

MATEMÁTICA I

ÍNDICE

Presentación	5
Red de contenidos	6
UNIDAD DE APRENDIZAJE 1: Fundamentos de lógica y conjuntos	
SEMANA 1 : ENUNCIADO Y PROPOSICIÓN / CONECTIVOS LÓGICOS	7
SEMANA 2 : TIPO DE PROPOSICIONES / LEYES DEL ALGEBRA PROPOSICIONAL	21
SEMANA 3 : CONJUNTOS E INTERVALOS	49
SEMANA 4 : CONTINUACIÓN DE CONJUNTOS	65
UNIDAD DE APRENDIZAJE 2: Magnitudes proporcionales	
SEMANA 5 : REGLA DE TRES SIMPLE Y PORCENTAJES	89
UNIDAD DE APRENDIZAJE 3: Fundamentos del Álgebra básica	
SEMANA 6 : TEORÍA DE EXPONENTES	97
SEMANA 8 : PRODUCTOS NOTABLES	107
SEMANA 9 : RACIONALIZACIÓN	117
SEMANA 10 : FACTORIZACIÓN	129
UNIDAD DE APRENDIZAJE 4: Ecuaciones lineales y cuadráticas	
SEMANA 11 : ECUACIONES LINEALES / SISTEMA DE ECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES: METODOS DE SOLUCION	139
SEMANA 12 : ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO / PROPIEDADES DE LAS RAÍCES	155
UNIDAD DE APRENDIZAJE 5: Desigualdades e inecuaciones	
SEMANA 13 : DESIGUALDADES / INECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS	173
SEMANA 14 : INECUACIONES CON FACTOR ELEVADO A POTENCIA PAR, IMPAR Y CUADRÁTICA / INECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR	189
UNIDAD DE APRENDIZAJE 6: Valor absoluto	
SEMANA 15 : VALOR ABSOLUTO: PROPIEDADES	203
SEMANA 16 : TEOREMAS DE VALOR ABSOLUTO PARA RESOLVER ECUACIONES E INECUACIONES.	207

PRESENTACIÓN

Matemática I pertenece a la línea formativa y se dicta en todas las carreras de la institución con excepción de Diseño Gráfico. El curso brinda un conjunto de herramientas lógicas y algebraicas que permite a los alumnos adquirir habilidades y destreza para la resolución de ejercicios y problemas textuales.

El manual para el curso ha sido diseñado bajo la modalidad de unidades de aprendizaje, las que se desarrollan durante semanas determinadas.

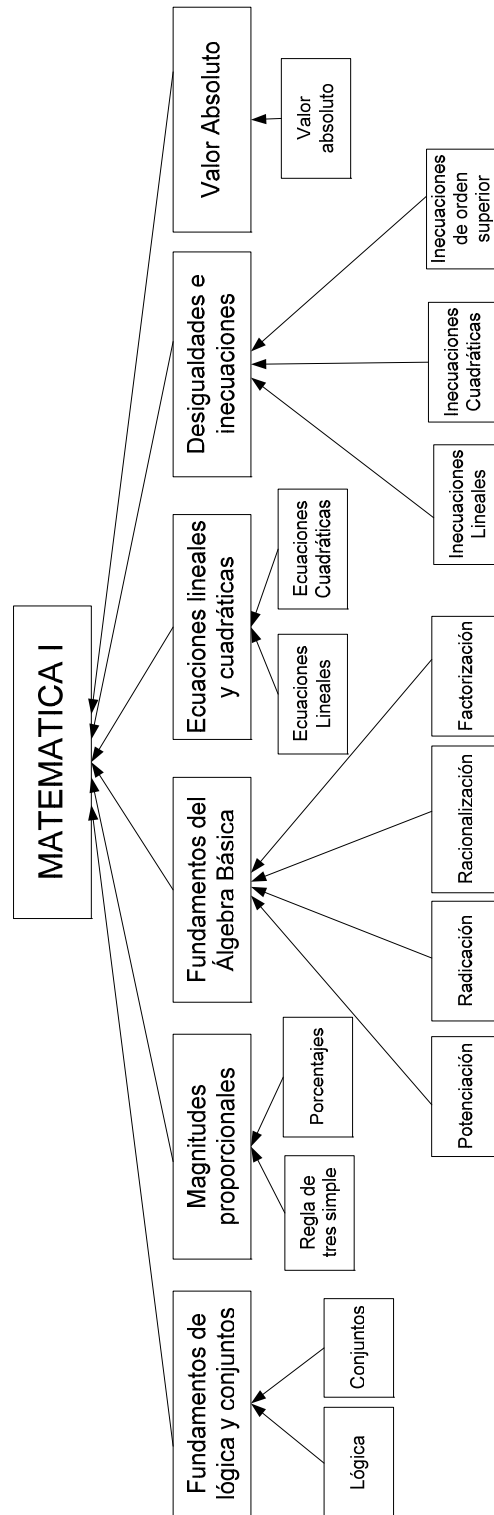
En cada una de ellas, hallará los logros, que debe alcanzar al final de la unidad; el tema tratado y los contenidos serán ampliamente desarrollados.

Por último, encontrará las actividades que deberá desarrollar en cada sesión, que le permitirán reforzar lo aprendido en clase.

El curso es teórico – práctico, en tal sentido, en cada sesión se ha contemplado la teoría necesaria para la aplicación en la solución de los ejercicios propuestos, y como modelo encontrará varios ejercicios resueltos que le servirá de guía.

La solución de ejercicios, en algunos casos, la realizará solamente el profesor quien demostrará las definiciones, propiedades, teoremas, etc.; que intervienen en la solución del caso. En otros, el profesor con los alumnos. Finalmente, los alumnos estarán en condiciones de desarrollarlos por cuenta propia. Asimismo, hallará preguntas de prácticas y/o exámenes propuestos en ciclos pasados relativos a la sesión que se está desarrollando, las cuales permitirá autoevaluarse y prepararse antes de asistir a las evaluaciones calificadas.

RED DE CONTENIDOS



UNIDAD DE
APRENDIZAJE

1

SEMANA

1

ENUNCIADO Y PROPOSICIÓN / CONECTIVOS LÓGICOS

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la segunda semana, los alumnos, utilizando las tablas de verdad y las leyes lógicas, deducen el valor de verdad de un esquema molecular a partir de otro y simplificarán esquemas moleculares haciendo uso de las tablas de verdad de los operadores lógicos y de las leyes del álgebra proposicional

TEMARIO

- Enunciado y proposición.
- Propositiones simples y compuestas.
- Operadores lógicos más utilizados en computación

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Discusión general acerca de lo que es enunciado y proposición.
- Exposición dialogada.
- Trabajo de grupos.
- Como actividad para la casa, se propone desarrollar los ejercicios pendientes del manual.

LÓGICA PROPOSICIONAL

Definición Clásica

Es una disciplina formal que tiene por objeto el análisis de la condición de los razonamientos, por lo que se comienza eliminando las ambigüedades del lenguaje ordinario. Se introducen símbolos y conectivos cuyo uso adecuado descarte las contingencias y aporte claridad y economía de pensamiento.

Conceptos básicos:

Enunciado: Es toda frase, oración o sentencia que usamos en nuestro lenguaje.

Ejemplo:

- 1) La matemática es base de todas las ciencias.
- 2) ¿Aprobaremos el curso de Lenguaje de Programación?
- 3) ¡Arriba Perú!
- 4) El Perú es grande.
- 5) Te visitaré mañana.
- 6) X es un número par.
- 7) José estudia y canta.
- 8) $4x + 5 = 6$
- 9) $2x + 5 < 8$

NOTA: Todas las preguntas, las admiraciones y las órdenes, son “simplemente enunciados” no sufren ninguna transformación o modificación.

Enunciado Abierto.- Es aquel enunciado o ecuación con una o más variables, en el cual no se conocen los valores específicos de las variables. Estos enunciados pueden ser modificados a “proposición”(asignándole cualquier valor a la(s) variable(s).

Ejemplo:

- 1) Algunos alumnos del Primer ciclo son más hábiles en álgebra:
- 2) $3x + y = 10$ $x = ?$, $y = ?$
- 3) $x + 5 > 20$ $x = ?$
- 4) Ella está estudiando “No se conoce quién es ella”

Proposición.-

Es todo enunciado, al cual se le puede asignar un valor de verdadero o falso; pero nunca ambos a la vez.

Ejemplo:

- 1) Ramón Castilla fue Presidente del Perú (v)
- 2) El Perú produce plata (v)
- 3) $4 \times 2 = 8$ (v)
- 4) $5 < 0$ (f)
- 5) Todo hombre es mortal (v)

Notación.-

Las proposiciones se denotan con las letras minúsculas como p, q, r, s, t, ...etc
Ejemplo:

- | | | |
|----|-----------------------|------------|
| 1) | p: El Perú es hermoso | $v(p) = v$ |
| | q: $2 + 6 \neq 8$ | $v(q) = f$ |
| | r: $6 + 1 < 5 + 10$ | $v(r) = v$ |

Ejercicios Propuestos

1) ¿Cuál es la diferencia entre un enunciado abierto y una proposición?	2) Dé dos ejemplos de enunciado (cualquiera) y dos de proposición.
3) ¿Transforme a proposición los siguientes enunciados: a) $x - y + 5 > -9$ b) Ella estudia en Cibertec	4) ¿Cuál es la diferencia entre un netamente enunciado y un enunciado abierto?

CLASES DE PROPOSICIONES

- a) **Simples** .- Llamadas también atómicas o elementales. Son aquellas que tienen un solo sujeto y un solo predicado. No llevan conectivo lógico.

Ejemplo:

- 1) Cibertec es un Instituto líder en enseñanza.
- 2) Electrónica es una especialidad.
- 3) La pizarra es verde.
- 4) Los animales mueren.

- b) **Compuestas** .- Llamadas también moleculares o coligativas. Son aquellas que están constituidas por dos o más proposiciones simples, las cuales son enlazadas por algún conectivo lógico.

Ejemplo:

- 1) César Vallejo nació en Perú y es poeta.
- 2) Alberto es técnico electrónico y practica deportes.
- 3) Si el cielo está despejado, entonces se ve celeste.
- 4) El sol es grande y emite luz.

Además, existen enunciados que no son proposicionales como por ejemplo:

Exclamativos : Socorro
Interrogativo : ¿Hasta qué hora dura la clase?
Imperativo : Fuera
Admiración : ¡Oh!

Conectivos Lógicos .- Son aquellos símbolos que usamos para enlazar dos o más proposiciones simples. Son los siguientes:

\wedge : que se lee “y”
 \vee : que se lee “o”
 $\Delta, \underline{\vee}$: que se lee “o” pero no ambas
 \rightarrow : que se lee “si ... entonces...”
 \leftrightarrow : que se lee “si y sólo si”

Ejercicios propuestos

<p>1) Formula tres proposiciones simples.</p>	<p>2) Formula tres proposiciones compuestas.</p>
<p>3) ¿Cuál es la diferencia entre una proposición simple y compuesta?</p>	<p>4) Escribe el significado de los siguientes conectivos:</p> <p>\wedge :</p> <p>Δ :</p> <p>\leftrightarrow :</p> <p>\rightarrow :</p> <p>\sim :</p> <p>\vee :</p>
<p>5) Simboliza las siguientes proposiciones compuestas:</p> <p>a) $3 + 4 > 10$ ó $3 \in N$</p> <p>b) $x + 5 = 9$, si $x = 3$ y $9 \notin R$</p> <p>c) Si la tierra es plana entonces los hombres son inmortales.</p> <p>d) Es falso que Cibertec sea un instituto mediocre.</p> <p>e) José nada o almuerza.</p>	

OPERADORES LÓGICOS

Negación de una proposición .- Negar una proposición consiste en cambiar el valor de verdad que tenía antes.

Es el conectivo lógico que se usa para negar el valor de verdad de una proposición cualquiera. Simbólicamente se le denota por: $\sim p$

Lógica Clásica

P	$\sim p$
V	F
F	V

Ejemplos:

- 1) p: Las rosas no son rojas
 $\sim p$: Las rosas son rojas

- 2) q: 7 es mayor que 5 o q: $7 > 5$ $V(q) = V$
 $\sim q$: 7 no es mayor que 5 $\sim q$: $7 \leq 5$ $V(\sim q) = F$

Conjunción

Definición

Es el conectivo lógico que se usa para afirmar simultáneamente la veracidad de dos oraciones componentes. Se le denota por:

Lógica clásica
$P \wedge q$

Ejemplo:

Sean p: 4 es divisor de 20 $V(p) = V$
q: 20 es múltiplo de 5 $V(p) = V$
 $p \wedge q = p \text{ y } q$
= 4 es divisor de 20 y 20 es múltiplo de 5. $V(p \wedge q) = V$

Tabla de verdad # de combinaciones de los valores de verdad de las proposiciones simples es:

$\#c = 2^n$, donde $n = \#$ de proposiciones simples.
Su tabla de verdad es:

Lógica Clásica		
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- 2) Si los hombres son inmortales, entonces la luna brilla.

Si p = Los hombres son inmortales $V(p) = F$
 q = La luna brilla $V(q) = F$

Luego se simboliza: $V(p \rightarrow q) = V$

- 3) Explique por qué las condicionales siguientes tienen los valores veritativos indicados.

- a) $2 + 3 = 8 \rightarrow 5 < 6$ (V)
 b) $3 - 1 = 4^2 \rightarrow 2^9 < 2$ (V)
 c) Si 5 es primo, entonces es un número par (F)

Nota: Una implicación puede transformarse en una disyunción, así: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Su tabla de verdad es:

Lógica Clásica		
p	q	$P \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

Definición

Es el conectivo lógico que se lee “....si y sólo si”.

En general una oración bicondicional es llamada también “equivalencia material” que se usa para afirmar los casos en que $p = q$ en valores de verdad. Se le denota por:

Lógica Clásica
$p \leftrightarrow q$

Ejemplo:

$p: 2 > 4$ $V(p) = F$
 $q: 2 + 6 > 4 + 6$ $V(q) = F$
 $p \leftrightarrow q: 2 < 4$ si y solamente si $2 + 6 < 4 + 6$ $V(p \leftrightarrow q) = V$

También se lee como:

“p si y solamente si q”

“p es una condición suficiente y necesaria para q”

Nota .- La diferencia que existe entre $p \leftrightarrow q$ y $p = q$, está en que una bicondicional es una proposición, pero $p = q$ es una declaración acerca de dos proposiciones más no es una proposición.

Su tabla de verdad es:

Lógica Clásica		
p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Una bicondicional puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\ &\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \dots\dots\dots (I) \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} &\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p] \\ &\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)] \vee [(\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)] \\ &\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee F] \vee [F \vee (p \wedge q)] \\ &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \dots\dots\dots (II) \end{aligned}$$

Propiedad:

$$p \leftrightarrow q \equiv \sim(p \Delta q)$$

Disyunción Exclusiva

Definición

Es llamada disyunción excluyente o disyunción fuerte. Este conectivo lógico se usa para afirmar que sólo una de las oraciones componentes es verdadera. Además la disyunción excluyente es la negación de una bicondicional.

Se le denota por:

Lógica clásica
$p \Delta q$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} p: 3 < 5 & \qquad \qquad \qquad V(p) = V \\ q: 2 \cdot 3 < 2 \cdot 5 & \qquad \qquad \qquad V(q) = V \end{aligned}$$

$$p \Delta q: \sigma 3 < 5 \quad \sigma 2*3 < 2*5$$

$$p \Delta q \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$$

$$V(p \Delta q) = F$$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Una disyunción excluyente puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 p \Delta q &\equiv \sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \\
 &\equiv \sim [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \\
 &\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p) \\
 &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \dots\dots\dots(I)
 \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$p \Delta q \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \dots\dots\dots(II)$$

Propiedad:

Ejemplos:

1) Sean p, q y r proposiciones tales que p = V, q = F y r = F. Indica cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

- a) $(p \vee q) \vee (r \wedge x)$
- b) $\sim p \vee (q \wedge t)$
- c) $[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge [(\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge p)]$
- d) $(\sim p \vee q) \wedge (w \vee \sim t) \wedge (y \vee z)$

Solución

a)	b)

c)	d)
----	----

2) Si la proposición: $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$ es falsa.
Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q \vee \sim x)$
 b) $(\sim r \vee q \vee w) \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
 c) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

Solución:

a)
b)
c)

Ejercicios Propuestos

1) Si se cumple: $p \wedge (q \rightarrow r) \equiv V$; $p \rightarrow s \equiv F$; $\sim q \vee s \equiv F$

Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $p \rightarrow \sim s$ b) $(r \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$ c) $(p \Delta q) \leftrightarrow (s \vee \sim r)$

2) Si $\{ \sim [(p \wedge r) \rightarrow q] \wedge [(p \vee q) \Delta s] \} \rightarrow \{ (s \Delta p) \rightarrow t \} \equiv F$

Halle el valor de: $\{ [(\sim p \Delta q) \Delta r] \rightarrow [\sim (q \rightarrow (u \rightarrow p))] \} \Delta (p \Delta q)$

3) Si la negación de la siguiente proposición es verdadera:

$(\sim s \Delta q) \vee \{ (s \leftrightarrow p) \vee [r \rightarrow \sim (p \wedge q)] \}$

Halle el valor de verdad de: $[p \vee q \vee r \vee (m \wedge p)] \rightarrow s$

4) Si: $\{ \sim [(p \wedge r) \rightarrow q] \wedge [(p \vee q) \Delta m] \} \rightarrow \{ (m \Delta p) \rightarrow n \} \equiv F$


Determina el valor de verdad de: $\{ \sim (p \rightarrow q) \Delta [(r \wedge p) \rightarrow \sim (r \vee m)] \} \Delta n$


5) Si la negación de la proposición: $(p \wedge \sim r) \rightarrow \sim [(p \vee q) \Delta \sim q]$ es verdadera,, determine el valor de: $[(r \rightarrow s) \Delta (p \vee \sim q)] \leftrightarrow \sim (p \wedge r)$


6) Si la proposición: $[(p \wedge q) \vee r] \vee [t \rightarrow p] \equiv F$
 Determine el valor de : $[(p \rightarrow \sim t) \rightarrow (r \rightarrow q)] \vee [(p \leftrightarrow t) \leftrightarrow q]$

7) Si la proposición $[(s \wedge \sim q) \leftrightarrow r] \wedge \sim [(q \Delta s) \rightarrow (\sim r \vee p)] \equiv V$
 Halle el valor de : $\sim [(s \Delta \sim r) \vee x] \rightarrow [(\sim q \vee t) \leftrightarrow \sim p]$

Resumen


 Un enunciado es cualquier expresión.

 La proposición es un enunciado que puede ser Verdad o Falsa.

 Operadores Lógicos:

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$	$p \Delta q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 <http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/mem2003/logica/>

Aquí encontrará toda la información relativa a la lógica.

 <http://www.guiamath.net/>

En esta página, hallará algunos ejercicios resueltos.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

1

SEMANA

2

TIPOS DE PROPOSICIONES / LEYES DEL ALGEBRA PROPOSICIONAL

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la segunda semana, los alumnos, utilizando las tablas de verdad y las leyes lógicas, deducen el valor de verdad de un esquema molecular a partir de otro y simplificarán esquemas moleculares haciendo uso de las tablas de verdad de los operadores lógicos y de las leyes del álgebra proposicional

TEMARIO

- Operadores lógicos (eliminación de signos de colección).
- Proposiciones tautológicas, contradictorias y contingencias.
- Implicación lógica.
- Equivalencia lógica.
- Proposiciones equivalentes.
- Leyes del álgebra proposicional.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Discusión general respecto a qué conectivo manda en proposiciones compuestas en las cuáles intervengan: paréntesis, corchetes, llaves, etc.
- Formar grupos de trabajo para resolver ejercicios.
- Sustentar sus respuestas en la pizarra.
- Mostrar al alumno que existen dos maneras para demostrar que dos o más proposiciones son equivalentes.

JERARQUÍA DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS

Si en una proposición compuesta no aparecen los signos de agrupación como: paréntesis, llaves, corchetes, etc., los conectivos lógicos: “ \sim ”, “ \wedge ”, “ \vee ” tienen igual jerarquía, y \rightarrow , \leftrightarrow tienen mayor jerarquía, avanzando de izquierda a derecha.

Tablas de verdad

La verdad o falsedad de una proposición se denomina validez (o su valor de verdad). La validez de la negación, de la conjunción, de la disyunción, de la condicional y de la bicondicional se pueden representar en tablas.

En consecuencia, dadas dos o más proposiciones simples cuyos valores de verdad son conocidos, el valor de verdad de una proposición compuesta depende de la verdad de cada una de las proposiciones componentes y se determina mediante TABLAS DE VERDAD.

Tautología, Contradicción y Contingencia

Tautología .- Es toda proposición simple o compuesta cuyo valor de verdad es siempre verdadero, para cualquier combinación de valores veritativos de sus componentes.

Contradicción .- Es toda proposición que tiene como valor de verdad siempre falsa para cualquier combinación de sus valores veritativos de sus componentes.

Contingencia .- Cuando la tabla de una proposición tiene al menos una V y una F.

Ejemplos:

5

1) La proposición: $[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ es una tautología.

p	q	$[(\sim p \vee q) \wedge \sim q]$	\rightarrow	$\sim p$	
V	V	F	V	F	T = tautología = V
V	F	F	V	F	
F	V	F	V	V	
F	F	V	V	V	

T

2) La proposición: $[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$ es una contradicción.

p	q	$[(p \wedge q) \vee q]$	\wedge	$\sim q$	
V	V	V	F	F	C = contradicción = F
V	F	F	F	V	
F	V	V	F	F	
F	F	F	F	V	

C

La proposición: $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$ es una contingencia.

p	q	$(\sim p \wedge \sim q)$	\vee	$\sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V

Contingente

Ejercicios Propuestos

1) Construya la tabla de verdad de:

a) $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow (\sim p)$

b) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

2) Determine por medio de tabla, si las siguientes proposiciones representan una tautología, contradicción o contingencia.

a) $(p \Delta q) \vee [p \rightarrow (p \wedge q)]$

b) $[(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow \sim (r \vee \sim q)$

2) Si se sabe que $p \leftrightarrow q \equiv F$; $t \rightarrow s \equiv F$; $\sim p \wedge r \equiv V$

las siguientes proposiciones compuestas representan una:

a) $(p \wedge m) \rightarrow n$

b) $(t \Delta s) \wedge \sim r$

4) Si se tiene que:
 $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (r \rightarrow s) \equiv V$
 $\sim s \rightarrow \sim r \equiv F$

La proposición $(r \rightarrow p) \rightarrow (x \Delta (t \vee s))$ representa una tautología, contradicción o contingencia.

PROPOSICIONES EQUIVALENTES

Implicación Lógica

Se llama implicación lógica (o simplemente implicación) a toda condicional $p \rightarrow q$ que sea tautología; en tal caso se denota por $p \Rightarrow q$.

El siguiente ejemplo es una tautología; por lo tanto, es una implicación lógica.

$$[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

Equivalencia Lógica

Se llama equivalencia lógica (o simplemente equivalencia) a toda bicondicional $(p \leftrightarrow q)$ que sea tautología denotándose en tal caso:

$$P \Leftrightarrow q$$

Ejemplo: $[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$ es una equivalencia lógica.

p	q	$[p \wedge (p \vee q)]$	\leftrightarrow	p
V	V		V	V
V	F		V	V
F	V		V	F
F	F		V	F

Proposiciones Lógicamente Equivalentes

Dos proposiciones compuestas son lógicamente equivalentes si al ser unidas con el conectivo \leftrightarrow resulta una tautología; es decir, sus tablas de verdad son idénticas.

La equivalencia se denota por " \equiv ". Se llama también proposiciones equivalentes. Se lee "P es equivalente a Q" o "Q es equivalente a P".

Ejemplo: las proposiciones $(p \rightarrow q)$ y $[(\sim q) \rightarrow \sim p]$ son equivalentes.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$[(\sim q) \rightarrow \sim p]$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Idénticas

Leyes del Algebra Proposicional

1) Ley Involución: $\sim(\sim p) \equiv p$

2) Idempotencia

a) $p \wedge p \equiv p$

b) $p \vee p \equiv p$

3) Conmutativas

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

b) $p \vee q \equiv q \vee p$

c) $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

d) $p \Delta q \equiv q \Delta p$

4) Asociativas

a) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q \wedge r)$

b) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv (p \vee q \vee r)$

c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

d) $(p \Delta q) \Delta r \equiv p \Delta (q \Delta r)$

5) Distributivas

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

c) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

d) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

6) Leyes de Morgan

a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

b) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

7) Condicional

a) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

b) $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

Ejercicios Propuestos

<p>1) Demuestre que la siguiente proposición compuesta representa una implicación lógica.</p> $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$	
<p>2) Demuestre que la siguiente proposición compuesta representa una equivalencia lógica.</p> $\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$	
<p>3) ¿La proposición $\sim (p \rightarrow q) \wedge [q \rightarrow \sim r]$ es equivalente a cuál de las siguientes proposiciones?</p>	
<p>a) $p \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q)$</p>	<p>b) $(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$</p>
<p>4) Demuestra que la siguiente proposición es una tautología:</p> $[(p \vee \sim q) \wedge q] \rightarrow p$ <p>utilizando leyes lógicas.</p>	
<p>5) Simplifique $\{[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)]\} \vee \{[p \wedge q \wedge (p \vee q)] \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\}$</p>	

LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

8) Bicondicional

- a) $(p \leftrightarrow q) \equiv \sim(p \Delta q)$
- b) $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- c) $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
- d) $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

9) Absorción

- a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- b) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$
- c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- d) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

10) Transposición

- a) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$
- b) $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim q \leftrightarrow \sim p)$

11) Leyes de Exportación

- a) $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

12) Elementos Neutros (Idénticos)

- a) $p \wedge V \equiv p$
- b) $p \vee F \equiv p$
- c) $p \Delta F \equiv p$
- d) $p \leftrightarrow V \equiv p$

13) Tercio Excluido

- a) $p \vee \sim p \equiv V$

14) Contradicción

- a) $p \wedge \sim p \equiv F$
- b) $p \wedge F \equiv F$
- c) $p \Delta p \equiv F$

15) Tautología

- a) $p \leftrightarrow p \equiv V$
- b) $p \vee V \equiv V$

16) Disyunción Excluyente

- a) $p \Delta q \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$
- b) $p \Delta q \equiv (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$
- c) $p \Delta q \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$

Ejercicios Propuestos

1) Simplifica, utilizando leyes lógicas:

$$\{ [(p \rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \rightarrow p) \} \wedge [q \vee (r \wedge s)]$$

2) Sabiendo que: $r \vee s \equiv V$ y $p \leftrightarrow q \equiv F$

Simplifica: $\{ [(r \rightarrow s) \wedge (\sim q \rightarrow p)] \wedge [(s \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow q)] \} \wedge (p \Delta q)$

3) Simplifica con leyes:

$$\{ [(\sim p \wedge q) \rightarrow r] \vee (q \vee r) \} \rightarrow [(p \rightarrow r) \vee (r \wedge p)]$$

4) Simplifica: $\{[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge (p \wedge \sim q)\} \vee \sim q$

5) Simplifica: $\{[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)]\} \wedge [p \leftrightarrow (q \vee \sim r)]$

GUÍA DE EJERCICIOS

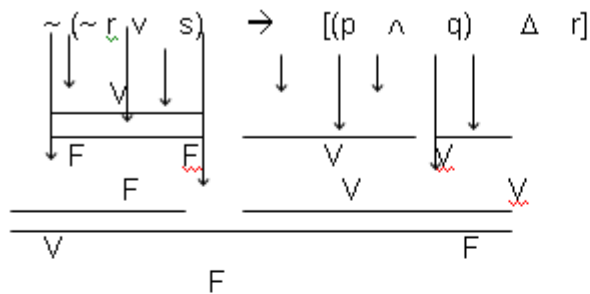
TEMA: Lógica clásica

Nivel A

- 1) Si la proposición $\sim(\sim r \vee s) \rightarrow [(p \wedge q) \Delta r] \equiv F$
Halla el valor de:

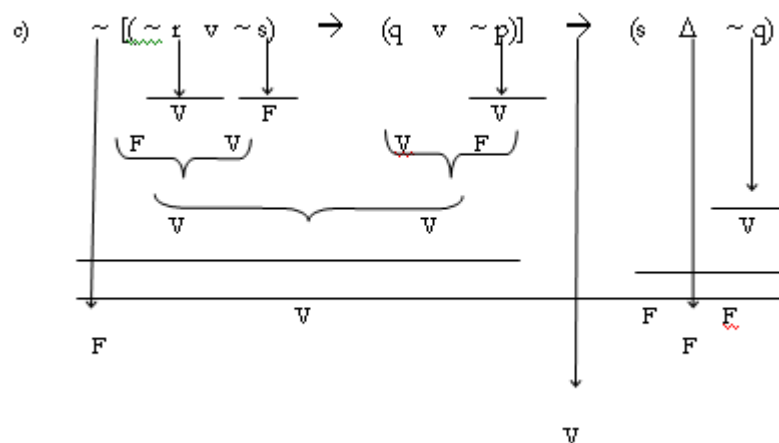
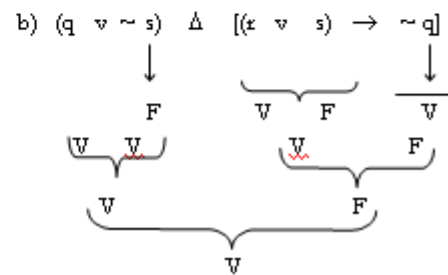
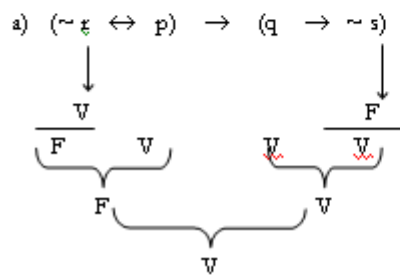
- a) $(\sim r \leftrightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow \sim s)$
b) $(q \vee \sim s) \Delta [(r \vee s) \rightarrow \sim q]$
c) $\sim[(\sim r \vee \sim s) \rightarrow (q \vee \sim p)] \rightarrow (s \Delta \sim q)$

Solución



1º) $\sim r \equiv F$ $s \equiv V$

2º) $p = q = V$



2) Si se sabe que:

$$s \Delta p \equiv V$$

$$r \wedge s \equiv F$$

$$q \rightarrow p \equiv F$$

Determina el valor de verdad de:

a) $(\sim r \Delta q) \rightarrow (s \wedge p)$

b) $[(p \vee \sim s) \Delta r] \rightarrow [p \leftrightarrow (q \wedge r)]$

Solución:

$s \Delta p$	$r \Delta s$	$q \rightarrow p$
\downarrow	\downarrow	\downarrow
$V \quad F$	$F \quad V$	$V \quad F$
$\hline V$	$\hline F$	$\hline F$

Valores veritativos:

$$s = V$$

$$r = F$$

$$q = V$$

$$p = F$$

a) $(\sim r \Delta q) \rightarrow (s \wedge p)$
 $\downarrow F \quad \quad V \quad F$

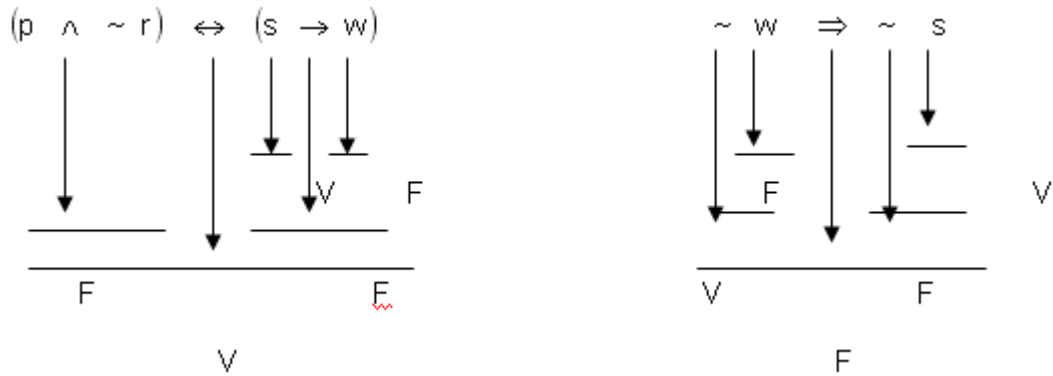
$$\underbrace{\underbrace{V \quad V}_F \quad \underbrace{\quad F}_F}_V$$

b) $[(p \vee \sim s) \Delta r] \rightarrow [p \leftrightarrow (q \wedge r)]$
 $\downarrow V$

$$\underbrace{\underbrace{F \quad F}_F \quad \underbrace{V \quad F}_F}_{\underbrace{\underbrace{F \quad F}_F \quad \underbrace{F \quad F}_V}_V}$$

- 3) Si: $(p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera y $(\sim w \rightarrow \sim s)$ es falsa. Hallar la veracidad de:

$$E = [\{t \rightarrow (w \vee \sim p)\} \wedge \sim(\sim p \vee r)]$$

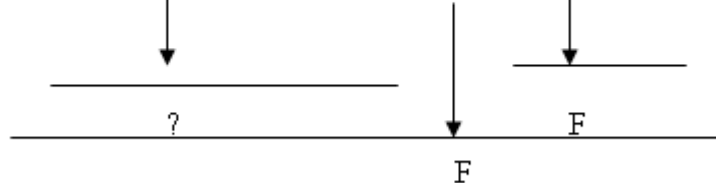


Valores veritativos:

$$(p \wedge \sim r) \equiv F \quad w = F \quad s = V$$

$$E = [\{ t \rightarrow (w \vee \sim p) \} \wedge \sim(\sim p \vee r)]$$

$$E = [\{ t \rightarrow (w \vee \sim p) \} \wedge (p \wedge \sim r)]$$



$\therefore E$ es falsa.

