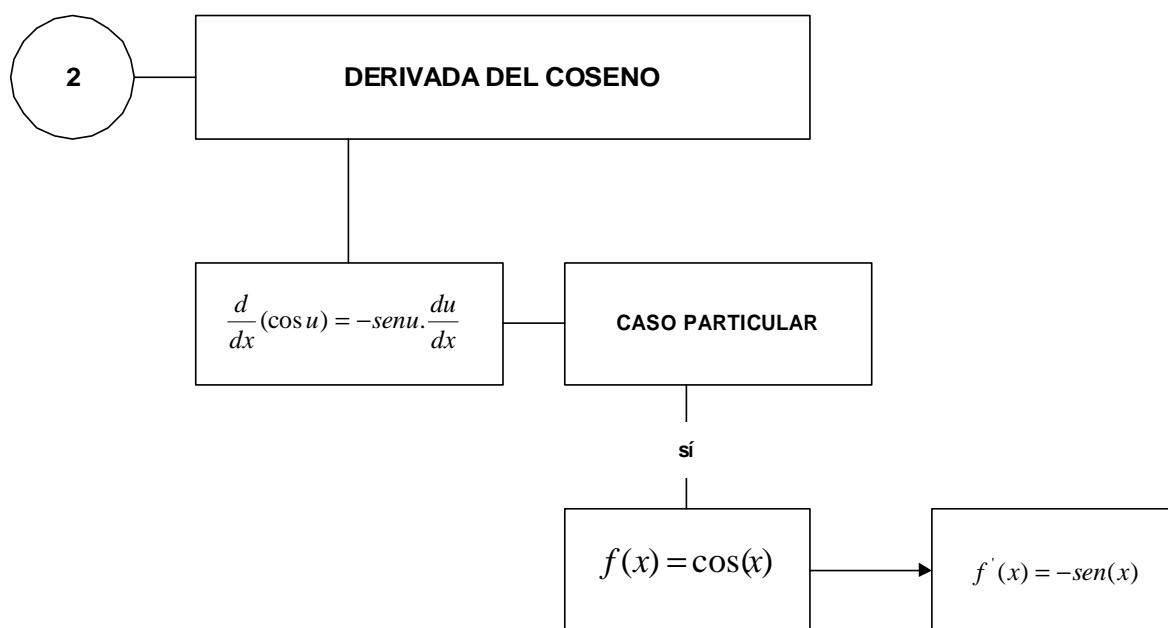
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{ax}(a) - e^{-ax}(-a))(e^{ax} + e^{-ax}) - (e^{ax} - e^{-ax})(e^{ax}(a) + e^{-ax}(-a))}{(e^{ax} + e^{-ax})^2}$$

