Variable Compleja
Funciones de Variable compleja

Beatriz Rojas García.

Universidad de Los LLanos.
Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Física.

Contenido

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Contenido

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Funciones de variable compleja

Definición

Una relación que a cada $z \in S \subseteq \mathbb{C}$ le hace corresponder uno y sólo un valor $f(z) \in \mathbb{C}$ se denomina *función de variable y valor complejo* o simplemente *función de variable compleja*

$$\begin{aligned} f : S \subseteq \mathbb{C} &\longmapsto \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

El *dominio de f* es el mayor conjunto $S \subseteq \mathbb{C}$ para el cual f tiene sentido.

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Determinar el dominio de la función de variable compleja indicada:

- $f(z) = z^3$.
  En este caso $Dom(f) = \mathbb{C}$, es decir, la función se puede evaluar en cualquier número complejo.
- $g(z) = \dfrac{1}{z^4 - 1}$.
  Es necesario garantizar que el denominador $z^4 - 1$ sea diferente de cero para que la función tenga sentido, es decir en cualquier punto diferente de las raíces cuartas de la unidad.
  Entonces g se puede evaluar en los números complejos diferentes de $1, i, -1, -i$ de donde

$$Dom(g) = \{z \in \mathbb{C}; z \neq \pm i, z \neq \pm 1\} = \mathbb{C} \setminus \{1, i, -1, -i\}$$

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

- $h(z) = \dfrac{z^2}{z - \overline{z}}$.
  La función no está definida cuando el denominador es cero. Teniendo en cuenta que $z - \overline{z} = 2Im(z)$, entonces

$$Dom(h) = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) \neq 0\}$$

- $f(z) = \dfrac{z}{z^3 - 1}$

Funciones de variable compleja

Definición

Si $z = x + iy$ y f es una función de variable compleja que se puede expresar como

$$f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$$

donde $u(x, y)$, $v(x, y)$ son funciones de la variables x, y con valor real, entonces u se denomina la *parte real* de f y $v(x, y)$ la *parte imaginaria* de f.

Ejemplo: Determinar la parte real y la parte imaginaria de la función:

- $f(z) = z^2 - z$. Si $z = x + iy$, entonces
  $f(z) = (x + iy)^2 - (x + iy) = x^2 + 2ixy - y^2 - x - iy$
  $= (x^2 - x - y^2) + (2xy - y)i$, de esta manera

$$u(x, y) = -x^2 - x - y^2 \qquad v(x, y) = 2xy - y.$$

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Ejercicios: Determinar la parte real y la parte imaginaria de la función indicada:

1. $f(z) = -5iz^3 + (iz)^2 - 3 + 4i$.
2. $f(z) = \overline{z}\ Re(z) - z\ Im(z) + i$.
3. $f(z) = \dfrac{z^2 - iz}{z + 3i}$.
4. $f(z) = \dfrac{4i - z^2}{5 - z}$.
5. $f(z) = iz - \dfrac{2}{\overline{z}}$.
6. $f(z) = \dfrac{iRe(z)}{z^2}$.

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Definición

Sean f una función de variable compleja y $z_0 \in \mathbb{C}$ (fijo) tal que f está definida alrededor de z_0, pero no necesariamente en z_0. Se dice que el *límite de f cuando z tiende a z_0* es igual a w_0:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Límites

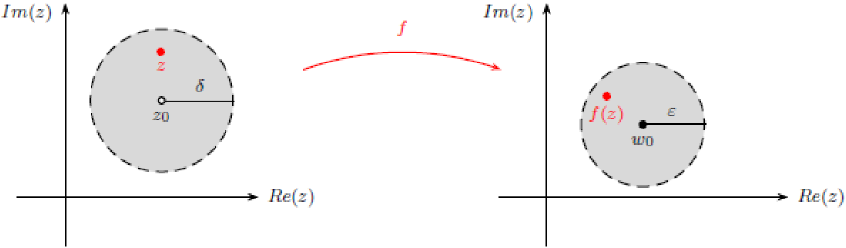


Figura: Representación gráfica de $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Propiedades de los Límites

Sean f y g funciones de variable compleja definidas alrededor de z_0, no necesariamente en z_0, entonces:

- Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe entonces es único.
- Si $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ y $w_0 = u_0 + iv_0$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si y sólo si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