- 4) Si la negación de la siguiente fórmula lógica es verdadera:

$$(p \Delta s) \rightarrow [(p \rightarrow r) \vee (\sim q \Delta s)]$$

Hallar el valor de verdad de:

$$\sim [(r \leftrightarrow s) \wedge \sim \{ (p \wedge q) \Delta \sim s \}]$$

Solución:

6) Simplifica aplicando leyes lógicas

$$[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim (p \wedge q)$$

Solución:

7) Simplifica aplicando leyes del álgebra proposicional:

$$[\sim (\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (p \vee q)] \Delta [p \rightarrow (\sim p \wedge q \wedge r)]$$

Solución:

NIVEL B

1. Si se sabe que:

$$s \leftrightarrow t \equiv F$$

$$r \wedge s \equiv F$$

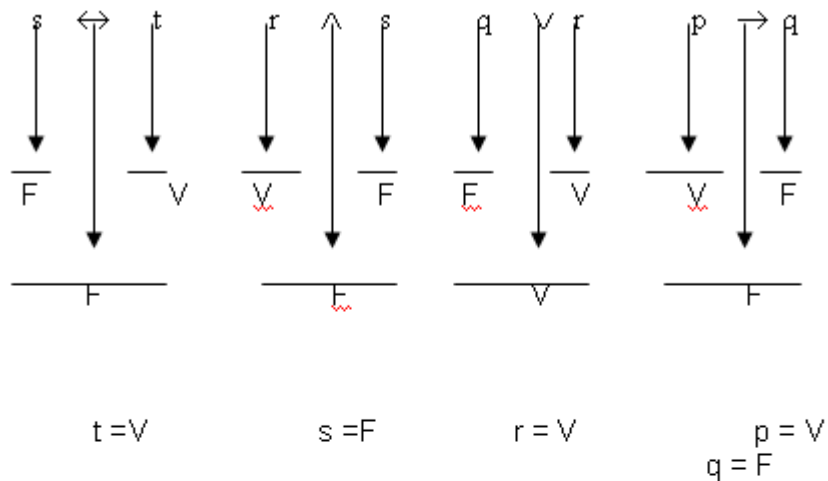
$$q \vee r \equiv V$$

$$p \rightarrow q \equiv F$$

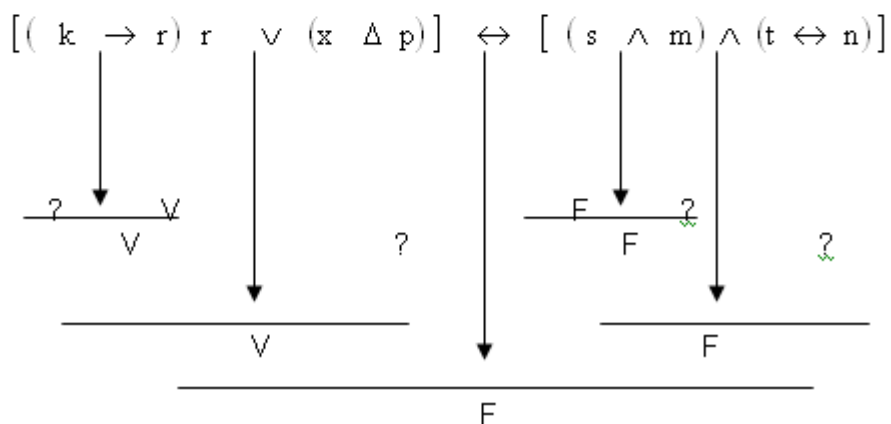
Halla el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$[(k \rightarrow r) \vee (x \Delta p)] \leftrightarrow [(s \wedge m) \wedge (t \leftrightarrow n)]$$

Solución:



Reemplazando valores:



∴ la proposición es falsa.

2. Sean las proposiciones p , q , r , y s tales que:

$$p \rightarrow q \text{ es } F$$

$$s \leftrightarrow p \text{ es } V$$

$$r \wedge s \text{ es } F$$

Determina el valor de las siguientes proposiciones:

a) $(r \wedge x) \rightarrow (\sim p \wedge s)$

b) $(s \rightarrow q) \wedge x$

c) $[(w \vee p) \wedge x] \rightarrow (\sim w \rightarrow p)$

d) $[(p \rightarrow q) \wedge s] \Delta [(r \leftrightarrow q) \vee \sim p]$

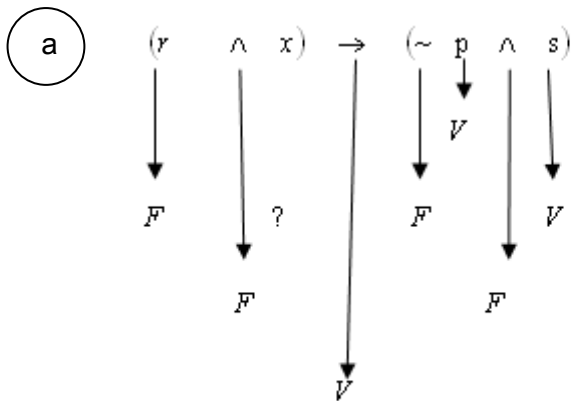
$$p = V$$

$$q = F$$

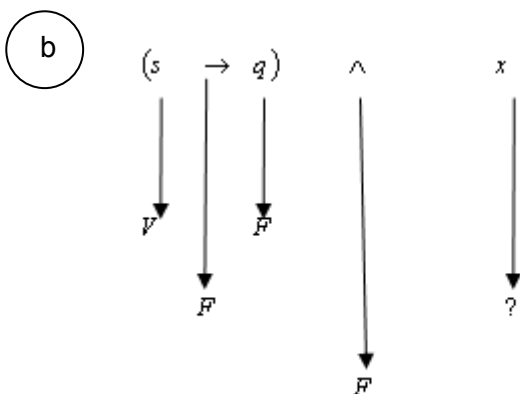
$$s = V$$

$$r = F$$

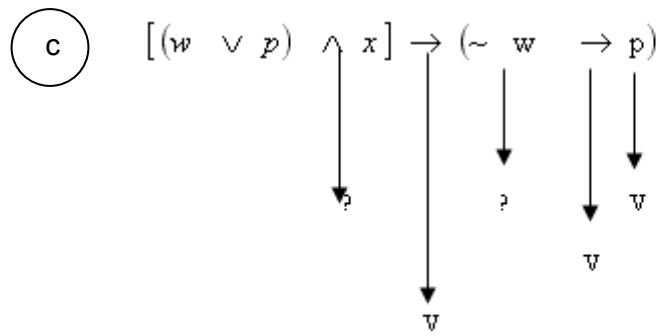
Luego:



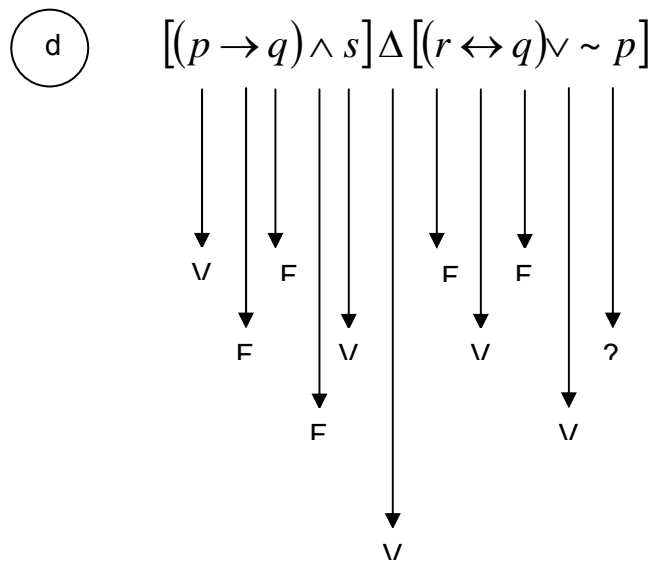
Es verdadero



Es falso



Es verdadero



Es verdadero (Tautología)

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Aplicando leyes lógicas, simplifique:

$$\{ [r \wedge p \wedge (\sim r \vee q)] \vee [p \wedge q \wedge (q \vee q)] \} \vee \{ [p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)] \}$$

Solución:

2. Demuestra mediante leyes del álgebra proposicional la siguiente equivalencia

$$\{ [(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim(p \rightarrow q) \} \vee \sim q \equiv \sim q$$

Solución

3. Simplifique y determine si la proposición compuesta es una tautología, contradicción o contingencia. $\{ \sim(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim(p \wedge q) \} \Delta \{ q \rightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge s) \}$

4. Simplifica aplicando leyes del álgebra proposicional.

$$\left[\left\{ \left[(\sim q \vee \sim p) \wedge (q \vee p) \right] \vee \sim \left[(p \wedge q) \wedge \sim r \right] \right\} \wedge \sim (p \leftrightarrow q) \right] \Delta \left\{ q \wedge \left[\sim (r \wedge s) \vee q \right] \right\}$$

Solución:

5. Simplifique:

$$\{ [(r \vee s) \wedge (\sim p \vee q)] \Delta [(r \wedge s) \vee \sim q] \} \vee (r \leftrightarrow s)$$

Sabiendo que: $r \Delta s \equiv V$

Solución:

6. Simplifique, utilizando leyes lógicas:

$$q \Delta \{ [(\sim (q \wedge p) \wedge (p \vee q)) \vee (s \leftrightarrow r)] \wedge (p \Delta q) \}$$

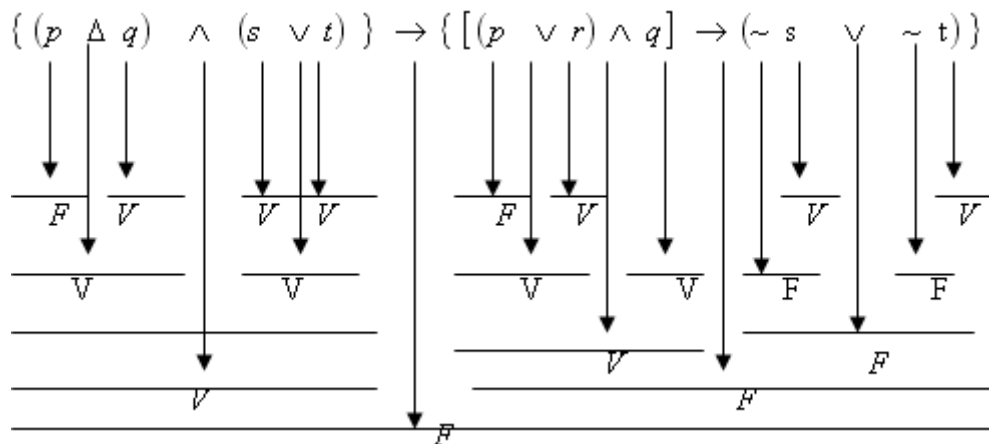
Nivel C

1. Si la proposición:

$$\{ (p \Delta q) \wedge (s \vee t) \} \rightarrow \{ [(p \vee r) \wedge q] \rightarrow (\sim s \vee \sim t) \}$$

es falsa, halla el valor de verdad de:

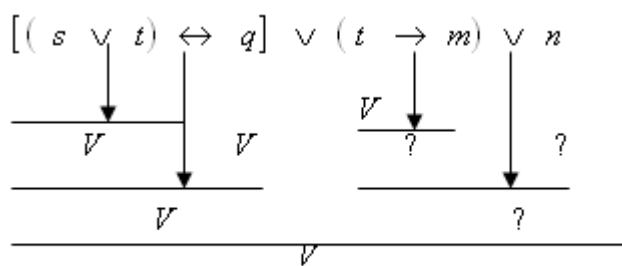
$$[(s \vee t) \leftrightarrow q] \vee (t \rightarrow m) \vee n$$

Solución:

Valores veritativos

$$V(p) = F \quad V(q) = V \quad V(s) = V \quad V(r) = V \quad V(t) = V$$

En la expresión:



Por lo tanto es Verdadero

2. Sea el operador “*” definido por:

$$p * q \equiv \{ [(\sim p \rightarrow q) \rightarrow \sim p] \vee q \} \wedge \sim p$$

Simplifique:

$$\{ [\sim p * (\sim q * r)] \rightarrow [p * (\sim r * s)] \} * \{ (p \vee q) * (r * t) \}$$

Solución:

De la condición:

$$p * q \equiv \{ [(\sim p \rightarrow q) \rightarrow \sim p] \vee q \} \wedge \sim p \equiv \sim p$$

En la expresión:

$$\{ [\sim p * (\sim q * r)] \rightarrow [p * (\sim r * s)] \} * \{ (p \vee q) * (r * t) \}$$

$$\{ p \rightarrow \sim p \} * \sim (p \vee q)$$

$$\{ \sim p \} * \sim (p \vee q) \equiv p$$

3. Si $p \wedge q \equiv F$.

Demuestre que la proposición más simplificada de la proposición:

$$[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \rightarrow (r \wedge \sim p)$$

Es la proposición: $p \vee q \vee r$

Solución:

$$[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \rightarrow (r \wedge \sim p)$$

$$[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r)] \vee (r \wedge \sim p)$$

$$\{ [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee \sim r] \} \vee (r \wedge \sim p)$$

$$[(p \vee q) \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee (r \wedge \sim p)$$

$$[(p \vee q) \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee (r \wedge \sim p)$$

$$[(r \wedge \sim p) \vee p \vee q] \wedge [(r \wedge \sim p) \vee p \vee \sim r] \wedge [(r \wedge \sim p) \vee \sim q \vee \sim r]$$

$$(r \vee p \vee q) \wedge (r \vee \sim r \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$$

$$(r \vee p \vee q) \wedge V \wedge \sim (\overbrace{p \wedge q \wedge r}^F)$$

$$(r \vee p \vee q) \wedge V = (r \vee p \vee q)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dada la proposición:

$$(\{[(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)] \wedge (p \rightarrow \sim q)\} \vee \sim q) \wedge \{\sim[(p \vee q) \rightarrow \sim(r \rightarrow p)] \vee \sim(q \rightarrow p)\}$$

¿Cuál es la proposición más simple?

Solución:

2. Si $p \# q \equiv \{[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \vee q\} \wedge p$

Simplifique:

$$\{[(\sim p \wedge r) \# q] \# (p \leftrightarrow q)\} \leftrightarrow (p \vee r)$$

Solución:

3. Simplifica usando leyes del álgebra proposicional.

$$p \wedge \{ (\sim p \rightarrow r) \wedge [\{ [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow (r \Delta p) \} \vee (\sim p \rightarrow r)] \}$$

Solución:

4. Dado: $a * b \equiv a \wedge b$
 $r \$ s \equiv r \vee s$

Demuestra que: $\sim\{ \sim[(p * q) \$ \sim(\sim p \wedge \sim w)] \} \equiv (p \vee w)$

Solución:

5. Se define el operador de la siguiente manera:

$$p \# q \equiv p \rightarrow \sim q$$

Simplifica lo siguiente: $(r \Delta s) \# [(r \wedge s) \# (s \rightarrow r)]$

Solución:

6. Se definen los siguientes operadores:

$$p \Psi q \equiv p \leftrightarrow (\sim q \Delta q)$$

$$p \Phi q \equiv (\sim p \rightarrow r) \wedge \{[r \rightarrow (p \wedge q)] \vee (\sim p \rightarrow \sim r)\}$$

$$\text{Simplifica: } \{[\sim p \Psi (q \wedge r)] \Phi \sim q\} \Phi (p \Delta q)$$

Solución:

7. Si, $p \$ q \equiv p \vee \{[(q \wedge p) \vee [p \wedge (\sim q \rightarrow \sim p)]] \leftrightarrow (q \rightarrow \sim p)\}$

$$\text{Simplifica: } \{(p \$ \sim q) \wedge [(\sim q \$ \sim p) \$ (\sim p \$ \sim q)]\} \vee \sim q$$

Solución:

8. Sabiendo que: $p \Psi q \equiv \sim p \rightarrow q$; $p \otimes q \equiv \sim p \vee q$; $p \Omega q \equiv p \Delta (q \wedge \sim p)$

Halle el valor de: $\{(\sim p \otimes q) \otimes [q \Psi (r \Omega p)]\} \Omega (\sim r \Psi q)$

Solución:

Resumen

Tipos de proposiciones

1. Tautológica: significa Verdad.
2. Contradicción: significa Falso.
3. Contingencia: significa que no es Verdad ni Falso.

Implicación lógica.- es cuando una condicional es una tautológica, es decir:

$$p \rightarrow q \equiv V \text{ se representa } p \Rightarrow q$$

Equivalencia lógica.- es cuando una bicondicional es una tautología, es decir:

$$p \leftrightarrow q \equiv V \text{ se representa } p \Leftrightarrow q$$


Proposiciones equivalentes.- dos proposiciones son equivalentes cuando sus tablas de verdad son idénticas.

Leyes de algebra proposiciones.- son aquellas que nos permiten reducir expresiones moleculares a su mínima expresión. Ejemplo: $[(p \vee \sim q) \wedge q] \rightarrow p$


Solución:

$[(p \vee \sim q) \wedge q] \rightarrow p$	Eliminamos la condicional
$\sim [(p \vee \sim q) \wedge q] \vee p$	Aplicamos Morgan
$[\sim (p \vee \sim q) \vee \sim q] \vee p$	Seguimos aplicando Morgan
$[(\sim p \wedge q) \vee \sim q] \vee p$	Eliminando corchetes y asociamos
$(\sim p \wedge q) \vee p \vee \sim q$	Aplicamos absorción
$(p \vee q) \vee \sim q$	Eliminamos paréntesis y asociamos
$p \vee (q \vee \sim q)$	Aplicamos tercio excluido
$p \vee V$	Aplicamos tautología
V	Rpta.

Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 http://www.guiamath.net/ejercicios_resueltos/01_03_01_03-Logica-Alg-Proposiciones/0_algebra-proposiciones.html

Aquí encontrará ejercicios sobre álgebra de proposiciones.

 <http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/mem2003/logica/>
En esta página, hallará algunos ejercicios resueltos.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

1

SEMANA

3

CONJUNTOS E INTERVALOS

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la cuarta semana, los alumnos aplicarán las propiedades operaciones entre conjuntos para que simplifiquen operaciones y resuelvan problemas de cardinalidad, haciendo uso de los diagramas de Venn.

TEMARIO

- Definición de conjunto:
 - Determinación de conjuntos:
 - a) Por extensión.
 - b) Por comprensión.
 - Relación de pertenencia y de inclusión.
- Conjuntos numéricos
 - Naturales.
 - Enteros.
 - Racionales.
 - Irracionales.
 - Reales.
 - Complejos.
- Intervalos
 - Cerrados.
 - Abiertos.
 - Semi abiertos.
 - No acotados.
- Tipos de conjuntos.
 - Conjunto vacío.
 - Conjunto unitario.
 - Conjuntos comparables.
 - Conjuntos disjuntos.
 - Conjunto universal.
 - Conjunto equivalente.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Discusión general acerca de la definición de conjunto.
- Exposición dialogada.
- Se desarrollará los ejercicios propuestos en el manual sobre el uso de \in y \subset .
- Se desarrollará los ejercicios propuestos en el manual sobre conjuntos e intervalos.

DEFINICIÓN DE CONJUNTOS

La idea de conjunto es básica en el pensamiento humano. La idea es algo puramente intuitivo, algo no definido; pero si entendido por cada persona como resultado de su propia experiencia.

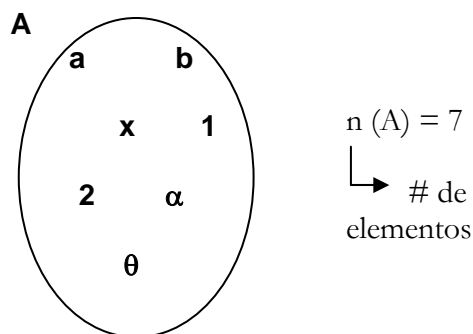
Es por eso que al referirnos al concepto de conjunto intuitivamente pensamos o lo identificamos como una reunión, agrupación o colección de cualquier tipo de identidades u objetos que tienen propiedades comunes. Estos objetos se llaman elementos, entes o miembros de un conjunto.

NOTACIÓN

Generalmente se denota a los conjuntos mediante letras mayúsculas y con letras minúsculas a los elementos que forman el conjunto.

Ejemplo:

$$A = \{a, b, 1, x, 2, \theta, \alpha\}$$



RELACIÓN DE PERTENENCIA

Se le denota por el símbolo “ \in ”. Se usa cuando el elemento está referido respecto a un conjunto.

Así respecto al ejemplo anterior:

$$\alpha \in A$$

$$3 \notin A$$

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Todo conjunto se expresa de dos maneras:

- I. Por Extensión
- II. Por Comprensión

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO POR EXTENSIÓN

Dado un conjunto cualquiera A, diremos que está determinado por extensión si al expresarlo o escribirlo enumeramos todos los elementos explícitamente.

Ejemplo:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO POR COMPRENSIÓN

Dado un conjunto cualquiera A, diremos que está determinado por comprensión, si el conjunto A está dado mediante alguna propiedad única y común de sus elementos que los caracteriza.

Ejemplo:

$$A = \{\text{Las vocales del alfabeto}\}$$

$$B = \{x/x \text{ es un día de la semana}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 7\}$$

Ejercicios

Dado el siguiente conjunto $A = \{3, 5, 12, 24, 41, 63\}$ que está definida por extensión. Transfórmalo a comprensión.

Solución:

$$\begin{array}{cccccc}
 3 & 5 & 12 & 24 & 41 & 63 \\
 \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} \\
 2 & 7 & 12 & 17 & 22 & \\
 \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & & \\
 ⑤ & ⑤ & ⑤ & ⑤ & &
 \end{array}$$

Como en la segunda diferencia sucesiva se encuentra el número constante, esto indica que el conjunto A lo define una ecuación de segundo grado. Así tenemos:

$$x = an^2 + bn + c$$

$$\text{Si } n = 1 \rightarrow x = 3 \therefore a + b + c = 3 \dots\dots\dots(I)$$

$$\text{Si } n = 2 \rightarrow x = 5 \therefore 4a + 2b + c = 5 \dots\dots\dots(II)$$

$$\text{Si } n = 3 \rightarrow x = 12 \therefore 9a + 3b + c = 12 \dots\dots\dots(III)$$

$$\text{De (II) - (I) : } 3a + b = 2 \dots\dots\dots(\alpha)$$

De (III) – (II) : $5a + b = 7$ (β)

De (β) – (α) : $2a = 5$

$$a = \frac{5}{2}; \quad b = \frac{-11}{2}; \quad c = 6$$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / x = \frac{5}{2}n^2 - \frac{11}{2}n + 6, \quad n \leq 6 \right\}$$

RELACIÓN ENTRE CONJUNTOS

I. RELACIÓN DE INCLUSIÓN

Se dice que A está incluido o está contenido en B, si todo elemento de A es también elemento de B, denotándose por:

$A \subset B$ que se simboliza.

$$A \subset B \leftrightarrow (\forall x \in A : \text{ Si } x \in A \rightarrow x \in B)$$

Por lo que decimos que A es un subconjunto de B, o que B es un superconjunto de A o que B contiene al conjunto A.

Propiedades

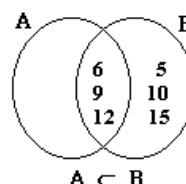
1. *Reflexiva*: $A \subset A \leftrightarrow \forall x \in A : \text{ Si } x \in A \rightarrow x \in A$
2. *Antisimétrica*: $\text{ Si } (A \subset B \wedge B \subset A) \rightarrow A = B$
3. *Transitiva*: $\text{ Si } (A \subset B \wedge B \subset C) \rightarrow A \subset C$
2. El conjunto vacío (\emptyset) es subconjunto de cualquier conjunto, excepto de sí mismo.

DEFINICIONES

1. Si $A \subset B$, pero existe por lo menos un elemento de B que no pertenece al conjunto A, se dice que A es parte propia de B o subconjunto propio de B o que B contiene propiamente al conjunto A. Todo conjunto no vacío es subconjunto propio de sí mismo.

Ejemplo:

$$A = \{6, 9, 12\}$$



$$B = \{5, 6, 9, 10, 12, 15\}$$

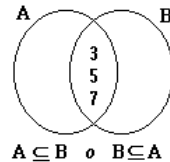
A es un subconjunto propio de B.

2. Si $A \subseteq B$, tal que todos los elementos de B son elementos de A, se dice que A es parte impropia de A o subconjunto impropio de B. El \emptyset tiene subconjunto impropio.

Ejemplo:

$$A = \{3, 5, 7\}$$

$$B = \{3, 5, 7\}$$



A es un subconjunto impropio de B o que B es un subconjunto impropio de A.

II. RELACIÓN DE IGUALDAD

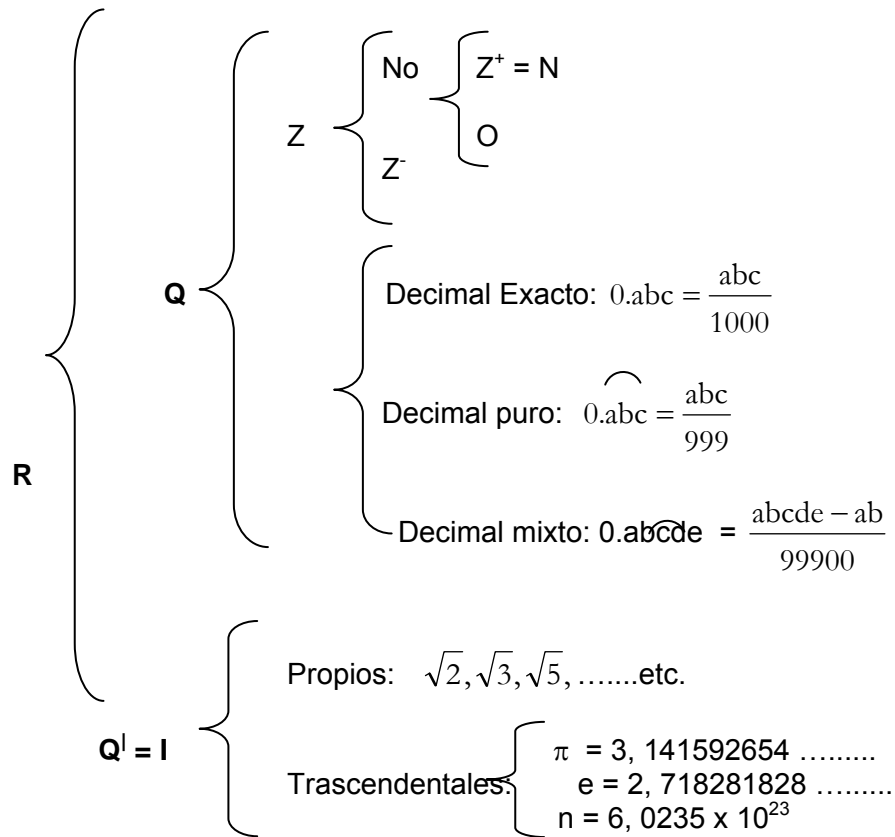
Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos, sin importar el orden como se ubiquen, o la repetición de uno de ellos.

$$A = B \leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Ejercicios Propuestos

<p>1) De acuerdo con la noción de conjunto; qué significan las siguientes simbologías?</p> <p>$A =$ $2 =$ $\{4, \emptyset\} =$ $\{\{B, \{5\}\}\} =$</p>	<p>$x =$ $\{B\} =$ $a, b, c =$ $A, B, C =$</p>
<p>2) ¿Cuál es la diferencia entre conjunto por extensión y comprensión?</p>	<p>3) Muestre dos ejemplos de conjunto por extensión y transfórmelos a comprensión.</p>
<p>4) Determine por comprensión los siguientes conjuntos:</p> <p>$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$ $C = \{10, 22, 42, 70\}$</p>	
<p>a. Determine por extensión:</p> <p>a) $\left\{x/x = \frac{n^2 - 4}{n - 2}, n = 0, 1, 3, 4\right\}$ b) $\left\{x/x = \frac{\sqrt{n} + 2}{n + 1}, n = 0, 1, 2, 3, 4\right\}$ c) $\left\{x/x = \frac{\sqrt[3]{n} + n}{n - 1}, n = 0, 8, 27\right\}$</p>	
<p>6) Si $A = \{2, \{3\}, \{x, \{y\}\}, B\}$; decir si son F o V las proposiciones siguientes:</p> <p>a) $B \in A$ c) $2 \in A$ e) $B \not\subset A$ b) $\{y\} \notin A$ d) $\{3\} \subset A$ f) $\{x, \{y\}\} \subset A$</p>	

CONJUNTO NUMÉRICO



a) $N = \{\text{números naturales}\}$

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, +\infty\}$$

b) $Z = \{\text{números enteros}\}$

$$Z = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$$

c) $Q = \{\text{números racionales}\}$

$$\{x/x = m/n, m, n \in Z, n \neq 0\}$$

d) $I = \{\text{números irracionales}\}$

$$I = \{x/x \text{ tiene representación decimal no periódica}\}$$

e) $R = \{\text{números reales}\}$

$$R = \{x/x \text{ es irracional o racional}\}$$

f) $C = \{\text{números complejos}\}$

$$C = \{x/x = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Donde: $\sqrt{-1} =$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -\sqrt{-1} = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

INTERVALOS

Son subconjuntos de los números reales (\mathbb{R}) que sirven para expresar la solución de las inecuaciones; estos intervalos se representan gráficamente en la recta numérica real.

TIPOS	NOTACIÓN	DESIGUALDAD	GRÁFICA
Intervalos finitos	$\langle a; b \rangle$	$a < x < b$	
	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
	$\langle a; b]$	$a < x \leq b$	
Intervalos infinitos	$\langle a; \infty \rangle$	$x > a$	Complete...
	$[a; \infty \rangle$	$x \geq a$	
	$\langle -\infty; b \rangle$	$x < b$	
	$\langle -\infty; \infty \rangle$	$-\infty < x < +\infty$	

Ejercicios Propuestos

1. Marca con un aspa los conjuntos a los que pertenece cada uno de los siguientes números:								
	0	$-\sqrt{4}$	3.1416	$\frac{5}{2}$	0.333...	π	$\sqrt{5} + 2$	100
Naturales								
Enteros								
Racionales								
Irracionales								
Reales								
2. El cero es un número racional.				a) El número 1,4142 es irracional.				
3. El producto de dos números irracionales es un número irracional.				4. La suma de dos números irracionales es un número irracional.				

5. Si : $A = [3; +\infty[$, $B =]-6; 4[$, $C =]0; 5]$

Determine a) $A \cup (B \cap C)$ b) $A \cap [B \cup C]$

6. Dado los conjuntos: $P = \{x \in R / \sim [\sim (x > -3)] \vee x \geq 4\}$

$$Q = \{x \in R / x \notin P \wedge x \in [-4; 8[$$

Determine $P \cap Q$

7. Dado los conjuntos: $U = \{x \in Z / -3 \leq x - 1 \leq 2\}$

$$A = \{x \in U / \sim (x > -4 \rightarrow x \neq \{-1; 0; 2\})\}$$

$$B = \{x \in U / [-2, 5[\wedge]-3, 4]\}$$

Determine $U \cup (B \cap C)$

8. Dado los conjuntos: $A = \{x \in Z / x > 3 \rightarrow x = 7\}$

$$B = \{x \in N_0 / x \geq -2 \wedge x < 8\}$$

Determine $B - A$

CONJUNTO ESPECIALES

1. **Conjunto vacío.**- Es aquel conjunto que se denota por $\phi = \{ \}$ y cuya característica es que no tiene elementos.