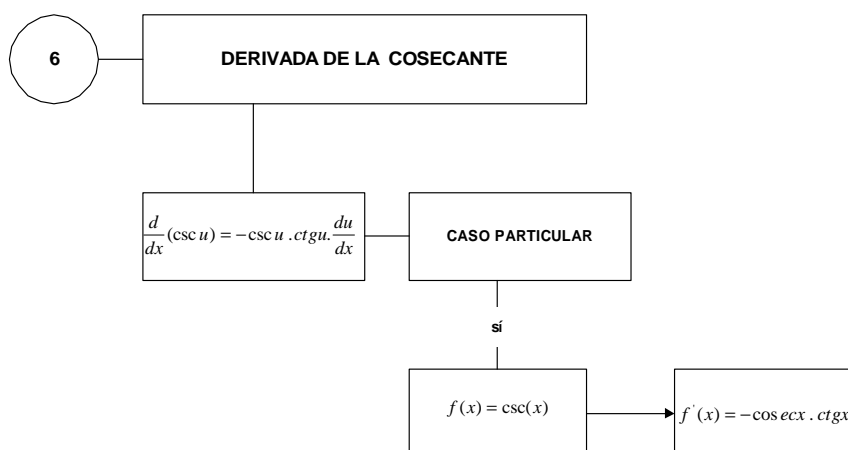
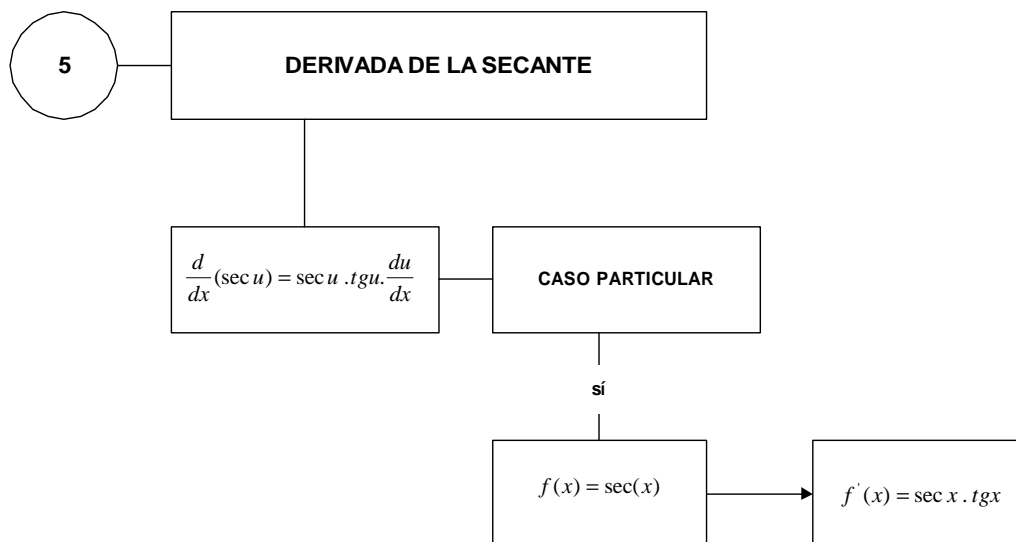
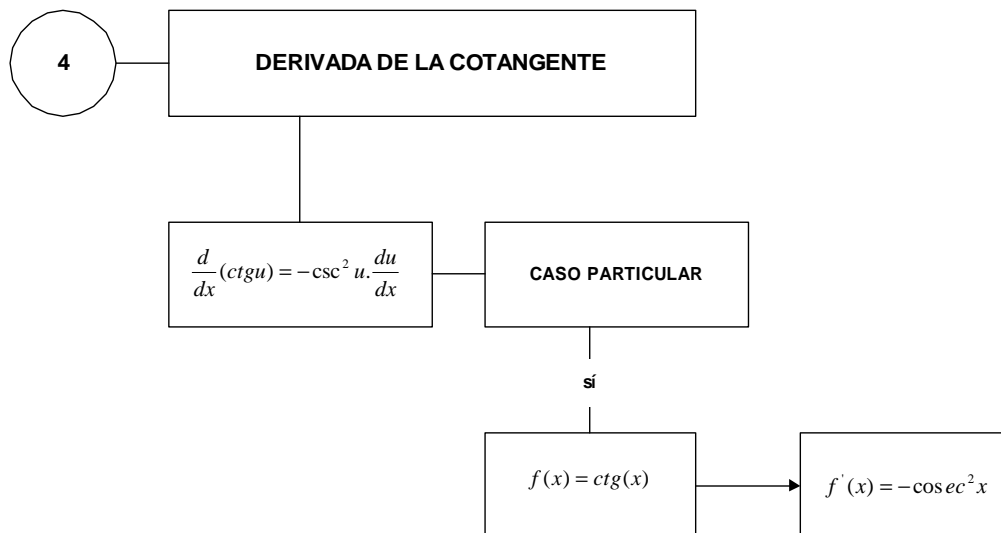
Simplificando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4ae}{(e^{2ax} + 1)^2}$$

5.16.2 Derivada de funciones trigonométricas







RECORDAR

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

2

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$$

3

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\csc^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1$$

4

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

5

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \csc \alpha = 1$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

