PROBLEMAS DE VALOR EN LA FRONTERA DE SEGUNDO ORDEN

Profesor del curso:
Richard Acuña Ortega[1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

21/1/2021

Tabla de contenidos

Aproximaciones por diferencias finitas

El desarrollo de una función $y(x)$ en una serie de Taylor centrada en un punto a es

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{(x-a)}{1!} + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + y'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

si definimos $h = x - a$, la ecuación anterior equivale a

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{h}{1!} + y''(a)\frac{h^2}{2!} + y'''(a)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

Para el análisis que sigue, conviene reescribir la última ecuación en dos formas alternativas:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + y'''(x)\frac{h^3}{6} + \cdots ; \qquad (1)$$

y

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} - y'''(x)\frac{h^3}{6} + \cdots ; \qquad (2)$$

si h es pequeña, podemos emitir los términos donde aparezcan $h^4, h^5, \ldots,$ porque esos valores son despreciables. En realidad, si se desprecian todos los términos donde aparezca h^2, y otra potencia mayor, las ecuaciones (1) y (2) dan respectivamente, las siguientes aproximaciones para la primera derivada $y'(x)$:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}[y(x+h) - y(x)] \tag{3}$$

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}[y(x) - y(x-h)] \tag{4}$$

Restamos (1) y (2) para obtener

$$y'(x) \approx \frac{1}{2h}[y(x+h) - y(x-h)] \tag{5}$$

Por otro lado, si no se toman en cuenta los términos donde intervienen h^3 o potencias mayores, al sumar (1) y (2) obtenemos una aproximación a la segunda derivada $y''(x)$:

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}[y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)] \tag{6}$$

los lados derechos de las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) se conocen como cocientes de diferencias. Las expresiones

$$y(x+h) - y(x)\ ;\ \ y(x) - y(x-h)\ ;\ \ y(x+h) - y(x-h)\ ;$$

y

$$y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)$$

se denominan diferentes finitas. En especial se les llama **diferencias hacia adelante** a $y(x+h) - y(x)$, **diferencia hacia atrás** a $y(x) - y(x-h)$ y **diferencias centrales** al par: $y(x+h) - y(x-h)$ y $y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)$. Los resultados representados por (5) y (6) son **aproximaciones por diferencias centrales** para las derivadas y' y y''.

Métodos de diferencias finitas

Veamos ahora un problema lineal de valores en la frontera de segundo orden:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)\ ;\ y(a) = \alpha\ ;\ y(b) = \beta \tag{7}$$

Supongamos que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ representa una partición regular del intervalo $[a, b]$; esto es, que $x_i = a + ih$, donde $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Los puntos

$$x_1 = a + h\ ;\ x_2 = a + 2h\ ;\ \cdots\ ;\ x_{n-1} = a + (n-1)h\ :$$

reciben el nombre de **puntos de malla interior** del intervalo $[a, b]$. Si definimos

$$y_i = y(x_i)\ ;\ P_i = P(x_i)\ ;\ Q_i = Q(x_i) \quad \text{y} \quad f_i = f(x_i)$$

y si y'' y y' en (7) se reemplazan por sus aproximaciones por diferencia central, ecuaciones (5) y (6). Llegamos a

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + P_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + Q_i y_i = f_i$$

o, bien, después de simplificar,

$$\left(1+\frac{h}{2}P_i\right)y_{i+1}+(-2+h^2Q_i)y_i+\left(1-\frac{h}{2}P_i\right)y_{i-1}=h^2f_i \qquad (8)$$

Esta ecuación es una **ecuación de diferencias finitas** y representa una aproximación a la ecuación diferencial. Nos permite aproximar la solución $y(x)$ de (7) en los puntos de malla interiores $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ del intervalo $[a, b]$. Si hacemos que i tome los valores $1, 2, \ldots, n-1$ en la ecuación (8), obtendremos $n-1$ ecuaciones en las $n-1$ incógnitas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Tengamos en cuenta que conocemos y_0 y y_n ya que $y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$ y $y_n = y(x_n) = y(b) = \beta$.

Ejemplo: Con la ecuación (8) de diferencias finitas y $n = 4$ aproxime la solución al problema de valores en la frontera

$$y'' - 4y = 0\ ;\ y(0) = 0\ ;\ y(1) = 5$$

Resolución: Para aplicar (8) identificamos $P(x) = 0$; $Q(x) = -4$; $f(x) = 0$ y $h = \frac{(1-0)}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Entonces, la ecuación de diferencias es:

$$y_{i+1} - 2{,}25y_i + y_{i-1} = 0 \qquad (9)$$

Los puntos interiores son $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}50$; $x_3 = 0{,}75$; la ecuación (9) establece el siguiente sistema para las y_1 , y_2 , y y_3 respectivamente:

$$\begin{aligned} y_2 - 2{,}25y_1 + y_0 &= 0 \\ y_3 - 2{,}25y_2 + y_1 &= 0 \\ y_4 - 2{,}25y_3 + y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que $y_0 = y(x_0) = y(0) = 0$ y $y_4 = y(x_4) = y(1) = 5$, el sistema anterior se transforma en

$$\begin{aligned} -2{,}25y_1 + y_2 + 0y_3 &= 0 \\ y_1 - 2{,}25y_2 + y_3 &= 0 \\ 0y_1 + y_2 - 2{,}25y_3 &= -5 \end{aligned}$$

Al resolverlo, se obtienen $y_1 = 0{,}7256$, $y_2 = 1{,}6327$ y $y_3 = 2{,}9479$. Una solución explícita del problema es:

$$y(x) = \frac{5\,\operatorname{senh} 2x}{\operatorname{senh} 2}$$

por lo que, los valores (redondeados a cuatro decimales) de esta solución es: $y_1 = 0{,}7184$, $y_2 = 1{,}6201$ y $y_3 = 2{,}9354$.

Observación: La exactitud de las aproximaciones en el ejemplo se puede mejorar, con un valor menor de h. En este caso, la contrapartida es que un valor menor de h necesita la solución de un sistema de ecuaciones mayor.

Tabla de contenidos

Introducción

En la presente sección estudiaremos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes, de dos o más variables que son funciones de la misma variable independiente.
Para esto tenemos varios métodos de resolución, siendo uno de ellos el método de eliminación (el cual daremos mayor enfasis), otro es empleando la transformada de Laplace, y otro es el método matricial.

Sistema lineales

Un sistemas de n ecuaciones diferenciales con n funciones desconocidas se llama lineal si esta constituído por las funciones desconocidas y sus derivadas hasta el orden menor o igual a 1.

Ejemplo: La forma normal de un sistema lineal de primer orden de 2 ecuaciones diferenciales con 2 funciones desconocidas es:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) &= a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + b_2(x) \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

donde los coeficientes $a_{11}(x), a_{12}(x), a_{21}(x), a_{22}(x)$ son funciones continuas (pueden ser constantes, el cual va a ser nuestro caso) definidos en un intervalo I .

Las funciones $b_1(x), b_2(x)$ también son contínuas en I; $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son las funciones desconocidas.

Sistemas lineales homogéneo

El sistema lineal (α) se dice que es homogéneo si cada una de las funciones $b_1(x)$ y $b_2(x)$ es nula para todo $x \in I$.
En otro caso se dice que el sistema es no homogéneo.

Solución de un sistema lineal

El sistema (α) tiene solución sobre el intervalo I, si existen dos funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$, las cuales estan definidos y son diferenciales en el intervalo I, que satisfacen a dicho sistema (α) .

Casos de solución inmediata para un sistema homogéneo

Dado el sistema homogéneo con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) \\ y_2'(x) &= a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) \end{aligned} \qquad (\beta)$$

existen dos casos en los cuales la solución puede determinarse inmediatamente. Vemos:

a) Si $a_{12} = a_{21} = 0$, el sistema β toma la forma:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) \\ y_2'(x) &= a_{22}(x)y_2(x) \end{aligned} \qquad (\theta)$$

Como se observa las dos ecuaciones son independientes una de otra, en consecuencia la solución general del sistema esta dado por la solución general de cada ecuación.
La solución general de (θ) es:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1 e^{a_{11}(x)} \\ y_2(x) &= c_2 e^{a_{22}(x)} \end{aligned}$$

b) Si: $a_{12} = 0$, el sistema (β) toma la forma:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x) y_1(x) \\ y_2'(x) &= a_{21}(x) y_1(x) + a_{22}(x) y_2(x) \end{aligned} \qquad (\gamma)$$

Para resolver el problema, hallamos la solución de la primera ecuación. Este resultado lo reemplazamos en la segunda y a continuación se resuelve dicha ecuación (la cual resulta ser una ecuación diferencial de primer orden).
La solución general de (γ) es:

$$y_1(x) = c_1 e^{a_{11}(x)}$$

La solución $y_2(x)$ de la ecuación: $y_2'(x) = c_{21} e^{a_{11}(x)} + a_{22} y_2(x)$

Observación: Este mismo procedimiento se sigue para el caso no homogéneo en (a) y (b).

Ejemplo 1: Resolver el sistema:

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= 5y_1(x)\\
y_2'(x) &= -\frac{1}{2}y_2(x)
\end{aligned}
$$

Resolución: Estamos en el caso (a). Resolviendo cada ecuación por separado, tenemos la solución genaral:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= c_1 e^{5x}\\
y_2(x) &= c_2 e^{-x/2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2: Encontrar la solución del sistema:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 5y_1(x) \\ y_2'(x) &= 3y_1(x) + 2y_2(x) \end{aligned}$$

que satisface: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$.

Resolución: Estamos en el caso (b).

Resolviendo la primera ecuación:

$$y_1'(x) = 5y_1(x) \implies y_1(x) = c_1 e^{5x} . \qquad (1)$$

Condición inicial: $y_1(0) = 1$. En (1): $c_1 = 1$.

Queda $y_1(x) = e^{5x}$. $\qquad$ (2)

Reemplazamos (2) en la segunda ecuación: $y_2'(x) = 3e^{5x} + 2y_2(x)$.

Resolviendo: $y_2'(x) - 2y_2(x) = 3e^{5x}$ (ecuación lineal)

Resolviendo obtenemos: $y_2(x) = e^{5x} + c_2 e^{2x}$ $\qquad$ (3)

Condición inicial: $y_2(0) = 0$. En (3): $0 = 1 + c_2 \implies c_2 = -1$

En (3), queda: $y_2(x) = e^{5x} - e^{2x}$ $\qquad$ (4)

La solución general del sistema dado esta formada por (2) y (4).

Es decir:

$$y_1(x) = e^{5x}$$
$$y_2(x) = e^{5x} - e^{2x}$$

La teoría de las ecuaciones lineales de segundo orden

Para esto vamos a ver que toda ecuación lineal de segundo orden puede transformarse en un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden.

Dada la ecuación lineal de segundo orden:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Hacemoselcambio de variable: $y_1 = y \ , \ y_2 = y'$

Operando tenemos: $y_1' = y' = y_2 \implies y_1' = y_2 \qquad (2)$

También: $y_2' = y'' = -p(x)y' - q(x)y + f(x) = -p(x)y_2 - q(x)y_1 + f(x)$

Es decir: $y_2' = -p(x)y_2 - q(x)y_1 + f(x) \qquad (3)$

El sistema estara formado por (2) y (3) .
Asi:

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= y_2(x) \\
y_2'(x) &= -p(x)y_2(x) - q(x)y_1(x) + f(x)
\end{aligned}
$$

Resolución de sistemas por el método de eliminación

a) Dado el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas en la forma normal:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + b_1(x) \qquad (1) \\ y_2'(x) &= a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + b_2(x) \qquad (2) \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

El método de eliminación consiste en:
Derivar una de las ecuaciones que aparecen en (α), obteniéndose una ecuación de segundo orden.
Eliminar una de las funciones desconocidas y_1 ó y_2 usando las ecuaciones (1) y (2).

Despejar la derivada de la función eliminada usando el paso anterior y reemplazar en la ecuación de segundo orden.
La ecuación resultante es de segundo orden la cual se resuelve obteniéndose una función solución.
La función desconocida eliminada anteriormente se determina a continuación procurando no integrar, para evitar la aparición de "constantes extrañas".

Ejemplo 1: Determínese la solución general del sistema:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 && (1) \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 && (2) \qquad (\alpha) \end{aligned}$$

El sistema está en la forma normal.

Derivamos (2): $y_2'' = y_1' + 3y_2'$ (3)

Eliminamos y_1, para lo cual; (2) - (1): $y_2' - y_1' = 4y_2$ (4)

De (4) despejamos y_1': $y_1' = y_2' - 4y_2$ (5)

(5) en (3): $y_2'' = y_2' - 4y_2 + 3y_2' \implies y_2'' = 4y_2' - 4y_2$

$$\implies y_2'' - 4y_2' + 4y_2 = 0$$

Resolviendo: $y_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

Reemplazamos en (2) y despejamos y_1:

$$y_1 = y_2' - 3y_2 = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} - 3c_1 e^{2x} - 3c_2 x e^{2x}$$

$$\Longrightarrow \; y_1(x) = -c_1 e^{2x} + c_2(1 - x)e^{2x}$$

La solución general es:

$$y_1(x) = -(c_1 - c_2 + c_2 x)e^{2x}$$
$$y_2(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

Ejemplo 2: Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1 + 2y_2 - 4x && (1) \\ y_2'(x) &= 3y_1 + 2y_2 + 5 && (2) \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Resolución: Esta en la forma normal.

Derivamos (1): $y_1''(x) = y_1' + 2y_2' - 4$ (3)

Eliminamos y_2, para lo cual:

(1) - (2): $y_1'(x) - y_2'(x) = -2y_1 - 4x - 5$ (4)

De (4) despejamos y_2' : $y_2'(x) = y_1' + 2y_1 + 4x + 5$ (5)

(5) en (3):

$$y_1'' = y_1' + 2y_1' + 4y_1 + 8x + 10 - 4$$

$$\implies y_1'' = 3y_1' + 4y_1 + 8x + 6 \implies y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 8x + 6 \qquad (6)$$

Resolvemos (6):

Cálculo de y_h.

Ecuación característica: $r^2 - 3r - 4 = 0 \implies r_1 = 4\ ,\ r_2 = -1$

$$\implies y_h = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$$

Cálculo de y_h.

Como

$$f(x) = 8x + 6 \implies y_p = Ax + B$$

Derivamos: $y_p' = A \implies y_p'' = 0$.

En (6):

$$-3A - 4Ax - 4B = 8x + 6 \implies \begin{cases} -4A = 8 \implies A = -2 \\ -3A - 4B = 6 \implies B = 0 \end{cases}$$

$$\implies y_p = -2x$$

La solución general de (6) es:

$$y_1 = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} = 2x \qquad (7)$$

Despejamos y_2 en (1) y reemplazamos y_1:

$$
\begin{aligned}
2y_2 &= y_1' - y_1 + 4x \\
&= 4c_1 e^{4x} - c_2 e^{-x} - 2 - c_1 e^{4x} - c_2 e^{-x} + 2x + 4x \\
&= 3c_1 e^{4x} - 2c_2 e^{-x} + 6x - 2
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad y_2(x) = \frac{3}{2} c_1 e^{4x} - c_2 e^{-x} + 3x - 1 \qquad (8)
$$

De (7) y (8) obtenemos la solución general del sistema:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - 2x \\
y_2 &= \frac{3}{2} c_1 e^{4x} - c_2 e^{-x} + 3x - 1
\end{aligned}
$$

b) Uso del método de eliminación para resolver sistemas de ecuaciones de orden superior.

El método es similar al anterior. Pasos a seguir:

Poner las derivadas como operadores. Es decir $u' = Du$;

$y'' + 3y' + y = (D^2 + 3D + 1)y$, etc.

Tener presente que en general:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$
$$= \underbrace{(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)y}_{L}$$

donde el operador L se considera como un polinomio en D con coeficientes constantes, de la forma:

$$L(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$$

Efectuar las eliminaciones, teniendo presente las leyes algebraicas, hasta llegar a una ecuación diferencial con una función desconocida. Se procede a encontrar su solución:

- Calcular las otras funciones desconocidas, para lo cual si es necesario integramos.

- Determinar el número de constantes que debe haber en la solución (ya que el momento de la integración se pudo haber introducido constantes extrañas).

Para esto se calcula el determinante de los coeficientes de las funciones desconocidas en el sistema original, esto nos arroja un polinomio en D diferente de cero. El grado de este polinomio nos indica el número de constantes que debe haber en la solución general.

- Si hubiera constantes extrañas, de acuerdo a lo anterior, se procede a eliminarlas. Para esto se sustituye la solución encontrada en una de las ecuaciones originales y se procede a buscar relaciones entre las constantes.

- Si hubiera condiciones iniciales proceder a calcular las constantes.

Ejemplo: Encontrar la solución particular del sistema:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = e^t - x$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 1$$

con la condición: $x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ y'(0) = -1$.

Resolución: Ordenamos el sistema y lo escribimos usando operadores:

$$\begin{aligned} D^2x + x + Dy &= e^t \\ Dx + D^2y &= 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} (D^2+1)x + Dy &= e^t \qquad (1) \\ Dx + D^2y &= 1 \qquad (2) \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Eliminamos y para lo cual aplicamos el operador $-D$ a la ecuación (1). El sistema (α) queda:

$$\begin{aligned} -D(D^2+1)x - D^2y &= -De^t \\ Dx + D^2y &= 1 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} -D(D^2+1)x - D^2y &= -e^t \\ Dx + D^2y &= 1 \end{aligned}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$-D(D^2+1)x + Dx = 1 - e^t \implies -D^3x - Dx + Dx = 1 - e^t$$

$$\implies -D^3x - 1 = e^t \implies D^3x = e^t - 1$$

$$\implies \frac{d^3x}{dt^3} = e^t - 1 \qquad (3)$$

La solución de (3) es:

$$x(t) = e^t - \frac{t^3}{6} + c_1\frac{t^2}{2} + c_2t + c_3 \qquad (4)$$

Reemplazamos (4) en la primera ecuación del sistema y procedemos a calcular $y(t)$:

$$e^t - t + c_1 + y' = e^t - e^t + \frac{t^3}{6} - c_1\frac{t^2}{2} - c_2 t - c_3$$

$$\Longrightarrow \quad y' = -e^t + \frac{t^3}{6} - c_1\frac{t^2}{2} - (1 - c_2)t - c_1 - c_3$$

Resolviendo:

$$y(t) = -e^t + \frac{t^4}{24} - c_1\frac{t^3}{6} + (1 - c_2)\frac{t^2}{2} - c_1 t - c_3 t + c_4 \tag{5}$$

Determinación del número de constantes. La ecuación original ordenada equivale a (α). Calculamos el determinante de los coeficientes de (α):

$$\begin{vmatrix} D^2+1 & D \\ D & D^2 \end{vmatrix} = D^2(D^2+1) - D^2 = D^4 \neq 0$$

El polinomio resultante es de grado 4, entonces hay 4 constantes. Nuestra solución esta correcta.

Condiciones iniciales: La solución general esta formada por (4) y (5).

$x(0) = 1$. En (4): $c_3 = 0$. Además derivando y haciendo

$$x'(0) = 2 \implies c_2 = 1 \ , \ y(0) = 0 \ .$$

En (5): $c_4 = 1$. Derivando y haciendo

$$y'(0) = -1 \implies c_1 = 0$$

La solución particular buscada, del sistema, es:

$$x(t) = e^t - \frac{t^3}{6} + t$$
$$y(t) = -e^t + \frac{t^4}{24} + 1$$

Dos grandes tanques, cada uno de los cuales contiene 24 litros de una solución salina, están conectados entre sí mediante unos tubos, como se muestra en la figura 1. El tanque A recibe agua pura a razón de 6 litros/minuto y el líquido sale del tanque B con la misma razón; además, se bombean 8 litros/minuto de líquido del tanque A al tanque B y 2 litros/minuto del tanque B al tanque A. Los líquidos dentro de cada tanque se mantienen bien revueltos, de modo que cada mezcla es homogénea. Si en un principio la solución salina en el tanque A contiene x_0 Kg de sal y la del tanque B contiene inicialmente y_0 kg de sal, determinar la masa de sal en cada tanque en el instante $t > 0$.

Resolución: Observe que el *volumen* delíquido en cada tanque es constante e igual a 24 litros, debido al equilibrio entre las razones de entrada y salida. Por lo tanto, tenemos dos funciones incógnitas de t: la masa de sal $x(t)$ en el tanque A y la masa de sal $y(t)$ en el tanque B. Si centramos nuestra atención en un tanque a la vez, podemos deducir dos ecuaciones que relacionen estas incógnitas. Como el sistema es alimentado con agua pura, esperamos que el contenido de sal de cada tanque a cero cuando $t \to +\infty$.

Aplicación

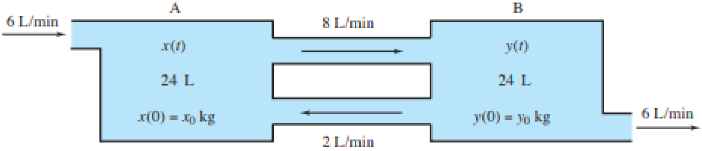

Figura 1: Tanques interconectados

Para formular las ecuaciones de este sistema, igualamos la razón de cambio de sal en cada tanque con la razón *neta* con la que se transfiere la sal a ese tanque. La *concentración* de sal en el tanque A es $[x(t)/24]$[kg/litro], de modo que el tubo superior saca sal del tanque A a razón de $8x/24$[kg/minuto]; de manera similar, el tubo inferior lleva sal al tanque A a razón de $[2y/24]$[kg/minuto] (la concentración de sal en el tanque B es $[y/24]$[kg/litro]). El flujo de agua pura, por supuesto no transfiere sal (simplemente mantiene el volumen del tanque A en litros). Por nuestra premisa,

$$\frac{dx}{dt} = \text{razón de entrada - razón de salida} ,$$

de modo que la razón de cambio de la masa de sal en el tanque A es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{24}y - \frac{8}{24}x = \frac{1}{12}y - \frac{1}{3}x .$$

La razón de cambio de sal en el tanque B se determina mediante los mismos tubos de conexión y por el tubo de drenado, que saca $[6y/24]$[kg/minuto]:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{24}x - \frac{2}{24}y - \frac{6}{24}y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y .$$

Así, los tanques interconectados quedan descritos mediante un *sistema* de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \,, \\ y' &= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \,. \end{aligned} \qquad (1)$$

Aunque ambas incógnitas $x(t)$ y $y(t)$ aparecen en cada una de las ecuaciones (1) (están ”acopladas”), la estructura es tan transparente que podemos obtener una ecuación sólo en términos de y, despejando x en la segunda ecuación,

$$x = 3y' + y \,, \qquad (2)$$

y sustituyendo (2) en la primera ecuación para eliminar x:

$$(3y' + y)' = -\frac{1}{3}(3y' + y) + \frac{1}{12}y \,,$$

$$\Longrightarrow \; 3y'' + y' = -y' - \frac{1}{3}y + \frac{1}{12}y \,,$$

o

$$3y'' + 2y' + \frac{1}{4}y = 0 \,.$$

Esta última ecuación, que es lineal con coeficientes constantes, se resuelve fácilmente mediante los métodos de las secciones anteriores, como la ecuación auxiliar

$$3r^2 + 2r + \frac{1}{4} = 0$$

tiene raíces $-1/2, \; -1/6$, una solución general es

$$y(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t/6}\,. \qquad (3)$$

Una vez determinada y, usamos la ecuación (2) para deducir una fórmula para x:

$$x(t) = 3\left(-\frac{c_1}{2}e^{-t/2} - \frac{c_2}{6}e^{-t/6}\right) + c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t/6}$$
$$= -\frac{1}{2}c_1 e^{-t/2} + \frac{1}{2}c_2 e^{-t/6} \,. \qquad (4)$$

Las fórmulas (3) y (4) contienen dos parámetros indeterminados, c_1 y c_2, que podemos ajustar para cumplir con las condiciones iniciales dadas:

$$x(0) = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = x_0 \,, \quad y(0) = c_1 + c_2 = y_0 \,,$$

o

$$c_1 = \frac{y_0 - 2x_0}{2} \,, \quad c_2 = \frac{y_0 + 2x_0}{2} \,.$$

Así, las masas de sal en los tanques A y B en el instante t son, respectivamente,

$$x(t) = -\left(\frac{y_0 - 2x_0}{4}\right) e^{-t/2} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{4}\right) e^{-t/6} \,,$$
$$y(t) = -\left(\frac{y_0 - 2x_0}{2}\right) e^{-t/2} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{2}\right) e^{-t/6} \,.$$