Ejemplo:

$$b. = \{\text{los hombres inmortales}\}$$

$$c. = \{x \in \mathbb{R} / x \neq x\}$$

2. **Conjunto Unitario.**- Es aquel conjunto que tiene un solo elemento.

Ejemplo:

$$A = \{\text{Satélite de la tierra}\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Z}^+ / \left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1) = 0\right\}$$

3. **Conjunto Comparables.**- Se dice que A y B son comparables, si alguno de ellos está contenido en el otro. Es decir:

$$A \subset B \quad \Delta \quad B \subset A$$

4. **Conjuntos Disjuntos.**- Son aquellos conjuntos que no tienen elementos comunes. Es decir:

$$\text{Si } x \in A \rightarrow x \notin B \quad \Delta \quad \text{Si } x \in B \rightarrow x \notin A$$

5. **Conjunto Universal.**- Es aquel conjunto que se denota por “U”, siendo aquél que contiene todos los elementos que están siendo considerados para un estudio en particular.

$$N = \{\text{Conjunto universal de los enteros positivos}\}$$

6. **Conjunto Equivalentes.**- Dos conjuntos A y B cualesquiera son equivalentes o coordinables, si existe una correspondencia biunívoca (uno a otro) entre sus elementos, es decir, que ambos conjuntos tienen la misma característica, siendo para algunos casos de elementos diferentes. Se le denota por: “ \equiv ”.

Ejemplo:

$$\text{Sea: } A = \{2, \theta, x\}$$

$$B = \{2, 7, 9\}$$

Se observa que: $A \neq B$, pero $A \equiv B$ porque ambos conjuntos tienen tres elementos.

Ejercicios Resueltos

- 1) Si los conjuntos $\{3a + b - 9, 4a\}$ y $\{5a + 2b, 4\}$ son unitarios, prueba que $\{6a + b, 2b + 8a - 3\}$ también es unitario:

Solución:

Si son conjuntos unitarios se cumple:

$$3a + b - 9 = 4a \rightarrow a - b = -9 \rightarrow 2a - 2b = -18$$

$$\frac{5a + 2b}{7a} = \frac{4}{-14}$$

$$a = -2$$

$$-2 - b = -9 \rightarrow b = 7$$

Entonces: $\{6a + b, 2b + 8a - 3\}$
 $\{6(-2) + 7, 2(7) + 8(-2) - 3\} = \{-5, -5\} = \{-5\}$

- 2) Si $A = \{\{0\}, \{\$, \#\}, \{*\}, \{@\}, \{a, b, 0\}, B, e\}$

Indicar si es falso o verdadero. Justifica tu respuesta en las siguientes expresiones:

- a) A es una familia de conjuntos.

Falso, porque "e" es un elemento simple de A

- b) $\{0\} \not\subset A$

Verdadero, porque $\{0\} \in A$

- c) $\{0\} \equiv \{*\}$

Verdadero, porque ambos conjuntos son unitarios.

- d) $\{\{\$, \#\}, \{e\}, B\} \not\subset A$

$\{\$, \#\} \in A$	verdadero	} Luego, es verdadero
$B \in A$	verdadero	
$\{e\} \in A$	falso	

- e) $\{\{a, b, 0\}, B, \{e\}\} \subset \{\{0\}, \{a, b, 0\}, B, \{e\}\}$

Verdadero, porque es una partición del otro.

Ejercicios Propuestos

<p>1) Si: $A = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x < 4\}$ $B = \{x \in \mathbb{N}_0 / -2 < x \leq 4\}$ ¿Son iguales, equivalentes, disjuntos? ¿Por qué?</p>
<p>2) Qué conjuntos representan: unitario, vacío, universal. Demuéstrelos. $A = \{x \in \mathbb{Q} / 4 < x < 6\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - x = 0\}$ $C = x \in \mathbb{R}$ $D = \{\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset\}$</p>
<p>3) Dé dos ejemplos de conjuntos disjuntos y dos de conjuntos diferentes.</p>
<p>4) Si el Universo es $U = \{-4, -2, 9, 2/3, 0.9, \sqrt{2}\}$ y los conjuntos: $A = \{x \in U / x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Q}'\}$ $B = \{x \in U / x \notin \mathbb{Q} \wedge x \in \mathbb{Q}'\}$ $C = \{x \in B / x \in \mathbb{Z} \vee x \in \mathbb{N}\}$ $D = \{x \in A / x \notin \mathbb{Q}' \wedge x \in \mathbb{Q}\}$ ¿Cuál(es) son unitarios, vacíos, iguales? Justifica.</p>

Resumen

📖 Conjunto: intuitivamente es una reunión de elementos. Se representa por una letra mayúscula y sus elementos con letras minúsculas.

📖 Determinación de conjuntos:

1. Por Extensión.- Cuando se mencionan todos los elementos.
2. Por comprensión.- Cuando se representa por una condición común de los elementos.

📖 Relación de Pertenencia (\in) enlaza elementos

📖 Relación de Inclusión (\subset) enlaza subconjuntos

📖 Conjuntos especiales:

1. Conjunto vacío (\emptyset): no tiene elementos
2. Conjunto unitario: tiene un solo elemento
3. Conjunto comparable: si uno de ellos está contenido en el otro
4. Conjunto disjunto: no tiene nada común
5. Conjunto universal (U): no le falta nada
6. Conjuntos equivalentes: tiene la misma cantidad de elementos; pero algunos son diferentes.

📖 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

🔗 <http://www.sectormatematica.cl/ppt/conjuntos.ppt>

Aquí encontrará información referente a conjuntos.

🔗 http://www.guiamath.net/ejercicios_resueltos/01_03_03_01-Conjuntos_Ext-Comprens/0_conjuntos-extens-comprens.html

Aquí se desarrollan ejercicios de determinación de conjuntos.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

1

SEMANA

4

CONTINUACIÓN DE CONJUNTOS

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la cuarta semana, los alumnos aplicarán las propiedades operaciones entre conjuntos para que simplifiquen operaciones y resuelvan problemas de cardinalidad, haciendo uso de los diagramas de Venn.

TEMARIO

- Operaciones entre conjuntos.
 - Unión.
 - Intersección.
 - Diferencia.
 - Diferencia simétrica.
 - Complemento.
- Leyes del álgebra de conjuntos.
 - Relativos a la Unión.
 - Relativos a la Intersección.
- Número de elementos de un conjunto.
 - Casos.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- En esta parte el alumno saldrá a la pizarra a resolver ejercicios propuestos en el manual, prácticas calificadas y/o exámenes pasados.
- Trabajo individual o de grupos.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

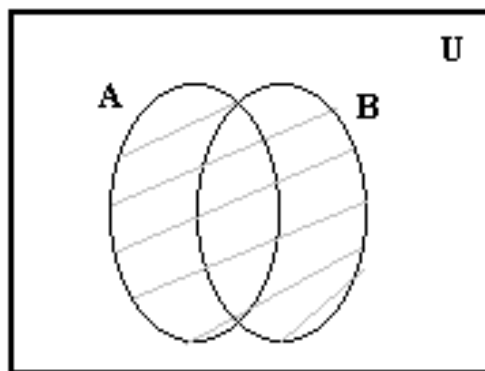
A. UNIÓN O REUNIÓN

Es el conjunto formado por todos los elementos de A y por todos los elementos de B. Si hubiera algún elemento común en A y B, lo representamos una sola vez.

Se denota $A \cup B$, el cual se define así:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Diagrama de Venn Euler



Propiedades de la Unión de Conjuntos

1. Uniforme.- $A \cup B$: Existe y es único.
2. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
3. Asociativa : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. Idempotencia: $A \cup A \cup A = A$
5. Elemento neutro: $A \cup \phi = A$
6. Definición de Universo: $A \cup U = U$
7. Ley de complementación: $A \cup A' = U$
8. Propiedad de absorción: Simple : $A' \cup (A' \cap B \cap C) = A'$
Compuesta : $A \cup (A' \cap B \cap C) = A \cup (B \cap C)$
9. Propiedad Distributiva de la unión respecto a la intersección:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Ejemplo:

1) Sea:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 8x + 15 = 0\}$$

Halla: $A \cup B$

Solución:

De A: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\begin{array}{r} x \quad -3 \\ \quad \times \\ x \quad -2 \\ \hline (x-3)(x-2) = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x-3=0 \rightarrow x=3 \\ \vee \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{array} \right.$$

Luego: $A = \{2, 3\}$

De B: $x^2 - 8x + 15 = 0$

$$\begin{array}{r} x \quad -5 \\ \quad \times \\ x \quad -3 \\ \hline (x-5)(x-3) = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x-5=0 \rightarrow x=5 \\ \vee \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{array} \right.$$

Luego: $B = \{3, 5\}$

$A \cup B = \{2, 3, 5\}$

2) Dados $a, b, \in \mathbb{Q}$; A y B conjuntos tales que $B = \{b^2 + 1\}$ y $A = \{a^2 + 2b\}$

Si $A \cup B = \{a + 4b, b + 1 - 3a\}$ es unitario. Halla los conjuntos A y B.

Sugerencias: $a = \pm (b-1)$

Solución:

a) Si $A \cup B$ es unitario, entonces se cumple que:

$$a + 4b = b + 1 - 3a$$

$$4a + 3b = 1 \dots\dots\dots(l)$$

Con la sugerencia: $a = + (b - 1) \rightarrow b = a + 1$

En (l): $4a + 3(a+1) = 1$

$$7a + 3 = 1$$

$$a = -\frac{2}{7}$$

$$b = -\frac{2}{7} + 1$$

Para $a = -(b - 1)$

$$a = -b + 1 \rightarrow b = 1 - a$$

En (I): $4a + 3(1 - a) = 1$

$$4a + 3 - 3a = 1$$

$$a = -2$$

$$b = 1 - (-2) = 3$$

b) Pero si la unión $A \cup B$ es unitario, entonces A y B también serán unitarios, por lo tanto: $A = B$

$$a^2 + 2b = b^2 + 1$$

Para $b = \frac{5}{7}$ y $a = \frac{-2}{7}$

$$\left(\frac{-2}{7}\right)^2 + 2\left(\frac{5}{7}\right) = \left(\frac{5}{7}\right)^2 + 1$$

$$\frac{74}{49} = \frac{74}{49}$$

Cumple la condición.

Para $a = -2$ y $b = 3$

$$(-2)^2 + 2(3) = 3^2 + 1$$

$$10 = 10 \quad \text{Cumple la condición.}$$

En $A \cup B = \{a + 4b, b + 1 - 3a\}$

Para: $a = -\frac{2}{7}$ y $b = \frac{5}{7}$

$$A \cup B = \left\{ -\frac{2}{7} + 4\left(\frac{5}{7}\right), \frac{5}{7} + 1 - 3\left(-\frac{2}{7}\right) \right\}$$

$$A \cup B = \left\{ \frac{18}{7}, \frac{18}{7} \right\} = \left\{ \frac{18}{7} \right\} \neq A = \frac{74}{49}$$

$$A \cup B = \left\{ \frac{18}{7} \right\} \neq B = \left\{ \frac{74}{49} \right\} \quad \text{No cumple}$$

Para $a = -2$ y $b = 3$

$$A \cup B = \{-2 + 4(3), 3 + 1 - 3(-2)\}$$

$$A \cup B = \{10, 10\} = \{10\} = A = B \quad \text{Cumple.}$$

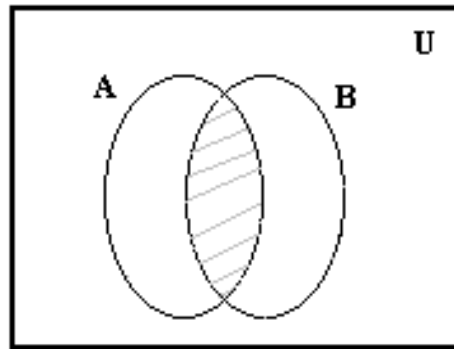
En conclusión: $A = B = \{10\} = A \cup B$

B. INTERSECCIÓN

Sean los conjuntos A y B cualquiera, la intersección es el conjunto formado por todos los elementos comunes a A y B. Se le denota por $A \cap B$, el cual se define así:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Diagrama de Venn Euler



Propiedades de la Intersección

1. Uniforme : $A \cap B$: Existe y es único
2. Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$
3. Asociativa : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. Idempotencia: $A \cap A = A$
5. Elemento neutro: $A \cap U = A$
6. Definición de nulidad : $A \cap \phi = \phi$
 $A \cap A^c = \phi$
7. Por definición de disjuntos : Si $A \cap B = \phi \rightarrow A \neq B$
8. Propiedad de absorción : Simple : $A \cap (A \cup B \cup C) = A$
 Compuesta : $A \cap (A' \cup B \cup C) = A \cap (B \cup C)$
9. Propiedad distributiva de la Intersección respecto a la unión:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
10. Propiedad de Inclusión: Si $A \subset B \rightarrow A \cap B = A$
11. Definición de Igualdad: Si $A = B \rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ \wedge \\ A \cap B = B \end{cases}$

Ejemplo

Sean:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 7x + 12 = 0\} \quad y$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

Halla : $A \cap B$

Solución:

De A : $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\begin{array}{r} x \quad -3 \\ \quad \times \\ x \quad -4 \\ \hline (x-3)(x-4) = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x-3=0 \rightarrow x=3 \\ \vee \\ x-4=0 \rightarrow x=4 \end{array} \right.$$

Luego: $A = \{3, 4\}$

De B : $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\begin{array}{r} x \quad -3 \\ \quad \times \\ x \quad -2 \\ \hline (x-3)(x-2) = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ \vee \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{array} \right.$$

Luego: $B = \{2, 3\}$

Por tanto : $A \cap B = \{3\}$

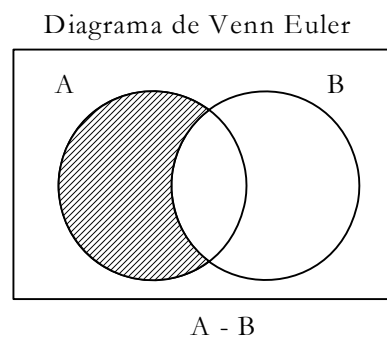
C. DIFERENCIA (-)

Sean los conjuntos A y B cualesquiera, la diferencia entre estos dos conjuntos es todos los elementos que están en el primer conjuntos, pero ninguna de ellas debe estar en el segundo conjunto.

$$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Propiedades:

- 1) $A - B \neq B - A$
- 2) $A - B = A \cap B'$
- 3) $A - B = C_A B$

**D. DIFERENCIA SIMÉTRICA (Δ)**

$$A \Delta B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\} \cup \{x / x \in B \text{ y } x \notin A\}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

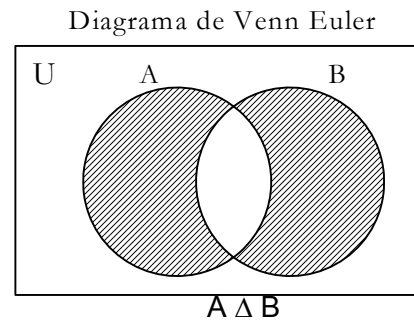
$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Ejemplo:

$$A = \{2,5,7,9,11,13,15\}$$

$$B = \{2,3,7,11,15,20\}$$

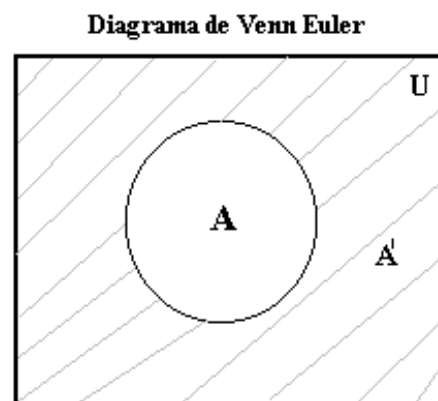
$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= \{5,9,13\} \cup \{3,20\} \\ &= \{3,5,9,13,20\} \end{aligned}$$



COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

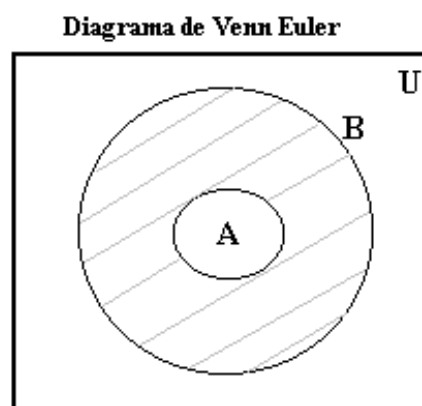
Sea A un conjunto cualquiera, el conjunto “Complemento de A” involucra a todos los elementos del universo U que no pertenecen al conjunto A. Se le denota por: C_A , A^c , A' , el cual se define así:

$$A' = \{x \in U / x \notin A\}$$



Igualmente : $C_B A$ = Complemento del conjunto A en el conjunto B.

$$C_B A = \{x \in B / x \notin A\}$$



Propiedades del Complemento de un conjunto

1. Uniforme: A' : Existe y es único
2. Ley de Complementación: $A \cup A' = U$
3. Propiedad de Nulidad: $A \cap A' = \phi$
4. Ley de Involución: $(A')' = A$
5. Definición de Diferencia: $C_B A = B - A$
6. Propiedad de Inclusión: Si $A \subset B \rightarrow B' \subset A'$
7. Definición de Complemento: $\phi' = U$
 $U' = \phi$

8. Leyes de Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Ejemplo:

Dado el universo:

$$U = \{-4, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, \frac{2}{5}, 0.65, \pi, 8\}$$

Y los conjuntos: $A = \{x \in U / x \in Q \wedge x \in R\}$

$$B = \{x \in U / x \in R \wedge x \in Z\}$$

Halla : $C_A B$

Solución:

$$A = \left\{-4, \frac{2}{5}, 0.65, 8\right\}$$

$$B = \{-4, 8\}$$

$$C_A B = A - B = \left\{\frac{2}{5}, 0.65\right\}$$

Ejercicios Propuestos

1) Sean $C = \{1,5,7,8,9\}$; $D = \{1,8\}$; $E = \{1,5,8,9\}$; $F = \{1,9,7\}$

Halla:

a) $(C \cap F) \cup (E - D)$

b) $E - [(C - F) \cup D]$

c) $[(C \Delta D) - (E \Delta F)] \cap [(C \Delta E) - F]$

2) Determina el conjunto Universal (U) y sus subconjuntos A, B, C conociendo que:

$$(A \cup B \cup C)' = \{1,8,12\}$$

$$B \cap C = \emptyset$$

$$A \cap C = \{5\}$$

$$A \cup B = \{2,3,4,5,7,9\}$$

$$A \cup C = \{2,3,4,5,6,10,11\}$$

$$B' = \{1,2,5,6,8,10,11,12\}$$

3) Un determinado colegio tiene 38 jugadores de fútbol, 15 de básquet y 20 de vóley. Si el número total de jugadores es 58 y sólo 3 de ellos figuran en los tres deportes, se pregunta:

a) ¿Cuántos jugadores figuran en exactamente un deporte?

b) ¿Cuántos jugadores figuran en exactamente dos deportes?

4) De un grupo de 200 personas se determina que 82 eran mudos, 70 eran sordos y 90 eran ciegos, de estos últimos los mudos eran tantos como los sordos. Si los que no son sordos ni mudos ni ciegos son 20. ¿Cuántos sólo son sordos?

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Las leyes del álgebra de conjuntos ya las hemos discutido en la sesión 16; al ver la definición de las operaciones de Unión e Intersección de conjuntos.

En esta parte nos vamos a centrar en la aplicación adecuada de estas propiedades.

Por ejemplo:

1) Usando las leyes del álgebra de conjuntos:

$$\begin{aligned}
 \text{Simplifica: } & a) [A \cap (C - B)] \cup [(A' \cup B') \cap (C - A)] \quad \text{si } A \subset C \text{ y } A \cap B = \emptyset \\
 & \equiv [A \cap (C \cap B')] \cup [(A \cap B)' \cap (C \cap A')] \\
 & \equiv [(A \cap C) \cap B'] \cup [\emptyset' \cap (C \cap A')] \\
 & \equiv [A \cap B'] \cup [U \cap (C \cap A')] \\
 & \equiv (A) \cup (C \cap A') \\
 & \equiv (A \cup C) \cap (A \cup A') \\
 & \equiv (A \cup C) \cap U \\
 & \equiv (A \cup C) \\
 & \equiv C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) & \{[(A \cup B') \cap (A \cap B)] \cup (A \cap B')\} \cup (C - A) \\
 & \equiv \{[A \cap B] \cup (A \cap B')\} \cup (C \cap A') \\
 & \equiv \{A \cap (B \cup B')\} \cup (C \cap A') \\
 & \equiv \{A \cap U\} \cup (C \cap A') \\
 & \equiv A \cup (C \cap A') \\
 & \equiv (A \cup C) \cap (A \cup A') \\
 & \equiv (A \cup C) \cap U \\
 & \equiv A \cup C
 \end{aligned}$$

$$\text{Simplifica: } [(B \cup C) - (C \cap B')] \cup (A \cap B)$$

NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO $[n(A)]$

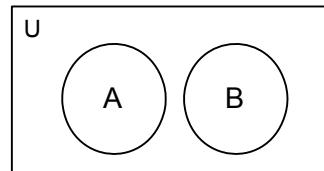
Nos indica la cantidad de elementos que tiene un conjunto simple o compuesto (cuando existen operaciones entre conjuntos).

Casos:

I) Dados dos conjuntos no vacíos:

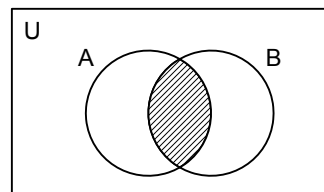
a) Si $A \cap B = \emptyset \rightarrow$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$



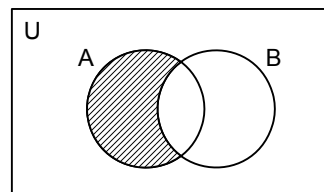
b) Si $A \cap B \neq \emptyset \rightarrow$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



c) Si $A - B \neq \emptyset \rightarrow$

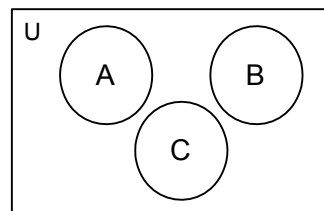
$$\Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$



II) Dados tres conjuntos no vacíos:

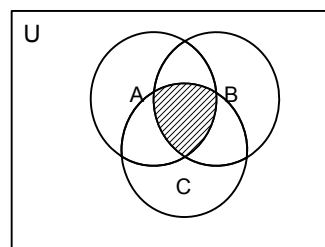
a) Si $A \cap B \cap C = \emptyset \rightarrow$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$



b) Si $A \cap B \cap C \neq \emptyset \rightarrow$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



Ejemplo: Si A, B, C son subconjuntos de U tales que:

$$\begin{array}{ll} n(A) = 25 & n(A \cap B) = 10 \\ n(B) = 20 & n(A \cap C) = 15 \\ n(C) = 25 & n(B \cap C) = 8 \\ n(U) = 50 & n(A' \cap B' \cap C') = 10 \end{array}$$

Determinar:

- a) $n[(A \cup B') - (B \cup C)']$
 b) $n[(A' - B') \cup (C' \cup B')]$

Solución:

$$\text{Si } n(A' \cap B' \cap C') = 10 \rightarrow n(A \cup B \cup C)' = 10$$

$$\Rightarrow n(U) = n(A \cup B \cup C) + n(A \cup B \cup C)'$$

$$50 = n(A \cup B \cup C) + 10 \quad \therefore n(A \cup B \cup C) = 40$$

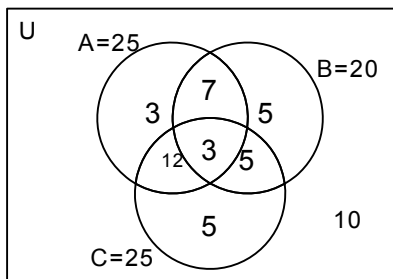
Luego:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$40 = 25 + 20 + 25 - 10 - 8 - 15 + n(A \cap B \cap C)$$

$$\therefore n(A \cap B \cap C) = 40 - 37 = 3$$

Graficando:



Preguntas:

<p>a)</p> $\begin{aligned} & n[(A \cup B') - (B \cup C)'] \\ & \equiv n[(A \cup B') \cap (B \cup C)'] \\ & \equiv n[(A \cup B') \cap (B' \cap C')] \\ & \equiv n[\underbrace{(A \cup B') \cap (B' \cap C')}_{B' \cap C}] \\ & \equiv 17 \end{aligned}$	<p>b)</p> $\begin{aligned} & n[(A' - B') \cup (C' - B')] \\ & \equiv n[(A' \cap B) \cup (C' \cap B)] \\ & \equiv n[B \cap (A' \cup C')] \\ & \equiv n[B \cap (A \cap C)'] \\ & \equiv 17 \end{aligned}$
--	---

Ejercicios Propuestos

1) Simplifica:

$$\{[(A' \cap B') \cup A \cup B] \cap [(A \cap B) \cup (A' \cap B') \cup A]\} \cap A'$$

2) Dados los conjuntos: $A = \langle -3, 7 \rangle$; $B = [-6, 9]$; $C = \langle -1, 10 \rangle$

Simplifica: $\{[A \cup (B \cup C')] \cap [B' \cap (C - A)']\}' \cup [(A \cap B) \cap B]'$

3) Si A, B, C son subconjuntos de U tal que:

$$n(A) = 10$$

$$n(A \cap B \cap C) = 2$$

$$n(B \cap C) = 7$$

$$n(B) = 12$$

$$n(A' \cap B' \cap C') = 3$$

$$n(C - (A \cup B)) = 6$$

$$n(A \cap B) = 5$$

$$n(A \cap C') = 7$$

$$n(U) = 26$$

Halla $n(C')$

4) Sean

$$A = N \cap (\langle 5, 8 \rangle \cup [20, 25 \rangle)$$

$$B = Z^+ \cap \langle 7, 24 \rangle$$

$$C = N \cap \langle 22, 40 \rangle$$

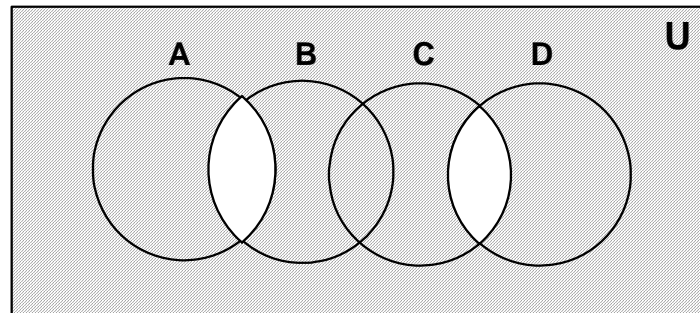
Halla $n[(B \cap C) - A]$

GUÍA DE EJERCICIOS

TEMA: Teoría de conjuntos

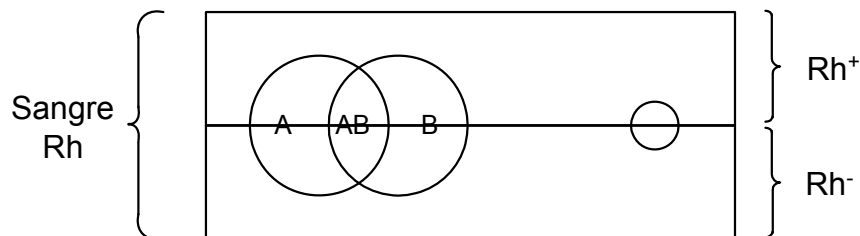
I. Ejercicios resueltos:

1. Sombrear: $[C(A \cup B) \cap C C] \cup [C(A - CB) \cap C D]$
En el diagrama siguiente:



2. La sangre se clasifica, de acuerdo a su tipo, en **Rh** positivo y **Rh** negativo. Si la sangre contiene un antígeno "A" es del tipo "A"; si contiene un antígeno "B", del tipo "B"; si contiene ambos, es del tipo "**AB**". Si no contiene ningún antígeno es del tipo O. Diagrama en un diagrama de Venn todas estas posibilidades.

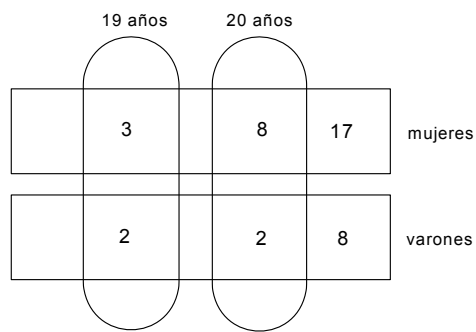
Solución:



3. En la editorial LÁSER laboran 40 personas de las cuales podemos decir que:

3 mujeres tienen 19 años.
 20 mujeres no tienen 20 años.
 25 mujeres no tienen 19 años.
 8 varones no tienen 19 ni 20 años.
 2 varones tienen 20 años.

- a. ¿Cuántas personas tienen 20 años?
- b. ¿Qué porcentaje del total representa los que tienen 19 años?

Solución:

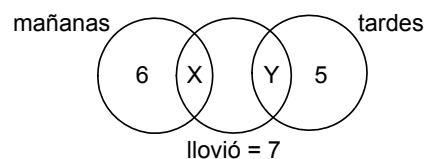
a. 10 personas

b. $\frac{5}{40} \times 100\% = 12.5\%$

4. Un estudiante salió de vacaciones por n días y observó que en ese lapso:

- Llovió 7 veces en la mañana o en la tarde.
- Cuando llovía en la tarde estaba clara la mañana.
- Hubo 5 tardes claras.
- Hubo 6 mañanas claras.

¿Cuánto duró el período vacacional?

Solución:Como el N° de mañanas es igual al N° de tardes, se cumple:

$$6 + x = y + 5 \rightarrow x - y = -1$$

pero: $x + y = 7$

$$2x = 6 \rightarrow x = 3$$

$$y = 4$$

El período vacacional duró: $6 + x = 6 + 3 = 9$ días.

5. En una batalla campal intervinieron 1200 hombres, de los cuales:

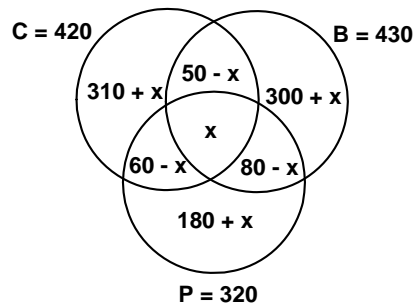
- 420 fueron heridos en la cabeza.
- 430 fueron heridos en el brazo.
- 320 fueron heridos en la pierna.
- 80 fueron heridos en ambos miembros.
- 50 fueron heridos en la cabeza y el brazo.
- 60 fueron heridos en la pierna y la cabeza.

Si 200 no fueron heridos, se pide calcular:

a. ¿Cuántos fueron heridos en los tres lugares?

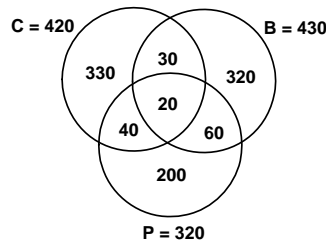
- b. ¿Cuántos fueron heridos a lo más en dos lugares?
 c. ¿Cuántos fueron heridos por lo menos en dos lugares?
 d. ¿Cuántos fueron heridos en dos lugares solamente?

Solución:



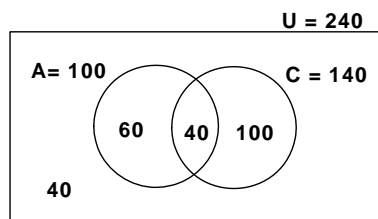
$$310 + x + 50 - x + 60 - x + 300 + x + 180 + x + 80 - x + x = 1000$$

- a. $x = 20$ hombres



- b. $U - n(C \cap B \cap P) - n(C \cup B \cup P)' = 1200 - 20 - 200 = 980$ hombres
 c. $n(B \cap C) + n[(C \cap P) - (B \cap C \cap P)] + n[(B \cap P) - (B \cap C \cap P)] = 50 + 40 + 60 = 150$ hombres
 d. $n[(B \cap C) - (B \cap C \cap P)] + n[(C \cap P) - (B \cap C \cap P)] + n[(B \cap P) - (B \cap C \cap P)] = 30 + 40 + 60 = 130$ hombres
6. A una charla de los jueves institucionales de Cibertec, asistieron 240 estudiantes, de los cuales 140 estudian Computación y 100 estudian Administración. Si 40 estudian Computación y Administración. Se pide:
- a. ¿Cuántos estudian Computación y Administración?
 b. ¿Cuántos estudian Computación o Administración?
 c. ¿Cuántos estudian o Computación o Administración?
 d. ¿Cuántos estudian Computación, si y sólo si, estudian Administración?
 e. ¿Cuántos son los estudiantes que estudiando Administración, entonces desean estudiar Computación?