6

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

7

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

8

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

EJEMPLOS:

1. Dado $y = f(x) = 3\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x + \pi$

Halle $f'(x)$

Solución:

Utilizando la regla de la derivación:

$$f'(x) = 3 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) + \frac{d}{dx}(\pi)$$

$$f' = 3 \cos x - \sec^2 x + 0$$

2. Halle $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ si $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Solución:

Aplicando la regla de derivación: $f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)'x - (\operatorname{sen} x)(x')}{x^2}$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi^2}{16}} = \frac{\pi\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{8\pi^2}$$

Producto de extremos entre productos de medios:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16(\pi\sqrt{2} - 4\sqrt{2})}{8\pi^2} = \frac{2(\pi\sqrt{2} - 4\sqrt{2})}{\pi^2}$$

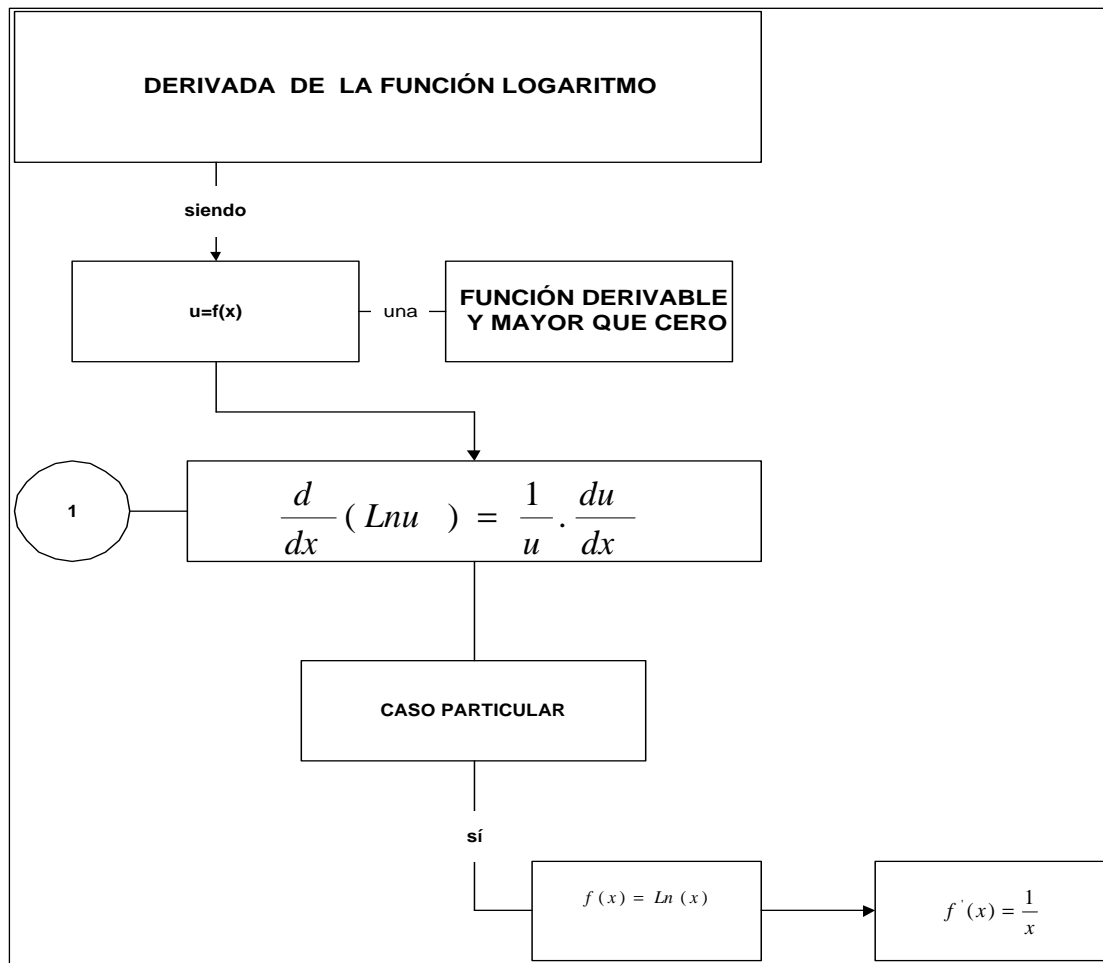
Por lo tanto, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}(\pi - 4)}{\pi^2}$

