MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER EDO CON CONDICIONES INICIALES

Profesor del curso:
Richard Acuña Ortega[1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

14/1/2021

Tabla de contenidos

1 Introducción

2 Métodos de un solo paso

3 Mejoras del método de Euler

Introducción

Un problema de escuación diferencial ordinaria con valor inicial de primer orden se define como

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ , \quad y(x_0) = y_0 \ . \tag{1}$$

donde $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la solución que se desea encontrar, conocido su valor en un punto $y(x_0) = y_0$ denominado *valor inicial*. En teoría la solución se puede encontrar hacia adelante o hacia atrás del punto inicial.

Tabla de contenidos

1 Introducción

2 Métodos de un solo paso
- Método de Euler

3 Mejoras del método de Euler

Métodos de un solo paso

Los métodos de un sólo paso se basan en que, a partir de un valor inicial y_0, se encuentran valores consecutivos $y_1, y_2, \ldots,$ tales que cada valor y_{n+1} se obtiene del inmediatamente anterior y_n, donde $x_{n+1} = x_n + h$, siendo h el *tamaño de paso*. Se hace un avance o integración en el paso a la vez, pudiéndose utilizar un tamaño del paso h igual o diferente en cada avance. Si se desea un avance hacia atrás basta con escoger un valor negativo para h (figura 1).

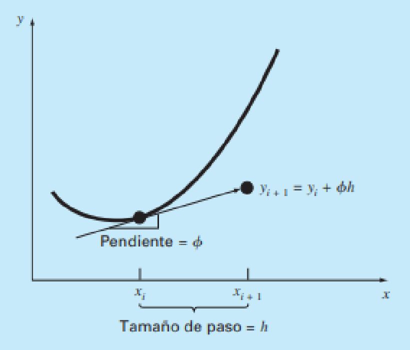

Figura 1: Ilustración gráfica del método de un paso

Método de Euler

El método de Euler es el más sencillo de todos los métodos de un solo paso. Su fórmula algorítmica se basa en hallar una pendiente de recta apropiada para saltar cada paso.

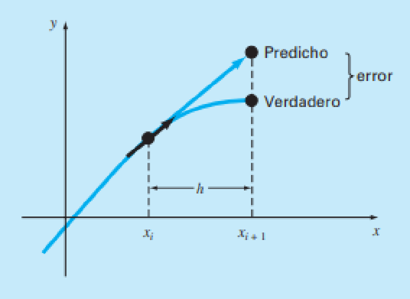

Figura 2: Método de Euler

La estimación buscada es

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h\,, \\
y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) + O(h^2) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Esta fórmula se conoce como *método de Euler* (o de *Euler-Cauchy* o de *punto pendiente*). Se predice un nuevo valor de y usando la pendiente (igual a la primera derivada en el valor original de x) para extrapolar linealmente sobre el tamaño de paso h (figura 2).
El valor $f(x_n, y_n)$ es la pendiente de recta de la solución en el punto x_n, como indica (1).

La solución numérica viene a ser polígono de tramos rectos cada uno con una pendiente diferente en el punto precedente y_n (figura 3).

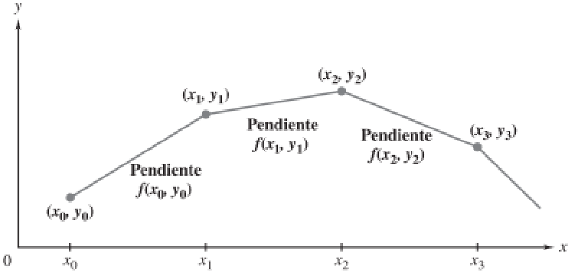

Figura 3: Aproximación mediante poligonales dada por el método de Euler

Ejemplo 1: Utilice el método de Euler con tamaño del paso $h = 0{,}1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = x\sqrt{y}\ , \quad y(1) = 4\ . \tag{3}$$

en los puntos $x = 1{,}1; 1{,}2; 1{,}3; 1{,}4$ y $1{,}5$.