Solución:

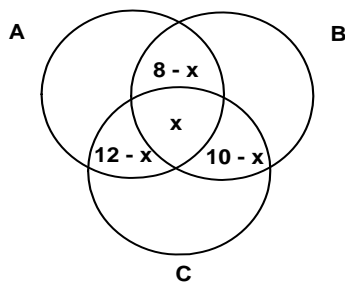


- $n(C \cap A) = 40$ estudiantes.
- $n(C \cup A) = 100 + 100 = 200$ estudiantes.
- $n(C \Delta A) = 60 + 100 = 160$ estudiantes.
- $n(C \leftrightarrow A) = U - n(A \Delta C) = 240 - 160 = 80$ estudiantes.
- $n(A \rightarrow C) = n(A') + n(C) - n(A' \cap C) = 140 + 140 - 100 = 180$ estudiantes.

7. Sean A, B y C conjuntos no vacíos. Si $n(A \cap B) = 8$, $n(A \cap C) = 12$ y $n(B \cap C) = 10$. Halla el valor de E.

$$E = \frac{30 - n[(A \cap B) - C] - n[(A \cap C) - B] - n[(B \cap C) - A]}{n(A \cap B \cap C)}$$

Solución:



$$E = \frac{30 - (8 - x) - (12 - x) - (10 - x)}{x} =$$

$$E = \frac{30 - 8 + x - 12 + x - 10 + x}{x} =$$

$$E = \frac{30 - 30 + 3x}{x} = 3$$

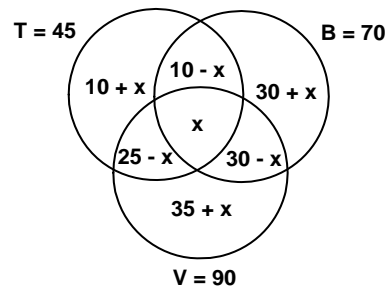
8. En el instituto Cibertec muchos son deportistas; por ello, 150 alumnos entraron en competencia para definir al mejor de cada juego. De éstos, 45 juegan tenis, 70 juegan básquet y 90 juegan vóley. 10 juegan tenis y básquet, 25 juegan tenis y vóley y 30 juegan básquet y vóley. ¿Cuántos juegan los 3 deportes?

Solución:

$U = 150$ alumnos.

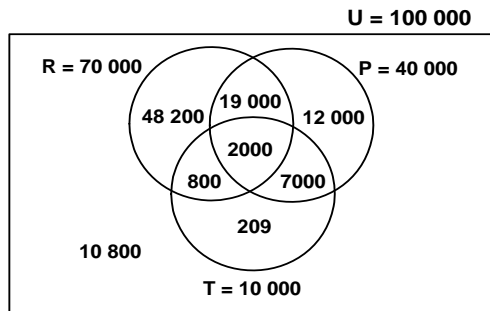
$$10 + x + 25 - x + 35 + x + 70 = 150$$

$x = 10$ alumnos.



9. En una ciudad de 100,000 habitantes adultos, el 70% escucha radio, el 40% lee periódicos y el 10% ve televisión. Entre los que escuchan radio, el 30% lee los periódicos y el 4% ve televisión. El 90% de los que ve televisión lee los periódicos y sólo el 2% de la población total lee periódicos, ve televisión y escucha radio. ¿Cuántos habitantes no escuchan radio, no leen periódicos ni ven televisión?

Solución:



$$R = 70\% \times 100\ 000 = 70\ 000$$

$$P = 40\% \times 100\ 000 = 40\ 000$$

$$T = 10\% \times 100\ 000 = 10\ 000$$

$$R \cap P = 30\% \times 70\ 000 = 21\ 000$$

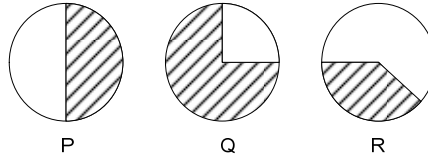
$$R \cap T = 4\% \times 70\ 000 = 2\ 800$$

$$T \cap P = 90\% \times 10\ 000 = 9\ 000$$

$$R \cap T \cap P = 2\% \times 100\ 000 = 2\ 000$$

Respuesta: $100\ 000 - 70\ 000 - 12\ 000 - 7\ 000 - 200 = 10\ 800$ habitantes.

10. Si se sabe:



Hallar:

$$1. -(P \cup Q) \cap (P - R)$$

$$2. -P \cap Q \cap R$$

$$3. -P - Q \cap (R - P)$$

$$4. -R - Q \cap (P - R)$$

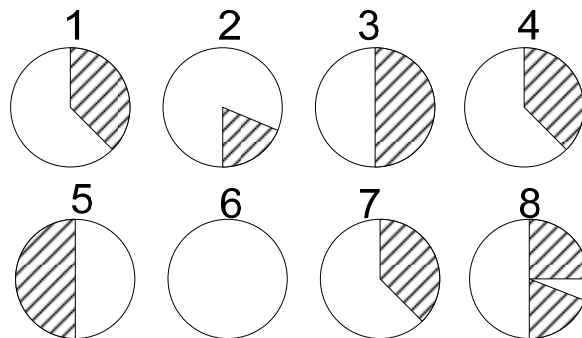
$$5. -Q - [P \cup (R - Q)]$$

$$6. -(P - R) \cap [Q - (R \cup P)]$$

$$7. -P \cap [(P \cup Q) - R]$$

$$8. -P \cup (R - Q) - [P \cap (Q - R)]$$

Solución:



11. En una encuesta realizada sobre las tres mejores marcas de computadoras, se obtuvo la siguiente información al entrevistar a 154 personas o usuarios:

- 6 se deciden por las marcas IBM y DIGITAL, pero no COMPAQ.
- 5 se deciden por las marcas DIGITAL y COMPAQ solamente.
- 8 se deciden sólo por la marca COMPAQ.

El número de personas que se deciden por las 3 marcas es el séxtuplo de los que se deciden sólo por DIGITAL y el triple de las que sólo se deciden por IBM. Nadie declara decidirse por la compra de IBM y COMPAQ solamente. ¿Cuántas personas se deciden a lo más por 2 tipos de computadoras?

Solución:

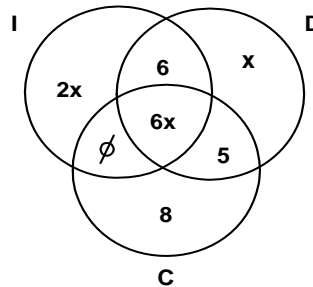
$$(I \cap D) - C = 6$$

$$(D \cap C) - I = 5$$

$$C - (I \cap D) = 8$$

$$2x + 6 + x + 6x + 5 + 8 = 154$$

$$x = 15$$



Se deciden a lo más por: 2 computadoras:

$$\begin{aligned} = x + 8 + 5 + 2x + 6 &= 19 + 3x \\ &= 19 + 3(15) \\ &= 64 \text{ personas.} \end{aligned}$$

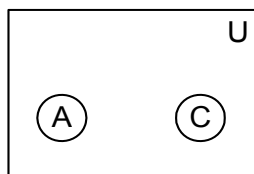
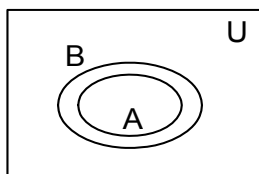
12. Sabiendo que $A \subset B$ y $C \cap A = \emptyset$, entonces el conjunto:

$[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]$ es igual a :

Solución:

$$A \subset B$$

$$C \cap A = \emptyset$$



$$[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]$$

$$[A \cup (B \cap C')] \cap [B \cup (C \cap A')]$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C') \cap [B \cup (C \cap A')]$$

$$\text{Como: } A \subset B \rightarrow A \cup B = B$$

$$\text{Como: } C \cap A = \emptyset \rightarrow A \cup C' = C'$$

$$C \cap A' = C$$

$$B \cap C' \cap [B \cup C]$$

$$B \cap C' = B - C$$

Ejercicios propuestos:

1. Dado el siguiente conjunto $A = \{ -21, -16, -9, 0, 11, 24 \}$ que está definido por extensión, transfórmalo a compresión.

2. Si: $A = \{ 5, 3a - 2b, a + b \}$ es un conjunto unitario y:

$$B = \{ X/x = ak, k \text{ es un entero}, 5 \leq k < 10 \}$$

$$C = \{ X/x = bk, k \text{ es un entero}, 3 \leq k < 6 \}$$

Halla $n(B \cap C)$

3. Sea $A = \{ m + n, 8, 2m - 2n + 4 \}$ un conjunto unitario, $A \cup B = \{ 8, 6 \}$;
 $B = \{ 5a - 4, 2m - 2 \}$

Halla el conjunto C , tal que $C = \{ m + a, 2m + n, a + 2n \}$

4. Sea el conjunto universal $U = \{ X \in R / X \geq -5 \wedge X \leq 8 \}$ y dados los siguientes conjuntos:

$$A = \{ X \in U / X \in N \vee X \in Z \}, C = \{ X \in U / X \in R \wedge X \geq 0 \}$$

$$B = \{ X \in A / X \in Q \wedge X \in N \}, D = \{ X \in U / X \in C \wedge X \in R \}$$

Halla:

a) $D - C$

b) $A \Delta B$

5. Dado el conjunto $U = \{ -8, -6, 7, 1/6, 0.6, 5 \}$ y sean los conjuntos:

$$A = \{ X \in U / X \in R \wedge X \in Q' \}, D = \{ X \in A / X \in Z \vee X \in N \},$$

$$B = \{ X \in U / X \notin Q \wedge X \in Q' \}, E = \{ X \in U / X \in Q \vee X \in Q' \}$$

Halla:

a) $(A \cup B) \cap (E - B) \cup (A \cap E)$

b) $(B \Delta A) - (D \Delta E)$

6. Sean $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $C = \{ 1, 3 \}$, A y B conjuntos no vacíos. Halla B bajo las siguientes condiciones: $A \cap B = \{ 3 \}$, $A \cup B = \{ 2, 3, 4 \}$, $B \cup C = \{ 1, 2, 3 \}$

7. Si A , B y C son conjuntos de E , tal que:

$$n(A) = 10 \qquad n(A' \cap B' \cap C') = 3$$

$$n(B) = 12 \qquad n(A \cap C') = 7$$

$$n(A \cap B) = 5 \qquad n(B \cap C) = 7$$

$$n(A \cap B \cap C) = 2 \qquad n(E) = 26$$

Halla $n(C')$

8. Dado el Universo:

$$U = \{-4, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, 2/5, 0.65, \pi, 8\}$$

Y los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in U / x \in Q' \wedge x \in R\} \\ B &= \{x \in U / x \notin Q' \wedge x \in R\} \\ C &= \{x \in B / x \in N \vee x \notin N\} \\ D &= \{x \in A / x \in R \wedge x \in B\} \end{aligned}$$

Halla $(A \cup D) - (B \cap C)$

9. Dado el siguiente conjunto:

$$A = \{\{0\}, \{*, \#\}, \{\{\$\}\}, B, 5, a\}$$

Di si es verdadero o falso, justificando tu respuesta en las siguientes expresiones:

- | | |
|--------------------------|---|
| a) $\{0\} \in A$ | e) $\{\{\{*, \#\}\}\} \subset A$ |
| b) $\{\{\$\}\} \notin A$ | f) $\{\{0\}\}, \{\{a\}\} \not\subset A$ |
| c) $\{\{B\}\} \subset A$ | g) $\{\$\} \in \{\{\$\}\}$ |
| d) $a \not\subset A$ | h) $\{*, \#\}, B \notin A$ |

10. Si $U = \{X \in N / 0 < X < 11\}$

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5, 7\} & ; & & A \cap C &= \{1, 3\} \\ B &= \{2, 4, 6, 8\} & ; & & A \cup C &= \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} \end{aligned}$$

Halla $n(B \cup C) + n[(A \cup C)']$

11. Sean A, B y C conjuntos no vacíos.

$$\text{Si } n(A \cap B) = 16, n(A \cap C) = 14 \text{ y } n(B \cap C) = 20$$

Halla el valor de:

$$E = \frac{50 - n[(A \cap B) - C] - n[(A \cap C) - B] - n[(B \cap C) - A]}{n(A \cap B \cap C)}$$

12. Si: $A \subset C$ y $A \cap B = \emptyset$

$$\text{Simplifica: } [A \cap (C - B)] \cup \{(A' \cup B') \cap (C - A)\}$$

13. Sabiendo que: $A \cap B' = \emptyset$ y $A \cap C = \emptyset$

$$\text{Simplifica: } [A \cap (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]$$

14. Sabiendo que: $A \subset B$

$$\text{Simplifica: } A \cap \{[(B \cup A) \cap C \cap (C' \cup B')] \cup A' \cup B\}$$

15. Sabiendo que: $C' - B' = \emptyset$

Simplifica: $\{[C \cup (B - A')] \cap [B - (A \cup C)']\} \cup B$

16. Simplifica: $[(A \cap B) \cup C'] \cup (B \cap C)$

17. Sabiendo que: $A \subset B$ y $A \cap C = \emptyset$

Simplifica:

$\{[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]\} \cup \{(A - B) \Delta C\}$

18. Sean los conjuntos A, B y C tales que $B' \subset A'$ y $A \Delta C = A \cup C$

Simplifica: $\{[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]\} \cup \{(A \cap B') \Delta C\}$

19. Dados tres conjuntos diferentes A, B y C para los que se cumple:

$$A \cap B = A ; C \subset A' ; C \cap B' = \emptyset$$

Simplifica: $\{[A \cap (B \cup C)] - [A \cup B]\} \cup [(B \Delta C) \cup (A \Delta C')]$

20. En CIBERTEC estudian 500 alumnos en primer ciclo. De éstos 329 dominan Tópicos de Matemáticas, 186 Educación Cívica, 295 Algoritmos; 83 Tópicos de Matemáticas y Educación Cívica, 217 Tópicos de Matemáticas y Algoritmos, y 63 Educación Cívica y Algoritmos. Halla el número de alumnos que dominan los tres cursos.

21. Se reparten juguetes de tres tipos distintos: aviones, autos y trenes a 200 jóvenes de manera que a:

- 70 jóvenes se les entrega aviones.
- 60 jóvenes reciben autos.
- 20 jóvenes reciben autos y aviones.
- 27 jóvenes reciben autos y trenes pero no aviones.
- 90 jóvenes reciben únicamente trenes.
- 3 jóvenes reciben aviones, autos y trenes.

Se sabe además que los que reciben únicamente autos son tantos como los que reciben únicamente aviones. ¿Cuántos reciben aviones y trenes, pero no autos?

22. En una encuesta a los alumnos de CIBERTEC, sobre la posible aprobación de los cursos de Tópicos de Matemáticas, de Algoritmos y Educación Cívica, se obtuvo la siguiente información:

- 78 alumnos aseguran que aprobarán Tópicos de Matemáticas o Algoritmos.
- 80 alumnos aseguran que aprobarán Tópicos de Matemáticas o Educación Cívica.
- 82 alumnos aseguran que aprobarán Algoritmos o Educación Cívica.
- 60 alumnos aseguran que aprobarán uno de los cursos mencionados.

¿Cuántos alumnos aseguran que aprobarán por lo menos dos de los cursos mencionados?

23. En una encuesta sobre el consumo de cervezas Pilsen, Cristal y Cuzqueña se obtuvo el siguiente resultado:

- 190 toman la cerveza Pilsen.
- 110 toman la cerveza Cristal.
- 150 toman la cerveza Cuzqueña.

Los que sólo toman Cuzqueña son la mitad de los que sólo toman Cristal y la tercera parte de los que sólo toman Pilsen.

Los que sólo toman Cristal y Cuzqueña son la mitad de los que sólo toman Pilsen y Cristal, si los que toman las tres cervezas son un tercio de los que sólo toman Pilsen y Cuzqueña.

¿Cuántas personas toman una cerveza solamente?

24. Si: $A = \{x \in \mathbb{Z} / x > 3 \rightarrow x = 5\}$
 $B = \{x \in \mathbb{N}_0 / x \geq 0 \wedge x < 6\}$
 $C = \{x \in \mathbb{Z} / x > -3 \wedge x^2 \neq -x + 6\}$
 Halla $M = [(A - B) - C]' - (B - C)$


25. Si: $A = \{x \in \mathbb{R} / \sim (x > -3 \rightarrow x \geq 4)\}$
 $B' = \{x \in \mathbb{R} / x \notin A \wedge x \in [-4, 8)\}$
 $C = \langle -\infty, 2] \cup [6, 13 \rangle$
 Halla $P = [(A - B')' \cup C]'$


26. Si: $U = \{x \in \mathbb{Z} / \sim 3 \leq x - 1 < 5\}$
 $A = \{x \in U / \sim (x > -2 \rightarrow x \geq 0)\}$
 $B = \{x \in U / x \in [-5; 1[\wedge]-3; 3[\}$
 Determine el valor de: $(A - B') \cup B$

Resumen


Operaciones entre conjuntos:

- Unión (\cup).- es juntar todos los elementos de un conjunto.
- Intersección (\cap).- son los elementos comunes de los conjuntos.
- Diferencia ($-$).- son los elementos que están solo en el primer conjunto.
- Diferencia Simétrica (Δ).- son los elementos que solo están en el primer conjunto unido a los elementos que están solo en el segundo conjunto.
- Complemento de un conjunto ($'$).- es lo que el falta al conjunto para llegar a ser el universo.

 Número de elementos de un conjunto ($n(A)$).- nos indica la cantidad de elementos que tiene un conjunto simple o compuesto.


 Leyes del álgebra de conjuntos.- vienen a ser las mismas que las leyes del álgebra proposicional, solamente la diferencia radica en el simbología a utilizar, es decir:

Lógica	Conjunto
\vee	\cup
\wedge	\cap
\sim	$'$
V	U
F	ϕ

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 <http://www.espacioblog.com/unefalogicalg/post/2007/04/28/ejercicios-operacione-con-conjuntos>

En la página encontrará ejercicios de operaciones con conjuntos.

 http://www.guiamath.net/ejercicios_resueltos/01_03_03_05-Conjuntos_compl-dif-union-intersecc/0_compl-dif-union-intersecc.html

Aquí encontrará ejercicios de operaciones con conjuntos.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

2

SEMANA

5

REGLA DE TRES SIMPLE Y PORCENTAJES

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la unidad, los alumnos, haciendo uso de la regla de tres simple, resolverán problemas sobre porcentajes, descuentos y aumentos sucesivos, y convertirán el lenguaje formal al lenguaje matemático.

TEMARIO

- Regla de tres simple
 - Directa
 - Inversa
- Tanto por ciento
 - Definición
 - Consideraciones generales de porcentajes
 - Descuentos sucesivos
 - Aumentos sucesivos

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Se propone problemas en los que se deben aplicar regla de tres simple.
- Los alumnos deberán diferenciar de acuerdo al enunciado de los problemas si se trata de una regla de tres simple directa o inversa.
- El profesor resolverá ejercicios relativos a porcentajes para que los alumnos noten la aplicación de las consideraciones generales al tanto por ciento.
- Se propondrá ejercicios y problemas para que los alumnos se ejerciten en el aula y posteriormente se le indicará que resuelvan los ejercicios propuestos relativos al tema con bonificación de puntos.

REGLA DE TRES

Es una aplicación de las magnitudes proporcionales; es un procedimiento basado en la relación proporcional de dos o más magnitudes.

La regla de tres consiste en calcular un valor desconocido de una magnitud, mediante la comparación de dos o más magnitudes proporcionales.

Regla de tres Simple: Cuando interviene sólo dos magnitudes.

1. Regla de tres simple directa:

Cuando las dos magnitudes son directamente proporcionales (DP).

Procedimiento:

Magnitudes:	M	(DP)	Q
Supuesto:	a		b
Pregunta:	c		x

Como son DP su cociente es constante. Luego:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Forma práctica:

Se multiplica diagonalmente y entre la tercera cantidad.

Es decir: a (DP) b
c x

$$\therefore x = \frac{c \cdot b}{a}$$

2. Regla de tres simple inversa:

Cuando las dos magnitudes son inversamente proporcionales.

Procedimiento:

Magnitudes:	M	(IP)	Q
Supuesto:	a		b
Pregunta:	c		x

Como son IP su producto es constante

Luego: $a \cdot b = c \cdot x$

Forma práctica:

Se multiplica horizontalmente y entre la tercera cantidad.

Es decir: a (IP) b
c x

$$\therefore x = \frac{a \cdot b}{c}$$

EJEMPLOS

- 1) Una persona puede caminar normalmente 9 kilómetro en 2 horas. En una caminata normal de 7 horas, ¿cuántos kilómetros puede caminar?.

Solución:

Horas	km
2	9
7	x

$$\therefore x = \frac{7 \times 9}{2} = 31,5 \text{ km}$$

Los kilómetros caminados son DP a las horas de caminata.

- 2) Se ha calculado que para construir un edificio se necesita 80 obreros y 60 días. Pero se cuenta solamente con 75 obreros. ¿Cuántos días se tardará en construir el edificio?

Solución:

# obreros	días
80	60
75	x

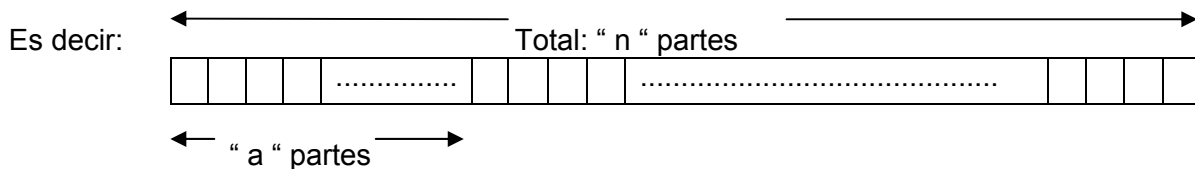
$$\therefore x = \frac{80 \times 60}{75} = 64 \text{ días}$$

El # de obreros que intervienen en una obra y el tiempo que demoran en ejecutarla son IP.

Regla del Tanto por Ciento

Es una aplicación de la regla de tres simple.

Se denomina "Tanto por ciento" o "Porcentaje", porque es el número de unidades que se toman en cuenta de cada 100.



Se toma "a" partes por cada "n" partes.

Representación:

$$a \text{ por ciento} = a\% = \frac{a}{100}$$

Ejemplo:

- 1) 5% nos indica que tomamos: $\frac{5}{100}$ de una cantidad cualquiera.

$$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$$

- 2) 81.6% nos indica que tomamos: $\frac{81.6}{100}$ de una cantidad cualquiera.

$$81,6\% = \frac{81,6}{100} = 0,816$$

- 3) $\frac{2}{5}\%$ nos indica que tomamos: $\frac{\frac{2}{5}}{100}$ de una cantidad cualquiera.

$$\frac{2}{5}\% = \frac{2}{5} \times \frac{1}{100} = \frac{2}{500} = 0,004$$

NOTA

Se pueden sumar o restar porcentajes de una misma cantidad.

Ejemplo: a) 25% de A + 63% de A = 88% de A

b) 58% de P + 126% de P – 20% de P = (58+126-

20) % de P

Problemas fundamentales sobre porcentajes

“Todos los problemas de porcentajes, pueden al final, reducirse a una expresión como

la siguiente: $P\% \text{ de } N = R$ ”

En donde: **P%** = Nos indica el número de centésimas a tomar.
N = Representa la cantidad en la cual hay que tomarlas.
R = Es el resultado de la operación anterior.

¡ATENCIÓN!: Las palabras “de”, “del” o “de los” matemáticamente significan multiplicación y la palabra “es” significa igualdad.

Ejemplos: 1) Halle el 0,008% de 0,2

Sol: 0,008 de 0,2 = R

$$\frac{8 \times 10^{-3}}{100} \times 2 \times 10^{-1} = R$$

$$8 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^{-1} = R$$

$$16 \times 10^{-6} = R$$

2) Si José tuviera 24% menos de la edad que tiene, tendría 38 años. ¿Qué edad tiene actualmente?

Sol: La totalidad es 100% menos 24% = 76%
 Entonces 76% de Edad = 38

$$\frac{76}{100} \times E = 38$$

$$E = \frac{38 \times 100}{76} \therefore$$

E = 50 años

3) Si al vender uno de mis libros de Matemática I en 28 soles gano 8 soles.
 ¿Cuál es el porcentaje de ganancia?

Sol:

Sabemos que:

$$\text{Ganancia} = \text{Precio Venta} - \text{Precio Costo}$$

Entonces: $8 = 28 - P_c \rightarrow P_c = 20$

Luego: si $\left. \begin{array}{l} 20 \text{ --- } 100\% \\ 8 \text{ --- } x \end{array} \right\} x = \frac{8 \times 100\%}{20} =$ 40%

NOTA: No olvides que toda ganancia o pérdida se calcula con respecto al precio de costo (a no ser que se nos indique otra cosa).

Descuentos y Aumentos sucesivos:

Es cuando a una cantidad se le aplica más de un descuento o aumento. Por lo cual se puede utilizar la siguiente fórmula:

Descuento:

$$Du = \left[\frac{(100 - D_1)(100 - D_2)(100 - D_3) \dots}{100^{n-1}} - 100 \right] \%$$

Donde: D_1, D_2, D_3, \dots Son los descuentos sucesivos
 n : Es el número total de descuentos
 Du : Es el descuento único equivalente a todos los descuentos realizados.

Aumento:

$$Au = \left[\frac{(100 + A_1)(100 + A_2)(100 + A_3) \dots}{100^{n-1}} - 100 \right] \%$$

Donde: A_1, A_2, A_3, \dots Son los aumentos sucesivos

n : Es el número total de aumentos

Au : Es el aumento único equivalente a todos los aumentos realizados.

Ejemplos:

Dos descuentos sucesivos del 40% y 20% equivalen a un descuento único de:

$$Du = \left[\frac{(100 - 40)(100 - 20)}{100^{2-1}} - 100 \right] \%$$

$$Du = \left[\frac{(60)(80)}{100} - 100 \right] \%$$

$$Du = [48 - 100] \%$$

$$Du = -52 \%$$

Dos aumentos sucesivos del 20% y 30% equivalen a un aumento único de:

$$Au = \left[\frac{(100 + 20)(100 + 30)}{100^{2-1}} - 100 \right] \%$$

$$Au = \left[\frac{(120)(130)}{100} - 100 \right] \%$$

$$Au = [156 - 100] \%$$

$$Au = +56 \%$$

Nota: El signo (-) nos indica el descuento, por lo que los descuentos sucesivos del 40% y 20% equivalen a un descuento único de 52%.

El signo (+) nos indica aumento, por lo que los aumentos sucesivos del 30% y 20% equivalen a un aumento único del 56%.

PROBLEMAS PROPUESTO

- 1.- Julio compró un objeto que vendió después a 300 nuevos soles y obtuvo una ganancia igual al 14% del precio de compra más el 5% del precio de venta. ¿Cuánto costó el objeto?
- 2.- Carmen quiere vender su escritorio que le costó \$270 y ganar el 20% del precio de costo más el 10% del precio de venta más \$81.
- 3.- ¿Qué precio se debe fijar a un artículo que costó \$420, para que aún descontando el 20% se gane el 40%?
- 4.- Se venden dos caballos en \$9,600 c/u, en uno de ellos se gana el 20% y en el otro se pierde el 20%, ¿se ganó o se perdió y cuánto?
- 5.- Un comerciante compra un artículo consiguiendo un descuento de 30% del precio de lista, ¿cuál es el porcentaje del precio de venta con respecto al precio de lista, si el comerciante gana el 20% del precio de costo?
- 6.- Una casa comercial vende un televisor en \$120 perdiendo en la venta 5 dólares. ¿Qué tanto por ciento perdió?

Ejercicios Propuestos

1) A una reunión asistieron 624 personas; se sabe que por cada 7 hombres, habían 9 mujeres. ¿Cuántos hombres asistieron?

2) Una cuadrilla de 12 obreros pueden llenar un techo en diez horas. ¿Qué tiempo tardarían 15 obreros en llenar el mismo techo?

3) Halle el 0,002% de 36000

4) Halle el 0,03% del 0,2% de 24×10^6

5) Por la compra de un televisor, una persona obtuvo un descuento del 20% sobre el precio del artefacto. Si hubiera comprado en la tienda vecina, habría obtenido un descuento del 30% y habría ahorrado 10 dólares. ¿Cuál era el precio del artefacto?.


6) En un salón de clases el 70% de los alumnos son hombres, si el 25% de las mujeres faltan, sólo se cuentan 18 mujeres. ¿Cuántos alumnos tiene el salón?.

7) Roberto compra un refrigerador y le hacen 3 descuentos sucesivos del 20%, 40% y 50% .En lugar de estos tres descuentos pudieron haberle hecho uno solo ,¿de cuánto sería este descuento?.


8) El director del programa académico de Cibertec le dice a un profesor de la carrera de Computación: Por tu esfuerzo durante el año pasado, voy a sugerir que te otorguen tres aumentos sucesivos del 40%, 30% y 50% en el presente año. ¿A qué aumento único equivale?


9) Se vende un televisor Miray por \$ 6000, ganando el 20% del precio de venta, más el 20% del precio de costo. halle el precio de costo del televisor.


Resumen

 Regla de Tres.- consiste en calcular un valor desconocido de una magnitud, mediante la comparación de dos o más magnitudes proporcionales.

 Regla de tres simple directa.- si las magnitudes son directamente proporcionales.

 Regla de tres simple inversa.- si las magnitudes son inversamente proporcionales.

 Tanto por ciento.- se denomina así porque es el número de unidades que se toman en cuenta de cada cien.

 Descuentos y aumentos sucesivos.- se da cuando a una cantidad se le aplican más de un descuento o aumento. Ejemplo:

- Carlos compra un televisor y le hacen dos descuentos sucesivos, el primero en 20% y luego el 10% ¿A qué descuento único equivale ambos descuentos?

Sol: $\frac{80}{100}(90\%) = 72\%$ finalmente $\therefore 100\% - 72\% = 28\%$

- Pedro compró un objeto que se vendió después a 300 soles y obtuvo una ganancia igual 14% del precio de compra más el 5% del precio de venta ¿Cuánto costó el objeto?


Sol:

$$P_v = P_c + G$$

$$P_v = P_c + 14\%P_c + 5\%P_v$$

$$95\%P_v = 114\%P_c$$

$$95(300 \text{ soles}) = 114P_c \quad \text{luego: } P_c = 250 \text{ soles}$$

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 <http://www.guiamath.net/>

En ella se aplican ejercicios y problemas relativos al tema.

 <http://www.ematematicas.net/porcentajes.php?a=1&tp=7>

Aquí hallará ejercicios y problemas relativos al tema.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

3

SEMANA

6

TEORÍA DE EXPONENTES

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la unidad, los alumnos simplificarán expresiones algebraicas utilizando la teoría de exponentes, los productos notables y los procesos de factorización, y, en los ejercicios planteados, aplicarán el método de solución más adecuado que les permita reducir las expresiones y encontrar el valor dado.

TEMARIO

- Leyes de la teoría de exponentes.
 - Relativos a la potenciación.
 - Relativas a la radicación.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Se propone ejercicios combinados en los que se deben aplicar las leyes de potenciación y radicación.
- Los alumnos deberán identificar qué ley van a utilizar y explicar cada paso realizado.
- Los ejercicios son más complejos a medida que los estudiantes se ejerciten.
- Por equipos se trabajan los ejercicios y se comprueban los resultados obtenidos.