3. Si $f(x) = (1+x)\operatorname{tg} x$ Halle $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Sol. Derivando como un producto de funciones:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(1+x)\operatorname{tg} x + (1+x) \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) \\ &= (1)\operatorname{tg} x + (1+x)(\sec^2 x) \\ &= \operatorname{tg} x + (1+x)\sec^2 x \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\sec^2 \frac{\pi}{4} \\ &= 1 + \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2})^2 = 1 + \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)2 \\ &= 1 + 2 + \frac{\pi}{2} = 3 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

5.16.3 Derivada de Función Logaritmo



Ejemplo

1. Halle y' si $y = \text{Ln} \left(\frac{\text{sen}^{\sqrt[3]{x^2+1}} \cdot \cos^{\sqrt[3]{x^2+1}}}{\text{tg}^{\sqrt[3]{x^2+1}}} \right)$

Solución: Se tiene:

$$y = \text{Ln} \text{sen}^{\sqrt[3]{x^2+1}} + \text{Ln} \cos^{\sqrt[3]{x^2+1}} - \text{Ln} \text{tg}^{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$y' = \frac{\cos^{\sqrt[3]{x^2+1}}}{\text{sen}^{\sqrt[3]{x^2+1}}} \left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \right) + \frac{-\text{sen}^{\sqrt[3]{x^2+1}}}{\cos^{\sqrt[3]{x^2+1}}} \left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \right)$$

$$y' = -\frac{\sec^2 \sqrt[3]{x^2+1}}{\text{tg}^{\sqrt[3]{x^2+1}}} \left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \right)$$

Simplificando: $y' = -2tg\sqrt[3]{x^2+1} \left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2+1}} \right)$ Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4xtg\sqrt[3]{x^2+1}}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

2. Halle y' Si $y = Ln \sqrt[5]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

Solución:

$$y = \frac{1}{5} Ln(1+x^2) - \frac{1}{5} Ln(1-x^2)$$

Derivando: $y' = \frac{2x}{5(1+x^2)} - \frac{-2x}{5(1-x^2)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{5(1+x^2)} + \frac{2x}{5(1-x^2)} \quad \text{Simplificando} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4x}{5-5x^4}$$

3.. Si $y = e^{\frac{1}{x}} \cos(\sqrt{x}) + Ln^5(tg(5x^2)) + \sqrt{e^{\text{sen}x} - e^{\text{cos}x}} - \frac{5}{(x^4 - x^2 + 1)^{50}}$
calcule y'

Solución:

$$y' = -e^{\frac{1}{x}} \text{sen}(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos(\sqrt{x}) \cdot e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + 5Ln^4(tg(5x^2)) \cdot \frac{\sec^2 5x}{tg 5x^2} \cdot 10x + \frac{e^{\text{sen}x} \cos x + e^{\text{cos}x} \text{sen}x}{2\sqrt{e^{\text{sen}x} - e^{\text{cos}x}}} + \frac{250(4x^3 - 2x)}{(x^4 - x^2 + 1)^{51}}$$

5 Encuentre el valor de k ($k = \text{constante}$) para que la función

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^x \quad \text{sea solución de la ecuación } y'' + k y' + y = e^x$$

(Problema Propuesto)

6 Calcule :

$$f'(x), \text{ si } f(x) = Ln^3 \left(\text{sen}(3x^2) + 3x^3 \right)$$

(Problema Propuesto)