Resolución: En este caso, $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, $h = 0{,}1$ y $f(x, y) = x\sqrt{y}$. Así, la fórmula recursiva (2) para y_n es

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + (0{,}1)x_n\sqrt{y}_n\ .$$

Al sustituir $n = 0$, obtenemos

$$x_1 = x_0 + 0{,}1 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$$
$$y_1 = y_0 + (0{,}1)x_0\sqrt{y_0} = 4 + (0{,}1)(1)\sqrt{4} = 4{,}2$$

Al hacer $n = 1$, se tiene

$$x_2 = x_1 + 0{,}1 = 1{,}1 + 0{,}1 = 1{,}2$$
$$y_2 = y_1 + (0{,}1)x_1\sqrt{y_1} = 4{,}2 + (0{,}1)(1{,}1)\sqrt{4{,}2} = 4{,}42543$$

Si continuamos de esta forma, obtenemos los resultados de la tabla 1. Como comparación, hemos incluido el valor exacto (hasta cinco cifras decimales) de la solución $\phi(x) = (x^2 + 7)^2/16$ de (3), la que puede obtenerse mediante separación de variables. Como era de esperar, la aproximación se deteriora cuando x se aleja de 1.

n	x_n	y_{Euler}	$y_{verdadero}$
0	1	4	4
1	1,1	4,2	4,21276
2	1,2	4,42543	4,45210
3	1,3	4,67787	4,71976
4	1,4	4,95904	5,01760
5	1,5	5,27081	5,34766

Ejemplo 2: Efecto de un tamaño de paso reducido en el método de Euler. Con el método de Euler integre numéricamente la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5 \ , \quad y(0) = 1$$

desde $x = 0$ hasta $x = 4$ con un tamaño de paso $h = 0{,}5; 0{,}25$.

Resolución: Los cálculos se repiten, y los resultados se recopilan en la figura 4. Al reducir el tamaño de paso a la mitad, el valor absoluto del error global promedio disminuye al 40 %, y el valor absoluto del error local al 6.4 %.

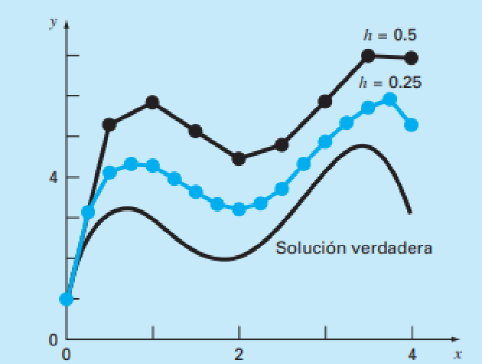

Figura 4: Comparación de dos soluciones numéricas con el método de Euler uasando tamaños de paso 0,5 y 0,25

Tabla de contenidos

1 Introducción

2 Métodos de un solo paso

3 Mejoras del método de Euler
- Método de Heun
- Método del punto medio (o del poligono mejorado)
- Método de Taylor

El método de Euler se modifica de dos maneras distintas a saber. La primera forma, conocido como **método de Heun**, se presenta en forma gráfica en las figuras siguientes, donde $x_{i+1} = x_i + h$ y h es el tamaño paso.

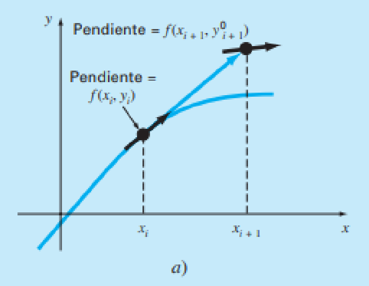

Figura 5: a) Predictor

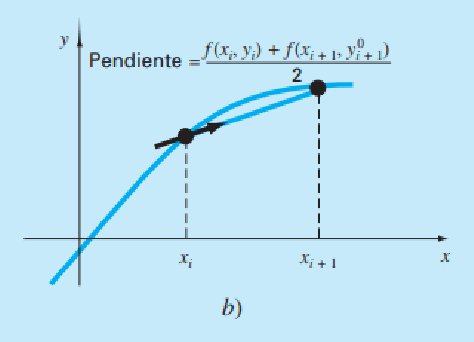

Figura 6: b) Corrector

El método de Heun es un **procedimiento predictor-corrector**, el cual también se denomina método de pasos múltiples. Se formula en las siguientes dos expresiones:

$$\text{Predictor (figura 1)} \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{1}$$

$$\text{Corrector (figura 2)} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \tag{2}$$

La ecuación (2) es llamado el **esquema del trapecio**. Es un ejemplo de **método implícito**. Observar que en la ecuación (2) se tiene y_{i+1} el cual aparece como argumento de f, y suponiendo que ya hemos calculado y_i, podríamos necesitar una técnica de cálculo de raíces, como el método de Newton-Raphson, para calcular y_{i+1}.

A pesar de la inconveniencia de trabajar con un método implícito, el esquema del trapecio tiene ventaja sobre el método de Euler, pues es un método de orden $p = 2$; es decir, converge con una razón proporcional a h^2 y por tanto es más rápido que el método de Euler el cual es de orden $p = 1$.

De (1) y (2) tenemos

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))] \tag{3}$$

Este esquema explícito se conoce como el **método de Euler mejorado**. Tanto el método de Heun y Euler mejorado son de orden $p = 2$.

Ejemplo 1: Con el método de Heun integre $y' = 4e^{0,8x} - 0,5y$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$, con tamaño de paso igual a 1. La condición inicial es en $x = 0$, $y = 2$.

Resolución: Antes de resolver el problema numéricamente, se utiliza el cálculo para determinar la siguiente solución analítica:

$$y = \frac{4}{1,3}(e^{0,8x} - e^{-0,5x}) + 2e^{-0,5x}$$

Esta fórmula sirve para generar los valores de la solución verdadera en la tabla 1.

Primero, se calcula la pendiente en (x_0, y_0) como

$$y_0' = f(x_0, y_0) = f(0, 2) = 4e^0 - 0{,}5(2) = 3$$

La solución numérica se obtiene al usar el predictor [ecuación (1)] para llegar a un estimado de y en 1,0:

$$y_1 = 2 + 1(3) = 5$$

Observe que éste es el resultado obtenido con el método estándar de Euler.

Ahora, para mejorar el estimado de y_{i+1} se emplea el valor y_1 para predecir la pendiente al final del intervalo:

$$y_1' = f(x_1, y_1) = f(1, 5) = 4e^{0,8(1)} - 0,5(5) = 6,402164$$

que se combina con la pendiente inicial para obtener una pendiente promedio en el intervalo desde $x = 0$ hasta 1:

$$y' = \frac{3 + 6,402164}{2} = 4,701082$$

Dicho resultado se sustituye en el corrector [ecuación (2)] para obtener la predicción en $x = 1$:

$$y_1 = 2 + 4{,}701082(1) = 6{,}701082$$

Así, el método de Heun sin iteración del corrector reduce el valor absoluto del error en un factor de 2,4 en comparación con el método de Euler.
Ahora dicho estimado se utiliza para mejorar o corregir la predicción de y_1 sustituyendo el nuevo resultado en el lado derecho de la ecuación (2):

$$y_1 = 2 + (1)\frac{[3 + 4e^{0,8(1)} - 0,5(6,701082)]}{2} = 6,275811$$

El resultado, a su vez, se sustituye en la ecuación (2) para corregir aún más:

$$y_1 = 2 + (1)\frac{[3 + 4^{0,8(1)} - 0,5(6,275811)]}{2} = 6,382129$$

La tabla 1 representa los resultados del resto de los cálculos usando el método con 1 y 15 iteraciones por paso.

