Ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables

Profesor del curso:
Richard Acuña Ortega[1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

7/1/2021

Tabla de contenidos

Teorema 1 (Teorema de Abel)

Si $y_1(x)$ es una solución no trivial de la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (1)$$

en un intervalo en que $a_2(x)$ no se anula, entonces

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int [a_1(x)/a_2(x)]dx}}{[y_1(x)]^2} dx \qquad (2)$$

es una solución de la ecuación en cualquier subintervalo de I en que $y_1(x) \neq 0$. Más aún, $y_2(x)$ es linealmente independiente de $y_1(x)$, y la solución general de (1) es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\ ,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo: La función $y_1(x) = 1$ es una solución de la ecuación de segundo orden

$$y'' + (\tan x - 2\cot x)y' = 0 \qquad (3)$$

en cualquier intervalo en que $\tan x$ y $\cot x$ están definidas. Aplicando (2) se obtiene una segunda solución

$$\begin{aligned} y_2(x) &= (1)\int \frac{e^{-\int(\tan x - 2\cot x)dx}}{[1]^2}dx \\ &= \int e^{\ln(\cos x.\,\mathrm{sen}^2 x)}dx \\ &= \int \mathrm{sen}^2 x \cos x \; dx \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{sen}^3 x \,. \end{aligned}$$

Así, la solución general de (3) es

$$y(x) = c_1 + c_2 \operatorname{sen}^3(x) \; .$$

Ejemplo: Por sustitución directa, se encuentra que $y_1(x) = 1$ es una solución de la ecuación de segundo orden

$$xy'' + y' = 0 \qquad (4)$$

en consecuencia, una segunda solución linealmente independiente puede encontrarse empleando (2), se obtiene

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= (1)\int \frac{e^{-\int (1/x)dx}}{[1]^2}dx \\
&= \int e^{-\ln x} dx \\
&= \int x^{-1}\, dx \\
&= \ln x\ .
\end{aligned}
$$

Finalmente la solución general de (4) es

$$
y(x) = c_1 + c_2 \ln x\ .
$$

Tabla de contenidos

El método de variación de parámetros.

Nos permite encontrar una solución particular de una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea (con coeficientes constantes o variables) siempre que se conozca o calcule la solución general de la ecuación homogénea asociada a ella.
Este método tiene más generalidad que los métodos anteriores y consiste en que los parámetros (constantes) c_1 y c_2 de la solución, $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ varien con x.
Veámoslo claramente con el siguiente teorema.

Teorema 2

Dada la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0 y = f(x) \tag{5}$$

y la solución general de y_h con:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{6}$$

de la ecuación homogénea asociada a ella. La solución particular $y_p(x)$ tendrá la forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{7}$$

donde $c_1(x)$ y $c_2(x)$ se calculan por medio de:

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}dx \ ;$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}dx \ ; \qquad (8)$$

con

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Nota: $W[y_1(x), y_2(x)]$ es el Wronskiano de $y_1(x)$ y $y_2(x)$.

Ejemplo: Resolver:

$$(x^2D^2 - 2xD + 2)y = x^3 \ln x \ ; \qquad (9)$$

sabiendo que $y_h(x) = c_1x + c_2x^2$ es solución de la ecuación homogénea asociada a ella.

Resolución: La ecuación (9) se escribe como:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x \ ; \qquad (10)$$

Está ecuación (10) la escribimos como:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x \ln x \ ; \qquad (11)$$

Además: $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$; (12)

donde $y_1(x) = x$; $y_2(x) = x^2$;

Cálculo de $y_p(x)$ de (11):

Sea $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$; (13)

$f(x) = x \ln x$, y

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W[x, x^2] = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 ;$$

Por el teorema 2:

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx = -\int \frac{(x \ln x)(x^2)}{x^2} dx = -\int x \ln x \, dx$$

$$c_1(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x \; ; \qquad (14)$$

también;

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}dx = \int \frac{(x\ln x)(x)}{x^2}dx = \int \ln x \; dx$$

entonces:

$$c_2(x) = x\ln x - x \; ; \qquad (15)$$

La solución particular la obtenemos de (14) y (15) en (13):

$$y_p(x) = (\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x)(x) + (x\ln x - x)(x^2)$$

entonces:

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^3\ln x - \frac{3}{4}x^3 \ ;$$

La solución general es:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2}x^3\ln x - \frac{3}{4}x^3 \ .$$

Tabla de contenidos

Método de reducción de orden.

La técnica que se emplea a continuación también corresponde al método de variación de parámetros, pero con una salvedad; no se conoce la solución completa de $y_h(x)$ de la ecuación homogénea asociada a (5). El siguiente ejemplo mostrará el método.

