SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES

Profesor del curso:
Richard Acuña Ortega[1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

13/1/2021

Tabla de contenidos

Introducción: La aproximación polinomial de Taylor

Tal vez la mejor herramienta para aproximar numéricamente una función $f(x)$ cerca de un punto particular x_0 sea el **polinomio de Taylor**. La fórmula para el polinomio de Taylor de grado n con centro en x_0, el cual aproxima una función $f(x)$ que posee n derivadas en x_0, es

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\
&\quad + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \; . \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Los valores de este polinomio y de sus derivadas en x_0 concuerdan con los de f y sus derivadas:

$$
\begin{aligned}
p_n(x_0) &= f(x_0)\ , \\
p_n'(x_0) &= f'(x_0)\ , \\
p_n''(x_0) &= f''(x_0)\ , \\
&\vdots \\
p_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)\ .
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, los primeros cuatro polinomios de Taylor para e^x, en torno de $x_0 = 0$, son

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1\ , \\ p_1(x) &= 1 + x\ , \\ p_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2}\ , \\ p_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Su eficacia para aproximar la función exponencial se muestra en la figura 1.

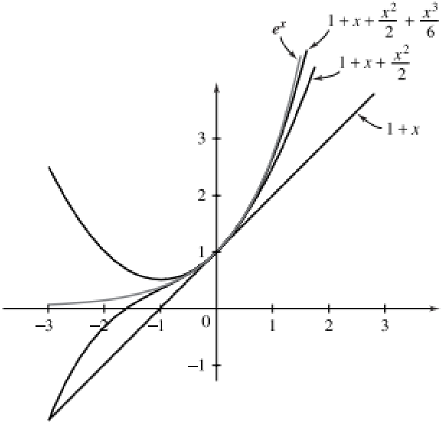

Figura 1: Gráficas de polinomios de Taylor para e^x

El polinomio de Taylor de grado n difiere del polinomio del siguiente grado inferior sólo por la suma de un término:

$$p_n(x) = p_{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ ,$$

de modo que un listado como (2) es redundante; se puede leer $p_0(x), p_1(x)$ y $p_2(x)$ de una fórmula para $p_3(x)$. En efecto, si f es infinitamente diferenciable, $p_n(x)$ es justamente la $(n+1)$-ésima suma parcial de la **serie de Taylor**

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \ . \qquad (3)$$

Ejemplo 1: Determinar los polinomios de Taylor de cuarto orden correspondiente a las funciones e^x, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en $x_0 = 2$.

Resolución: Para $f(x) = e^x$, tenemos que $f^{(j)}(2) = e^2$ para cada $j = 0, 1, \cdots$, de modo que (1) implica

$$e^x \approx e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \frac{e^2}{4!}(x-2)^4 \ .$$

Para $f(x) = \cos x$, tenemos que $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, de modo que

$$\cos x \approx \cos 2 - (\operatorname{sen} 2)(x-2) - \frac{\cos 2}{2!}(x-2)^2 + \frac{\operatorname{sen} 2}{3!}(x-2)^3 + \frac{\cos 2}{4!}(x-2)^4 \, .$$

De manera análoga veamos que

$$\operatorname{sen} x \approx \operatorname{sen} 2 - (\cos 2)(x-2) - \frac{\operatorname{sen} 2}{2!}(x-2)^2 + \frac{\cos 2}{3!}(x-2)^3 + \frac{\operatorname{sen} 2}{4!}(x-2)^4 \, .$$

Para relacionar este esquema de aproximación con nuestro tema (la solución de ecuaciones diferenciales), alteraremos nuestro punto de vista; consideramos una ecuación diferencial *no* como una ”condición por satisfacer”, sino como una receta para construir los polinomios de Taylor de sus soluciones. Además de proporcionar un método muy general para calcular soluciones aproximadas y precisas de la ecuación cerca de cualquier punto ”de partida” particular, esta interpretación nos da una mejor idea del papel de las condiciones iniciales. El siguiente ejemplo ilustra el método.

Ejemplo 2: Determinar los primeros polinomos de Taylor que aproximan la solución en torno de $x_0 = 0$ del problema con valores iniciales

$$y'' = 3y' + x^{7/3}y \ , \quad y(0) = 10 \ , \ y'(0) = 5 \ .$$

Resolución: Para construir

$$p_n(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n \ ,$$

necesitamos los valores de $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$, etc. Los dos primeros vienen dados por las condiciones iniciales.