Tabla 1. Comparación de los valores verdadero y aproximado para la integral de $y' = 4e^{0,8x} - 0{,}5y$, con la condición inicial $y = 2$ en $x = 0$.

		Iteraciones del método de Heun	
		1	15
x	$y_{verdadero}$	y_{Heun}	y_{Heun}
0	2,0000000	2,0000000	2,0000000
1	6,1946314	6,7010819	6,3608655
2	14,8439219	16,3197819	15,3022367
3	33,6771718	37,1992489	34,7432761
4	75,3389626	83,3377674	77,7350962

La figura 7 ilustra otra modificación simple del método de Euler. Conocida como **método del punto medio (o del polígono mejorado)**, esta técnica se formula con las siguientes dos expresiones:

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \tag{4}$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \tag{5}$$

La primera fórmula es la Euler simple usada para estimar el punto medio $y_{i+1/2}$ con $h/2$, donde luego se utiliza la pendiente del punto medio $f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ para con Euler simple de nuevo calcular y_{i+1} .

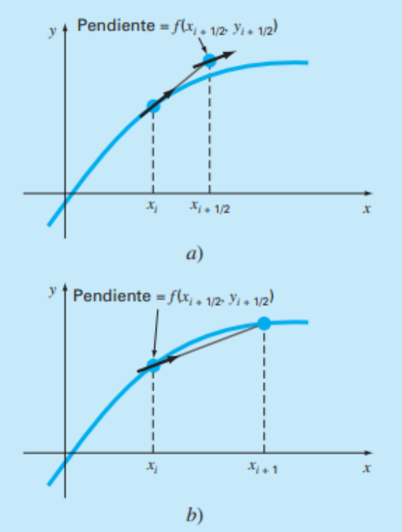

Figura 7: a) Ecuación (4) y b) ecuación (5)

El método del punto medio es mejor que el método de Euler debido a que utiliza una estimación de la pendiente en el punto medio del intervalo de predicción, generando un orden de convergencia $p = 2$.

El método de Taylor se basa en la expresión de series de Taylor

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_n) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{P!}h^P y^{(P)}(x_n) + O(h^{P+1}) \qquad (6)$$

donde las diferentes derivadas se calculan aplicando la regla de la cadena, puesto que

$$y'(x) = f(x,y) \qquad y''(x) = f_x + f_y y'$$
$$y'''(x) = f_{xx} + f_{yx} y' + f_y y'' + f_{yy}(y')^2 \qquad (7)$$

etc. y deben evaluarse en $x = x_i$.

Ejemplo 2: De forma de ilustrar el uso del método, se presenta la solución para la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad \text{con} \quad y(0) = 1 \ .$$

cuya solución analítica es $y = e^{kt}$. Utilizando el método de Taylor se deben evaluar las derivadas primera, segunda y sucesivas, por lo cual, derivando la ecuación diferencial, se obtiene

$$\frac{d^n y}{dx^n} = k^n y \ .$$

Para verificar la exactitud de la solución propuesta, se evalua la expresión obtenida para un valor de $k = 1$ y los valores obtenidos se presentan en la tabla 2. En la tabla es posible apreciar dos características sumamente importantes del método de Taylor, una de ellas es que a medida que nos alejamos del centro de la serie para un valor de P fijo, los errores con respecto a la solución exacta tienden a incrementarse; y la segunda es que a medida que el valor de P se incrementan para un mismo valor de x, la solución obtenida se acerca rapidamente a la solución exacta.

	y_n			
x_n	$P = 1$	$P = 3$	$P = 5$	e^x
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,100	1,105	1,105	1,105
0,2	1,200	1,221	1,221	1,221
0,3	1,300	1,350	1,350	1,350
0,5	1,500	1,646	1,649	1,649
1,0	2,000	2,667	2,717	2,718
2,0	3,000	6,333	7,267	7,389