- Si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ y $\lim_{z\to z_0} g(z)$ existen y $k \in \mathbb{C}$ constante,
  1. $\lim_{z\to z_0} k = k$.
  2. $\lim_{z\to z_0} kf(z) = k \lim_{z\to z_0} f(z)$.
  3. $\lim_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z)$
  4. $\lim_{z\to z_0} [f(z)\, g(z)] = \left[\lim_{z\to z_0} f(z)\right]\left[\lim_{z\to z_0} g(z)\right]$.
  5. $\lim_{z\to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)}$, siempre que $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$.
  6. $\lim_{z\to z_0} z^n = z_0^n$ para $n \in \mathbb{N}$
  7. Si $p(z)$ es un polinomio con coeficientes complejos, entonces $\lim_{z\to z_0} p(z) = p(z_0)$.
  8. $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{\lim_{z\to z_0} f(z)}$.
  9. $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \left|\lim_{z\to z_0} f(z)\right|$.

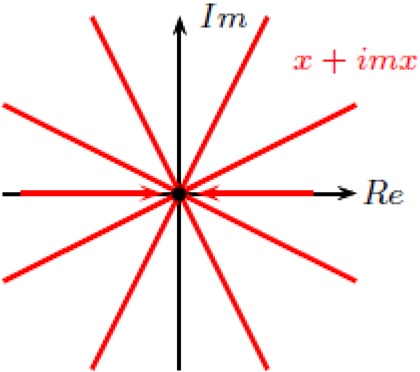
UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Calcular los siguientes límites:

- $\lim_{z\to 2-i} 2iz^2 = 2i(2-i)^2 = 2i(4-4i-1) = 2i(3-4i) = 8-6i$
- $\lim_{z\to -i} (\bar{z} - 2z + i) = \overline{-i} - 2(-i) + i = i + 2i + i = 4i.$
- $\lim_{z\to 2-3i} zRe(z) = (2-3i)(2) = 4-6i.$
- $$\lim_{z\to i} \frac{z^3 + (2-i)z^2 - 2iz}{z^2+1} = \lim_{z\to i} \frac{z(z-i)(z+2)}{(z-i)(z+i)}$$ $$= \lim_{z\to i} \frac{z(z+2)}{z+i} = -\frac{i(i+2)}{i+i} = 1 - \frac{1}{2}i.$$

- $\lim_{z\to 0} \dfrac{(Re(z))^2}{|z|^2} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminación). En este caso la aproximación a $z = 0$ se hará mediante rectas que pasen por el origen: $y = mx$,



Es decir si $z = x + iy = x + i(mx)$ entonces $f(z) = \frac{(Re(z))^2}{|z|^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{1}{1 + m^2}$, dependiendo del valor de m se obtendrá un valor de límite diferente, luego

$$\lim_{z \to 0} \frac{(Re(z))^2}{|z|^2} \quad \text{no existe.}$$

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Límites

Examine la existencia de los siguientes límites. En caso de que existan hállelos, de lo contrario justifique la no existencia.

1. $\lim_{z\to 1-i} \left((6-3i)z^3-(-2+4i)z+6i\right)$
2. $\lim_{z\to i} \dfrac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}$
3. $\lim_{z\to -4i} \dfrac{(z-i)(z+4)}{z^2+1}$
4. $\lim_{z\to 1+i\sqrt{3}} \dfrac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}$
5. $\lim_{z\to 1+i} \dfrac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2}$
6. $\lim_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z^6+1}$

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Continuidad

Definición

Sean f una función de variable compleja y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que f está definida alrededor de z_0. Se dice que f es *continua* en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

O equivalentemente si se verifican las tres condiciones:

1. f está definida en z_0.
2. $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe.
3. $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Si no se satisface alguna de las condiciones (1-3) entonces se dice que f es *discontinua* en z_0, o de manera equivalente, z_0 es una discontinuidad de f.

DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Continuidad

Definición

f es continua en $S \subseteq \mathbb{C}$ si f es continua en cada $z \in S$.

Propiedades

- Sean $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ y $z_0 = x_0 + iy_0$. f es continua en z_0 si y sólo si u y v son continuas en (x_0, y_0).
- Si f y g son continuas en z_0 y $k \in \mathbb{C}$ entonces las funciones kf, $f \pm g$, fg, f/g y $f \circ g$ son continuas en z_0, siempre y cuando están definidas.

Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ es un polinomio de variable compleja con coeficientes complejos, $(a_i \in \mathbb{C},\ n = 0, 1, \ldots, n)$, entonces $P(z)$ es continuo en cada $z_0 \in \mathbb{C}$.