El valor de $y''(0)$ se puede deducir de la propia ecuación diferencial y los valores de las derivadas de orden menor:

$$y''(0) = 3y'(0) + 0^{7/3}y(0) = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 10 = 15 \ .$$

Como $y'' = 3y' + x^{7/3}y$ y se cumple en cierto intervalo en torno de $x_0 = 0$, podemos derivar ambos lados para deducir

$$\begin{aligned} y''' &= 3y'' + \frac{7}{3}x^{4/3}y + x^{7/3}y' \ , \\ y^{(4)} &= 3y''' + \frac{28}{9}x^{1/3}y + \frac{14}{3}x^{4/3}y' + x^{7/3}y'' \ , \\ y^{(5)} &= 3y^{(4)} + \frac{28}{27}x^{-2/3}y + (\cdots) \ . \end{aligned}$$

Así, al sustituir $x = 0$ deducimos que

$$y'''(0) = 3 \cdot 15 + \frac{7}{3} \cdot 0^{4/3} \cdot 10 + 0^{7/3} \cdot 5 = 45 \,,$$

$$y^{(4)}(0) = 3 \cdot 45 + \frac{28}{9} \cdot 0^{1/3} \cdot 10 + \frac{14}{3} \cdot 0^{4/3} \cdot 5 + 0^{7/3} \cdot 15 = 135 \,,$$

$$y^{(5)}(0) = 3 \cdot 135 + \frac{28}{27} \cdot 0^{-2/3} \cdot 10 + (\cdots) \quad !\textit{no existe}!$$

En consecuencia, sólo podemos construir los polinomios de Taylor de grado 0 a 4 para la solución, y $p_4(x)$ está dado por

$$p_4(x) = 10 + 5x + \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{2}x^3 + \frac{45}{8}x^4 \,.$$

El siguiente ejemplo demuestra la aplicación del método de polinomios de Taylor a una ecuación *no lineal*.

Ejemplo 3: Determine el polinomio de Taylor de grado 3 para la solución al problema con valores iniciales

$$y' = \frac{1}{x+y+1}\,, \quad y(0) = 0\,. \tag{4}$$

Resolución: Como $y(0) = 0$, sustituimos $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación (4) y vemos que $y'(0) = 1$. Para determinar $y''(0)$, derivamos ambos lados de la ecuación en (4) con respecto de x, obteniendo así una expresión para $y''(x)$ en términos de $x, y(x)$ y $y'(x)$; a saber,

$$y''(x) = (-1)[x + y(x) + 1]^{-2}[1 + y'(x)] \,. \tag{5}$$

Sustituimos $x = 0, y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$ en (5) para obtener

$$y''(0) = (-1)(1)^{-2}(1 + 1) = -2 \,.$$

De manera similar, derivando (5) y sustituyendo,

$$y^{(3)}(x) = 2[x + y(x) + 1]^{-3}[1 + y'(x)]^2 - [x + y(x) + 1]^{-2}y''(x) \,,$$
$$y^{(3)}(0) = 2(1)^{-3}(1 + 1)^2 - (1)^{-2}(-2) = 10 \,.$$

Así, el polinomio de Taylor de grado 3 es

$$p_3(x) = x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 \ .$$

Tabla de contenidos

Series de potencias y funciones analíticas

Con frecuencia, las ecuaciones diferenciales estudiadas en secciones anteriores poseían soluciones $y(x)$ que se pueden escribir en términos de funciones elementales como polinomios, exponenciales, senos y cosenos. Sin embargo, hay muchas ecuaciones importantes cuyas soluciones no se pueden expresar de tal forma. Sin embargo, el esquema de aproximación mediante polinomios de Taylor de la sección anterior sugiere otra posibilidad. Suponga que la ecuación diferencial (y las condiciones iniciales) permiten el cálculo de *cada* derivada $y^{(n)}$ en el punto de desarrollo x_0.

¿Existen condiciones que garanticen que la sucesión de polinomios de Taylor *converja* a la solución $y(x)$ cuando el grado de los polinomios tiende a infinito,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{y^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j = y(x) \ ?$$

En otras palabras, ¿cuándo podemos estar seguros que una solución de una ecuación diferencial se representa mediante su *serie de Taylor*? Como veremos, la respuesta es bastante favorables y presenta una nueva y poderosa técnica para resolver ecuaciones, *series de potencias*.