7 Dadas las siguientes ecuaciones:

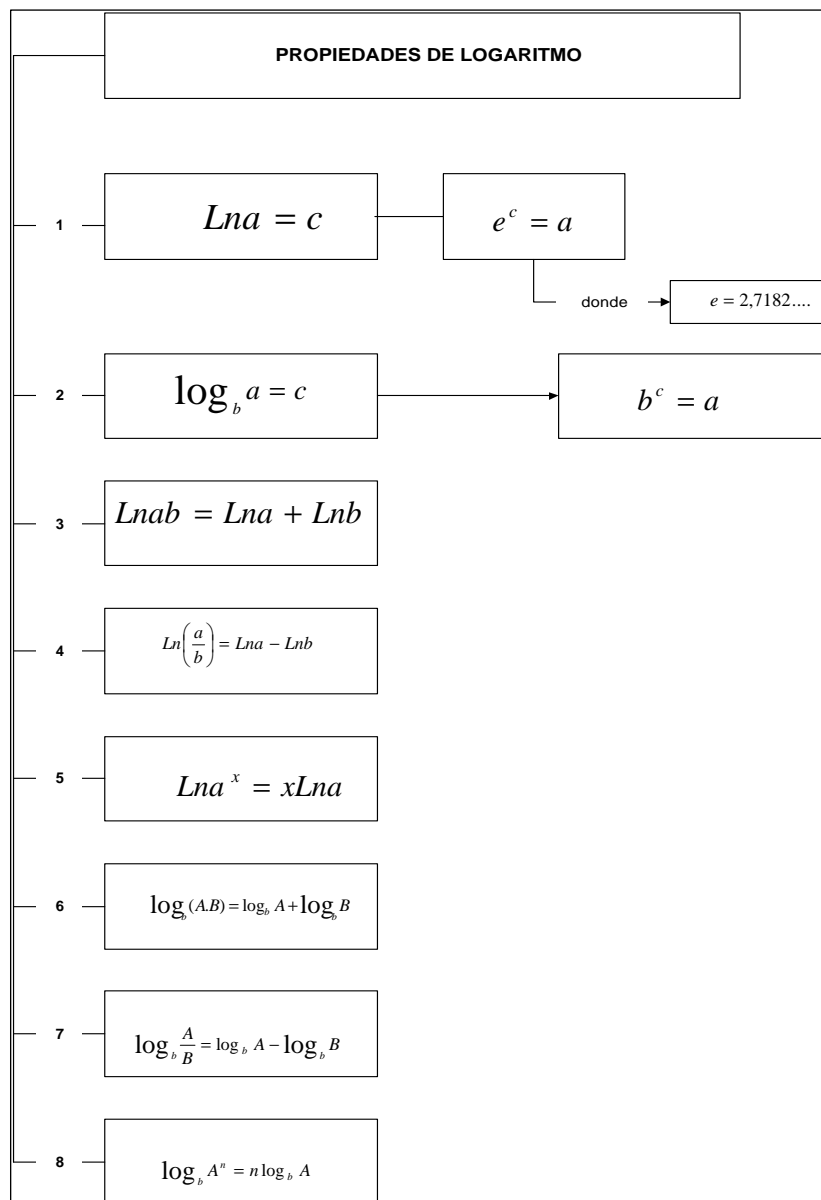
(Problema Propuesto)

a) si $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5}{10 - x^2}}$, encontrar $f'(3)$