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

- $f(z) = 2z^5 - 3z^2 + 8i$,
  $f(z)$ es continua en $\mathbb{C}$ dado que es un polinomio (de grado 5) con coeficientes complejos.
- $g(z) = 3y + \cos(x) + ixy^4$,
  $g(z)$ es continua en $\mathbb{C}$ ya que las funciones componentes

$$u(x, y) = 3y + \cos(x) \qquad v(x, y) = xy^4$$

  son continuas en cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Continuidad

- $h(z) = \dfrac{z}{z+3i}$,
  $h(z)$ es una función racional, así que es continua en todo $\mathbb{C}$ salvo donde el denominador sea cero. De esta manera h es continua en $\mathbb{C} \setminus \{-3i\}$, o equivalentemente $z = -3i$ es la única discontinuidad de h.
- $f(z) = \begin{cases} \dfrac{(Re(z))^2}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$
  Como $f(z)$ está definida por partes, para analizar la continuidad en z_0 es necesario considerar las dos posibilidades para z_0 a partir de la definición.

Continuidad

- Si $z_0 \neq 0$ entonces

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(Re(z))^2}{|z|^2} = \frac{(Re(z_0))^2}{|z_0|^2} = f(z_0)$$

  luego f es continua en $z_0 \neq 0$.
- Si $z_0 = 0$ entonces $f(z_0) = 0$, pero

$$\text{lím}\, z \to z_0 \frac{(Re(z))^2}{|z|^2} \quad \text{no existe,}$$

  y de esta forma f no es continua en $z_0 = 0$.

Por lo tanto f es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

1. $f(z) = -3z^3 + 4iz^2 - (9-2i)z^2 + 3iz$
2. $g(z) = \dfrac{z^2+4}{z^2+iz+6}$
3. $h(z) = \dfrac{3z-2}{z^3+2z^2+2z}$
4. $f(z) = \dfrac{2z^2+4}{z^4-16}$
5. $f(z) = \begin{cases} z^2 - \overline{z}, & z \neq -i \\ 1+i, & z = -i \end{cases}$
6. $g(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+iz+2}{z^2+1}, & z \neq i \\ -i, & z = i \end{cases}$

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Contenido

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Derivabilidad y analiticidad de funciones de variable compleja

Definición

Sean f una función de variable compleja y $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f está definida en z_0 y alrededor de z_0. Se define la *derivada de f en z_0* como:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

siempre que el límite exista. En este caso se dice que f es *diferenciable en z_0*.

Al considerar el incremento complejo $\Delta z = z - z_0$ se tiene una forma alternativa de la derivada en un punto

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Básicas e Ingeniería

Definición

f es *derivable en* $S \subseteq \mathbb{C}$ si f es derivable en cada $z_0 \in S$.

Determinar la derivada de $f(z) = z^2 + z - 3$ a partir de la definición:

- $$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 + (z+\Delta z) - 3 - \left(z^2 + z - 3\right)}{\Delta z}$$
  $$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\ \Delta z + (\Delta z)^2 + \Delta z}{\Delta z}$$
  $$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z + \Delta z + 1)}{\Delta z} = 2z + 1.$$

Derivabilidad y analiticidad de funciones de variable compleja

Teorema

Si f es derivable en z_0 entonces f es continua en z_0.

Nota: El recíproco del teorema no es válido. Por ejemplo, la función $f(z) = \overline{z}$ es continua en todo $z_0 \in \mathbb{C}$ pero es derivable en ningún punto.

Teorema: Reglas de derivación

Sean f y g funciones diferenciables de variable compleja y sea $k \in \mathbb{C}$ constante. Entonces,

- $\dfrac{d}{dz}(k) = 0.$
- $\dfrac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Derivabilidad y analiticidad de funciones de variable compleja

Teorema: Reglas de derivación

- $\dfrac{d}{dz}[kf(z)] = kf'(z).$
- $\dfrac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z).$
- $\dfrac{d}{dz}[f(z)\ g(z)] = f'(z)\ g(z) + f(z)\ g'(z)$
- $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{f'(z)\ g(z) - f(z)\ g'(z)}{[g(z)]^2}$, con $g(z) \neq 0.$
- $\dfrac{d}{dz}[(f \circ g)(z)] = \dfrac{d}{dz}[f\,(g(z))] = f'\,(g(z))\ \ g'(z)$ (regla de la cadena).

