MÉTODO DE RUNGE-KUTTA Y MULTIPASOS

Profesor del curso:

Richard Acuña Ortega[1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

20/1/2021

Tabla de contenidos

Introducción

Un método Runge-Kutta al igual que los métodos anteriores son métodos de un solo paso. Un método de N etapas y orden P tiene la siguiente fórmula algorítmica

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi_N(x_n, y_n) + O(h^{P+1}) \qquad (1)$$

donde $\varphi(x_n, y_n)$ se conoce como **función incremento**, la cual es la ponderación de varias pendientes de rececta k_s en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$. La función incremento se escribe en forma general como

$$\varphi_N(x_n, y_n) = c_1 k_1 + c_2 k_2 + \cdots + c_N k_N \ , \quad \sum_{s=1}^{N} c_s = 1 \qquad (2)$$

donde las c_s son constantes y las variables auxiliares k_s se definen como

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + b_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\
k_3 &= f(x_n + b_3 h, y_n + h a_{31} k_1 + h a_{32} k_2) \\
k_4 &= f(x_n + b_4 h, y_n + h a_{41} k_1 + h a_{42} k_2 + h a_{43} k_3) \qquad (3) \\
&\vdots \\
k_N &= f(x_n + b_N h, y_n + h a_{N1} k_1 + h a_{N2} k_2 + \cdots + h a_{N,N-1} k_{N-1})
\end{aligned}
$$

donde las a y b son constantes. Observe que las k son relaciones de recurrencia. Es decir, k_1 aparece en la ecuación k_2, la cual aparece en la ecuación k_3, etcétera.

Como cada k es una evaluación funcional, esta recurrencia vuelve eficientes a los métodos RK para cálculos en computadora.
Es posible tener varios tipos de métodos de Runge-Kutta empleando diferentes números de términos en la función incremento especificada pon N. Observe que el método de Runge-Kutta de primer orden con $N = 1$ es, de hecho, el método de Euler. Una vez que se elige N, se evalúan las a, b y c igualando la ecuación (1) a los términos en la expansión de la serie de Taylor.

Segundo Orden

Método de Runge-Kutta de segundo orden es, de hecho el método de Heun sin iteración.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned} \tag{4}$$

Observe que k_1 es la pendiente al inicio del intervalo y que k_2 es la pendiente al final del intervalo.

Ralston (1962) y Ralston & Rabinowitz (1978) propusierón los siguientes métodos con los cuales se obtiene un mínimo en el error de truncamiento para los algoritmos RK de segundo y tercer orden.

El **método de Ralston** es

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}hk_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{3}(k_1 + 2k_2) \end{aligned} \tag{5}$$

Tercer Orden

El **método de Ralston & Rabinowitz** es el siguiente

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Cuarto Orden

El más popular de los métodos de Runge - Kutta es el de cuarto orden. Como en el caso de los procedimientos de segundo orden, hay un número infinito de versiones. La siguiente, es la forma comúnmente usada y, por lo tanto, le llamamos **método clásico de R-K de cuarto orden**:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned} \tag{7}$$

Ejemplo 1:

a) Con el método clásico R-K de cuarto orden integre

$$f(x,y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

usando un tamaño de paso $h = 0{,}5$ y la condición inicial $y = 1$ en $x = 0$;

b) De manera similar integre

$$f(x,y) = 4e^{0{,}8x} - 0{,}5y$$

utilizando $h = 0{,}5$ con $y(0) = 2$ desde $x = 0$ hasta $0{,}5$.

Resolución:

a) Se emplean las ecuaciones para calcular $k_1 = 8{,}5$; $k_2 = 4{,}21875$; $k_3 = 4{,}21875$ y $k_4 = 1{,}25$; las cuales se sustituyen en la ecuación (7) para dar

$$\begin{aligned} y(0{,}5) &= 1 + \frac{0{,}5}{6}[8{,}5 + 2(4{,}21875) + 2(4{,}21875) + 1{,}25] \\ &= 3{,}21875 \end{aligned}$$

que es exacta. Así, como la solución verdadera es una cuártica el método de cuarto orden da un resultado exacto.

b) En este caso, la pendiente al inicio del intervalo se calcula como sigue:

$$k_1 = f(0;2) = 4e^{0,8(0)} - 0,5(2) = 3$$

Este valor se utizapara calcular un valor de y y una pendiente en el punto medio,

$$y(0,25) = 2 + 3(0,25) = 2,75$$

$$k_2 = f(0,25;2,75) = 4e^{0,8(0,25)} - 0,5(2,75) = 3,510611$$

Esta pendiente, a su vez, se utiliza para calcular otro valor de y y otra pendiente en el punto medio,

$$y(0{,}25) = 2 + 3{,}510611(0{,}25) = 2{,}877653$$

$$k_3 = f(0{,}25; 2{,}877653) = 4e^{0{,}8(0{,}25)} - 0{,}5(2{,}877653) = 3{,}446785$$

Después, se usará esta pendiente para calcular un valor de y y una pendiente al final del intervalo,

$$y(0{,}5) = 2 + 3{,}071785(0{,}5) = 3{,}723392$$

$$k_4 = f(0{,}5; 3{,}723392) = 4e^{0{,}8(0{,}5)} - 0{,}5(3{,}723392) = 4{,}105603$$

Por último, las cuatro estimaciones de la pendiente se combinan para obtener una pendiente promedio, la cual se utiliza después para realizar la última predicción al final del intervalo.

Métodos de Runge-Kutta de orden superior

$$\begin{aligned} y(0{,}5) &= 2 + \frac{0{,}5}{6}[3 + 2(3{,}510611) + 2(3{,}446785) + 4{,}105603] \\ &= 3{,}751669 \end{aligned}$$

que es muy aproximada a la solución verdadera de 3,751521 .

Métodos de Runge-Kutta de orden superior

Cuando se requieren resultados más exactos, se recomienda el **método R-K de quinto orden de Butcher (1964)**:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i)\\
k_2 &= f(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}hk_1)\\
k_3 &= f(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}hk_1 + \frac{1}{8}hk_2)\\
k_4 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}hk_2 + hk_3)\\
k_5 &= f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}hk_1 + \frac{9}{16}hk_4)\\
k_6 &= f(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}hk_1 + \frac{2}{7}hk_2 + \frac{12}{7}hk_3 - \frac{12}{7}hk_4) + \frac{8}{7}hk_5)\\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Existen las fórmulas R-K de orden superior, como el método de Butcher, pero en general, la ganancia en exactitud con métodos mayores al cuarto orden se ven afectada por mayor trabajo computacional y mayor complejidad.

Ejemplo 2: Con los métodos R-K desde primero hasta quinto orden resuelva

$$f(x, y) = 4e^{0{,}8x} - 0{,}5y$$

con $y(0) = 2$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$ con diferentes tamaños de paso. Compare la exactitud de los diferentes métodos para la estimación en $x = 4$, basándose en la respuesta exacta, $y(4) = 75{,}33896$.

Resolución: El cálculo se realiza usando los métodos de Euler, de Heun no iterativo, R-K de tercer orden, clásico R-K de cuarto orden y R-K de quinto orden de Butcher. Los resultados se presentan en la figura 1, donde graficamos el valor absoluto del error relativo porcentual contra el trabajo computacional, esta última cantidad es equivalente al número requerido de evaluaciones de la función para obtener el resultado, como:

$$\text{Trabajo computacional} = n_f \frac{b-a}{h} \tag{9}$$

donde n_f =número de evaluaciones de la función consideradas para el cálculo particular de R-K.

Para órdenes ≤ 4, n_f es igual al orden del método; sin embargo, observe que la técnica de Butcher de quinto orden requiere seis evaluaciones de la función. La cantidad $(b-a)/h$ es el intervalo de integración total dividido entre el tamaño de paso (es decir, es el número necesario de aplicaciones de la técnica R-K para obtener el resultado). Como las evaluaciones de la función son generalmente las que consumen más tiempo, la ecuación (9) proporciona una medida burda del tiempo de ejecución requerido para obtener la respuesta.

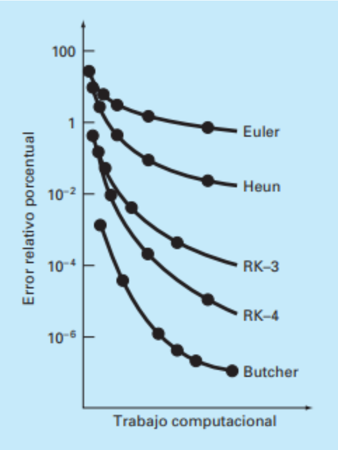

Figura 1: Comparación del error relativo porcentual contra los métodos de R-K, desde el de primero hasta el quinto órdenes

La inspección de la figura 1 nos lleva a varias conclusiones: **primero**, que los métodos de orden superior logran mayor exactitud con el mismo trabajo computacional; **segundo**, que la ganancia en exactitud lograda por el mayor trabajo tiende a disminuir después de un punto. (Observe que las curvas primero caen con rapidez y después tienden a nivelarse.)

El ejemplo 2 y la figura 1 nos llevarán a la conclusión de que las técnicas R-K de orden superior son siempre los métodos de preferencia. Sin embargo, deben considerarse otros factores cuando se elija una técnica de solución, tales como el costo de programación y los requerimientos de exactitud del problema.

Tabla de contenidos

Método de Adams-Bashforth/Adams-Moulton

Las fórmulas de Adams-Bashforth (predictoras) y las fórmulas de Adams-Moulton (correctoras), debe utilizarse en parejas que tenga el mismo error de truncamiento local, para que el método predictor-corrector sea consistente.

Adams-Bashforth:

$$\begin{aligned} y'_i &= f(x_i, y_i) \\ y'_{i-1} &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ y'_{i-2} &= f(x_{i-2}, y_{i-2}) \\ y'_{i-3} &= f(x_{i-3}, y_{i-3}) \\ y^*_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24}(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}) \qquad (10) \end{aligned}$$

para $i \geq 3$.

Luego se sustituye el valor de y^*_{i+1} en la corrección **Adams-Moulton:**

$$
\begin{aligned}
y'_{i+1} &= f(x_{i+1}, y^*_{i+1}) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24}(9y'_{i+1} + 19y'_i - 5y'_{i-1} + y'_{i-2}) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Obsérvese que la fórmula (10) requiere que se conozcan los valores de y_0, y_1, y_2 y y_3 para obtener el de y_4. Por su puesto, el valor de y_0 es la condición inicial dada como el error local de truncamiento en el método de Adams-Bashforth/Adams-Moulton es $O(h^5)$, los valores de y_1, y_2 y y_3 se pueden calcular con un método que tenga la misma propiedad de error, como la fórmula de R-K de cuarto orden.

Ejemplo 3: Use el método de Adams-Bashforth/Adams-Moulton con $h = 0{,}2$ para llegar a una aproximación a $y(0{,}8)$ de la solución de

$$y' = x + y - 1 \ , \quad y(0) = 1$$

Resolución: Dado que el tamaño de paso es $h = 0{,}2$, entonces y_4 aproximará $y(0{,}8)$. Para comenzar aplicamos el método de R-K; con $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $h = 0{,}2$ con lo cual:

$$y_1 = 1{,}02140000 \ ; \ y_2 = 1{,}09181796 \ ; \ y_3 = 1{,}22210646$$

Ahora definimos $x_0 = 0 \ ; \ x_1 = 0{,}2 \ ; \ x_2 = 0{,}4 \ ; \ x_3 = 0{,}6$ y $f(x, y) = x + y - 1$, y obtenemos

$$
\begin{aligned}
y_0' &= f(x_0, y_0) = (0) + (1) - 1 = 0 \\
y_1' &= f(x_1, y_1) = (0{,}2) + (1{,}02140000) - 1 = 0{,}22140000 \\
y_2' &= f(x_2, y_2) = (0{,}4) + (1{,}09181796) - 1 = 0{,}49181796 \\
y_3' &= f(x_3, y_3) = (0{,}6) + (1{,}22210646) - 1 = 0{,}82210646
\end{aligned}
$$

con los valores anteriores, la predicción, ecuación (10) da

$$
y_4^* = y_3 + \frac{0{,}2}{24}(55y_3' - 59y_2' + 37y_1' - 9y_0') = 1{,}42535975
$$

Para usar la corrección, ecuación (11), necesitamos primero

$$
y_4' = f(x_4, y_4^*) = (0{,}8) + (1{,}42535975) - 1 = 1{,}22535975
$$

Por último, la ecuación (11) da

$$y_4 = y_3 + \frac{0{,}2}{24}(9y_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1') = 1{,}42552788$$

Es de observar que $y = -x + e^x$ es la solución general de la ecuación $y' = x + y - 1$, $y(0) = 1$, donde el valor exacto:

$$y(0{,}8) = -(0{,}8) + e^{(0{,}8)} = 1{,}42554093$$