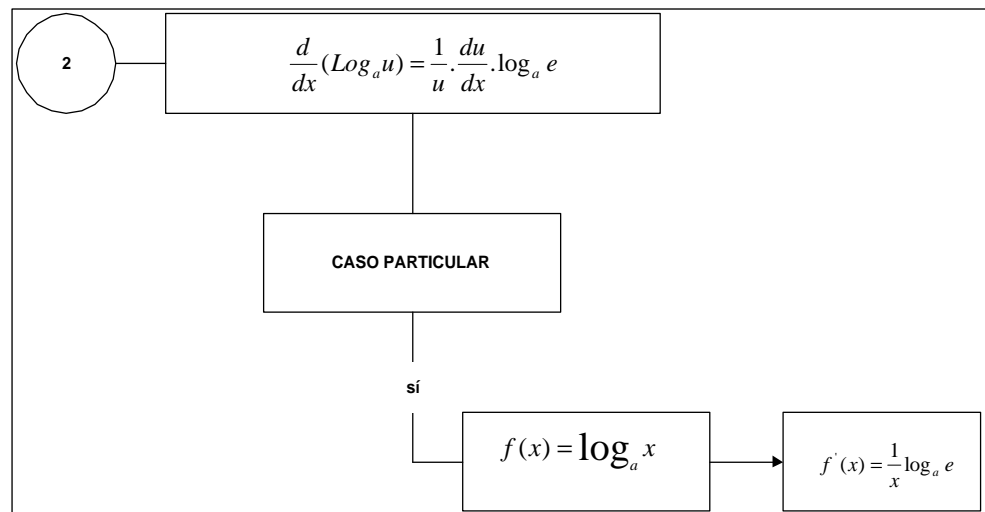
b) Mostrar que: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$

satisface $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

5.16.4 PROPIEDADES DE LOGARITMOS DE CUALQUIER BASE



5.16.5 DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO DE BASE a



EJERCICIOS SOBRE DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES

I. Halle la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{e^x + 1}{\text{sen} x}$
2. $g(x) = 3x^2 + x \text{sen} x$
3. $h(x) = x^2 \cos x$
4. $I(x) = x^3 \text{tg} x$
5. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
6. $f(x) = (1 + \text{sen} x) \cos x$
7. $f(x) = (2x + 2) \text{sen} x$
8. $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 2 \text{sen} x$

II. Calcule $f'(\frac{\pi}{4})$ en las siguientes funciones.

1. $f(\sigma) = \text{sen}(2\sigma)$

2. $f(\varpi) = \frac{1}{2}\cos(2\varpi)$

3. $y = \text{sen}(\frac{2\pi}{9}x)$

4. $y = -a\cos\frac{\pi}{a}t$

5. $s = \cos(1 - 2\sigma)$

6. $f(\alpha) = \frac{1}{2}\text{tg}\alpha^2$

7. $f(\theta) = \text{sen}\sqrt{\theta}$

8. $s = -\sqrt{\cos\theta}$

9. $y = 4\text{tg}2\sqrt{x}$

10. $y = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

III. Calcule la primera derivada en las siguientes funciones:

$$1) y = \text{Sen} x$$

$$12) f(\theta) = \text{Tg} \theta - \theta$$

$$2) y = 3 \cos 2x$$

$$13) y = \text{Sen } 2x \cdot \text{Cos} x$$

$$3) s = \text{tg } 3t$$

$$14) y = \text{Ln} \text{Sen} x$$

$$4) u = 2 \text{Ctg } \frac{v}{2}$$

$$15) y = \text{Ln} \sqrt{\text{Cos} 2x}$$

$$5) y = \text{Sec } 4x$$

$$16) y = e^{ax} \text{Sen} bx$$

$$6) Q = a \text{Csc} b \theta$$

$$17) y = e^{-t} \text{Cos} 2t$$

$$7) y = \frac{1}{2} \text{Sen } 2x$$

$$18) y = \text{Ln} \text{tg } \frac{x}{2}$$

$$8) s = \sqrt{\text{Cos} 2t}$$

$$19) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1 + \text{Sen} x}{1 - \text{Sen} x}}$$

$$9) Q = \sqrt[3]{\text{Tg} 3\theta}$$

$$20) y = \text{Sen}(\theta + a) \cdot \text{Cos}(\theta - a)$$

$$10) y = \frac{4}{\sqrt{\text{Sec} x}}$$

$$21) F(x) = \frac{1}{3} \text{Tg}^3 \theta - \text{Tg} \theta + \theta$$

$$11) y = x \cdot \text{Cos} x$$

$$22) F(x) = -\text{Sen}^2(\pi - x)$$

$$23) y = x e^x - e^x$$

$$24) s = e^t \text{Ln} t$$