Series de potencias

Una **series de potencias** en torno del punto x_0 es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \, , \tag{1}$$

donde x es una variable y las a_n son constantes. Decimos que (1) **converge** en el punto $x = c$ si la serie infinita (de números reales) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(c-x_0)^n$ converge; si el límite de las sumas parciales

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(c - x_0)^n \ ,$$

existe (como números finito). Si este límite no existe, decimos que la serie de potencias **diverge** en $x = c$. Observe que (1) converge en $x = x_0$, pues

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - x_0)^n = a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0 \ .$$

¿Pero qué hay de la convergencia para otros valores de x? Como afirma el siguiente teorema 1, una serie de potencias de la forma (1) converge para todos los valores de x en algún ”intervalo” con centro en x_0 y diverge para x fuera de ese intervalo. Además, en los puntos interiores de este intervalo, la serie de potencias **converge absolutamente**, en el sentido de que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$ converge. (Recuerde que la convergencia absoluta de una serie implícita la convergencia ”ordinaria” de la misma).

Teorema 1 (Radio de convergencia)

Para cada serie de potencias de la forma (1) existe un número $\rho (0 \leq \rho \leq \infty)$, llamado **radio de convergencia** de la serie de potencias, tal que (1) converge absolutamente para $|x - x_0| < \rho$ y diverge para $|x - x_0| > \rho$. (Véase la figura 2).

Si la serie (1) converge para todo valor de x, entonces $\rho = \infty$. Si la serie (1) sólo converge en x_0, entonces $\rho = 0$.

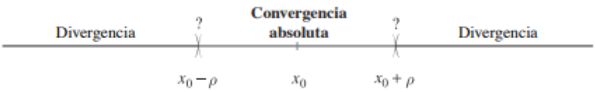

Figura 2: Intervalo de convergencia

Observe que el teorema 1 resuelve la custión de convergencia excepto en los extremos $x_0 \pm \rho$. Así, estos dos puntos requieren un análisis por separado. Para determinar el radio de convergencia ρ, un método que con frecuencia se puede aplicar fácilmente es el criterio del cociente.

Teorema 2 (Criterio del cociente)

Si para n grande, los coeficientes a_n no se anulan y satisfacen

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \quad (0 \leq L \leq \infty)\ ,$$

entonces el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es $\rho = 1/L$, donde $\rho = \infty$ si $L = 0$ y $\rho = 0$ si $L = \infty$.

Obsetrvación: Debemos advertir al lector que si el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ no tiene un límite, entonces hay que usar otros métodos distintos al criterio del cociente (por ejemplo, el criterio de la raíz) para determinar ρ. En particular, si una infinidad de a_n se anulan, entonces no podemos aplicar el criterio del cociente directamente.

Ejemplo 1: Determinar el conjunto de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}(x-3)^n \,.$$

Resolución: Como $a_n = (-2)^n/(n+1)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}(n+1)}{(-2)^n(n+2)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(n+2)} = 2 = L \,.
\end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, el radio de convergencia es $\rho = 1/2$. Por tanto, la serie (2) converge absolutamente para $|x - 3| < 1/2$ y diverge cuando $|x - 3| > 1/2$. Sólo resta determinar qué ocurre cuando $|x - 3| = 1/2$, es decir, cuando $x = 5/2$ y $x = 7/2$.
Al hacer $x = 5/2$, la serie (2) se convierte en la serie armónica $\sum_{n=0}^{\infty} a(n+1)^{-1}$, que sabemos diverge. Cuando $x = 7/2$, la serie (2) se convierte en una serie armónica **alternante**, que sabemos converge. Así, la serie de potencias converge para cada x en el intervalo semiabierto $< 5/2, 7/2]$; fuera de este intervalo diverge.

Funciones analíticas

No todas las funciones se pueden expresar como series de potencias; aquellas funciones que cumplen esta restricción se llaman **analíticas**.

Definición 1 (Función analítica)

Una función f es **analítica en** x_0 si en un intervalo abierto en torno de x_0, esta función es la suma de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ con un radio de convergencia positivo.

Por ejemplo, una función polinomial $b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ es analítica para cada x_0, pues siempre podemos escribirla en la forma $a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$. Una función racional $P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios sin factores comunes, es una función analítica excepto en los puntos x_0 para los que $Q(x_0) = 0$. Como recordará las funciones elementales e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son analíticas para cada x, mientras que $\ln x$ es analítica para $x > 0$.

Método de series de potencias

Este método es más fácil de utilizar que el método con series de Taylor analizado en la sección anterior y a veces proporciona una expresión agradable para el término general en el desarrollo en series de potencias. El hecho de conocer la forma del término general también nos permite verificar el radio de convergencia de la serie de potencias.