POTENCIACIÓN

$$Kb^n = A$$

n: exponente

b: base

A: potencia

K: coeficiente

- $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \dots b}_{\text{"n" veces}}$
- $Kb^n = \underbrace{b^n + b^n + b^n + \dots + b^n}_{\text{"K" veces}}$

Leyes:

1. $a^0 = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

2. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$

4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0, b \neq 0$

6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

8. $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$

Ejercicios Propuestos

1) Realiza lo siguiente:

a) Efectúa:

$$M = \frac{21^6 \cdot 35^3 \cdot 80^3}{15^4 \cdot 14^9 \cdot 30^2} - 16^{4-5^{0.6}}$$

b) Simplifica: $P = \frac{2^{x+3} + 2^{x+2}}{3 \cdot 2^x} + \frac{2^{x+5} + 4 \cdot 2^x}{4 \cdot 2^{x-2}}$

2) a) Calcula:

$$E = (-32)^{-0.6} + (-8)^{-0.6}$$

b) Halla:

$$R = \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{-3} + \left(\frac{2}{5} \right)^{-2} + \left(\frac{4}{23} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{10} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

3) Efectúa:
$$S = \frac{40(2^{x-3}) + 3(2^{x+1}) + 12(2^{x-2})}{22(2^{x-1}) - 2^{x+2}} \cdot \left[(-32)^{-\frac{3}{5}} + 64^{-\frac{1}{3}} \right]^{-\frac{1}{3}}$$

4) Halla "x":

$$x^{x^{x^2+2}} = 4$$

5) Calcula:

$$Q = 27 \cdot 81^{-2 \cdot 8^3 - 1} + \left(\frac{45^8 \cdot 75^{11} \cdot 225^7}{3^{15} \cdot 5^{20}} \right)^{\frac{1}{13}}$$

RADICACIÓN

$$\boxed{{}^n\sqrt{a} = b}$$

n: índice

a: radicando

b: raíz

$\sqrt{}$: operador

- $\frac{\text{PAR}}{\sqrt{-A}} = \text{número imaginario.}$
- $\frac{\text{IMPAR}}{\sqrt{-A}} = \text{número real negativo.}$

Leyes:

$$9. \quad {}^n\sqrt{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$10. \quad {}^n\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$11. \quad a^p \cdot {}^n\sqrt{b} = {}^n\sqrt{a^{pn} \cdot b}$$

$$12. \quad {}^n\sqrt{ab} = {}^n\sqrt{a} \cdot {}^n\sqrt{b}$$

$$13. \quad {}^n\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{{}^n\sqrt{a}}{{}^n\sqrt{b}}, b \neq 0$$

$$14. \quad {}^m\sqrt{{}^n\sqrt{a}} = {}^{mn}\sqrt{a}$$

Ejercicios Propuestos

1) Halla X + M si:

$$X = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{48} + \sqrt{300}}{\sqrt{75} + \sqrt{147}}; \quad M = \frac{2^{3+x} \sqrt{2^{9+x} \sqrt{2^{x+5} \sqrt{10^{2^{17+3x}}}}}}{}$$

2) Halla A – S

$$A = \sqrt[3]{x^2} \sqrt[12]{x \sqrt{x^3}}; \quad S = \sqrt[3]{b \sqrt{\frac{x^a}{x^b}}} \cdot \sqrt[3]{c \sqrt{\frac{x^b}{x^c}}} \cdot \sqrt[3]{a \sqrt{\frac{x^c}{x^a}}}$$

3) Calcula:

$$a) \left[\sqrt[2n+1]{\frac{\sqrt[4]{9^{n+1}} \sqrt{3^{1+n}}}{3 \sqrt{3^{-1}}}} \right] + \sqrt[a-b]{\frac{3m^{a+b} + 4m^{2a-2}}{4m^{a+b} + 3m^{2b}}}$$

$$b) \left(\left(\frac{1}{27} \right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{32} \right)^{-\frac{4}{5}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt[n]{\frac{7^n + 5^n}{7^{-n} + 5^{-n}}}$$

4) Halla P + Q si:

$$P = \sqrt[x-5]{\frac{7^{x-5} + 3^{x-5}}{7^{5-x} + 3^{5-x}}};$$

$$Q = \frac{2^6 (\sqrt[3]{8})^{-4a}}{\left[4(4^{-a}) \right]^2}$$

Ejercicios Propuestos

1) Efectúe:

$$E = \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n+2} \sqrt[n+2]{4} \sqrt[n]{4^n}} + \sqrt[n]{\frac{20^{n+1}}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}}$$

2) Simplifique la siguiente expresión:

$$\left[\left(\frac{1}{3} \right)^{-3} + \left(\frac{2}{5} \right)^{-2} + \left(\frac{4}{11} \right)^{-1} \right]^{1/2} - \sqrt[x+1]{\frac{3(6^{x+1}) + 2^{3x+3}}{9(3^x) + 4(2^{2x})}}$$

3) Halle el valor de A si

$$A = 5^{16^{4-5^0}} + \frac{5^{n+3} + 5^n}{(5^{n-1}) \cdot 5} - \sqrt[m-n]{\frac{12^{m-n} + 15^{m-n}}{4^{n-m} + 5^{n-m}}}$$

4) Reduce la siguiente expresión:

$$\left\{ \left[\left(64^{8-9-4-2-5^0} \right)^{-1/3} \right]^6 \right\}^{-1/2} + \left[(-32)^{-3/5} + 64^{-1/3} \right]^{-1/3}$$

5) Calcule B si:

$$B = \frac{2^{n+3} + 2^n (2^2)^3}{2 (2^{n+2})} \cdot 125^{9^{4-2-7^0}}$$

6) Reduce:

$$\frac{(a^2)^3 (a^5) (\sqrt{a})^5}{(\sqrt{a})^3 (a^3)^3} \div \sqrt[x]{\frac{92^x + 138^x}{69^x + 46^x}}$$

- 7) Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{x^5} \sqrt[3]{x^4} \sqrt[4]{x^3} \sqrt[5]{x^2}}}{\sqrt[5]{x^2} \sqrt[4]{x^3} \sqrt[3]{x^4} \sqrt{x^5}} \cdot 81^{16-0,25}$$

- 8) Calcula el valor de E + F, si:

$$E = 3^{2^{2^7 0^5 2}} + 125^{9^{-8-0,333} \dots}$$

- 9) Si $5^x = 7^y$, calcule el valor de:

$$\frac{5^{x+3} - 7^{y+2}}{7^{y+1} - 5^{x+1}}$$

- 10) Si $a^b = 2$ y $b^a = \frac{1}{2}$

$$\text{Calcule: } H = \left[\frac{a^{b^{1-a}} + b^{a^{1-b}}}{a^{b^{a+1}} + b^{a^{b+1}}} \right]^{a^b}$$

- 11) Halle el valor de K + S, si:

$$K = \left[\frac{2^{x-4y} \sqrt{\frac{2^x \sqrt[4]{2^{xy+2}} \cdot 6^{2y}}{3^x \sqrt[4]{2^{8x+xy+2}}}}}{1} \right]^2 ; \quad S = \sqrt[2n]{\frac{9^{n+1/4} \cdot \sqrt[4]{3^{8n-1}}}{27^{2n+1} + 9\sqrt[4]{81^{3n}}}}$$


- 12) Simplifica:

$$E = \sqrt[x]{\frac{2^{x+1} \cdot 4^{2x+1} - 2^x \cdot 4^{2x}}{2^3 \cdot 4^x - 4^x}} + \left(4^{2^{-20^5}} \right)^4 + \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2}}{(2^{1/2})^{-2^{-1}}}}$$

Resumen

 Leyes:

Potenciación	Radicación
<p>➤ $a^0 = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,</p> <p>➤ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$</p> <p>➤ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$</p> <p>➤ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$</p> <p>➤ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0, b \neq 0$</p> <p>➤ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$</p> <p>➤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$</p> <p>➤ $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$</p>	<p>➤ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$</p> <p>➤ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$</p> <p>➤ $a^p \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{pn} \cdot b}$</p> <p>➤ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$</p> <p>➤ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$</p> <p>➤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$</p>

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 http://espanol.geocities.com/jeffranco_2000mx/EXPONENTES.htm

Aquí encontrará información de la Teoría de Exponentes.

 www.sectormatematica.cl/ppt/Raices.ppt

En esta página encontrará ejercicios sobre potenciación, radicación y racionalización.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

3

SEMANA

8

PRODUCTOS NOTABLES

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la unidad, los alumnos simplificarán expresiones algebraicas utilizando la teoría de exponentes, los productos notables y los procesos de factorización, y, en los ejercicios planteados, aplicarán el método de solución más adecuado que les permita reducir las expresiones y encontrar el valor dado.

TEMARIO

- Productos Notables: Casos.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- En grupo, los alumnos resolverán los ejercicios propuestos en el manual.
- Por sorteo, saldrá un alumno de cada grupo a la pizarra a explicar el ejercicio que le tocó. Si no puede resolverlo, puede salir otro del grupo, pero la bonificación será individual.
- A partir del ejercicio realizado el profesor aclarará las dudas que puedan surgir durante el desarrollo de los problemas y realizará una síntesis.

PRODUCTOS NOTABLES: CASOS

PRODUCTO DE LA SUMA DE DOS TÉRMINOS POR DIFERENCIA

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

EJEMPLOS:

- $(x - 8)(x + 8) = x^2 - 64$
- $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) = x^2 - 6$
- $(4 + 6x^3y^2)(4 - 6x^3y^2) = 16 - 36x^6y^4$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN PARA EL ALUMNO:

Observa y escribe directamente el producto de los binomios

- $(y + 0.2)(y - 0.2) =$ _____
- $(y - 3)(y + 3) =$ _____
- $(3x^2 - y - 1)(3x^2 + y + 1) =$ _____

PRODUCTO DE BINOMIOS QUE TIENEN UN TÉRMINO COMÚN

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$$

EJEMPLOS:

- $(x - 7)(x - 9) = x^2 - 16x + 63$
- $(x - 6)(x - 5) = x^2 - 11x + 30$
- $(y^3 - 1)(y^3 + 6) = (y^3)^2 + 5y^3 - 6$
 $= y^6 + 5y^3 - 6$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN PARA EL ALUMNO

Observa y escribe directamente el producto de los binomios:

- $$(x - 1)(x + 8) =$$
- $$(x - 5)(x - 2) =$$
- $$(x + 8)(x + 3) =$$

CUADRADO DE LA SUMA DE DOS TÉRMINOS

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLOS:

- $(x + 7)^2 = x^2 + 2(x)(7) + 7^2 = x^2 + 14x + 49$
- $\left(3x + \frac{2}{5}\right)^2 = (3x)^2 + 2(3x)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 9x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{4}{25}$
- $(x^2 + \sqrt{3})^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = x^4 + 2\sqrt{3}x^2 + 3$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN PARA EL ALUMNO

Halla el binomio que da origen a cada trinomio cuadrado perfecto.

- $(\quad)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$
- $(\quad)^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$
- $(\quad)^2 = y^2 + 2\sqrt{3x}y + 3x$

CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS TÉRMINOS

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLOS:

- $(x - 1)^2 = x^2 - 2(x)(1) + 1 = x^2 - 2x + 1$
- $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = y^2 - 2(y)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = y^2 - y + \frac{1}{4}$
- $(x^2 - \sqrt{7})^2 = (x^2)^2 - 2x^2\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = x^4 - 2\sqrt{7}x^2 + 7$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN PARA EL ALUMNO

Halla el binomio que da origen a cada trinomio cuadrado perfecto:

- $(\quad)^2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$
- $(\quad)^2 = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$
- $(\quad)^2 = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$

CUADRADO DE UN TRINOMIO

$$(a \pm b \pm c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab \pm 2ac \pm 2bc$$

EJEMPLOS:

$$1. (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

$$\begin{aligned} 2. (2x - 2y - 3)^2 &= [(2x) + (-2y) + (-3)]^2 \\ &= (2x)^2 + (-2y)^2 + (-3)^2 + 2(2x)(-2y) + 2(2x)(-3) + 2(-2y)(-3) \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 9 - 8xy - 12x + 12y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)^2 &= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + 2(\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 3 + 2 + \frac{1}{4} + 2\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &= 5 + \frac{1}{4} + 2\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN PARA EL ALUMNO

Halla, aplicando el cuadrado de un trinomio, el resultado de:

$$1. \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + z\right)^2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$2. \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$3. \left(\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{4}x - 1\right)^2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

CUBO DE LA SUMA DE DOS TÉRMINOS

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

EJEMPLOS:

$$\begin{aligned} 1. (x + 5)^3 &= x^3 + 3(x)^2(5) + 3(x)(5)^2 + 5^3 \\ &= x^3 + 15x^2 + 3(x)(25) + 125 \\ &= x^3 + 15x^2 + 75x + 125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \left(x + \frac{3}{2}\right)^3 &= x^3 + 3(x)^2\left(\frac{3}{2}\right) + 3(x)\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\
 &= x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3(x)\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{27}{8} \\
 &= x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{4}x + \frac{27}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. (x + 0.5)^3 &= x^3 + 3(x)^2(0.5) + 3(x)(0.5)^2 + (0.5)^3 \\
 &= x^3 + 1.5x^2 + 3(x)(0.25) + 0.125 \\
 &= x^3 + 1.5x^2 + 0.75x + 0.125
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN PARA EL ALUMNO

Halla, aplicando las reglas de los productos notables, el resultado de:

$$\begin{aligned}
 1. \left(x + \frac{3}{2}\right)^3 &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 2. (\sqrt{3}y + 1)^3 &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 3. \left(\frac{6}{5} + x^2\right)^3 &= \underline{\hspace{2cm}}
 \end{aligned}$$

CUBO DE UNA DIFERENCIA

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

EJEMPLOS:

$$\begin{aligned}
 1. \left(x - \frac{3}{2}\right)^3 &= x^3 - 3(x)^2\left(\frac{3}{2}\right) + 3(x)\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\
 &= x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{(27)}{8} \\
 &= x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{4}x - \frac{27}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. (z - \sqrt{3})^3 &= z^3 - 3(z)^2(\sqrt{3}) + 3(z)(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 \\
 &= z^3 - 3\sqrt{3}z^2 + 9z - \sqrt{27} \\
 &= z^3 - 3\sqrt{3}z^2 + 9z - 3\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \left(\frac{1}{3}m - \frac{1}{2}\right)^3 &= \left(\frac{1}{3}m\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}m\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{3}m\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
 &= \frac{1}{27}m^3 - 3\left(\frac{1}{9}m^2\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{3}m\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{27}m^3 - \frac{3}{18}m^2 + \frac{3}{12}m - \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{27}m^3 - \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{4}m - \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Desarrollar:

$$1. \left(y - \frac{1}{2}\right)^3 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$2. \left(\frac{1}{2}m^2 - 1\right)^3 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$3. (\sqrt{3}x - \sqrt{2})^3 = \underline{\hspace{4cm}}$$

SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

SUMA DE CUBOS

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

DIFERENCIA DE CUBOS

EJEMPLOS:

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$y^3 - 8 = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN PARA EL ALUMNO

Efectúa:

$$1. (x^6 + 125) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$2. (y^{12} - 27) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$3. (\sqrt[3]{y} + 1)(\sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{y} + 1) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$4. (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Ejercicios Propuestos

<p>1) a) Sabiendo que:</p> $x * y = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ <p>Halla el valor de: $\left[\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right] * \left[\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right]$</p>	<p>b) Simplifica:</p> $E = \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{(a+b)^2 - (a+b)(a-b) + (a-b)^2}$
<p>2. a) Obtén el valor de:</p> $E = (a+b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a-b) + 2b^8$ <p>para $a = \sqrt{\sqrt{2}+1}$ y $b = \sqrt{\sqrt{2}-1}$</p>	<p>b) Si la suma de dos números es 5 y la suma de sus cuadrados es 21, halle la suma de sus cubos.</p>

$(a + b + c + d)^2 = 4(a + b)(c + d)$ <p>3) Sabiendo que:</p> <p>Calcula : $E = \frac{a - c}{d - b} + \frac{b - c}{d - a}$</p>	
<p>4.a) Calcula: $a^4 + a^{-4}$, Si:</p> $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 2\left(a - \frac{1}{a}\right)^{-2}$	<p>b) Simplifique:</p> $A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{121} + \sqrt[3]{33}} + \sqrt[3]{9}}{\left[(2x^3 + 7)^2 + (2x^3 - 7)^2\right] : (4x^6 + 49)}$

5) Si: $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{8}$, halla el valor de:

$$M = \frac{(a-b)(a^3+b^3)[(a+b)^2+(a-b)^2]}{a^4-b^4}$$

6) Obtén el valor de: (3 puntos)

$$E = (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a-b) + 2b^8$$

$$\text{para } a = \sqrt{\sqrt{2}+1} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

7) Si Determina el valor de E , si $a = \sqrt{2}$.

$$E = \left[(a+1)(a-1)(a^2-1)^2(a^2+1)^3 \right]^{\frac{1}{3}}$$

8) Reduce el valor de:

$$(x^2+5x+5)^2 - (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

9) Sabiendo que "a" y "b" son números reales positivos, reducir "A", si:

$$A = (a+b)(a^2+ab+b^2)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^6+b^6) + b^{12}$$

$$\text{Y hallar } \sqrt[12]{A}$$

10) Simplifica:

$$P = \frac{\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^2 \right]^2 - 4 \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]^2}{\left[\left(\frac{a}{b} \right)^3 + \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right]^2 - \left[\left(\frac{a}{b} \right)^3 - \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right]^2}$$

11) Halla el valor de:

$$\left[\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} \right)^2 + \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} \right)^2 \right]^2 - 4 \left[\left(\frac{x^2}{(x+y)^2} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right)^2 \right]$$

$$\text{Si: } x = \sqrt{2+\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Resumen

Productos Notables:

$$\forall a, b, c \in R$$

$$1) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$4) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$5) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$6) (a \pm b \pm c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab \pm 2ac \pm 2bc$$


$$7) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$8) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

9) Legendre:

$$\triangleright (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$\triangleright (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 <http://www.sectormatematica.cl/ppt/Productos%20notables.ppt>

Aquí encontrará ejercicios relativos al tema.

 http://es.wikipedia.org/wiki/Productos_notables

Aquí encontrará ejercicios relativos al tema.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

3

SEMANA

9

RACIONALIZACIÓN

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la unidad, los alumnos simplificarán expresiones algebraicas utilizando la teoría de exponentes, los productos notables y los procesos de factorización, y, en los ejercicios planteados, aplicarán el método de solución más adecuado que les permita reducir las expresiones y encontrar el valor dado.

TEMARIO

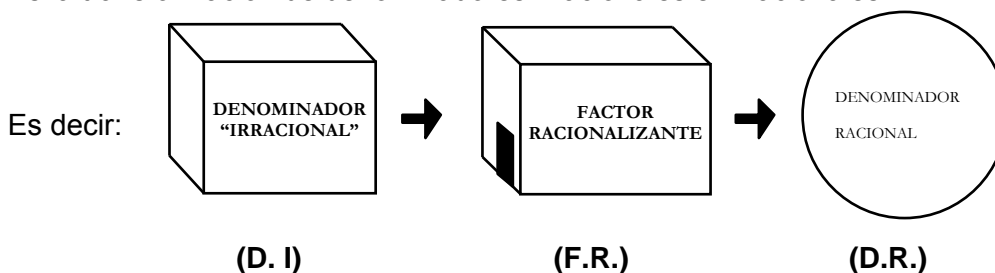
- Racionalización:
 - Cuando el denominador es un monomio.
 - Cuando el denominador es un binomio de índice par.
 - cuando el denominador es un binomio o trinomio de índice tres.
- Desarrollo de ejemplos.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Se resuelve dos ejercicios aplicando las técnicas de racionalización previamente y luego se proponen ejercicios para ser resueltos por los estudiantes.
- Trabajarán en grupos los ejercicios propuestos del manual, ayudándose unos a otros. Por sorteo, saldrá uno de cada grupo a la pizarra a explicar el ejercicio que le tocó. También por sorteo, si lo resuelve bien, hará ganar un punto a todo su grupo. De lo contrario puede salir otro del mismo grupo, en cuyo caso obtendrá el punto en forma individual. El profesor aclarará las dudas de cada uno en los ejercicios.

RACIONALIZACIÓN

Es la transformación de denominadores Irracionales en Racionales.



Casos:

1. Cuando el denominador es un monomio:

Ejemplos: Racionaliza

F.R.

$$\text{a) } \frac{3}{\sqrt[4]{x}} \quad \text{Sol: } \frac{3}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{x}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{\frac{8}{27xy^2}} \quad \text{Sol: } \sqrt[3]{\frac{8}{27xy^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^3xy^2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{xy^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[3]{x^2y}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2y}}{3xy}$$

2. Cuando el denominador es un binomio de índice PAR

* El F.R. es la conjugada que produce una diferencia de cuadrado

Ejemplo: Racionaliza

F.R.

$$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} \quad \text{Sol: } \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} \times \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a+b}(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})}{(\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a-b})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{(a+b) \cdot (a-b)}}{a+b-a-b} = \frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{2b}$$

3. Cuando el denominador es un binomio cuya raíz es de índice 3

* El F.R. será el trinomio que, al multiplicarse, produce una suma o diferencia de cubos.

	Denominador	Factor Racionalizante	Resultado
A.-	$\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$	$\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$	$(\sqrt[3]{x})^3 \pm (\sqrt[3]{y})^3$
B.-	$\sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$	$\sqrt[3]{x} \mp \sqrt[3]{y}$	$(\sqrt[3]{x})^3 \mp (\sqrt[3]{y})^3$

Ejercicios Propuestos

<p>1) Racionaliza:</p> <p>a) $E = \frac{1}{\sqrt[7]{c^4} \cdot \sqrt[6]{b^4} \cdot \sqrt[5]{a^2}}$</p>	<p>b) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}} + \sqrt[5]{\frac{4}{3}}$</p>
<p>2) Racionaliza:</p> <p>a) $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$</p>	<p>b) $\frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$</p>
<p>3) Racionaliza:</p> <p>a) $\frac{7}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$</p>	<p>b) $\frac{2}{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{25}}$</p>
<p>4) Encuentre el verdadero valor de: $E = \frac{\sqrt[4]{7x+2} - x}{3x-6}$, para $x = 2$</p>	

EJEMPLOS DIVERSOS DE PRODUCTOS NOTABLES Y RACIONALIZACIÓN

GUÍA DE EJERCICIOS

EJERCICIOS RESUELTOS

Efectúa en forma abreviada

$$1) \quad (\sqrt{3x} + \sqrt{2y} - \sqrt{5})^2$$

Sol:

$$(\sqrt{3x} + \sqrt{2y} - \sqrt{5})^2 = \underbrace{3x + 2y + 5}_{\text{Suma de los cuadrados de los 3 términos}} + \underbrace{2\sqrt{6xy} - 2\sqrt{15x} - 2\sqrt{10y}}_{\text{Suma de los dobles productos binarios de los términos.}}$$

Suma de los
cuadrados
de los 3 términos

Suma de los dobles
productos binarios
de los términos.

$$2) \quad A = \underbrace{(x+1)(x-1)}_{x^2-1} (x^2+1) + 1$$

Sol:

$$A = \underbrace{(x^2-1)(x^2+1)}_{x^4-1} + 1$$

$$A = (x^4 - 1) + 1$$

$$A = x^4$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Indica el resultado de multiplicar en forma abreviada:

$$(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

$$2) \quad \text{Efectúa: } (\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)$$

$$3) \quad \text{Calcula: } \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}, \text{ si se sabe que } a+b=5 \text{ y } ab=4$$

$$4) \quad \text{Efectúa: } (x^2-xy+y^2)(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)+y^6$$

$$5) \quad \text{Efectúa: } A = \sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$6) \quad \text{Calcula } R = 3(x^2+y^2) - 5xy$$

Para: $x = \sqrt{2} + 1$, $y = \sqrt{2} - 1$

7) Reduce: $\frac{(\sqrt{5}+1)^2 - (\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)^2 + (\sqrt{5}-1)^2}$

8) Si $a * b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

Calcula $(a+x) * (a-x)$

9) Simplifica: $A = \frac{(x^2 - a^2)^2 (x^3 + a^3)^3 (x^2 + ax + a^2)^2}{(x^3 - a^3)^2 (x+a)^5 (x^2 - ax + a^2)^3}$

10) Efectúa:

$$B = \left[(x-1)^2 (x+1)^2 (x^2-1)^3 (x^2+1)^5 (x^4+1)^5 (x^8-1)^3 \right]^{1/8} - x^8$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Racionaliza:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^3 + y}}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3 + y}} &= \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^3 + y}\right)} \times \frac{\text{FR}_1}{\left(\sqrt[4]{x^3 - y}\right)} = \frac{\left(\sqrt[4]{x^3 - y}\right)}{\left(\sqrt[4]{x^3 - y^2}\right)} \times \frac{\text{FR}_2}{\left(\sqrt[4]{x^3 + y^2}\right)} \\ &= \frac{\left(\sqrt[4]{x^3 - y}\right)\left(\sqrt[4]{x^3 + y^2}\right)}{x^3 - y^4} \end{aligned}$$

2) Racionaliza:

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^5} - \sqrt{y^3}}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[8]{x^5} - \sqrt{y^3}} &= \frac{1}{\left(\sqrt[8]{x^5} - \sqrt{y^3}\right)} \cdot \frac{\text{FR}_1}{\left(\sqrt[8]{x^5} + \sqrt{y^3}\right)} = \frac{\left(\sqrt[8]{x^5} + \sqrt{y^3}\right)}{\left(\sqrt[4]{x^5} + y^3\right)} \times \frac{\text{FR}_2}{\left(\sqrt[4]{x^5} - y^3\right)} \\ &= \frac{\left(\sqrt[8]{x^5} + \sqrt{y^3}\right)\left(\sqrt[4]{x^5} - y^3\right)}{\left(\sqrt{x^5} - y^6\right)} \times \frac{\text{FR}_3}{\left(\sqrt{x^5} + y^6\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[8]{x^5} + \sqrt{y^3}\right)\left(\sqrt[4]{x^5} + y^3\right)\left(\sqrt{x^5} + y^6\right)}{x^5 - y^{12}}$$

3) Racionaliza:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y}}$$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y}\right)} \cdot \frac{\text{FR}_2}{\left(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}\right)} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}{x^2 + y}$$

4) Racionaliza:

$$\frac{7}{\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{4}}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{7}{\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{4}} &= \frac{7}{\left(\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{4}\right)} \cdot \frac{\text{FR}_1}{\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{2}\right)} = \frac{7\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{2}\right)}{9 - 2} = \frac{7\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{2}\right)}{7} = \\ &= \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Racionaliza:

$$\frac{75}{\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{49}}$$

Solución:

2) Racionaliza y simplifica:

$$\frac{20}{\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{6}\right)^2}$$

Solución:

3) Racionaliza:

$$\frac{240}{\sqrt[3]{72} + \sqrt[3]{192} - 6}$$

Solución:

4) Racionaliza:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{y}}$$

Solución:

5) Racionaliza:

$$\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{10} + \sqrt{6}}$$

Solución:

Ejercicios Propuestos

1. Encuentre el verdadero valor de:

a) $E = \frac{\sqrt[3]{7x+6} - x}{2x-6}, \quad \text{para } x = 3$

b) $E = \frac{2a-10}{\sqrt[3]{5a+2}-3}, \quad \text{cuando } a = 5$

2) Racionaliza y da como respuesta el denominador:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}+\sqrt{15}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$$

3) Efectúa:

$$\left\{ \left[(x-1)^2 (x+1)^2 (x^2-1)^3 (x^2+1)^5 (x^4+1)^5 (x^8-1)^{-13} \right]^{-1/8} \right\} \cdot \left(\frac{\sqrt[9]{x^8 y^{22}}}{\sqrt[3]{x^2} \cdot y^4 \sqrt[3]{x^2 y}} \right)$$

4) Si $a * b = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2$, racionaliza y simplifica: $\sqrt[3]{3} * \frac{5}{\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{12}}$

5) Encuentra el verdadero valor de la expresión $P = \frac{5a - 10}{\sqrt[3]{4a - 2}}$, cuando $a = 2$.

6) Encuentra el verdadero valor de la expresión $P = \frac{7a - 14}{\sqrt[3]{3a + 2} - 2}$, cuando $a = 2$.

7) Encuentra el verdadero valor de la expresión $P = \frac{a - 1}{\sqrt{16 - 7a} - 3}$, cuando $a = 1$.

8) Racionaliza y da como respuesta el denominador:

$$\frac{10}{\sqrt{143} - \sqrt{91} - \sqrt{33} + \sqrt{21}}$$

9) Racionaliza y da como respuesta el denominador

$$\left(\frac{7}{\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{12}} \right)$$

10) Racionaliza y da como respuesta el denominador

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{6} + \sqrt{15} - \sqrt{2} - \sqrt{5}}$$

11) Racionalice y simplifique:


$$\left(\frac{6}{\sqrt{2x+8} + \sqrt{2x+5}} + \frac{6}{\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x+2}} \right) (\sqrt{2x+8} + \sqrt{2x+2})$$

Resumen

 Racionalizar.- es eliminar toda raíz del denominador

Casos:

- 1) Denominador monomio.- su F.R. es lo que le falta al dato para eliminar el radical.
- 2) Denominador binomio cuya raíz tiene índice Par.- su F.R. es el mismo número pero con signo de enlace opuesto (Conjugada) que al multiplicarse con el dato resulta una “Diferencia de Cuadrados”.
- 3) Denominado binomio o trinomio de índice Tres.- su F.R. es un trinomio o binomio según sea el caso; que al multiplicarse con el dato resulta “Suma o diferencia de cubos”.

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 www.sectormatematica.cl/ppt/Raices.pps

Aquí hallará ejercicios sobre racionalización y otros.

 <http://www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA21/Racionalizacion.html>

Aquí encontrará la historia y casos de racionalización.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

3

SEMANA

10

FACTORIZACIÓN

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la unidad, los alumnos simplificarán expresiones algebraicas utilizando la teoría de exponentes, los productos notables y los procesos de factorización, y, en los ejercicios planteados, aplicarán el método de solución más adecuado que les permita reducir las expresiones y encontrar el valor dado.

TEMARIO

- Factorización: - Factor común.
 - Factor común por agrupamiento.
 - Factor común por identidades.
 - Por aspa simple y doble.
 - Por división de binomios. Ruffini.
- Desarrollo de ejercicios.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Exposición Dialogada.
- Trabajo individual.
- Trabajo de grupos.
- El profesor aclarará las dudas de cada ejercicio resuelto por los alumnos

FACTORIZACIÓN

Es un procedimiento por el cual se transforma un polinomio en el producto indicado de sus factores.

Casos:

1. Factor común:

Ejemplo: Factoriza: $3x^3y + 9x^2y^2 + 6xy^3$

$$\text{Sol: } \underbrace{3xy}_{\substack{\text{Factor} \\ \text{Común}}} \underbrace{(x^2 + 3xy + 2y^2)}_{\substack{\text{Se puede factorizar} \\ \text{es otro caso.}}}$$

2. Por agrupación de términos:

Ejemplo: Factoriza: $\underline{a^2b} + \underline{b^2c} + \underline{c^2a} + \underline{a^2c} + \underline{b^2a} + \underline{c^2b} + \underline{2abc}$

$$\text{Sol : } = (a^2b + b^2a) + (c^2a + c^2b) + c(a^2 + 2ab + b^2) *$$

$$= ab(a + b) + c^2(a + b) + c(a + b)(a + b)$$

$$= (a + b) \left[\underline{ab} + \underline{c^2} + \underline{ca} + \underline{cb} \right]$$

$$= (a + b) [a(b + c) + c(b + c)]$$

$$= (a + b)(b + c)(a + c)$$

3. Por identidades o por productos notables en forma inversa:

$$\text{Ejemplos : a) } (a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$\text{b) } (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$\text{c) } x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$$

$$\text{d) } (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x^3 + y^3)$$

Ejercicios Propuestos

1) Factoriza:

a) $3x^2y^2 - 6x^2y =$

b) $(3a - b)(a - b - 1) + (a + b)(a - b - 1) - (2c - 3b)(a - b - 1) =$

c) $2p(p - 1) + q(1 - p) + 2(p - 1) =$

2) Factoriza:

a) $xa^2 + y^2b + y^2a^2 + xb =$

b) $x^4 + x^2y^2 + y^4 =$

c) $4xz + 2yz - 2xp - yp =$

d) $x^3 - 4x^2 + x - 4 =$

3) Factoriza:

a) $x^2 + 10xy + 25y^2 =$

b) $4y^2 - 9x^2 =$

c) $8x^3 - 27y^3 =$

d) $9m^2 + 6m + 1 =$

e) $4x^2 - 12xy + 9y^2 =$

FACTORIZACIÓN (continuación)

4. Por aspa simple:

a) Trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c = (x^n + k_1)(x^n + k_2)$ $n \in \mathbb{N}$

donde:

$\begin{aligned} k_1 \cdot k_2 &= c \\ k_1 + k_2 &= b \end{aligned}$
--

Ejemplo: Factoriza $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ x & -5 \\ x & -1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cc} x & -5 \\ x & -1 \end{array}} \right\} \text{Vemos que:}$$

$$\begin{aligned} (-5)(-1) &= 5 && \text{ok} \\ (-5) + (-1) &= -6 && \text{ok} \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 1) = 0$$

b) Trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = (a_1 x^n + k_1)(a_2 x^n + k_2)$

donde :

$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 &= a \\ k_1 \cdot k_2 &= c \\ a_1 k_2 + a_2 k_1 &= b \end{aligned}$
--

Ejemplo: Factoriza: $12x^2 - xy - 6y^2 = 0$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 3x & 2y \\ 4x & -3y \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cc} 3x & 2y \\ 4x & -3y \end{array}} \right\} \text{Vemos que:}$$

$$\begin{aligned} (3)(4) &= 12 && \text{ok} \\ (2)(-3) &= -6 && \text{ok} \\ (3x)(-3y) + (4x)(2y) &= -9xy + 8xy \\ &= -xy && \text{ok} \end{aligned}$$

$$\therefore 12x^2 - xy - 6y^2 = 0 \Rightarrow (3x + 2y)(4x - 3y) = 0$$

- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.

12. Por aspa doble:

Primero se factoriza los 3 primeros términos y luego el resto.
Ejemplo. Factoriza:

$$\begin{array}{rcccl}
 8x^2 - 2xy - 15y^2 & + & 43y + 8x - 30 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 2x & & -3y & & 5 \\
 4x & & 5y & & -6
 \end{array}
 \Rightarrow (2x - 3y + 5)(4x + 5y - 6)$$

13. Por división de binomios:

Permite factorizar polinomios en una sola variable. Consiste en formar una serie de binomios que admitan como término común a la variable y como segundos términos a los divisores del término independiente. De dichos binomios se tomarán aquellos que den división exacta empleando RUFFINI.

Ejemplo: Factoriza: $x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 42x + 40$

\Rightarrow Posibles factores:

$$\begin{array}{l}
 (x \pm 1)(x \pm 2)(x \pm 4)(x \pm 5)(x \pm 8) \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{divisores de:} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \pm 1 \\
 + 2 \\
 +4 \\
 \pm 5 \\
 \pm 8 \\
 \pm 10 \\
 \pm 20 \\
 \pm 40
 \end{array} \right\} 40
 \end{array}$$

En forma práctica: Ruffini

	1	6	-5	-42	40
1	↓	1	7	2	-40
	1	7	2	-40	<u>0</u>
2	↓	2	18	40	
	1	9	20	<u>0</u>	

$$x^2 + 9x + 20$$

↓

x

x

↓

5

4

$$\therefore (x - 1)(x - 2)(x + 5)(x + 4)$$

Ejercicios Propuestos

1) Factoriza:

a) x^2+5x-6

b) $x^2-5x-14$

c) $3x^2-21x+18$

d) $45x^2-38xy+8y^2$

2) Factoriza:

a) $x^2-2xy+y^2+3x-3y+2$

b) $y^2-4xy+4x^2-3y+6x$

c) $x^2-y^2+2yz-z^2-8x+16$

3) Factoriza:

a) $t^3-6t^2+11t-6$

b) $x^4-6x^3-x^2+54x-72$

c) $2x^5-17x^4+51x^3-58x^2+4x+24$

EJEMPLOS DIVERSOS DE FACTORIZACIÓN

I. EJERCICIOS RESUELTOS

Simplifica:

$$1) \quad \frac{4x^2 - 1}{8xy - 4y} \text{ sol} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{4y(2x-1)} = \frac{2x+1}{4y}$$

$$2) \quad \frac{(x-1)(1-y)}{(1-x)(y-1)} \text{ sol} = \frac{-(y-1)(x-1)}{-(x-1)(y-1)} = 1$$

Efectúa:

$$3) \quad \frac{3x-1}{5x-2} - \frac{x+3}{5x-2} \text{ sol} = \frac{3x-1-(x+3)}{5x-2} = \frac{3x-1-x-3}{5x-2} = \frac{2x-4}{5x-2}$$

$$4) \quad \frac{xy - 2y^2}{x^2 + xy} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - 2xy}$$

$$\text{Sol: } \frac{y(x-2y)}{x(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{x(x-2y)} = \frac{y(x-2y)(x+y)^2}{x(x+y)x(x-2y)} = \frac{y(x+y)}{x^2}$$

II. EJERCICIOS PROPUESTOS

Efectúa:

$$1) \quad \frac{2x-1}{3x+2} + \frac{x+3}{3x+2}$$

$$2) \quad \frac{11-2t}{4t+6} - \frac{6t-1}{6+4t}$$

$$3) \quad 5 - \frac{7}{x+1} - x$$

$$4) \quad \frac{m}{m+2} - \frac{2m}{m+3} + \frac{3m}{m+2}$$

$$5) \quad \frac{1}{3x+1} - \frac{2}{2x+1} + \frac{5}{(3x+1)(2x+1)}$$

$$6) \quad \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 + 8} - \frac{1}{x+2} + \frac{3x+1}{x^2 + 7x + 10} + \frac{3x}{x+5}$$

$$7) \quad \frac{x^2 - x}{y-3} \cdot \frac{2y-6}{x^2 + 2x - 3}$$

$$8) \quad \frac{m^3 + m^2}{(5+x)(5-x)} \cdot \frac{x^2 - 25}{m^2}$$

$$9) \quad \frac{x^2 - 36}{x + 4} \div \frac{(x+6)(x-6)}{2x+8}$$

$$10) \quad \frac{6m+10m}{p^2-8p+16} \div \frac{2m}{(p-4)^2}$$

$$11) \quad \frac{m^2+2m}{m+1} \cdot \frac{m+1}{m^2-4} \div \frac{m}{5m+10}$$

$$12) \quad \frac{m^{10}}{5x+50} \cdot \frac{x+10}{m^3} \div \frac{m^4}{25}$$

13) Factoriza:

$$E = (x+3)(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1) + (x+1)$$

14) Factoriza:

$$a) \quad x^8 - 82x^4 + 81$$

$$b) \quad (x^2 - y^2)^9 - (x+y)^7 (x-y)^{11}$$

15) Factoriza:

$$E = (x+y)^9 (x-y)^5 - (x^2 - y^2)^7$$

16) Factoriza:

$$a) \quad E = 64x^{12}y^3 - 68x^8y^7 + 4x^4y^{11}$$

$$b) \quad x^3 + (2a+b)x^2 + (a^2+2ab)x + a^2b$$

17) Factoriza:

$$a) \quad x^8 - y^8$$

$$b) \quad x^6 - y^6$$

Ejercicios Propuestos

1) Resuelve:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}} \right) \left(\frac{a^2 x^2 + a^2 x - 6a^2 - x^2 - x + 6}{(a^2 - 1)(x + 3)} \right)$$

2) Halle el valor de "x":


a) $\frac{x-4}{x+3} - \frac{18-8x}{x^2-9} = \left(\frac{5x-10}{x^3-8} \right) \left(\frac{x^2+2x+4}{x-3} \right)$

b) $\frac{x+1}{x^3-6x^2} + \frac{3}{x^2-4x-12} = \frac{x^2-2x+4}{x^2-36} \div \frac{x^3+8}{4x+24}$

3) Efectúe:


$$A = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 11x^2 + 13x - 5} - \frac{x^2 - 16}{3x^2 + 7x - 20} - \frac{(4x+1)^2 - (4x-1)^2}{12x - 20}$$

Resumen

 Factorizar.- Es modificar un polinomio a productos de factores.

 Clases:

1. Factor común.- cuando los términos de un polinomio tiene algo en común.
2. Por Agrupación.- Esta técnica va de la mano con factor común; consiste en juntar 2 o más términos con algo en común.
3. Por identidades.- Es lo mismo que productos notables. Ejemplo: Un trinomio cuadrado perfecto se convierte a un binomio cuadrado.
4. Por aspa simple o doble.- Será por aspa simple en todos los casos cuando la suma de sus coeficientes del polinomio da cero; y por aspa doble lo ideal es que necesitan seis términos; pero se puede utilizar con cinco, por que se debe completar con cero.
5. Ruffini.- Nos sirve para factorizar polinomios de grado tres o mayor; para usarla se debe tener presente que el polinomio debe ser ordenado y completo.

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 <http://sipan.inictel.gob.pe/av/>

Aquí encontrará casos de factorización y otros.

 <http://www.matematicastyt.cl/Algebra/Polinomios/Factorizacion/pag1.htm>

Aquí encontrará ejercicios desarrollados de factorización y otros.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

4

SEMANA

11

ECUACIONES LINEALES

SISTEMA DE ECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la unidad, los alumnos resolverán ecuaciones lineales y cuadráticas, sistemas de ecuaciones con dos y tres variables utilizando el método de solución de cada caso, así como discriminará los procesos de solución que son convenientes afín de planear soluciones de problemas en situaciones reales.

TEMARIO

- Definición.
- Clasificación de acuerdo con sus soluciones.
- Resolución de ecuaciones enteras y fraccionarias.
- Ecuaciones con dos variables y tres variables
Métodos de solución:
 - Por eliminación.
 - Por sustitución
 - Por igualación.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- El profesor hará ejercicios en la pizarra de ecuaciones enteras y fraccionarias.
- Se desarrollan por equipos de tres alumnos los ejercicios propuestos en el manual.
- Se verifica los resultados.

ECUACIONES

A. Ecuación de primer grado con una variable

Forma general: $ax + b = 0$; $a \neq 0$

Solución: $x = -b/a$

Tipos:

1. Ecuaciones lineales o enteros:

Ejemplo: Halla el valor de x:

$$a) \quad 5x - (4x + 3) = 7x - (2 + 3x) + 25$$

$$\begin{aligned} \text{Solución:} \quad & 5x - 4x - 3 = 7x - 2 - 3x + 25 \\ & 5x - 4x - 7x + 3x = 3 - 2 + 25 \\ & -3x = 26 \\ & \therefore x = 26/-3 \end{aligned}$$

$$b) \quad 7x^2 + 15 = (5x - 2)(3x + 7) - (4x - 1)(2x + 11)$$

$$\therefore x = -18/13$$

2. Ecuaciones fraccionarias: Se obtiene el MCM cuidando que el denominador nunca sea cero.

Ejemplo: Halla el valor de x:

$$a) \quad \text{Resuelve: } -\frac{3}{2}(2x + 1) - \frac{2}{3}(3x - 1) = 2x + \frac{1}{6}$$

Solución: M.C.M = 6

Multiplicando miembro a miembro por 6

$$\begin{aligned} -9(2x + 1) - 4(3x - 1) &= 12x + 1 \\ -18x - 9 - 12x + 4 &= 12x + 1 \\ -18x - 12x - 12x &= 9 - 4 + 1 \\ -42x &= 6 \\ x &= -1/7 \end{aligned}$$

$$b) \quad \frac{23b - x}{5} + \frac{x - b}{7} - \frac{4b - x}{4} = 5b$$

$$\begin{aligned} \text{Solución: M C M} &= 140 \\ \therefore x &= 8b \end{aligned}$$

3. Problemas:

- a) A un alumno le preguntaron la hora y responde “son los 5/7 de lo que falta para terminar el día” ¿Qué hora es?

Solución:

$$x = \frac{5}{7}(24 - x)$$

$$x + \frac{5}{7}x = \frac{5}{7}(24)$$

$$7x + 5x = 120$$

$$12x = 120$$

$$x = 10 \quad \therefore \text{son las 10 a.m.}$$

- b) Las edades de una madre y 2 hijos suman 60 años.
Halla la edad del menor de los hijos, sabiendo que el mayor tiene 3 veces la edad del menor y la madre el doble de la suma de sus hijos.

Solución:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Madre} & = M \\ \text{Hijo mayor} & = H_1 \\ \text{Hijo menor} & = H_2 \end{array} \right\} M + H_1 + H_2 = 60$$

$$\therefore H_2 = 5 \text{ años}$$

- c) Una persona tiene S/ 20 000 y otra S/ 7 500 ,cada una ahorra anualmente S/500. ¿Dentro de cuántos años la fortuna de la primera será el doble de la segunda?

Solución: Sea “x” el de años que ahorra cada persona.

- Ahorro total de cada persona 500x
- capital + ahorro de la 1ra persona: 20 000 + 500x
- capital + ahorro de la 2da persona: 7 500 + 500x

$$\begin{aligned} \text{Entonces } 20\,000 + 500x &= 2 [7\,500 + 500x] \\ 20\,000 + 500x &= 15\,000 + 1000x \\ 5\,000 &= 500x \\ 10 \text{ años} &= x \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1) Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $5x - (7x - 4) - 2 = 5 - (3x + 2)$

b) $2x - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-1}{2} - \frac{4x-1}{3}$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x+a}{b} - \frac{b-x}{a} = \frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$

b) $\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{x}\right) + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{x}\right) = 1$

3) Un profesor le dice a su alumno: el doble de mi edad, aumentado su mitad, en sus $\frac{2}{5}$, en sus $\frac{3}{10}$ y en 40; suma 200 años. ¿Cuántos años tengo?

4) Resuelva la ecuación:

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 5x + 6}{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2} + (2x-1)^2 = (2x+1)^2 - 8x - \frac{3-x}{2x+2}$$

5) Resuelva la ecuación:

$$\left(\frac{x^2-64}{x-2}\right) \left(\frac{x^3+2x^2+4x}{x^2+16x+64}\right) \div \frac{x^4-8x}{x^2+6x-16} = \frac{x+1}{x-2} - \frac{23-x}{x^2+3x-10}$$

SISTEMA DE ECUACIONES DE DOS VARIABLES

Sistema de ecuación:

Sistema: Se llama así a un conjunto de ecuaciones que se verifican para un mismo valor de las incógnitas.

Ejemplo: $x + 3y = 10 \dots (I)$
 $4x - y = 1 \dots (II)$

Métodos de resolución:

1. Por eliminación (Adición Algebraica)

Ejemplo: Resuelve el sistema:

$$\begin{array}{rcl} x + 3y = 10 & \dots\dots\dots & \leftarrow \\ 4x - y = 1 & \dots\dots\dots & \uparrow \end{array}$$

Solución: La ecuación \leftarrow queda igual : $x + 3y = 10$

a ecuación \uparrow por 3 : $\frac{12x - 3y = 3}{13x = 13}$

\therefore $x = 1$ Este valor se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones.

Así, en $\leftarrow: 1 + 3y = 10$
 $3y = 9$
 \therefore $y = 3$

2. Por sustitución: Se despeja cualquier variable de una de las ecuaciones y se reemplaza en el otro.

Ejemplo: Resuelve el sistema:

$$\begin{array}{rcl} x + 3y = 10 & \dots\dots\dots & \leftarrow \\ 4x - y = 1 & \dots\dots\dots & \uparrow \end{array}$$

Solución: De la ecuación $\leftarrow: x = 10 - 3y$ en \uparrow

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4(10 - 3y) - y &= 1 \\ 40 - 12y - y &= 1 \\ -13y &= -39 \end{aligned}$$

$y = 3$ en la ecuación \leftarrow

Así, $x + 3(3) = 10$
 $x + 9 = 10$
 \therefore $x = 1$

3. Por igualación: Consiste en despejar la misma variable en ambas ecuaciones y luego se igualan (pueden ser también constantes).

Ejemplo: Resuelve el sistema:

$$\begin{array}{l} x + 3y = 10 \dots\dots\dots \leftarrow \\ 4x - y = 1 \dots\dots\dots \uparrow \end{array}$$

Solución: De $\leftarrow x = 10 - 3y$

De $\uparrow 4x = 1 + y$

$x = \frac{1+y}{4}$

\Rightarrow Son iguales

$$\Rightarrow 10 - 3y = \frac{1+y}{4}$$

$$40 - 12y = 1 + y$$

$$-13y = -39$$

$$y = \frac{-39}{-13}$$

$$\boxed{y = 3} \text{ en } \leftarrow: x + 3(3) = 10$$

$$\therefore \boxed{x = 1}$$

Nota: Al resolver, por cualquiera de los 3 métodos, el resultado no cambia.

Resolución de problemas de sistemas de ecuaciones.

1. Juan ahorra en billetes de S/. 50 y S/. 100. Para hacer un obsequio a su madre por su cumpleaños, abre la alcancía y logra contar 200 billetes que hacen un total de S/. 14 000, suma con la cual compra el presente. Después de agradecer la madre tan noble gesto, le pregunta: Juanito: ¿Cuántos billetes de S/. 50. Y cuántos de S/. 100 ahorraste?

Solución:

a) Representación

Número de billetes de S/. 50 : x

Número de billetes de S/. 100 : y

$$\text{Sistema} \begin{cases} x + y = 200 \\ 50x + 100y = 14\,000 \end{cases}$$

b) Solución del sistema:

$$\begin{array}{r} -100x - 100y = -20\,000 \\ 50x + 100y = 14\,000 \\ \hline -50x = -6\,000 \end{array}$$

$$x = 120$$

Valor de y:

$$\begin{array}{r} x + y = 200 \\ 120 + y = 200 \end{array}$$

$$y = 80$$

Respuesta:

Ahorró 120 billetes de S/. 50 y 80 billetes de S/. 100.

2. El resultado de una prueba escrita de Matemática Discreta I es como sigue: Los $\frac{2}{3}$ de alumnos aprobados son igual al triple de los desaprobados más 4. Si al número de aprobados se quita el quíntuplo de desaprobados, resulta 2. ¿Cuántos alumnos aprobaron la prueba y cuántos desaprobaron?

Solución:

a) Representación

Número de alumnos aprobados : x

Número de alumnos desaprobados : y

$$\text{Sistema} \begin{cases} \frac{2}{3}x = 3y + 4 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$$

b) Solución del sistema:

Valor de x:

$$\begin{array}{rcl} 2x & = & 9y + 12 \\ x - 5y & = & 2 \dots\dots\dots (\alpha) \\ 2x - 9y & = & 12 \\ -2x + 10y & = & -4 \\ y & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{en } (\alpha): \quad x - 5(8) = 2 \\ \quad \quad \quad x = 40 + 2 \\ \quad \quad \quad x = 42 \end{array}$$

Respuesta:

Aprobaron 42 alumnos y desaprobaron 8.

Problema propuesto

1. Por ventas del día de una bodega, se contabilizó 160 billetes por un monto de 5000 soles entre billetes de S/.10, S/.50 y S/.100. Si la mitad del número de billetes de S/.10, más la cuarta parte del número de billetes de 100 es igual a los $\frac{11}{8}$ del número de billetes de 50. ¿Cuántos billetes de cada denominación se contabilizó?

Respuesta: 100 de S/.10, 40 de S/.50, 20 de S/.100.

Ejercicios Propuestos

<p>1) Dibuje las rectas (L_1 y L_2) y halle su punto de intersección:</p> <p>a) $2x + 3y = 7 \dots L_1$</p> <p>b) $5x - 7y = 3 \dots L_2$</p>	<p>2) Determine el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2.</p> <p>$\frac{1}{3}x = 4 - \frac{1}{4}y \dots L_1$</p> <p>$4x = 3y \dots L_2$</p>
<p>3) Resuelve los siguientes sistemas determinados en x e y:</p> <p>a) $\frac{2x-5}{3} + \frac{4(y+2)}{5} = x$</p> <p>$\frac{3x-5}{4} - \frac{y+3}{6} = y$</p>	<p>b) $2x - 3y = 5b - a$</p> <p>$3x - 2y = a + 5b$</p>

<p>4) Resuelve:</p> $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = a$ $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = b$	<p>5) Determine el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2:</p> $\frac{3}{1+x} + \frac{2}{1-y} = 12 \dots\dots L_1$ $\frac{5}{1+x} - \frac{3}{1-y} = 1 \dots\dots L_2$
<p>6) El perímetro de un rectángulo es 56 m. Si el largo disminuye en 2 m. y el ancho aumenta en 2 m. la figura se convierte en un cuadrado. Halla el lado mayor.</p>	
<p>7) Juan dice a Pedro: dame S/ 18 000 y así tendré doble dinero que tú y Pedro le contesta, más justo es que tu me des S/ 15 000 y así tendremos los dos igual cantidad. ¿Cuánto tenía Pedro?</p>	
<p>8) Dividir el número 1000 en dos partes, tales que si de los $\frac{5}{6}$ de la primera se resta $\frac{1}{4}$ de la segunda, se obtiene 10. Calcular la segunda parte.</p>	

GUÍA DE EJERCICIOS

I. Resolver:

$$1) \quad \frac{7}{24} - \frac{\frac{13}{5}}{\frac{2x}{3} + \frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$$

$$3) \quad \frac{x-m}{2} + \frac{x+2m}{3} = x - \frac{x-m}{n}$$

$$2) \quad \frac{x}{x + \frac{1}{2}} + \frac{x - \frac{1}{2}}{3} = \frac{5-2x}{6}$$

$$4) \quad \frac{mx}{m+n} + \frac{nx}{m-n} = 2m^2 - x$$

5) El numerador de una fracción es dos unidades menor que el denominador. Si añadimos una unidad a cada elemento de la fracción, la nueva fracción excede en $1/15$ a la original. ¿Cuál es dicha fracción original?

6) Se debía repartir 1 800 soles entre cierto número de personas; cuatro de ellas renunciaron a su parte con lo cual a cada una de las restantes le tocó 15 soles más. ¿Cuántas personas eran originalmente?

II. En cada caso, halle el punto de intersección de las rectas mencionadas

$$a) \quad \begin{aligned} 5x + 4y &= -2 \\ x + y &= -1 \end{aligned}$$

$$5x + 29 = 7y$$

$$d) \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0$$

$$b) \quad \begin{aligned} 4x + 5y &= 7 \\ 10x + 3y &= 8 \end{aligned}$$

$$e) \quad 2x - 7y = 41$$

$$\frac{x}{7} - \frac{2y}{3} = \frac{79}{21}$$

$$c) \quad \begin{aligned} 7x - \frac{1}{3} &= 5y + 7 \\ 2y + \frac{5}{3} &= -x \end{aligned}$$

$$2(x - 2y) - 35 = -(2 - x + 7y)$$

$$f) \quad 2(x + 4,5y) = -\left(x - 10y - \frac{1}{2}\right)$$

III .a) La suma de dos números es 191. Si el mayor se divide por el menor, el cociente es 4 y el residuo es 16. La diferencia de dichos números es:

b) Un padre le dice a su hijo “hace 8 años mi edad era el cuádruplo de la edad que tu tenías; pero dentro de 8 años sólo será el doble”. ¿Qué edad tiene el hijo?

SISTEMA DE ECUACIONES CON TRES VARIABLES

Son de la forma:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 5 \quad \dots (I) \\2x - 3y - 4z &= -11 \quad \dots (II) \\3x + 2y - z &= -6 \quad \dots (III)\end{aligned}$$

Observamos que tenemos tres variables y tres ecuaciones, por lo tanto el sistema se puede resolver. Pero si tuviéramos tres variables y solamente dos ecuaciones el sistema no se puede resolver, en caso contrario sí; es decir, tener más ecuaciones y menos variables es mejor.

Los métodos para resolver estos ejercicios son los mismos de la sesión anterior (sistema con dos variables):

- Por eliminación.
- Por sustitución.
- Por igualación.

Ejemplo: Resolvamos el ejercicio propuesto:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 5 \quad \dots (I) \\2x - 3y - 4z &= -11 \quad \dots (II) \\3x + 2y - z &= -6 \quad \dots (III)\end{aligned}$$

Aplicando el método de eliminación:

$$\begin{aligned}(I) + (III): \quad &x + y + z = 5 \quad + \\&\underline{3x + 2y - z = -6} \\&4x + 3y = -1 \quad \dots (IV)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4(I) + (II): \quad &4x + 4y + 4z = 20 \quad + \\&\underline{2x - 3y - 4z = -11} \\&6x + y = 9 \quad \dots (V)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Luego: } (IV) - 3(V): \quad &4x + 3y = -1 \\&\underline{-18x - 3y = -27} \\&-14x = -28\end{aligned}$$

$$\boxed{x = 2} \rightarrow \text{en (V)}$$

$$\boxed{y = -3}$$

Finalmente los dos valores hallados en (I): $2 - 3 + z = 5$

$$\boxed{z = 6} \quad \therefore$$

Ejemplo: Después del primer encuentro con el enemigo, el ejército A perdió $\frac{1}{6}$ de sus efectivos y el ejército B, $\frac{1}{7}$ de los suyos. En el resto de la campaña los dos ejércitos perdieron el mismo número de hombres, resultando al final que el ejército A perdió 48,000 soldados y el B 50,000. Suponiendo que el número de sobrevivientes del ejército B es el doble de los del ejército A, dígame con cuántos hombres iniciaron el combate.

Solución:

Sean x efectivos del ejército A al empezar el combate.
 y efectivos del ejército B al empezar el combate.
 z total de hombres perdidos después del primer combate.

De los datos:

$$\frac{x}{6} + z = 48000 \dots\dots\dots (I)$$

$$\frac{y}{7} + z = 50000 \dots\dots\dots (II)$$

$$\frac{\frac{6y}{7} - z}{\text{sobrevivientes del ejército B}} = 2 \left(\frac{\frac{5x}{6} - z}{\text{sobrevivientes del ejército A}} \right)$$

$$\frac{6y}{7} - z = \frac{5x}{3} - 2z$$

$$\frac{6y}{7} + z = \frac{5x}{3} \dots\dots\dots (III)$$

Resolviendo: II – I: $\frac{y}{7} - \frac{x}{6} = 2000$

$$6y - 7x = 84,000 \dots\dots\dots (IV)$$

$$III - II: \frac{6y}{7} - \frac{y}{7} = \frac{5x}{3} - 50,000$$

$$\frac{5y}{7} - \frac{5x}{3} = -50,000$$

$$15y - 35x = -1050,000 \dots\dots\dots (V)$$

Luego: $(-5)(IV) + V$:

$$-30y + 35x = -420,000 +$$

$$\frac{15y - 35x = -1050,000}{-15y = -1470}$$

$$\therefore \boxed{y = 98,000}$$

$$\boxed{x = 72,000}$$

Ejercicios Propuestos

1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x + 5y + z = 28$$

$$4x - 2y - 3z = 7$$

$$x + 3y + 4z = 11$$

Halla $x+y+z$

2) Calcula el valor de abc en el siguiente sistema:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4}$$

3) ¿Cuál es el valor z al resolver el siguiente sistema?:

$$x+y = -5 \quad ; \quad y+z = -7 \quad ; \quad x+z = -8$$

4) Halla el valor de $\frac{ab - cd}{e}$ en:

$$\begin{array}{lll} a+b = 7 & b+c = -5 & c+d = 8 \\ d+e = 3 & a+e = 9 & \end{array}$$

5) Un padre tiene ahora dos años más que sus dos hijos juntos. Hace ocho años tenía 3 veces la edad del hijo menor y 2 veces la del mayor. ¿Qué edad tiene ahora cada una de las tres personas?

GUÍA DE EJERCICIOS

1. Resuelve el siguiente sistema:

$$a) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1/6$$

$$\frac{7}{3x} + \frac{4}{3y} + \frac{7}{3z} = 3^{-1}$$

$$\frac{9}{4x} + \frac{15}{4y} + \frac{15}{4z} = 1/2$$

$$c) \quad 2a = c + 15 - 5b$$

$$a = 3b - c - \frac{15}{2}$$

$$3c = b - 3a + \frac{3}{2}$$

$$b) \quad x - 5y + 3z = 0$$

$$2x + 3y - z = 5$$

$$7x - y + z = 8$$

$$d) \quad \frac{x-20}{5} = z - y$$

$$\frac{x-19}{3} = 3y - 2z$$

$$2x - 9 = y + z$$

2.a) Una empresa textil se dedica a la fabricación de tres tipos de hilados:

A, B y C, los cuales se distribuye a tres de los principales clientes: C₁, C₂, C₃.


Para el mes de Diciembre se proyecta efectuar una venta a cada cliente mostrándose el total pagado por ellos en el siguiente cuadro.

Artículo \ Cliente	CLIENTES		
	C ₁ (T. M.)	C ₂ (T. M.)	C ₃ (T. M.)
A	2	4	5
B	3	2	4
C	4	6	3
Total pagado	92,000	128,000	118,000


Halla la cantidad de hilados que se necesita para dicho mes.

b) En una granja se tiene pavos, gallinas y patos. Sin contar las gallinas tenemos 5 aves, sin contar los pavos tenemos 7 aves, y sin contar los patos tenemos 4 aves. El número de pavos es:


Resumen


 Ecuación Lineal.- es un polinomio de grado uno y por lo tanto tiene una sola respuesta o raíz. Esta puede ser:


- Entera.- cuando los términos no tiene denominadores.
- Fraccionaria.- cuando los términos tienen denominadores iguales o diferentes, para resolverlas se halla el MCM.


 Sistema de ecuaciones con variables.- son ecuaciones con dos variables y ambos de grado uno. Las forma de resolverlas son:

- Por eliminación.- Se aplica esta técnica cuando los coeficientes de la variable en común son la mismas pero con signo diferente.
- Por Sustitución.- Consiste en despejar una variable cualquiera de ella y reemplazarla en la otra ecuación.
- Por igualación.- Consiste en despejar la misma variable de ambas ecuaciones e igualar las que quedan.

 Sistema de Ecuaciones con tres variables.- es el mismo proceso para la ejecución y aplicación del sistema de ecuación con dos variables.

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_lineal
Aquí encontrará ejercicios sobre ecuaciones lineales.

 http://personal5.iddeo.es/ztt/pra/T2_Ecuaciones.htm
Aquí encontrará ejercicios sobre ecuaciones lineales.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

4

SEMANA

12

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO PROPIEDADES DE LAS RAICES

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la unidad, los alumnos resolverán ecuaciones lineales y cuadráticas, sistemas de ecuaciones con dos y tres variables utilizando el método de solución de cada caso, así como discriminará los procesos de solución que son convenientes afín de planear soluciones de problemas en situaciones reales.

TEMARIO

- Ecuación cuadrática: - Resolución de ecuaciones cuadráticas
 - Por fórmula.
 - Por factorización.
 - Completando cuadrado.

- Análisis del discriminante.
- Propiedades de las raíces:
 - Suma
 - Producto
 - Diferencia
 - Suma de inversa de las raíces

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- En grupos los alumnos resolverán ocho ejercicios propuestos en el manual, empleando cualquier método.
- Se realizarán ejercicios variados sobre las cuatro propiedades de las raíces y la formación de una ecuación cuadrática conociendo sus raíces. Se discutirán los resultados obtenidos.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Forma general. $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ donde a, b, c son constantes y $a \neq 0$.

Ejemplo: $2x^2 + 3x - 5 = 0$; vemos que $a = 2$
 $b = 3$
 $c = -5$

Además toda ecuación de segundo grado tiene 2 raíces o soluciones.

Métodos para hallar dichas raíces:

a) Fórmula general:

$$\underbrace{x_1, x_2}_{\text{raíces o soluciones}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para ver si las raíces o soluciones son reales o imaginarias se analiza el DISCRIMINANTE ($\Delta = b^2 - 4ac$)

Casos:

1. Si $\Delta > 0$; las raíces serán reales y diferentes.

$$\text{Así; } \boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} ; \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

2. Si $\Delta = 0$; las raíces serán reales e iguales.

$$\text{Así; } \boxed{x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}}$$

3. Si $\Delta < 0$; las raíces serán complejas conjugadas.
 (No tienen solución real)

Ejemplo: resolver: $2x^2 + 3x - 5 = 0$

Solución: $a = 2$, $b = 3$, $c = -5$

\Rightarrow Analizando discriminante (Δ)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 3^2 - 4(2)(-5)$$

$$\Delta = 49$$

\therefore $\boxed{\Delta > 0}$ estamos en el primer caso.

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-3 + 7}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-3 - 7}{4} = -\frac{5}{2}$$

b) Por factorización: Método ya conocido

Ejemplo: resolver: $2x^2 + 3x - 5 = 0$

Sol.

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 + 3x - 5 & & \\ \downarrow & \quad \downarrow & \\ \begin{array}{cc} x & -1 \\ 2x & 5 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{cc} x & -1 \\ 2x & 5 \end{array}} \right\} (x-1)(2x+5) = 0 & \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ 2x+5=0 \rightarrow x=-\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}$$

c) Completando cuadrado: Para aplicar este método el coeficiente de x^2 siempre debe ser UNO

Ejemplo: Resuelve: $x^2 + 4x - 6 = 0$

$$\text{Solución: } \underbrace{x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2}_{(x+2)^2} - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 6 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 - 6 = 0$$

$$(x+2)^2 = 10 \rightarrow x+2 = \pm\sqrt{10} \therefore \begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{10} \\ x_2 = -2 - \sqrt{10} \end{cases}$$

Ejercicios Propuestos

1) De las siguientes ecuaciones calcula el discriminante de cada una de ellas.

a) $x^2+6x+2 = 0$

b) $x^2-x+1 = 0$

c) $ax^2+(a+1)x+1 = 0$

2) Resuelve empleando la fórmula general.

a) $x^2+5x+7 = 0$

b) $25x^2-10x+2 = 0$

3) Resuelve empleando factorización.

a) $4x^2-12x+9 = 0$

b) $7x^2+6x = 16$

4) Resuelve completando cuadrados:

a) $x^2 - 8x - 7 = 0$

b) $2x^2 - 12x + 5 = 0$

Propiedades de las raíces:

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con raíces x_1, x_2 se tiene

$$\left. \begin{array}{l} 1.- \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ 2.- \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ 3.- \quad x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \\ 4.- \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} \end{array} \right\}$$

Donde: *) x_1, x_2 son raíces
 *) a, b, c son coeficientes
 *) Δ es el discriminante

Ejemplos: Dada la ecuación: $x^2 + 9x + 8 = 0$

Halla:

- a) Suma de raíces.
- b) Diferencia de raíces.
- c) Producto de raíces.
- d) Suma de inversa de las raíces.

Solución:

$$\rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{9}{1} = -9$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{9^2 - 4(1)(8)}}{1} = 7$$

$$\rightarrow \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$$

$$\rightarrow -\frac{b}{c} = -\frac{9}{8}$$

Ejercicios Propuestos

- 1) ¿Cómo son las raíces de la ecuación en x ?
 $a^2x^2 - 2abx + b^2 = 0$? ($a \neq 0$)

- 2) Dada la ecuación $3x^2 - 5x + k - 1 = 0$
Con raíces x_1 y x_2 que cumplen: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$. Calcula $k = ?$

- 3) Halla m de $3x^2 + mx + 2 = 0$, de modo que la ecuación cuadrática tenga en su conjunto solución que una raíz sea el triple de la otra.

4) Dada la ecuación cuadrática: $3x^2 - 5x = -7$ con raíces r_1 y r_2 .

Calcula: $E = \frac{r_1}{r_1 - 1} + \frac{r_2}{r_2 - 1}$

5) En la ecuación: $2ax^2 - (a - 1)x + 1 = 0$

El producto de las raíces es igual a la diferencia de las mismas. Halla la raíz menor.

GUÍA DE EJERCICIOS

TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

I. EJERCICIOS RESUELTOS

Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática

I. Ejercicios resueltos

1. Si $*$ es una operación definida en \mathbb{Z} por $a * b = \frac{a^2 + b}{2}$ cuál es la suma de las raíces de la ecuación:
- $$2(x * 5) = -3x + 9$$

Solución:

$$2 \left(\frac{x^2 + 5}{2} \right) = -3x + 9$$

$$x^2 + 5 = -3x + 9$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{cc} x & +4 \\ & \times \\ x & -1 \end{array}$$

$$(x + 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \\ \vee \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Suma} = x_1 + x_2 = -4 + 1 = -3$$

2. La ecuación cuadrática: $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ tiene raíces r_1 y r_2 que cumplen: $r_1^2 + r_2^2 = 1.75$. Halla el valor de a .

Solución:

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-(-3a) \pm \sqrt{(-3a)^2 - 4(1)(a^2)}}{2(1)} = \frac{3a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{5}a}{2} = \frac{(3 \pm \sqrt{5})a}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{(3 + \sqrt{5})a}{2} \\ r_2 = \frac{(3 - \sqrt{5})a}{2} \end{cases}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{7}{4}$$

$$\left[\frac{(3 + \sqrt{5})a}{2} \right]^2 + \left[\frac{(3 - \sqrt{5})a}{2} \right]^2 = \frac{7}{4}$$

$$\frac{(3 + \sqrt{5})^2 a^2}{4} + \frac{(3 - \sqrt{5})^2 a^2}{4} = \frac{7}{4}$$

$$a^2 \left[(3 + \sqrt{5})^2 + (3 - \sqrt{5})^2 \right] = 7$$

$$2 \left[3^2 + (\sqrt{5})^2 \right] a^2 = 7$$

$$2(9 + 5) a^2 = 7$$

$$28 a^2 = 7 \rightarrow a^2 = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

$$a = \pm \frac{1}{2} \rightarrow a \in \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

3. Determina el valor de k sabiendo que la ecuación tiene solución única. Además, halla las raíces: $4x^2 - 1 = 6kx^2 - 3kx$

Solución:

4. Si r y s son las raíces de la ecuación: $2x^2 - kx + 9 = 0$.

Determina el valor de "K" de modo que se cumple la relación: $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{8}{9}$

Solución:

$$\text{Si la ecuación es: } 2x^2 - kx + 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} r + s = k \\ r \cdot s = 9 \end{cases}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{r+s}{rs} = \frac{8}{9} \rightarrow \frac{k}{9} = \frac{8}{9} \rightarrow k = 8$$

5. En la ecuación: $ax^2 - (a - 5)x + 1 = 0$, el producto de las raíces es igual a la diferencia de las mismas. Halla la mayor raíz.

Solución:

6. Halla el valor de m para que la ecuación: $\frac{x(x-1)-(m+1)}{(x-1)(m-1)} = \frac{x}{m}$ tenga raíces iguales.

Solución:

$$\begin{aligned} m[x^2 - x - m - 1] &= x(xm - x - m + 1) \\ mx^2 - mx - m^2 - m &= mx^2 - x^2 - mx + x \\ x^2 - x - (m^2 + m) &= 0 \end{aligned}$$

7. Si r y s son las raíces de la ecuación: $x^2 - 4x - 5 = 0$. Halla la ecuación cuyas raíces sean:

$$\left(r^2 + \frac{1}{r}\right) \text{ y } \left(s^2 + \frac{1}{s}\right)$$

Solución:

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -4x & -5 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & -5 \\ & \swarrow & \searrow \\ x & & +1 \end{array}$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \\ \text{Si } x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

8. Si en la ecuación $x^2 + (2k + 5)x + k = 0$, se conoce que una raíz excede a la otra en 3 unidades, el valor de k es igual a:

Solución:

9. En la propuesta de un ejercicio de una ecuación cuadrática, el libro de álgebra tenía un error en el término independiente, con el cual se obtenía un conjunto solución de -4 y 7. En la siguiente edición respecto al mismo libro, el error se presentó en el coeficiente del término lineal obteniéndose de raíces -4 y -3. Formulada la ecuación correcta, forma una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean iguales a cada una de las raíces de la ecuación dada aumentada en la inversa de la otra raíz, de esta misma ecuación.

Solución:

$$\text{Si el C.S.} = \{-4, 7\} \rightarrow \begin{cases} x = -4 \rightarrow x + 4 = 0 \\ x = 7 \rightarrow x - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{-----} \\ & (x+4)(x-7) = 0 \\ & x^2 - 3x - \underbrace{28}_{\text{error}} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Si el C.S.} = \{-4, -3\} \rightarrow \begin{cases} x = -4 \rightarrow x + 4 = 0 \\ x = -3 \rightarrow x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{-----} \\ & (x+4)(x+3) = 0 \\ & x^2 + 7x + \underbrace{12}_{\text{error}} = 0 \end{aligned}$$

La ecuación correcta es: $x^2 - 3x + 12 = 0$

II. EJERCICIOS PROPUESTOS

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Resuelve:

$$1) \quad \frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)(x-5)} = \frac{5}{12}$$

$$2) \quad (3x - 1)(3x + 1) = x^2$$

$$3) \quad 5x^2 + 3x = 0$$

$$4) \quad 6x(x + 1) = 5(x^2 + x)$$

5) Resuelve empleando la fórmula general.

$$a) x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$b) 3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$c) 4x^2 - 20x + 25 = 0$$

$$d) (a - 1)x^2 + 2ax + (a + 1) = 0$$

$$e) ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$$

6) I. Resuelve empleando factorización.
II. Resuelve completando cuadrados.

$$a) x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$b) x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$c) 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$d) 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$e) 3x^2 + 19x + 6 = 0$$

$$a) x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$b) 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$c) 3x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$d) 3x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$e) \frac{8x + 3}{16} = -\frac{x^2}{3}$$

7) En cada una de las siguientes ecuaciones, determina los valores de k para los cuales la ecuación tiene una sola solución:

$$a) kx^2 - 6x + 1 = 0$$

$$b) x^2 + x + 2k = 0$$

8) Encuentra el valor de n para el cual la ecuación $x^2 - 2(n-3)x + 4n = 0$ tiene raíces iguales

9) Determina el valor de k sabiendo que la ecuación tiene una sola solución real. Además halla las raíces.

$$7x^2 - 1 = 8kx^2 - 2kx$$

10) ¿Qué valores debe tomar k para que las raíces de la ecuación $(k-1)x^2 - (k+3)x + 2m + 1 = 0$ difieran en 3?

11) En cada caso construye la ecuación cuadrática cuyo conjunto solución sea el conjunto dado.

- a) $\{-2, 5\}$
- b) $\{7\}$
- c) $\{3, -3\}$

12.) Si los cuadrados de las dos raíces de la ecuación $x^2 + x + C = 0$, suman 9, entonces el valor de C es: Rpta: -4

13) Si una de las raíces de la ecuación:
 $(2n - 1)x^2 + (5n + 1)x - 3 = 0$ es -3
Determina el valor de n y el de la otra raíz.

14) Halla los valores que puede tomar "m" para que la siguiente ecuación:

$$(m + 5)x^2 + 3mx - 4(m - 5) = 0$$

- a) No tenga soluciones reales.
- b) Tenga solución única.
- c) Tenga dos soluciones reales.

15) Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática:

$$(m + 2)x^2 - (2m + 3)x + m = 0, \quad m \neq -2$$

$$\text{Además: } 1/x_1 + 1/x_2 = 11/4$$

Halla una nueva ecuación cuadrática cuyas raíces sean:

$$\gamma_1 = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = x_1 + x_2$$

Ejercicios Propuestos

1) ¿Qué valores debe tomar “m” para que las raíces de la ecuación $mx^2 - (m+3)x + 2m+1 = 0$ difieran en 2?

2) Sea P y S las raíces de la ecuación: $x^2 + mx - 2m^2 = 0$. Utilizando propiedades de las raíces; halle $P^4 - S^4$.

3) Halle la suma de las raíces de la ecuación: $4x + k + 2x^2 = 2 + 4kx - 2kx^2$.
Sabido que una raíz es la inversa de la otra.

4) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$3x - y + 6 = 0$$


$$x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$$

5) Resuelve el sistema de ecuaciones:

a)
$$\begin{aligned} x - 3y + 1 &= 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - 5y - 5 &= 0 \\ 5y^2 + 5y - x &= 0 \end{aligned}$$

Resumen


 **Ecuaciones de segundo grado.-** Es un polinomio de grado dos por lo tanto tiene dos soluciones o raíces. Las forma de resolverlas son:

a) Por formula general.- Esta resuelve cualquier trinomio de grado dos, esta

$$\text{dado por: } \underbrace{x_1, x_2}_{\text{raíces o soluciones}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b) Por aspa.- Método ya estudiado.


c) Completando cuadrado.- Se utiliza cuando el coeficiente de la variable de mayor grado es UNO. Consiste en sacar la mitad del coeficiente del término lineal y a éste resultado elevarlo al cuadrado. En todos los casos primero se agrega y luego se quita. Por esta razón algunos autores a este método lo llaman “pon y quita”.

 **Propiedades de la raíces.-** Están dadas por la relación existente entre las raíces y los coeficientes de la ecuación cuadrática. Esta son:

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con raíces x_1, x_2 se tiene

$$\left. \begin{array}{l} 1.- \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ 2.- \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ 3.- \quad x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \\ 4.- \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} \end{array} \right\}$$

Donde: *) x_1, x_2 son raíces
 *) a, b, c son coeficientes
 *) Δ es el discriminante

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 <http://www.portalplanetasedna.com.ar/Ec2Grado.htm>

Aquí encontrará información sobre ecuaciones de 2do grado.

 http://www.vitutor.com/ecuaciones/2/p_e.html

En esta página encontrará información relativa al tema.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

4

SEMANA

13

DESIGUALDADES INECUACIONES LINEALES Y CUADRATICAS

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la unidad, los alumnos resolverán las inecuaciones lineales, cuadráticas y de orden superior, aplicando teoremas sobre desigualdades y las propiedades de los factores de potencia par e impar, factor cuadrático y factor cuadrático no factorizable, además discrimina qué propiedades son aplicables en cada caso y grafica el conjunto solución en la recta de los reales haciendo uso del método de los puntos críticos y cuando lo considere necesario los métodos de factorización (Evaluación Binómico - Método de Ruffini)

TEMARIO

- Desigualdades :
 - Definición
 - Clases : *Absolutas
 - *Relativas
 - Propiedades
- Usar las propiedades de las inecuaciones lineales.
- Operaciones entre inecuaciones.
- Inecuaciones de segundo grado:
 - Teoremas.
 - Inecuaciones factorizables.
 - Inecuaciones no factorizables.
 - Factor elevado a potencia impar

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Exposición dialogada.
- Resolución de ejercicios relativos al tema por el profesor.
- Trabajo grupal de parte de los alumnos.
- Discusión de los resultados obtenidos.
- Bonificación por los buenos resultados obtenidos.
- Se dejará ejercicios propuestos del manual para que lo desarrollen en su domicilio y se revisará en la próxima clase.

DESIGUALDADES

Una desigualdad, es una relación que existe entre cantidades que tiene diferente valor. Esta relación puede ser:

“mayor que” ($>$) ; “mayor o igual que” (\geq)
 “menor que” ($<$) ; “menor o igual que” (\leq)

Clases:

a) Absolutas.- Aquellas que se verifican para cualquier número real.

Ejemplos : i) $x^2 + 4 > 0$

ii) $45 > 10$

b) Relativas.- Aquellas que se verifican sólo para determinados valores que se asignan a sus incógnitas.

Ejemplos : i) $x + 5 > 20$

ii) $2x - 3 < 10$

Propiedades

1) Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$

2) Si $a > b$ y $c \in R$ entonces $a \pm c > b \pm c$

3) Si $\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix}$ entonces $a + c > b + d$

también: $\begin{matrix} a = b \\ c > d \end{matrix}$ entonces $a + c > b + d$

4) Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$

Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$

5) Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

6) Si $a > b$ donde $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a^n > b^n$ (\forall n par o impar positivo)

7) Si $a > b$ donde $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a^n < b^n$ (\forall n par o impar negativo)

8) Si $a > b$ donde $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a^n > b^n$ (\forall n impar positivo)

9) Si $a > b$ donde $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a^n < b^n$ (\forall n par positivo)

- 10) Si $a > b$, donde a y b son de signo contrarios, y elevamos ambos miembros a la " n " entonces se cumple solo una de las relaciones: $a^n > b^n$, $a^n < b^n$, $a^n = b^n$
- 11) Si $a > b$ donde $a > 0$ y $b > 0$ entonces $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ tal que " n " es par o impar

Ejemplos:

1) Dado $-8 < x - 10 < -6$ calcule a y b , si $a < \frac{3x+4}{2} < b$

Solución:

$-8 < x - 10 < -6$	sumamos 10 a cada miembro
$2 < x < 4$	multiplicamos por 3 a cada miembro
$6 < 3x < 12$	sumamos 4 a cada miembro
$10 < 3x+4 < 16$	dividimos entre 2 a cada miembro
$5 < \frac{3x+4}{2} < 8$	

Finalmente hacemos la comparación, $\therefore a = 5$ y $b = 8$

- 2) Halle un número entero y positivo que sumado con 11 resulte mayor que el triple de él, disminuido en 7 y que sumado con 5, resulte menor que el doble de él, disminuido en 2.

Solución:

<p>3) Si $\frac{1}{2x+3} \in \left\langle \frac{1}{11}, \frac{1}{7} \right\rangle$. Determine "$a+b$", si $x \in \langle a, b \rangle$.</p>	<p>4) Halle los valores enteros de x e y que satisfagan el sistema de ecuaciones</p> $5x - 3y > 2$ $2x + y < 11$ $y > 3$
<p>5) En una práctica de álgebra, 3 alumnos A, B y C, resolvieron correctamente más de 13 problemas en total. Si "A" hubiera resuelto 3 problemas más, habría tenido mayor número de aciertos que "B" y "C" juntos, y los que este resolvió no llegaron a 8; pero resolvió más que "A". Calcule cuántos problemas resolvió "B".</p>	

INECUACIONES LINEALES

Son de la forma: $ax + b >< 0$

Pasos para su resolución:

- 1) Se cancelan los denominadores, multiplicando el MCM de dichos denominadores. Considerando que si es una cantidad (+), la desigualdad no cambia de sentido. En cambio si es una cantidad (-) el sentido cambia.
- 2) Se realizan las operaciones indicadas transponiendo términos de un miembro a otro. Para ello, se aísla en uno de los miembros a todos los términos que contienen a la incógnita y en el otro a los que no la contienen.
- 3) Despejar la incógnita, considerando que si la cantidad que pasa al otro miembro a multiplicar o dividir es (-) el sentido cambia. En cambio, si es (+) el sentido se conserva.
- 4) Graficar en la recta numérica el intervalo solución.

Ejemplo: Halla el conjunto solución de:

$$\frac{x+1}{4} - \frac{x-3}{5} > \frac{x+3}{2} - (x-4)$$

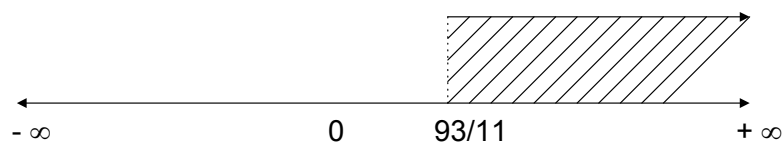
Solución: M.C.M = 20

$$\Rightarrow 5x + 5 - 4x + 12 > 10x + 30 - 20x + 80$$

$$5x - 4x - 10x + 20x > 30 + 80 - 5 - 12$$

$$11x > 93$$

$$\therefore x > \frac{93}{11}$$



$$\therefore \subset S = x \in < 93/11 , \infty >$$

Ejercicios Propuestos

1) Determina el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:	
a) $\frac{2x+5}{3} < 3x-7$	b) $\frac{x+2}{3} - \frac{x+1}{4} \geq 5x$
2) Halla el conjunto solución de:	
a) $4(7-x) - 3(1-x) > 5(x+2)$	b) $3(x-5) - 4(4-3x) \leq 2(7-x) - 3(x-5)$
3) Resuelve las siguientes inecuaciones:	
a) $5x-2 < 10x+8 < 2x-8$	b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 2x + \frac{1}{3}$

4) En un taller de carpintería, se fabricó una cierta cantidad de sillas de las que se vendió 38 quedando más de la tercera parte. Si luego se fabrican 8 más y en seguida se venden 10 quedan menos de 19 sillas. ¿Cuántas sillas se fabricaron?

5) Se desea saber el menor número de postulantes que rinden el examen para ser tutor de Matemática I en Cibertec. Se conoce que el doble de número de postulantes disminuido en 23 no llega a 95 y que al retirarse 13 quedaron más de las tres cuartas partes del número inicial de postulantes.

6) En un salón del 1er ciclo de Cibertec, hay tantos alumnos que si al triple se le aumenta 5 resulta no menor de 93; y si al doble se le disminuye 1, dicha cantidad resulta ser menor de 61. ¿Cuántos alumnos hay en dicho salón de clase?

INECUACIONES RACIONALES (lineales)

Son de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)} \gtrless 0$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de primer grado.

Para resolver estos ejercicios debemos tener presente la regla de signos; es decir:

$$\begin{array}{c|c} + & - \\ \hline - & - \\ \hline + & - \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c|c} - & + \\ \hline - & + \\ \hline + & - \end{array}$$

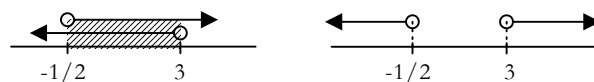
Ejemplos:

Resuelve:

a) $\frac{2x+1}{x-3} < 0$

Solución: Por regla de signos $\left(\begin{array}{c} + \\ - \end{array} \vee \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \right)$ en ambos casos es menor que cero.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2x+1}{x-3} < 0 &\Leftrightarrow (2x+1 > 0 \wedge x-3 < 0) \vee (2x+1 < 0 \wedge x-3 > 0) \\ &\quad (2x > -1 \wedge x < 3) \vee (2x < -1 \wedge x > 3) \\ &\quad \left(x > -\frac{1}{2} \wedge x < 3 \right) \vee \left(x < -\frac{1}{2} \wedge x > 3 \right) \end{aligned}$$



$$x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 3 \right\rangle \quad \vee \quad \emptyset$$

\therefore

$$\boxed{CS = x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 3 \right\rangle}$$

b) $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$; Se cumple $\left(\begin{smallmatrix} + & - \\ - & + \end{smallmatrix}\right)$ son mayores que cero.

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow (x-2 \geq 0 \wedge x+1 > 0) \vee (x-2 \leq 0 \wedge x+1 < 0)$$

$$(x \geq 2 \wedge x > -1) \vee (x \leq 2 \wedge x < -1)$$



$$x \in [2, \infty) \vee x \in \langle -\infty, -1 \rangle$$

$$\therefore \boxed{CS = x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup [2, \infty)}$$

Ejercicios Propuestos

1) Halla el conjunto solución de:

$$\frac{3x-9}{6x+3} \leq 1$$

2) Halla el conjunto solución de:

$$\frac{2x-8}{4-8x} > 0$$

3) Halla $A \cup B$ si $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{x^2}{x-1} \right\}; B = \left\{ x \in \mathbb{R} / -2 \leq \frac{2-3x}{7} < 4 \right\}$

4) Halla $P \cap Q$ si:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x-1}{2} \leq \frac{3x^2+1}{6x-1} \right\}; Q = \{x \in \mathbb{R} / 2x(6x+5) < (3x-2)(4x+1)\}$$

INECUACIONES CUADRÁTICAS

Son inecuaciones que después de simplificadas adoptan la siguiente forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{o} \quad ax^2 + bx + c \leq 0} \quad a \neq 0$$

Teorema: Si “x” es un número real pero diferente de cero entonces

$$\boxed{x^2 > 0}$$

Corolario: Sea $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\boxed{x^2 \geq 0}$$

Para resolver inecuaciones cuadráticas FACTORIZABLES se debe tener en cuenta los siguientes teoremas:

$$1) \quad x \cdot y > 0 \Leftrightarrow [(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)]$$

$$2) \quad x \cdot y \geq 0 \Leftrightarrow [(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)]$$

Ejemplo: Resuelve: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Solución: } (x-1)(x-3) \geq 0 &\Leftrightarrow [(x-1 \geq 0 \wedge x-3 \geq 0) \vee (x-1 \leq 0 \wedge x-3 \leq 0)] \\ &\Leftrightarrow [(x \geq 1) \wedge x \geq 3] \vee (x \leq 1 \wedge x \leq 3) \\ &\Leftrightarrow [x \geq 3 \quad \vee \quad x \leq 1] \end{aligned}$$

\therefore

$$\boxed{CS = x \in \langle -\infty, 1] \cup [3, \infty \rangle}$$

$$3) \quad x \cdot y < 0 \Leftrightarrow [(x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0)]$$

$$4) \quad x \cdot y \leq 0 \Leftrightarrow [(x \geq 0 \wedge y \leq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \geq 0)]$$

Ejemplo: Resuelve: $x^2 + 5x - 6 < 0$

$$\begin{aligned} \text{Solución: } (x+6)(x-1) < 0 &\Leftrightarrow [(x+6 > 0 \wedge x-1 < 0) \vee (x+6 < 0 \wedge x-1 > 0)] \\ &\Leftrightarrow [(x > -6 \wedge x < 1) \vee (x < -6 \wedge x > 1)] \\ &\Leftrightarrow x \in \langle -6, 1 \rangle \vee \emptyset \end{aligned}$$

\therefore

$$\boxed{CS = x \in \langle -6, 1 \rangle}$$

Ejercicios Propuestos

1) Halla el conjunto solución de:

$$2x^2 - x - 10 > 0$$

2) Resuelve:

$$3x^2 - x - 2 \leq 0$$

3) Halla $A \cap B$ si :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / (3+x)^2 + (2-x)^2 \geq x^2 + 37 \right\} \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} / (x+1)^2 + (x+2)^2 < (x+3)^2 \right\}$$

4) Halla $P \cap Q$ si:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R} / (x+1)^2 + (x-2)^2 \leq 2(x-3)(x+3) \right\} \quad Q = \left\{ x \in \mathbb{R} / (x+1)^2 + 5(x-3) \geq 30 \right\}$$

INECUACIONES CUADRÁTICAS NO FACTORIZABLES

Para resolver este tipo de inecuaciones se emplea el método de completar cuadrados; pero teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

1)

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \text{ entonces } x^2 \geq 0$$

Ejemplos:

a) $(-3)^2 \geq 0 \Rightarrow 9 > 0$

b) $(\sqrt{5})^2 \geq 0 \Rightarrow 5 > 0$

c) $(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow$ Para cualquier valor de x resulta que $(x+1)^2$ es positivo o igual a CERO, luego el conjunto solución : \mathbb{R} .

d) $(x-3)^2 \leq 0 \Rightarrow$ No hay ningún valor real x tal que $(x-3)^2$ sea negativo (es decir, menor que CERO) pero sí para $x=3 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$. Luego, el conjunto solución será $\{3\}$.

e) Resolver : $x^2 - 14x + 49 < 0$.

Solución : Factorizando $(x-7)^2 < 0$ ¡Falso!

No existe ningún número real x tal que $(x-7)^2$ dé como resultado un número negativo o menor que CERO.

2)

$$\text{Si } x^2 \leq m \text{ siempre y cuando } m \text{ sea positivo.}$$

$$\text{Entonces : } -\sqrt{m} \leq x \leq \sqrt{m}$$

Ejemplo: Resuelve: $x^2 \leq 25$
 \uparrow debe ser positivo.

Solución: Si $x^2 \leq m$ entonces $-\sqrt{m} \leq x \leq \sqrt{m}$

Si $x^2 \leq 25$ entonces $-\sqrt{25} \leq x \leq \sqrt{25}$

$$-5 \leq x \leq 5$$

\therefore

$$\text{C.S.} = x \in [-5, 5]$$

- 3) Si $x^2 \geq m$ siempre y cuando m sea positivo.
Entonces : $x \geq \sqrt{m} \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{m}$

Ejemplo: Resolver: $x^2 \geq 49$

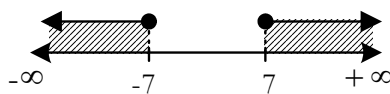
Solución:

$$\text{Si } x^2 \geq m \text{ entonces } x \geq \sqrt{m} \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{m}$$

$$\text{Si } x^2 \geq 49 \text{ entonces } x \geq \sqrt{49} \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{49}$$

$$x \geq 7 \quad \vee \quad x \leq -7$$

Gráficamente:



$$\therefore \text{CS} = x \in \langle -\infty, -7 \rangle \cup [7, \infty)$$

Ahora, aplicaremos el método de COMPLETAR CUADRADOS. Aquí se recomienda que el coeficiente del término cuadrado sea UNO.

Ejemplo: Resolver $2x^2 - x - 4 \geq 0$

Solución: $2x^2 - x - 4 \geq 0 \div 2$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 2 \geq 0$$

Completando cuadrados :

$$\underbrace{x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}_{\phantom{x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2}} - 2 \geq 0$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 \geq 0$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{33}{16} \geq 0$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \geq \frac{33}{16} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{33}{16}} \quad \vee \quad x - \frac{1}{4} \leq -\sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$x \geq \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} \quad \vee \quad x \leq \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$x \geq \frac{1 + \sqrt{33}}{4} \quad \vee \quad x \leq \frac{1 - \sqrt{33}}{4}$$

$$\text{CS} = x \in \left\langle -\infty, \frac{1 - \sqrt{33}}{4} \right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{33}}{4}, \infty \right)$$

Ejercicios Propuestos

1) Halla el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$x^2 + x + 72 > 0$$

2) ¿Cuántos valores enteros satisfacen a la siguiente inecuación?

$$x^2 - 2x - 2 < 0$$

3) Sean los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x - 15 < 0\} \quad \text{halla } A \cap B$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 - x - 4 \geq 0\}$$


4) Halla $P \cup Q$ si:

P.- Si se sabe que $x*y = 2x - y^2$. Además; $(2*x) - (x*2) > -7$ halla los valores de x.

Q.- Si $a \# b = 2a + 3b$; halla los valores de x que cumplan:

$$\left[\left(x^2 \# x \right) \# 2 \right] \# 3 < 72$$

Resumen


 Desigualdades.- es una relación que existe entre dos cantidades, se divide en dos clases:


a) Absolutos.- Aquellos que cumplen para cualquier valor de x . Ejemplo:


- $x^2 + 6 > 0$
- $52 < 60$

b) Relativos.- Aquellos que cumplen para determinados valores de x . Ejemplo:

- $x - 1 > 10$
- $3x + 2 < 30$

 Ten presente, para realizar operaciones con desigualdades, estas deben cumplir ciertos requisitos (propiedades)


 Inecuaciones Lineales.- Para resolverlas tenemos que tomar en cuenta las propiedades, estas nos permiten mantener o variar el sentido de la desigualdad. Al resolver una inecuación obtenemos un conjunto infinito de respuestas.


 Inecuaciones Cuadráticas.- son de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$; estas pueden ser:

a) Factorizables.- Aquellas que se convierten en producto de factores; proceso: obtener sus puntos críticos, ubicarlo en la recta real y finalmente sombreado para obtener el conjunto solución.

b) No factorizables.- Para resolverlas, tener presente

- Completar cuadrados.
- Aplicar uno de los siguientes teoremas, según sea el caso:
 - Si $x^2 \leq m \Rightarrow -\sqrt{m} \leq x \leq \sqrt{m}$
 - Si $x^2 \geq m \Rightarrow x \geq \sqrt{m} \cup x \leq -\sqrt{m}$

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 http://www.guiamath.net/ejercicios_resueltos/01_01_04_03_Prop_Raiz_Ec_2/0_prop-raiz-ec-2.html

Aquí hallará información relativa al tema.

 http://www.fcasuser.unca.edu.ar/matematica/materiales/bibliografia/mat_1_libro_1/cap6_ec_seg_grado.pdf

Aquí hallará información relativa al tema

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

5

SEMANA

14

INECUACIONES CON FACTOR ELEVADO A POTENCIA PAR, IMPAR Y CUADRÁTICA.

INECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la unidad, los alumnos resolverán las inecuaciones lineales, cuadráticas y de orden superior, aplicando teoremas sobre desigualdades y las propiedades de los factores de potencia par e impar, factor cuadrático y factor cuadrático no factorizable, además discrimina qué propiedades son aplicables en cada caso y grafica el conjunto solución en la recta de los reales haciendo uso del método de los puntos críticos y cuando lo considere necesario los métodos de factorización (Evaluación Binómico - Método de Ruffini)

TEMARIO

- Factor elevado a potencia par e impar y cuadrática.
- Inecuaciones grado mayor o igual a tres.
- Ejemplos diversos sobre inecuaciones.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Resolución de ejercicios modelos.
- Discusión general en la resolución de ejercicios.
- Trabajo de grupos.
- Discusión respecto a los resultados obtenidos.

FACTOR ELEVADA A POTENCIA PAR, IMPAR Y CUADRÁTICO:

a) Factor lineal elevada a potencia PAR

Son de la forma:

$$(ax + b)^{\text{PAR}}$$

Para simplificar o eliminar el exponente tener en cuenta el siguiente teorema:

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \geq 0$$

Lo que quiere decir que el factor es mayor o igual a cero.

Ejemplo: Resolver:

$$\frac{(x+2)^2(x+1)^{100}}{(x-1)^{50}} > 0$$

Solución:

$$\frac{\overset{+}{(x+2)^2} \overset{+}{(x+1)^{100}}}{\underset{+}{(x-1)^{50}}} > 0$$

; Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \neq -2 \\ x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{array} \right\}$$

valores que no puede tomar x porque haría CERO el factor y la pregunta es MAYOR que CERO.

$$\therefore \text{CS} = x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$$

b) Factor lineal elevada a potencia IMPAR

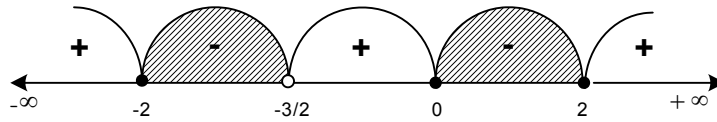
Son de la forma; $(ax + b)^{\text{IMPAR}}$; para simplificar o eliminar el exponente, se copia solamente la base y se saca los puntos críticos para graficarlo y resuélvelo.

Ejemplo: Resolver: $\frac{(x-2)^{31}(x)(x+2)^{65}}{(2x+3)^{101}} \leq 0$

Solución: Se copia solamente la base de cada factor:

$$\frac{(x-2)(x)(x+2)}{(2x+3)} \leq 0$$

$$\text{P.C.} = \left\{ 2, 0, -2, -\frac{3}{2} \right\}$$



∴

$$CS = x \in \left[-2, -\frac{3}{2} \right) \cup [0, 2]$$

c) Factor cuadrático

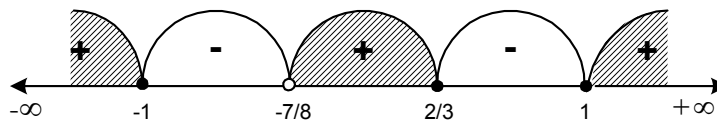
Son de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$; $a \neq 0$. Este caso ya lo hemos estudiado en la que establecimos que se debe factorizar en todos los casos.

Ejemplo: Resolver: $\frac{(3x^2 - 5x + 2)(x^2 - 1)}{(8x^2 - x - 7)} \geq 0$

Solución: Factorizando el numerador y denominador:

$$\frac{(3x - 2)(x - 1)(x - 1)(x + 1)}{(8x + 7)(x - 1)} \geq 0; \quad \text{Restricción } x \neq 1$$

$$P.C. = \left\{ \frac{2}{3}, 1, -1, -\frac{7}{8} \right\}$$



∴

$$CS = x \in]-\infty, -1] \cup \left] -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} \right] \cup]1, \infty[$$

Ejemplo: Resolver:
$$\frac{(x-4)^{20}(x^2-4x+3)^{40}(x-1/2)}{(x+5)^{69}(x^2-4x+5)} \leq 0$$

Solución:

$$\frac{\cancel{(x-4)^{20}} \cancel{(x-3)^{40}} \cancel{(x-1)^{40}} \left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x+5)^{69} \cancel{(x^2-4x+5)}} \leq 0$$

Restricciones :

$$x = 4$$

$$x = 3$$

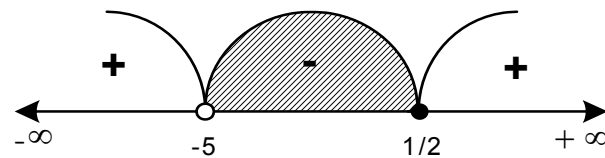
$$x = 1$$

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{x + 5} \leq 0$$

El factor cuadrático x^2-4x+5 siempre es positivo para cualquier valor de x . Además su determinante es $\Delta < 0$.

$$P.C. = \left\{ \frac{1}{2}, -5 \right\}$$

\therefore se descarta este factor.



$$\therefore CS = x \in \left[-5, \frac{1}{2}\right] \cup \{1, 3, 4\}$$

Ejercicios Propuestos

1) Resuelve: $\frac{(x-1)^{10}(x+5)^3(x-2)(x+3)^{19}}{(x+6)^{20}(x-8)} \leq 0$

2) Resuelve: $\frac{(x+1)(x-3)^{20}(x+2)^{31}\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x+4)^{40}(x+3)^{50}} \geq 0$

3) Resuelve: $\frac{(x^2+4)(x+1)(x-5)^{60}}{(x^2-4x+9)(x-3)^{21}} \leq 0$

4) Resuelve: $\frac{(x^2-5x+4)(x^2+4x+3)^{50}(x^2-9)^{61}}{x(x^2-6x+10)} \geq 0$

INECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

Son de la forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \gtrless 0$$

Donde $n \geq 3$ y pertenece al conjunto de los Naturales.

Para resolver estas inecuaciones se debe factorizar en todos los casos, aplicando los métodos ya conocidos.

Ejemplo: Resolver: $x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4 > 0$

Solución: Factorizamos utilizando Ruffini:

1	↓	1	6	13	12	4
-1	↓	-1	-5	-8	-4	0
-1	↓	-1	-4	-4	0	
-2	↓	-2	-4	0		
-2	↓	-2	0			
		1	0			

$$4 \left\{ \begin{array}{l} \pm 1 \\ \pm 2 \\ \pm 4 \end{array} \right.$$

Divisores

$$\Rightarrow x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4 = (x-1)(x+1)(x+1)(x+2)(x+2)$$

En el ejercicio:

$$(x-1)(x+1)^2(x+2)^2 > 0$$

;

Restricciones

$$x \neq -1$$

$$x \neq -2$$

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

$$\therefore CS = x \in \langle 1, \infty \rangle$$

Ejemplo: Resolver: $\frac{x^3 - 13x + 12}{3x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 13x + 6} \leq 0$

Solución:

Factorizando: numerador:

1	1	0	-13	12
	↓	1	1	-12
3	1	1	-12	0
	↓	3	12	
-4	1	4	0	
	↓	-4		
	1	0		

$$(x - 1)(x - 3)(x + 4)$$

denominador:

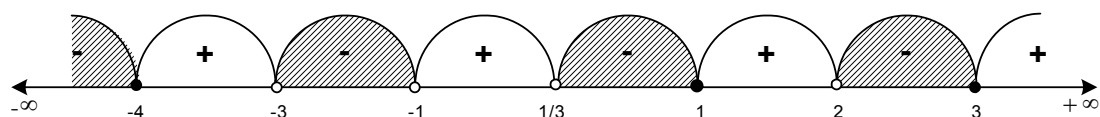
2	3	5	-17	-13	6
	↓	6	22	10	-6
-1	3	11	5	-3	0
	↓	-3	-8	3	
-3	3	8	-3	0	
	↓	-9	3		
1/3	3	-1	0		
	↓	1			
	3	0			

$$(x - 2)(x + 1)(x + 3)(x - 1/3)$$

En el ejercicio:

$$\frac{(x-1)(x-3)(x+4)}{(x-2)(x+1)(x+3)(x-1/3)} \leq 0$$

$$P.C. = \{1, 3, -4, 2, -1, -3, 1/3\}$$



$$\therefore \boxed{CS = x \in \langle -\infty, -4] \cup \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 1/3, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle}$$

Ejercicios Propuestos

1) Resuelve: $2x^4 - x^3 - 8x^2 + x + 6 \geq 0$

2) Resuelve: $4x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 9x - 2 > 0$

3) Resuelve: $\frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}{x^3 + x^2 - 9x - 9} \leq 0$

4) Resuelve: $\frac{(x^3 - x^2 - x + 1)(2x^2 - x - 10)}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4} \geq 0$

GUÍA DE EJERCICIOS

Ejemplos diversos sobre inecuaciones

I. Inecuaciones de primer grado

1. Si se tiene:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} / 1 - 2x \in [-11, 11] \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} / \frac{6x+2}{2} + 4 \leq 4x + 1 \leq 8 + 3x \}$$

$$C = \{ x \in \mathbb{R} / (x+1)^2 > (x-1)^2 \}$$

$$D = \{ x \in \mathbb{R} / x+7 \geq 2 + \frac{2x+16}{3} \}$$

Hallar:

$$K = (A \cup D) \cap (B \cup C)$$

2. Si se tiene:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} / \frac{2}{2x+3} \in \left(\frac{1}{4}, 2 \right] \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} / \frac{2}{3}x + 5 \leq 2 + \frac{3x+6}{2} \}$$

$$C = \{ x \in \mathbb{R} / 6x - 7 = 9x - (7 + 3x) \}$$

$$D = \{ x \in \mathbb{R} / (x+1)^2 - 9 \leq (x+2)^2 \leq (x-1)^2 + 4x + 7 \}$$

Hallar el conjunto solución de:

$$I = [(C' \cap D)' \cup (B - C)] - A$$

3. Sean los conjuntos:

$$A' = \{ x \in \mathbb{R} / x > -6 \rightarrow x \geq 3 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \in \langle -2, 8] \}$$

$$C = \{ x \in \langle -\infty, 1] \cup [5, \infty) \}$$

$$\text{Hallar: } \{ (A' \cup C') - B' \}'$$

4. Sean los intervalos:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} / \sim (x \geq -10 \rightarrow x > 7) \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} / x \in A \vee x \notin \langle -3, 5] \}$$

$$C' = \{ x \in \langle 2, 7] \cup \langle 8, 14] \}$$

$$\text{Hallar: } \{ [A \cap C]' - B' \} - A'$$

II. Inecuaciones de superior grado

5. Inecuaciones polinómicas

Resuelve:

a) $(x-2)^3 (x+3)^5 (x-1) (x-5)^4 (x-1) \geq 0$

b) $(x^2-1) (x^4-1) (x^3-27)^3 > 0$

c) $(x^2 + 4x + 5) (x-3)^2 (x) (x+1) < 0$

d) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4 > 0$

e) $(x^3 - 1)^3 (x^4 - 1) (-x^2 + x) (-x - 2)^2 < 0$

6. Inecuaciones racionales:

Resuelve:

a) $\frac{(x-8)(x-5)(x+3)(x+2)(x-10)}{(x+5)(x-2)(x-11)} \leq 0$

b) $\frac{(x-2)^3 (x+1)^2 (x-1)}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} > 0$

c) $\frac{(x^2 + x - 6)(x^2 - x - 6)}{(x^2 + 4)(x^2 - 16)} \leq 0$

d) $\frac{2x+1}{x+3} \geq \frac{2x-3}{x+1}$

7. Resuelve

$$\frac{(x^2 - 1)^3 (x^3 - 13x + 12)}{(x+4)^5 (x^3 + 8x^2 + 4x - 48)} \geq 0$$

8. Resuelve

$$\frac{(x+5)^3 (x+1)^4 (x+2) (x^2 - 7x + 12) (8-x)^4}{(x+7)^6 (x-8) (x^3 - 8) (x^2 - 14x + 48)} \leq 0$$

9. Un carpintero hizo cierto número de mesas. Vendió 70 y le quedan por vender más de la mitad. Hace después 6 mesas más y vende 36 quedándole menos de 42 mesas por vender. ¿Cuántas mesas ha hecho el carpintero?

10. Si al doble de la edad de Tovar se le resta 17 años, resulta menor que 39; pero si a la mitad de la edad se le suma 3, resulta mayor que 15 ¿Cuál es la edad de Tovar?

Ejercicios Propuestos

1) Resuelve:
$$\frac{(x^2 + x - 6)(x^3 - 13x + 12)}{(x^2 + 4)(x^2 - 4x + 3)(x + 2)^{100}} \geq 0$$

2) Resuelve:
$$\frac{(x - 2)^{69}(x + 1)^{90}(9 - x^2)}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \leq 0$$

3) Sea : $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 - 2x \in [-2, 2]\}$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)}{(x^2 - 2x)(x - 1)^4(x + 2)^3} \right\} \leq 0$$

Halla $A - B$

4) $A = \{x \in \mathbb{Z} / 4 - 2x \in [-2, 2]\}$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{3x}{2} \leq 2x + 2 \leq \frac{4x - 1}{3} \right\}$$


$$C = \{x \in \mathbb{N} / x^5 - 2x^4 - x + 2 \leq 0\}$$

Halla $(A \cup B) \cap C$

Resumen

 Factor elevado a potencia PAR e IMPAR:

- a) PAR.- Para eliminar la potencia, tener presente si $x \in R \Rightarrow x^2 \geq 0$
- b) IMPAR.- Toda potencia impar se elimina la potencia y se copia la base, y se sigue los pasos ya conocidos.

 Inecuaciones de Orden Superior.- Por regla, toda inecuación de grado dos o mayor se factoriza y se sigue los pasos ya conocidos. Es decir:

- Factorizar empleando cualquier método.
- Si hay factores comunes se suman exponentes o se cancelan con su restricción respectiva.
- Sacar puntos críticos (PC)
- Los PC ubicarlos en la recta real.
- Finalmente sombrear el signo resultante obtenido por la regla de signos y este será el conjunto solución.

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 <http://valle.fcencias.unam.mx/~lugo/bach2/DesigCuad/index.html>

Aquí hallará información sobre el tema.

 <http://www.unapiquitos.edu.pe/intranet/pagsphp/docentes/archivos/inecuaciones.pdf>

En esta página, hallará información sobre el tema.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

6

SEMANA

15

VALOR ABSOLUTO

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la Unidad de Aprendizaje, los alumnos resolverán ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto utilizando la definición de valor absoluto, propiedades y los teoremas relativos a las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, discrimina que teorema y/o propiedad es el que aplica para hallar el conjunto solución y realiza su gráfica en la recta de los reales.

TEMARIO

- Inecuaciones grado mayor o igual a dos.
- Ejemplos diversos sobre inecuaciones
- Valor Absoluto: - Definición
- Propiedades

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Resolución de ejercicios relativos al tema por el profesor.
- Trabajo grupal.
- Se plantea en la pizarra un ejercicio y se formulan preguntas a los alumnos para que participen en la resolución, enfatizando qué propiedades de la presente sesión se están aplicando. Se dejará ejercicios propuestos del manual para que lo desarrollen en su domicilio para su revisión en la siguiente clase.
- Comprobación de los resultados obtenidos.

VALOR ABSOLUTO DE LOS NÚMEROS REALES

“ $| \quad |$ ” Símbolo de valor absoluto.

“ $|x|$ ” Valor absoluto del número real x .

Definición:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1:

Si

$$\begin{array}{l} x = 3 \rightarrow |3| = 3 \\ x = 0 \rightarrow |0| = 0 \\ x = -3 \rightarrow |-3| = -(-3) = 3 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right\} \text{son iguales}$$

Ejemplo 2: Hallar $|4x - 6|$ si $x \in \langle -2, 0 \rangle$

Solución:

$$-2 < x < 0$$

$$-8 < 4x < 0$$

$$\underbrace{-14 < 4x - 6 < -6}_{\text{Es un número negativo}} \quad \therefore |4x - 6| = -(4x - 6) = 6 - 4x$$

Es un número **negativo** porque está entre dos negativos.

Propiedades:

$$1. |x| \geq 0$$

$$2. |x| = |-x|$$

$$3. |x| \geq x$$

$$4. |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$5. \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$$

$$6. |x^2| = |x|^2 = x^2$$

$$7. |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$8. |x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$9. \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x|$$

Nota: Resolver ejercicios con valor absoluto es saber eliminar las barras o símbolo del valor absoluto aplicando sus propiedades o teoremas.

Ejercicios Propuestos

<p>1) Halla el mayor valor de a/b.</p> <p>Si: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) = \frac{ -4 + 5 }{ -3 - 1 }$</p>	
<p>2) a) Halla "n":</p> $n + \sqrt{n - -2 } = -3 + 1 $	<p>b) Calcula:</p> $p = \frac{ a-b }{ b-a } + \frac{ -3-2 }{ 5 } + \frac{ -8 }{ 2 }$
<p>3) Resuelve: $(x-4)^2 - 5 x-4 + 6 = 0$</p>	
<p>4) Resuelve: $\frac{ x-1 x-3 }{ x-2 } = 1$</p>	
<p>5) Resuelve: $x^2 + 2 = 2(x+1) - 1$</p>	

Resumen

📖 Valor Absoluto (VA.).- Resolver ejercicios con valor absoluto es saber eliminar las barras aplicando definición, propiedades y teoremas.

$$\text{Definición } |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ \vee \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $|x| \geq x$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$
6. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$
8. $|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$
9. $\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x|$

📖 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

🔗 http://es.wikipedia.org/wiki/Valor_absoluto

En la página indicada hallará información sobre valor absoluto.

🔗 <http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/MATEGENERAL/t4-valorabsoluto/valor-absoluto-julioetall/node1a.html>

Aquí obtendrá información sobre valor absoluto.

UNIDAD DE
APRENDIZAJE

6

SEMANA

16

CONTINUACIÓN DE VALOR ABSOLUTO

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

- Al término de la Unidad de Aprendizaje, los alumnos resolverán ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto utilizando la definición de valor absoluto, propiedades y los teoremas relativos a las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, discrimina que teorema y/o propiedad es el que aplica para hallar el conjunto solución y realiza su gráfica en la recta de los reales.

TEMARIO

- Teoremas relativos a valor absoluto: - Para resolver ecuaciones.
- Para resolver inecuaciones.
- Ejemplos diversos (resueltos y propuestos) sobre valor absoluto.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Por equipo, se trabajan los ejercicios propuestos en el manual y se explican los resultados.
- Se propondrá ejercicios para que los alumnos desarrollen en su domicilio. Se revisarán en la siguiente clase.

TEOREMAS DEL VALOR ABSOLUTO

Para la solución de ecuaciones e inecuaciones:

1. $\forall x \in \mathbb{R}$

a) $|x| \geq 0$

b) $|x| = 0 \iff x = 0$

2. $|x| = y \iff y \geq 0 \wedge (x = y \vee x = -y)$

3. $|x| = |y| \iff (x = y \vee x = -y)$

4. $|x| \leq y \iff y \geq 0 \wedge (-y \leq x \leq y)$

$|x| < y \iff y > 0 \wedge (-y < x < y)$

5. $|x| \geq y \iff (x \geq y \vee x \leq -y)$

$|x| > y \iff (x > y \vee x < -y)$

6. $|x| \leq |y| \iff |x|^2 \leq |y|^2$
 $x^2 \leq y^2$
 $x^2 - y^2 \leq 0$

Ejercicios Propuestos

- 1) Sean los conjuntos:
- $$A = \{x \in \mathbb{R} / |x| + 1 = 2(x - 2) + 1\}$$
- $$B = \{x \in \mathbb{R} / |x + 3| = 1 - 2x\}$$

Halla $A \cup B$

- 2) Sean:
- $$P = \{x \in \mathbb{R} / |3 - x| \geq |3x - 5|\}$$
- $$Q = \{x \in \mathbb{R} / |5x - 3| < 3x + 7\}$$

Halla $P \cap Q$

3) Halla $A \cap B$ si:

$$A = \{x \in R / 3(x-3)^2 - 14|x-3| - 5 = 0\} \quad B = \{x \in R / |x-2| + 4 = 8\}$$

4) Halla $A \cap B$, si:

$$A = \{x \in R / 3||x+1|-1|^2 - 5||x+1|-1| = 2\}$$

$$B = \{x \in R / |x+5|-3|-1 > 0\}$$

5) Halla $A - B$, si:

$$A = \{x \in R / |x^2 + 6| - 5x| = 0\} \quad B = \{x \in R / |8-x| - x \geq 0\}$$

GUÍA DE EJERCICIOS

Valor absoluto

I. $|x| = |a| \leftrightarrow x = a \vee x = -a$

1) $|x - 3| = |4|$

Solución

$$|x - 3| = |4| \leftrightarrow x - 3 = 4 \quad \vee \quad x - 3 = -4$$

$$x = 7 \quad \vee \quad x = -1$$

$$CS = \{7, -1\}$$

2) $|x + 4| = |2x - 9|$

Solución

$$|x + 4| = |2x - 9| \leftrightarrow x + 4 = 2x - 9 \quad \vee \quad x + 4 = -(2x - 9)$$

$$-x = -4 - 9 \quad \vee \quad x + 4 = -2x + 9$$

$$-x = -13 \quad \vee \quad 3x = 5$$

$$x = 13 \quad \vee \quad x = 5/3$$

$$CS = \{13, 5/3\}$$

3) $|x + 7| = |x + 7|$

Solución

$CS = \mathbb{R}$

II. $|x| = a \leftrightarrow a \geq 0 \wedge (x = a \vee x = -a)$

Solución

4. $|3x + 2| = 4$

$$|3x + 2| = 4$$

$$\rightarrow 4 \geq 0 \wedge (3x + 2 = 4 \vee 3x + 2 = -4)$$

$$x = 2/3 \quad \vee \quad 3x = -6$$

$$x = 2/3 \quad \vee \quad x = -2$$

$$CS = \left\{ \frac{2}{3}, -2 \right\}$$

$$5) \quad |4x - 3| = x - 2$$

Solución

$$|4x - 3| = x - 2$$

$$x - 2 \geq 0 \wedge (4x - 3 = x - 2 \vee 4x - 3 = -(x - 2))$$

$$x \geq 2 \wedge (3x = 1 \vee 4x - 3 = -x + 2)$$

$$x \geq 2 \wedge (x = 1/3 \vee x = 1)$$

$$\therefore CS = \emptyset$$

$$6) \quad |5 - 2x| = 4x - 8$$

Solución

$$CS = \{13/6\}$$

$$7) \quad |x - 3| = x - 3$$

Solución

$$CS = \{x / x \in [3, \infty)\}$$

III. i) $|x| < a \leftrightarrow a > 0 \wedge -a < x < a$

ii) $|x| \leq a \leftrightarrow a \geq 0 \wedge -a \leq x \leq a$

$$8) \quad |x - 3| < 5$$

Solución

$$|x - 3| < 5 \leftrightarrow \underbrace{5 > 0}_{\mathbb{R}} \wedge \underbrace{-5 < x - 3 < 5}_{-2 < x < 8}$$

$$CS = \{x / x \in \langle -2, 8 \rangle\}$$

$$9) |2x+5| < 3x-6$$

Solución

$$|2x+5| < 3x-6 \Leftrightarrow$$

$$3x-6 > 0 \wedge \underbrace{(-(3x-6) < 2x+5 < 3x-6)}_{\substack{ii \\ i}}$$

$$x > 2 \wedge (i) \ 2x+5 > -3x+6 \wedge ii) \ 2x+5 < 3x-6)$$

$$x > 2 \wedge (5x > 1 \wedge -x < -11)$$

$$x > 2 \wedge (x > 1/5 \wedge x > 11)$$

$$CS = \{x / x > 11\}$$

$$10) |3x+7| \leq -4x$$

Solución

$$CS = \{x / x \in \langle -\infty, -1 \rangle\}$$

$$IV. \quad i) \quad |x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$$

$$ii) \quad |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$$

$$11) \quad |3x+2| > 7$$

Solución

$$|3x+2| > 7 \Leftrightarrow 3x+2 > 7 \vee 3x+2 < -7$$

$$\Leftrightarrow 3x > 5 \vee 3x < -9$$

$$\Leftrightarrow x > 5/3 \vee x < -3$$

$$CS = \{x / x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 5/3, \infty \rangle\}$$

$$12) \quad |2x + 8| > x$$

Solución

$$|2x - 8| > x \Leftrightarrow 2x + 8 > x \vee 2x + 8 < -x$$

$$\Leftrightarrow x > -8 \vee 3x < -8$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x > -8 \vee x < -8/3}_R$$

$$CS = R$$

$$13) \quad |3x + 4| \geq x + 2$$

Solución

$$|3x + 4| \geq x + 2 \Leftrightarrow 3x + 4 \geq x + 2 \vee 3x + 4 \leq -x - 2$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -2 \vee 4x \leq -6$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \vee x \leq -3/2$$

$$CS = \{x / x \in \langle -\infty, -3/2 \rangle \cup [-1, \infty) \}$$

$$14) \quad \left| \frac{x-3}{x+5} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+5} \geq 2 \vee \frac{x-3}{x+5} \leq -2$$

$$CS = x \in \left[-13, -\frac{7}{3} \right] - \{-5\}$$

Ejercicios Propuestos

1. En las siguientes afirmaciones, indica si es verdadera (V) o falsa (F).

- | | | | |
|----|---|-------------------|-----|
| a) | $x + 5 = x + 5$ | $CS = \phi$ | () |
| b) | $(x + 18)^2 < 0$ | $CS = \phi$ | () |
| c) | $(x + 9)^2 = 0$ | $CS = \{9\}$ | () |
| d) | $ x + 4 = -2$ | $CS = \{-2, -6\}$ | () |
| e) | $x + 4 < x + 8$ | $CS = R$ | () |
| f) | $(x - 4)^2 > 0$ | $CS = R$ | () |
| g) | $2x + 3 = x + 3$ | $CS = R$ | () |
| h) | $(x + 2)^2 = (x + 2)^2$ | $CS = \phi$ | () |
| i) | $ x = -a$ | | () |
| j) | $x^2 \leq a \leftrightarrow a \geq 0 \wedge -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ | | () |

2. $|2x + 6| = |x + 3|$

- a) $\{3\}$
- b) $\{2, 3\}$
- c) $\{1, -3\}$
- d) $\{3, -3\}$
- e) c) $\{-3\}$

3. $|x - 2| = x - 2$

- a) $\{2\}$
- b) R
- c) $\{2, -2\}$
- d) $\{3, 4\}$
- e) $[2, \infty)$

4. $|x + 6| < 3 - 2x$

- a) $\langle -\infty, -1 \rangle$
- b) $\langle -\infty, 1 \rangle$
- c) $\langle -\infty, -9 \rangle$
- d) $\langle -\infty, 9 \rangle$
- e) N.A.

5. $\left| x + \frac{8}{x} \right| \leq 6$

- a) ϕ
- b) $[-4, 4]$
- c) $[-6, -2] \cup [4, 6]$
- d) $[-4, 2] \cup [3, 4]$
- e) $[-4, -2] \cup [2, 4]$

6. $|2x - 3| > x + 2$

a) \emptyset

b) $[-4, 4]$

c) $[-6, -2] \cup [4, 6]$

d) $[-4, 2] \cup [3, 4]$

e) $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\cup]5, \infty[$

7. $|3x + 1| \geq 2x - 1$

a) \emptyset

b) \mathbb{R}

c) $[4, 6] \cup [7, 9]$

d) $[-2, 6] \cup [7, 9]$

e) $\langle -\infty, -2] \cup [5/2, \infty\rangle$

8. $|3x - 18| = 0$

a) \emptyset

b) \mathbb{R}

c) $\{6\}$

d) $\{0\}$

e) $\{-6\}$

9. $|2x - 8| = x - 1$

a) $\{4, 2\}$

b) $\{3, 7\}$

c) $\{2, 1\}$

d) $\{-3, 7\}$

e) $\{-4, -2\}$

10. $|x^2 - 4| = x + 2$

a) $\{-2, 2\}$

b) $\{-2, 6\}$

c) $\{4, 3, 1\}$

d) $\{-2, 1, 3\}$

e) $\{-4, 3, 1\}$

Ejercicios propuestos**Valor absoluto**

- | | |
|---|--|
| 1) $ x-3 = 5$ | 12) $ x-3 ^2 = x-3 $ |
| 2) $ 3x-10 = -4$ | 13) $ x+1 = 4-2x$ |
| 3) $ 3x-2 = x-1$ | 14) $ x-5 = 5-x$ |
| 4) $ x-3 = x-3$ | 15) $\left \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+4} \right = 1$ |
| 5) $ x^2-4 = x+2$ | 16) $ 2x-3 \leq 1$ |
| 6) $ x+9 = 2x-6 $ | 17) $4 x+2 < 2x+10$ |
| 7) $ x+9 = 2x-6$ | 18) $ x^2-4 \leq 5$ |
| 8) $ 5-2x = 3x+6$ | 19) $ 9-x^2 \geq 7$ |
| 9) $\left \frac{x+1}{x-3} \right = 3$ | 20) $3 x+1 \geq x+5$ |
| 10) $\left \frac{1}{x} \right = \left \frac{1}{x} \right $ | 21) $ 2x-1 < x+3 $ |
| 11) $\left \frac{x}{x-1} \right = \frac{4}{x}$ | 22) $ 2x^2-3 \leq 4x+3$ |

Ejercicios propuestos**Inecuaciones con valor absoluto**

Resuelve:

- | | |
|--|--|
| 1) $ x+4 \leq 2x-6$ | 9) $\left x^2-1 +2 \right \leq x^2-1 ^2$ |
| 2) $\left \frac{6-5x}{3+x} \right < \frac{1}{2}$ | 10) $(x-1 + x-2)(1-x - 2-x) \leq x^2-6$ |
| 3) $ x +2 \leq x ^2$ | 11) $\frac{ x ^3+38}{ x +2} \geq 13$ |
| 4) $x^2+ x \leq \frac{15}{4}$ | 12) $\frac{ x-1 +2 - x-1 ^2}{x^2+2} \geq 0$ |
| 5) $ x^4-10 \geq x^2 ^2+8x^2$ | 13) $\frac{ x^2-4 +2x-4}{x^2+4x+8} \leq 0$ |
| 6) $\sqrt{ 2-4-x^2 }(x^2-6x+8) < 0$ | 14) $\frac{ 2x^2+2 -1 +3 -2 }{ x^2+1 } \geq 0$ |
| 7) $ x^2-6x+2 \geq x^2+2 $ | |
| 8) $\left \frac{x-1}{x+1} \right ^2 - 2 \left \frac{x-1}{x+1} \right > 0$ | |

$$\begin{aligned} 15) \quad A &= \{x \in R / |x-2| \geq |2x-3|\} \\ B &= \{x \in R / |x| \geq x\} \end{aligned} \quad \text{Halla } A - B$$

$$\begin{aligned} 16) \quad A &= \{x \in R / |2x-1| \geq x-3\} \\ B &= \{x \in R / |x-5| > |2x+3|\} \end{aligned} \quad \text{Halla } A - B'$$

$$\begin{aligned} 17) \quad A &= \{x \in R / |x-4| \leq 4\} \\ B &= \{x \in R / 1 < |x-3| \leq 12\} \end{aligned} \quad \text{Halla } A \cap B$$

$$\begin{aligned} 18) \quad A &= \{x \in R / |x^2-4| \geq 4-2x\} \\ B &= \{x \in R / |10-x^4| \leq |x^2|^2 + 8x^2\} \end{aligned} \quad \text{Halla } (A \cap B)$$

$$\begin{aligned} A &= \{x \in R / |3-|x-1|| = 2\} \\ 19) \quad B &= \{x \in R / ||x-2|-3| > 0\} \end{aligned} \quad \text{Halla } A - B$$

$$\begin{aligned} 20) \quad A &= \{x \in R / ||x^2-1|-3| = 5\} \\ B &= \{x \in R / |3-x|-x \geq 0\} \end{aligned} \quad \text{Halla } A \cap B$$

$$\begin{aligned} A &= \{x \in R / |x^2+2x| \geq x\} \\ 21) \quad B &= \{x \in R / ||x+2|-3| = 1\} \end{aligned} \quad \text{Halla } A \cup B.$$

Ejercicios Propuestos

1) Halla A-B

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |5 - 2x| - 4 = 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / 3|x-2|^2 - 5|x-2| - 2 = 0\}$$

2) Sean: $C = \{x \in \mathbb{R} / |x+2| \leq |x|^2\}$ $D = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{|||3x^2 + 5| - 1| + 1| - 2|}{|6x^2 + 6|} \geq x\right\}$

Halla $C \cap D$

3) Sean: $A = \left\{x \in \mathbb{R} / 5 - |x - 4| + 3x = -\sqrt{|x|}\right\}$ $B = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + |x| \geq \frac{15}{4}\right\}$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} / \left||x^2 - 1| + 2\right| \leq |x^2 - 1|^2\right\}$$

Halla $(A \cup B) \cap C$

4) Sean: $A = \left\{x \in \mathbb{R} / 1 < |x + 2| \leq 5\right\}$ $B = \left\{x \in \mathbb{R} / (|x - 2| + |x - 1|)(|2 - x| - |1 - x|) \leq x^2\right\}$

Halla $A - B'$

5. Encuentre: $A \cap B$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x-2|^2 - 2|x-2| - 15 > 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / |10 - 3x + x^2| \leq |x^2 + x - 6| \right\}$$

6.- Encuentre: $A' \cup B$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x-4|^2 - 5|x-4| + 6 = 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / |3x^3 - 2x^2 - 7x - 2| > |x^3 + 6x^2 - 9x - 14| \right\}$$

7. Dado los conjuntos: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / ||3 - 2x| - 4| = 9 \right\}$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / 3|x-2|^2 - 5|x-2| - 2 \leq 0 \right\}$$

Halle $A \cap B$

8. Determine $A - B$ en:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x^2 + 2x| \geq x \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / ||x+2| - 3| = 1 \right\}$$

9. Determine $B - A$ en:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / 3||x+1| - 4|^2 - 5||x+1| - 4| - 2 = 0 \right\}$$


$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / |4 - x| - 3x \leq 0 \right\}$$

10. Encuentre: $A \cup B'$


$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x-3|^2 - 3|x-3| - 18 > 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / ||x+2| - 1|^2 - 5||x+2| - 1| - 6 = 0 \right\}$$

Resumen

 Teoremas del Valor Absoluto: Nos sirven para resolver ecuaciones e inecuaciones. Estas son:

1. $\forall x \in \mathfrak{R}$
 - a) $|x| \geq 0$
 - b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|x| = y \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge (x = y \vee x = -y)$
3. $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \vee x = -y)$
4. $|x| \leq y \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge (-y \leq x \leq y)$
 $|x| < y \Leftrightarrow y > 0 \wedge (-y < x < y)$
5. $|x| \geq y \Leftrightarrow (x \geq y \vee x \leq -y)$
 $|x| > y \Leftrightarrow (x > y \vee x < -y)$
6. $|x| < |y| \Leftrightarrow |x|^2 < |y|^2$
 $x^2 < y^2$
 $x^2 - y^2 < 0$

 Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

 <http://www.scribd.com/doc/42489/Valor-Absoluto>

En esta página, hallará información relativa al tema.

 <http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/MATEGENERAL/t4-valorabsoluto/valor-absoluto-julioetall/index.html>

En esta página, obtendrá información relativa al tema.