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Derivar las siguientes funciones:

- $f(z) = 3z^4 - iz + 3$
  $f'(z) = 12z^3 - i$
- $f(z) = \left(z^2 - 3iz\right)^3$
  $f'(z) = 3\left(z^2 - 3iz\right)^2 (2z - 3i)$
- $f(z) = \dfrac{3z-1}{z^3 - z}$
  $f'(z) = \dfrac{3(z^3 - z) - (3z-1)(3z^2-1)}{(z^3-z)^2} = \dfrac{-6z^3 + 3z^2 - 1}{(z^3-z)^2}$

Derivabilidad y analiticidad de funciones de variable compleja

Definición

Sea f una función de variable compleja tal que $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$. Se dice que f satisface las *Ecuaciones de Cauchy-Riemann (ECR)* en (x,y) si:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y)$$
$$u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

Teorema

Sean $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ y $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, donde D es un dominio (conjunto abierto y conexo). Si f es diferenciable en z_0 entonces u_x, u_y, v_x y v_y están definidas en (x_0, y_0) y se satisfacen las ECR en (x_0, y_0), esto es:

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$$
$$u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$$

Derivabilidad y analiticidad de funciones de variable compleja

Teorema

Sea $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ una función de variable compleja definida en un dominio D que contiene a $z_0 = x_0 + iy_0$. Si las derivadas parciales u_x, u_y, v_x y v_y son continuas en D y se satisfacen las ECR en (x_0, y_0) entonces f es diferenciable en z_0. Además, la derivada de f en z_0 se puede calcular como:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\ v_x(x_0, y_0)$$

o equivalentemente, $f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$.

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Derivabilidad y analiticidad de funciones de variable compleja

Dadas las funciones determinar dónde se satisfacen las ECR y qué se puede concluir respecto a la diferenciabilidad de la función.

- $f(z) = z^3$pa
  Como $f(z) = z^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + \left(3x^2y - y^3\right) i$, entonces

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^3 - 3xy^2 & v(x,y) &= 3x^2y - y^3 \\ u_x &= 3x^2 - 3y^2 & v_x &= 6xy \\ u_y &= -6xy & v_y &= 3x^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

  luego $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Además, como u_x, u_y, v_x y v_y son continuas en $\mathbb{R}^2$ se sigue que $f(z)$ es derivable para todo $z \in \mathbb{C}$ y además:

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3(x+iy)^2 = 3z^2.$$

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

- $f(z) = 3 - iz^2$
  Como $f(z) = 3 - iz^2 = (3 + 2xy) + (y^2 - x^2)\ i$, entonces

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 3 + 2xy & \qquad v(x,y) &= y^2 - x^2 \\ u_x &= 2y & v_x &= -2x \\ u_y &= 2x & v_y &= 2y \end{aligned}$$

luego $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Además, como u_x, u_y, v_x y v_y son continuas en $\mathbb{R}^2$ se sigue que $f(z)$ es derivable para todo $z \in \mathbb{C}$ y además:

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 2y + i(-2x) = -2i(x + iy) = -2iz.$$

- $f(z) = zIm(z)$
  $f(z) = zIm(z) = xy + i\ y^2,$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= xy & v(x,y) &= y^2 \\ u_x &= y & v_x &= 0 \\ u_y &= x & v_y &= 2y \end{aligned}$$

  Para que se satisfagan las ECR se requiere que $y = 2y$ y $0 = -x$, con lo cual $x = 0$ y $y = 0$. Como u_x, u_y, v_x y v_y son continuas en cualquier dominio que contenga a $(0,0)$ entonces f es derivable únicamente en $z = 0 + 0i = 0$ y $f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0 + i(0) = 0.$

Derivabilidad y analiticidad de funciones de variable compleja

- $f(z) = \overline{z}$
  $f(z) = \overline{z} = x - iy$

$$u(x,y) = x \qquad v(x,y) = -y$$
$$u_x = 1 \qquad v_x = 0$$
$$u_y = 0 \qquad v_y = -1$$

En este caso $u_x \neq v_y$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, luego las ECR se satisfacen en ningún punto y a pesar de que u_x, u_y, v_x y v_y son continuas en $\mathbb{R}^2$, la función f es diferenciable en ningún punto $z \in \mathbb{C}$.

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Derivabilidad y analiticidad de funciones de variable compleja

Forma Polar de las ECR

Si $f(z)$ es una función de variable compleja y $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ entonces:

$$f(z) = u(r,\theta) + i\ v(r,\theta)$$

y las ECR en forma polar, para $z \neq 0$, son:

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

y así se tiene también una forma alterna para la derivada de f

$$f'(z) = \left(u_r \cos\theta - \frac{1}{r} u_\theta \operatorname{sen}\theta \right) + i \left(v_r \cos\theta - \frac{1}{r} v_\theta \operatorname{sen}\theta \right)$$

Derivabilidad y analiticidad de funciones de variable compleja

Para las siguientes funciones determinar dónde se satisfacen las ECR y qué se puede concluir respecto a la diferenciabilidad de la función.