Muchas ecuaciones lineales de segundo orden importantes

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1}$$

tienen al menos una solución particular que puede expresarse como serie de potencias

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{2}$$

donde $a_m \in \mathbb{R}$.

El método de series de potencias puede usarse cuando $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios o cuando pueden desarrollarse en series de potencias de x .

Definición 2 (Puntos ordinarios y singulares)

Un punto x_0 es un **punto singular ordinario** de la ecuación (1) si p, q y r son analíticas en x_0. Si x_0 no es un punto ordinario, se dice que es un **punto singular** de la ecuación.

Ejemplo 1: Determinar todos los puntos singulares de

$$xy'' + x(1-x)^{-1}y' + (\operatorname{sen} x)y = 0 \,.$$

Resolución: Al dividir la ecuación entre x vemos que

$$p(x) = \frac{x}{x(1-x)} \,, \quad q(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \,.$$

Los puntos singulares son aquellos donde $p(x)$ o $q(x)$ dejan de ser analíticas. Observe que $p(x)$ y $q(x)$ son cocientes de funciones que son analíticas en todo punto. Por tanto, $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas excepto, *tal vez*, cuando sus denominadores se anulan.

Para $p(x)$, esto ocurre en $x = 0$ y $x = 1$. Pero como podemos cancelar una x en el numerador y el denominador de $p(x)$, es decir,

$$p(x) = \frac{x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x} \,,$$

vemos que en realidad $p(x)$ es analítica en $x = 0$. Por lo tanto, $p(x)$ es analítica excepto en $x = 1$. Para $q(x)$, el denominador se anula en $x = 0$. Como en el caso de $p(x)$, este cero es removible, pues $q(x)$ tiene el desarrollo en serie de potencias

$$q(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots .$$

Así, $q(x)$ es analítica en todo punto. En consecuencia, el único punto singular de la ecuación dada es $x = 1$.

Ejemplo 2: Use el método de series de potencias para resolver la ecuación

$$y' + y = 0$$

Resolución: Sea la solución:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

entonces

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m x^{m-1}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)a_{m+1}x^m$$

Así:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} [(m+1)a_{m+1} + a_m]x^m$$

entonces:

$$(a_1 + a_0) + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + a_2)x^2 + \cdots = 0$$

$$\Longrightarrow a_1 = -a_0 \; ; \; a_2 = -\frac{1}{2}a_1 \Longrightarrow a_2 = \frac{1}{2!}a_0 \; ; \; a_3 = -\frac{1}{3}a_2$$

$$\Longrightarrow a_3 = -\frac{1}{2! \times 3}a_0 = -\frac{1}{3!}a_0$$

también: $a_m = \dfrac{(-1)^m}{m!}a_0$, luego:

$$y = a_0 - a_0 x + \frac{1}{2!}a_0 x^2 - \frac{1}{3!}a_0 x^3 + \cdots = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} x^m$$

Observación: Si resolvemos la ecuación dada, la solución es: $y = ce^{-x}$, y a la función $f(x) = e^{-x}$ le desarrollamos la serie de Maclaurin, tenemos:

$$e^{-x} = f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\approx 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}x^m$$

Ejemplo 3: Use elmétodo de series de potencias para resolver la ecuación:

$$y'' + y = 0$$

Resolución: Tenemos

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m$$

entonces,

$$y'' + y = \sum_{m=0}^{\infty} [(m+2)(m+1)a_{m+2} + a_m]x^m$$

de esto, $(m+2)(m+1)a_{m+2} + a_m = 0$

Así,

$$
\begin{aligned}
m = 0 : a_2 &= -\frac{a_0}{1 \times 2} = -\frac{a_0}{2!} \\
m = 1 : a_3 &= -\frac{a_1}{2 \times 3} = -\frac{a_1}{3!} \\
m = 2 : a_4 &= -\frac{a_2}{3 \times 4} = \frac{a_0}{2! \times 3 \times 4} = \frac{a_0}{4!} \\
m = 3 : a_5 &= -\frac{a_3}{4 \times 5} = \frac{a_1}{3! \times 4 \times 5} = \frac{a_1}{5!}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
y = \left[a_0 - \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{4!}x^4 - \cdots\right] + \left[a_1 x - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_1}{5!}x^5 - \cdots\right]
$$

finalmente

$$y = a_0\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right]$$

Observación: La solución exacta es: $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ donde

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$