Ejemplo: Hallar la solución general de:

$$x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3)\ ; \qquad (16)$$

sabiendo que $y_1(x) = x^2$ es una solución de la ecuación homogénea asociada a ella.

Resolución: Sea la solución general: $y = c(x)y_1(x)$;
entonces:

$$y = c(x).x^2 ;$$
$$y' = c'(x).x^2 + 2c(x).x ;$$
$$y'' = c''(x).x^2 + 4c'(x).x + 2c(x) ;$$

Reemplazando en (16):

$$(x^2 - x)[c''(x).x^2 + 4c'(x).x + 2c(x)] - (2x - 1)[c'(x).x^2 + 2c(x).x]$$
$$+2c(x).x^2 = x^2(2x - 3) ;$$

simplificando:

$$(x^4 - x^3)c''(x) + (2x^3 - 3x^2)c'(x) = x^2(2x - 3) \;;$$

entonces:

$$c''(x) + \frac{2x-3}{x^2-x}c'(x) = \frac{2x-3}{x^2-x} \;; \qquad (17)$$

Haciendo el cambio: $c'(x) = u$, entonces $c''(x) = u'$, reemplazando en (17):

$$u' + \frac{2x-3}{x^2-x}u = \frac{2x-3}{x^2-x} \;; \quad \text{(E.D.L.)} \qquad (18)$$

Cuyo factor integrante $\mathcal{F}(x) = e^{\int \frac{2x-3}{x^2-x}dx} = \frac{x^3}{x-1}$. (19)

de (18) y (19):

$$\left(\frac{x^3}{x-1}\right)u = \int \left(\frac{x^3}{x-1}\right)\left(\frac{2x-3}{x^2-x}\right)dx + c_1$$

resolviendo:

$$u = \frac{x-1}{x} + \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + c_1\frac{(x-1)}{x^3} \; ;$$

pero $u = c'(x)$, entonces:

$$c'(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + c_1\frac{(x-1)}{x^3} \; ;$$

por lo que:

$$c(x) = \int [1 - \frac{1}{x}]dx + \int [\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}]dx + \int \frac{1}{x^3}dx + c_1 \int [\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}]dx + c_2 \ ;$$

entonces:

$$c(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c_1(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}) + c_2 \ ;$$

como la solución general es: $y = c(x).y_1(x)$;

es decir: $y(x) = c(x).x^2$;

entonces:

$$y = x^3 + x - \frac{1}{2} + c_1(\frac{1}{2} - x) + c_2x^2 \ ;$$

finalmente:

$$y = x^3 + c_3(2x - 1) + c_2x^2$$

de donde:

$$y_h(x) = c_3(2x - 1) + c_2x^2 \quad \text{y} \quad y_p(x) = x^3 \ .$$

Tabla de contenidos

Las ecuaciones que estudiaremos a continuación son unas de las pocas ecuaciones con coeficientes variables que pueden resolver en términos de funciones elementales, en forma cerrada.
Estas ecuaciones se denominan de Cauchy-Euler .

Ecuación lineal de Cauchy.

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \ , \tag{20}$$

donde los coeficientes: $a_0, a_, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$.

Método de solución. Hacer el cambio: $x = e^z$ entonces $\ln x = z$.
Poniendo los derivados con respecto a z:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{21}$$

Como $z = \ln x$ entonces $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{e^z}$ (22)

(22) en (21):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{e^z} \implies e^z\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \implies x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \qquad (23)$$

Llamaremos a

$$\frac{dy}{dz} = Dy \qquad (24)$$

(24) en (23):

$$x\frac{dy}{dx} = Dy$$

Ahora:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{e^z}\right] = \frac{d}{dz}\left[\frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{e^z}\right]\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{1}{e^z} + \frac{dy}{dz}\left(-\frac{1}{e^z}\right)\right]\cdot\frac{1}{e^z} = \left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right]\cdot\frac{1}{e^{2z}}$$

$$\Longrightarrow e^{2z}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d^2} - \frac{dy}{dz}$$

$$\Longrightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D^2y - Dy = (D^2 - D)y = D(D-1)y$$

$$\Longrightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$$

Continuando de esta forma, tenemos que:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\ldots(D-(n-1))y \text{ , (ley de formación)}$$

La ecuación (20) queda:

$$a_n D(D-1)\ldots(D-(n-1))y + a_{n-1} D(D-1)\ldots(D-(n-2))y +$$

$$\ldots + a_1 Dy + a_0 y = f(e^z)$$

la cual es una ecuación con coeficientes constantes y cuya solución puede encontrarse con los métodos estudiados anteriormente.

Ejemplo: Hallar la solución general de la siguiente ecuación

$$xy'' + 4y' + \frac{2}{x}y = \frac{2}{x}\ln x \tag{25}$$

Resolución: Multiplicamos (25) por x:

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln x \tag{26}$$

Donde (26) es una ecuación de Cauchy. Hacemos el cambio recomendado:

$$x = e^z \implies \ln x = z$$

En (26):

$$D(D-1)y + 4Dy + 2y = 2z \implies [D(D-1) + 4D + 2]y = 2z$$

$$\implies (D+2)(D+1)y = 2z \qquad (27)$$

Cálculo de y_h, de la ecuación: $(D+2)(D+1)y = 0$

Ecuación característica:

$$(r+2)(r+1) = 0 \implies r_1 = -1 \ , \ r_2 = -2$$

$$\implies y_h = c_1 e^{-z} + c_2 e^{-2z} \implies y_h = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$$

Cálculo de y_p de (27). Por coeficientes indeterminados la solución particular y_p debe ser:

$$y_p = A + Bz$$

luego de hacer los cálculos tenemos: $A = -\frac{3}{2}$, $B = 1$; entonces

$$y_p = -\frac{3}{2} + z \implies y_p = -\frac{3}{2} + \ln x$$

La solución general es:

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{2} + \ln x$$

Ecuación lineal de Euler.

$$a_n(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots$$

$$+a_1(ax+b)\frac{dy}{dx}+a_0y=f(x) \tag{28}$$

donde los coeficientes: $a, b, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, donde $a \neq 0$

Método de solución: Hacer el cambio: $ax+b=e^z$ entonces

$$\ln(ax+b)=z\ .$$

Poniendo las derivadas con respecto a z:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{29}$$

Como $\quad z = \ln(ax+b) \implies \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{a}{ax+b} = \dfrac{a}{e^z} \qquad (30)$

De (30) en (29):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\left(\frac{a}{ax+b}\right) \implies (ax+b)\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dz} \tag{31}$$

Llamaremos a: $\dfrac{dy}{dz} = Dy \qquad (32)$

De (32) en (31):

$$(ax+b)\frac{dy}{dx} = a\,Dy$$

Ahora:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dz}\left(\frac{a}{ax+b}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dz}\left(\frac{a}{e^z}\right)\right]$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{dy}{dz}\left(\frac{a}{e^z}\right)\right].\frac{dz}{dx} = \left[\frac{d^2y}{dz^2}.\left(\frac{a}{e^z}\right) - \frac{dy}{dz}.\frac{a}{e^z}\right]\frac{a}{e^z}$$

$$= \left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right]\left(\frac{a}{e^z}\right)^2 = [D^2y - Dy]\left(\frac{a}{e^z}\right)^2 = [D^2 - D]y.\left(\frac{a}{e^z}\right)^2$$

$$\implies e^{2z}\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y.a^2 \implies (ax+b)^2\frac{d^2y}{dx^2} = a^2D(D-1)y$$

Continuando de esta forma tenemos que:

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n} = a^nD(D-1)\ldots(D-(n-1))y \quad \text{(Ley de formación)}$$

La ecuación (28) queda:

$$a_na^nD(D-1)\ldots(D-(n-1))y + a_{n-1}a^{n-1}D(D-1)\ldots(D-(n-2))y + \cdots$$

$$+a_1a\,Dy + a_0y = f\left(\frac{e^z-b}{a}\right)$$

la cual es una ecuación con coeficientes constantes y cuya solución puede encontrarse con los métodos estudiados anteriores.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación

$$(3x-1)^2y''+(9x-3)y'-9y=\operatorname{sen}[\ln(3x-1)]\ ,\ x>\frac{1}{3}\ . \tag{33}$$

Resolución: Se observa que la ecuación (33) es de tipo Euler.
Hacemos el cambio recomendado:

$$3x-1=e^z \implies \ln(3x-1)=z$$

En (33):

$$3^2D(D-1)y+3\cdot 3Dy-9y=\operatorname{sen} z$$

$$\implies 9D^2y-9y=\operatorname{sen} z \tag{34}$$

Cálculo de y_h , de la ecuación: $9y'' - 9y = 0$

Ecuación característica:

$$9r^2 - 9 = 0 \implies r^2 = 1 \implies r_1 = 1 \ , \ r_2 = -1$$

$$\implies y_h = c_1 e^z + c_2 e^{-z} \implies y_h = c_1(3x-1) + c_2(3x-1)^{-1}$$

Cálculo de y_p de (34), por cualquier método desarrollado tenemos

$$y_p = -\frac{1}{18} \operatorname{sen} z \implies y_p = -\frac{1}{18} \operatorname{sen}[\ln(3x-1)]$$

La solución general es:

$$y = c_1(3x-1) + c_2(3x-1)^{-1} - \frac{1}{18} \operatorname{sen}[\ln(3x-1)]$$