1. $f(z) = \dfrac{2z+1}{3z}$
2. $f(z) = Re(z) + Im(z)$
3. $f(z) = z\overline{z}$
4. $f(z) = 2x + ixy^2$
5. $f(z) = iz + |z|$
6. $f(z) = e^x e^{-iy}$

Funciones analíticas

Funciones analíticas

Una función f de variable compleja es *analítica (holomorfa o regular)* en z_0, si $z_0 \in Dom(f)$ y f es diferenciable en cada punto de alguna ε-vecindad de z_0. En este caso z_0 se denomina *punto regular* de f.

f se dice *analítica en* $S \subseteq \mathbb{C}$ si es analítica en cada $z \in S$. Si f es analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ entonces f es una *función entera*.

Un punto z_0 es *singular* o es una *singularidad* de f si f no es analítica en z_0 pero es analítica en algún punto de cada ε-vecindad de z_0.

Teorema

Si f y g son funciones analíticas en z_0 y $k \in \mathbb{C}$ constante, entonces las funciones kf, $f+g$, $f-g$, $f\ g$, f/g, $f \circ g$ son analíticas en z_0 siempre y cuando estén definidas.

Funciones analíticas

Estudiar la analiticidad y posibles singularidades de las siguientes funciones:

- $f(z) = -z^2 - 8iz^2 - i$
  En este caso $f(z)$ es un polinomio con coeficientes complejos, por lo tanto es derivable en todo $z \in \mathbb{C}$. Se sigue que f es analítica en todo $z \in \mathbb{C}$ y de esta manera es una función entera.
- $f(z) = zIm(z)$
  En este caso $f(z)$ es únicamente derivable en $z = 0$, entonces f es analítica en ningún punto, ya que no es posible encontrar una ε-vecindad de $z = 0$ tal que f sea derivable en cada uno de sus puntos. Además, f no tiene singularidades.

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

- $h(z) = \dfrac{z}{z+3i}$
  En este caso $h(z)$ es una función racional compleja, luego es derivable en su dominio: $\mathbb{C} \setminus \{-3i\}$.

  Si $z_0 \neq -3i$ entonces siempre es posible encontrar una ε-vecindad de z_0 tal que h sea derivable en cada uno de sus puntos, con lo cual h es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{-3i\}$.

  Si $z_0 = -3i$ entonces h no es analítica en z_0 y es posible encontrar un punto z en cada ε-vecindad de z_0 de tal manera que h sea analítica en z. Luego $z_0 = -3i$ es la única singularidades de h.

- $g(z) = e^x \sin y + i\ e^x \cos y$.
  En este caso se analizan primero las ECR:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= e^y \sin y & \qquad v(x,y) &= e^x \cos y \\
u_x &= e^x \sin y & v_x &= e^x \cos y \\
u_y &= e^x \cos y & v_y &= -e^x \sin y
\end{aligned}
$$

  Si $u_x = v_y$ entonces $e^x \sin y = 0$ y esto implica que necesariamente $\sin y = 0$, es decir, $y = n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$.
  De manera similar, si $u_y = -v_x$ entonces $e^x \cos y = 0$, con lo cual $\cos y = 0$ y de aquí $y = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$.

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Dado que no es posible encontrar un valor de y que satisfaga las dos condiciones de manera simultánea, se concluye que las ECR se satisfacen en ninguna pareja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y por lo tanto g es derivable en ningún punto $z \in \mathbb{C}$. De esta forma g es analítica en ningún punto y carece de singularidades.

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Examine la analiticidad de la función f. Determine las singularidades, si las tiene.

1. $f(z) = Re(z)\ e^{-\overline{z}}$
2. $f(z) = e^{-y} \operatorname{sen} x - ie^{-y} \cos x$
3. $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$
4. $f(z) = 5e^{y}e^{-3ix}$
5. $f(z) = \dfrac{3z+1}{z(z^2-4)}$
6. $f(z) = \dfrac{5z+4}{z^2+6z-2}$
7. $f(z) = \dfrac{3}{(z^3 - z^2 - 9z + 9)(z^2 + 2z - 71)}$

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería