Principio de superposición de las Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes

Profesor del curso:
Richard Acuña Ortega[1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

6/1/2021

Tabla de contenidos

El siguiente teorema describe el principio de superposición, una observación sencilla que sin embargo, dota al conjunto solución de nuestras ecuaciones de una estructura poderosa. Extiende la aplicabilidad del método de coeficientes indeterminados y nos permite resolver problemas con valores iniciales para ecuaciones diferenciales no homogéneas.

Teorema 1 (Principio de superposición)

Sea y_1 una solución de la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = f_1(t) \ ,$$

y sea y_2 una solución de

$$ay'' + by' + cy = f_2(t) \ .$$

Entonces, para cualesquiera constantes c_1 y c_2, la función $c_1 y_1 + c_2 y_2$ es una solución de la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = c_1 f_1(t) + c_2 f(t)$$

Demostración: Esto es directo; al sustituir y reordenar tenemos que

$$
\begin{aligned}
&a(c_1y_1 + c_2y_2)'' + b(c_1y_1 + c_2y_2)' + c(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) \\
&= c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\ .
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Determinar una solución particular de

1. $y'' + 3y' + 2y = 3t + 10e^{3t}$
2. $y'' + 3y' + 2y = -9t + 20e^{3t}$

Resolución: Se puede probar que $y(t) = \dfrac{3t}{2} - \dfrac{9}{4}$ es una solución de $y'' + 3y' + 2y = 3t$, y $y_2(t) = \dfrac{e^{3t}}{2}$ resuelve $y'' + 3y' + 2y = 10e^{3t}$. Así, por superposición, $y_1 + y_2 = \dfrac{3t}{2} - \dfrac{9}{4} + \dfrac{e^{3t}}{2}$ resuelve la ecuación 1.

El lado derecho de 2. es igual a menos tres veces $(3t)$ más dos veces $(10e^{3t})$. Por tanto, esta misma combinación de y_1 y y_2 resuelve 2.:

$$\begin{aligned} y(t) = -3y_1 + 2y_2 &= -3\left(\frac{3t}{2} - \frac{9}{4}\right) + 2\left(\frac{e^{3t}}{2}\right) \\ &= -\frac{9t}{2} + \frac{27}{4} + e^{3t} \end{aligned}$$

Si consideramos una solución particular y_p de una ecuación no homogénea como

$$ay'' + by' + cy = f(t) \tag{1}$$

y la agregamos a una solución general $c_1 y_1 + c_2 y_2$ de la ecuación homogénea asociada a (1)

$$ay'' + by' + cy = 0\ , \tag{2}$$

la suma

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{3}$$

es, de acuerdo con el principio de superposición, de nuevo una solución de (1):

$$a(y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + b(y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2)' + c(y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

$$= f(t) + 0 + 0 = f(t) \; .$$

Como (3) contiene dos parámetros, es de esperar que sea posible elegir c_1 y c_2 para que satisfagan condiciones iniciales arbitrarias. Es fácil verificar que esto ocurre.

Teorema 2 (Existencia y unicidad: caso no homogéneo)

Para cualesquiera números reales a, b, c, t_0, Y_0 y Y_1, supóngase que $y_p(t)$ es una solución particular de (1) en un intervalo I que contiene a t_0 y que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada (2) en I. Entonces existe una única solución en I al problema con valores iniciales

$$ay'' + by' + cy = f(t)\ , \tag{4}$$
$$y(t_0) = Y_0\ ,\ y'(t_0) = Y_1\ ,$$

y está dada por (3), para la elección adecuada de las constantes c_1, c_2.

Como consecuencia del teorema 2 se tiene que $y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$ es una **solución general** de la ecuación no homogénea (1), ya que *cualquier* solución $y_g(t)$ se puede expresar de esta forma. (**Demostración:** Como simplemente elegimos c_1 y c_2 de modo que $y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$ concuerde con el valor y la derivada de y_g en *cualquier punto*; por unicidad, $y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$ y y_g deben ser la misma función).

Ejemplo: Dado que $y_p(t) = t^2$ es una solución particular de

$$y'' - y = 2 - t^2 \ ,$$

encontrar una solución general y una solución que satisfaga $y(0) = 1, \ y'(0) = 0$.

Resolución: La ecuación homogénea correspondiente

$$y'' - y = 0 \ ,$$

tiene la ecuación auxiliar asociada $r^2 - 1 = 0$. Como $r = \pm 1$ son las raíces de esta ecuación, una solución general de la ecuación no homogénea, veamos que una solución general es

$$y(t) = t^2 + c_1 e^t + c_2 e^{-t} \ .$$

Para cumplir las condiciones iniciales, sea

$$y(0) = 0^2 + c_1 e^0 + c_2 e^{-0} = 1 \ ,$$

$$y'(0) = 2 \times 0 + c_1 e^0 - c_2^{-0} = 0 \ ,$$

lo que da $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. La respuesta es

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = t^2 + \cosh t \ .$$

Ejemplo: Un sistema masa-resorte es controlado por una fuerza externa sinusoidal ($5\,\mathrm{sen}\, t + 5\cos t$). La masa es igual a 1, la constante de resorte es 2 y el coeficiente de amortiguamiento es 2, de modo que esto implica que el movimiento queda descrito mediante la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + 2y = 5\,\mathrm{sen}\, t + 5\cos t\ .$$

Si la masa se coloca inicialmente en $y(0) = 1$, con una velocidad $y'(0) = 2$, determine su ecuación de movimiento.

Resolución: La ecuación homogénea asociada $y'' + 2y' + 2y = 0$ tiene que las raíces de la ecuación auxiliar son $-1 \pm i$, lo que conduce a una solución general $c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t$.
El método de coeficientes indeterminados dice que debemos tratar de hallar una solución particular de la forma $A \operatorname{sen} t + B \cos t$ para la primera no homogeneidad $5 \operatorname{sen} t$:

$$y_p = A \operatorname{sen} t + B \cos t \ ,$$

$$y_p' = A \cos t - B \operatorname{sen} t \ ,$$

$$y_p'' = -A \operatorname{sen} t - B \cos t \ ;$$

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' + 2y_p &= (-A - 2B + 2A)\operatorname{sen} t + (-B + 2A + 2B)\cos t \\ &= 5\operatorname{sen} t\ . \end{aligned}$$

Al igualar coeficientes se requiere que $A = 1$, $B = -2$, de modo que $y_p = \operatorname{sen} t - 2\cos t$.
La segunda no homogeneidad $5\cos t$ pide la forma idéntica para y_p y conduce a $(-A - 2B + 2A)\operatorname{sen} t + (-B + 2A + 2B)\cos t = 5\cos t$, o $A = 2, B = 1$. Por tanto, $y_p = 2\operatorname{sen} t + \cos t$.

Por el principio de superposición, una solución general de la ecuación dada está dada por la suma

$$y = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t - 2 \cos t + 2 \operatorname{sen} t + \cos t$$

$$= c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t + 3 \operatorname{sen} t - \cos t \ .$$

Las condiciones iniciales son

$$y(0) = 1 = c_1 e^{0} \cos 0 + c_2 e^{-0} \operatorname{sen} 0 + 3 \operatorname{sen} 0 - \cos 0 = c_1 - 1 \ ,$$

$$y'(0) = 2 = c_1 [-e^{-t} \cos t - e^{-t} \operatorname{sen} t]_{t=0}$$

$$+ c_2 [-e^{-t} \operatorname{sen} t + e^{-t} \cos t]_{t=0} + 3 \cos 0 + \operatorname{sen} 0$$

$$= -c_1 + c_2 + 3 \ ,$$

como se requiere que $c_1 = 2, c_2 = 1$, tenemos que

$$y(t) = 2e^{-t}\cos t + e^{-t}\operatorname{sen} t + 3\operatorname{sen} t - \cos t \ .$$

Ejemplo: Determinar una solución particular de

$$y'' - y = 8te^t + 2e^t \ .$$

Resolución: Es fácil ver que una solución general de la ecuación homogénea asociada es $c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. Así, una solución particular correspondiente a la no homogeneidad $8te^t$ tiene la forma $t(A_1 t + A_0)e^t$, mientras que para corresponder a $2e^t$ se necesita la forma $A_0 te^t$.

Por tanto, podemos concordar con ambas con la primera forma:

$$
\begin{aligned}
y_p &= t(A_1 t + A_0)e^t = (A_1 t^2 + A_0 t)e^t \ , \\
y_p' &= (A_1 t^2 + A_0 t)e^t + (2A_1 t + A_0)e^t = [A_1 t^2 + (2A_1 + A_0)t + A_0]e^t \ , \\
y_p'' &= [2A_1 t + (2A_1 + A_0)]e^t + [A_1 t + (2A_1 + A_0)t + A_0]e^t \\
&= [A_1 t^2 + (4A_1 + A_0)t + (2A_1 + 2A_0)]e^t \ .
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
y_p'' - y_p &= [4A_1 t + (2A_1 + 2A_0)]e^t \\
&= 8te^t + 2e^t \ ,
\end{aligned}
$$

lo que da $A_1 = 2, A_0 = -1$, de modo que $y_p = (2t^2 - t)e^t$.

Generalización este procedimiento modificando el método de coeficientes indeterminados como sigue.

Método de coeficientes indeterminados (revisado)

Para determinar una solución particular de la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = P_m(t)e^{rt} ,$$

donde $P_m(t)$ es un polinomio de grado m, usamos la forma

$$y_p(t) = t^s(A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt} ; \qquad (1)$$

si r no es raíz de la ecuación auxiliar asociada, hacemos $s = 0$; si r es una raíz simple de la ecuación auxiliar asociada, hacemos $s = 1$; y si r es una raíz doble de la ecuación auxiliar asociada, hacemos $s = 2$.

Para determinar una solución particular de la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + Q_n(t)e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\ ,$$

donde $P_m(t)$ es un polinomio de grado m y $Q_n(t)$ es un polinomio de grado n, usamos la forma

$$y_p(t) = t^s(A_k t^k + \cdots + A_1 t + A_0)e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$+t^s(B_k t^k + \cdots + B_1 t + B_0)e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\ , \qquad (2)$$

donde k es el máximo de m y n. Si $\alpha + i\beta$ no es raíz de la ecuación auxiliar asociada, hacemos $s = 0$; si $\alpha + i\beta$ es raíz de la ecuación auxiliar asociada, hacemos $s = 1$.

Ejemplo: Escriba la forma de una solución particular de la ecuación

$$y'' + 2y' + 2y = 5e^{-t}\operatorname{sen} t + 5t^3 e^{-t}\cos t \ .$$

Resolución: Las raíces de la ecuación homogénea asociada $y'' + 2y' + 2y = 0$ es $-1 \pm i$. La aplicación (2) indica la forma

$$y_p(t) = t(A_3 t^3 + A_2 t^2 + A_1 t + A_0)e^{-t}\cos t$$

$$+t(B_3 t^3 + B_2 t^2 + B_1 t + B_0)e^{-t}\operatorname{sen} t \ .$$

Tabla de contenidos

Teorema 3 (Teorema de Abel)

Si $y_1(x)$ es una solución no trivial de la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (1)$$

en un intervalo en que $a_2(x)$ no se anula, entonces

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int [a_1(x)/a_2(x)]dx}}{[y_1(x)]^2}dx \qquad (2)$$

es una solución de la ecuación en cualquier subintervalo de I en que $y_1(x) \neq 0$. Más aún, $y_2(x)$ es linealmente independiente de $y_1(x)$, y la solución general de (1) es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \ ,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo: La función $y_1(x) = 1$ es una solución de la ecuación de segundo orden

$$y'' + (\tan x - 2\cot x)y' = 0 \qquad (3)$$

en cualquier intervalo en que $\tan x$ y $\cot x$ están definidas. Aplicando (2) se obtiene una segunda solución

$$\begin{aligned} y_2(x) &= (1)\int \frac{e^{-\int(\tan x - 2\cot x)dx}}{[1]^2}dx \\ &= \int e^{\ln(\cos x.\,\operatorname{sen}^2 x)}dx \\ &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \; dx \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x\ . \end{aligned}$$

Así, la solución general de (3) es

$$y(x) = c_1 + c_2 \operatorname{sen}^3(x) \ .$$

Ejemplo: Por sustitución directa, se encuentra que $y_1(x) = 1$ es una solución de la ecuación de segundo orden

$$xy'' + y' = 0 \qquad (4)$$

en consecuencia, una segunda solución linealmente independiente puede encontrarse empleando (2), se obtiene

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= (1)\int \frac{e^{-\int (1/x)dx}}{[1]^2} dx \\
&= \int e^{-\ln x} dx \\
&= \int x^{-1}\, dx \\
&= \ln x \,.
\end{aligned}
$$

Finalmente la solución general de (4) es

$$
y(x) = c_1 + c_2 \ln x \,.
$$