Colorações próprias: um estudo aprofundado

Autores: Gabriel Souza, Jonathan Melo

Orientador: Prof. Celso A. Weffort-Santos

13 de abril de 2020

1 Introdução

Nesta seção serão mostrados os conceitos iniciais sobre grafos, os objetivos procurados durante a pesquisa sobre o tema, a justificativa para o tema escolhido, bem como a notação que será usada durante o documento para a descrição dos conceitos.

A ideia inicial do que hoje se tornou um dos grandes estudos da área da matemática e tecnologia partiu de Leonhard Euler (1707 –1783) matemático e físico suíço que teve sua motivação para a criação do problema das Sete Pontes de Königsberg.

A cidade de Königsberg (após 1946 chamada de Kaliningrado) é uma cidade russa onde em uma parte do seu território existe um rio que separa a cidade em duas áreas. No decorrer desse rio existiam 7 pontes conectando as duas áreas da cidade formando algo parecido com a imagem que podemos ver na Figura 1.

A motivação de Euler veio a partir de uma discussão feita pelos moradores da cidade, os mesmos argumentavam se era ou não possível atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma delas durante o trajeto.

Euler provou que era impossível este trajeto e deu início ao primeiro teorema da Teoria de Grafos, antes de introduzirmos os termos técnicos, se fossemos trazer este teorema para o problema das pontes, Euler provou que para que esse caminho fosse possível, cada uma das regiões do mapa precisaria ter um número par de pontes incidentes a ele. O teorema descrito, levou o nome de Ciclo Euleriano.

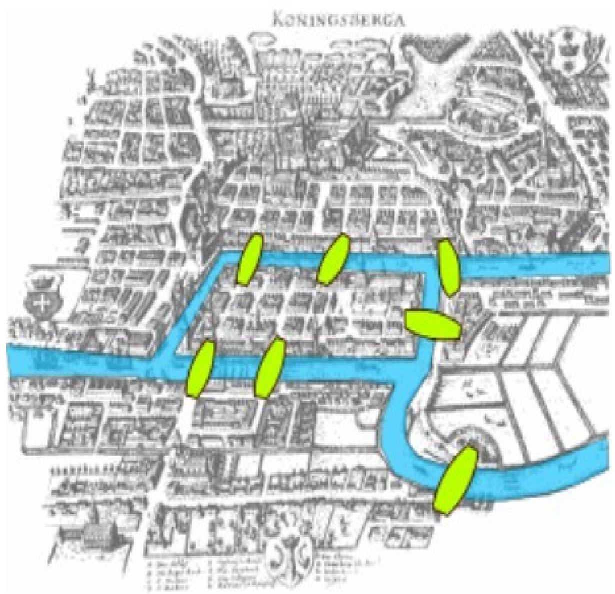

Figura 1: Mapa das pontes de Königsberg

Após criado o conceito inicial sobre grafos, um outro matemático introduziu uma nova forma de desenharmos um grafo, William Thomas Tutte (1917-2002) definiu que um grafo poderia ser representado por vértices(pontos) e arestas(linhas), aonde os vértices são interligados por arestas conectados a eles, trazendo esta definição para o problema das sete pontes, definiríamos que ponte do mapa seria uma aresta e cada ilha seria um vértice, tendo sua definição visual parecida com a Figura 2.

1.1 Conceitos técnicos da Teoria de Grafos

Como vimos na seção anterior, após as descobertas de Euler, foram introduzidos novas maneiras de lidarmos com problemas parecidos. Um grafo G é composto por vértices v e arestas e sendo sua composição completa denotada como $G(v, e)$. O número de vértices contidas em um grafo é definido como a Ordem do grafo n e o número de arestas é o seu Tamanho m. Esses conceitos iniciais sobre o tema, podem ser desdobrados em outros conceitos que complementam e inserem novas definições para o grafo.

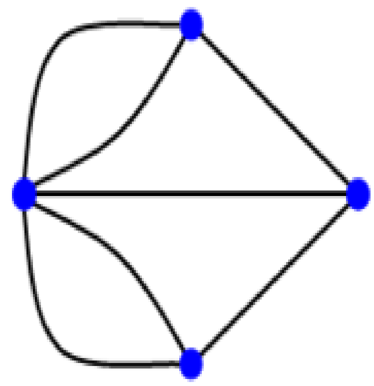

Figura 2: Representação do grafo das sete pontes de Königsberg

1.1.1 Vizinhança de vértices

Em um grafo G existem os vértices u e v ligados por uma aresta de G, baseado nessas afirmações podemos definir que os vértices u e v são adjacentes ou vizinhos, caso em nosso grafo existissem mais duas vértices ligadas a vértice v sendo elas z e w, poderíamos a partir disso definir que a vizinhança de V é: $n(V)\{u, z, w\}$, representado visualmente na Figura 3.

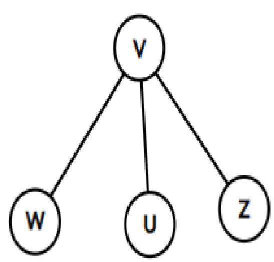

Figura 3: Representação visual da vizinhança de v

1.1.2 Grau de vértices

Em um grafo G contendo os vértices $V = \{u, x, w\}$ e as seguintes vizinhanças de vértices $n(u) = \{x, w\}$, $N(x) = \{u\}$ e $N(w) = \{u\}$. Definimos que o grau de um vértice é o número de arestas incidentes nele e é denotado como $d(v)$, baseado nessa condições e utilizando o exemplo criado, denotaríamos o grau de u como $d(u) = 2$, $d(x) = 1$ e $d(w) = 1$, visto que baseado em nossa vizinhança esse é o número de arestas incidentes em cada um de nossos vértices.

1.2 Coloração própria de vértices em grafos

Sendo esse o tema escolhido para as nossas pesquisas, a definição do problema diz que para termos uma coloração própria dentro de um grafo, vértices que são adjacentes não podem ter a mesma cor. Desta maneira podemos definir também um número cromático para o nosso grafo denotado de $\chi(G)$, número esse que é definido como o menor número de cores possíveis para pintar um grafo de forma que cumpramos todas as regras definidas para um grafo com coloração própria. Um grafo G é considerado k-Colorivel, se pudermos dentro dele usar um número k de cores para sua coloração sem que afetemos a regra da coloração própria.

1.2.1 História e o problema das quatro cores

Antes de introduzirmos a motivação para o problema da coloração própria, é preciso definir o conceito de um grafo planar, visto que este tipo de grafo foi a motivação inicial para a criação da primeira definição da coloração própria de grafo. Um grafo G é considerado planar se puder ser desenhado no plano sem que nenhuma de suas arestas se cruzem, exemplo de um grafo planar existente na Figura 4.

A primeira ideia de coloração própria se deu em 1852 aonde o matemático Francis Guthrie criou a teoria que para todo mapa o número mínimo de cores necessárias para pinta-lo para que nenhuma de suas regiões que partilhassem fronteiras fossem pintadas da mesma cor era sempre quatro.

Em 1879 Alfred Bray Kempe publicou a primeira suposta solução para a teoria das quatro cores, solução essa que foi considerada incorreta por Percy Heawood em 1890, que também foi o criador do teorema das Cinco cores, e provou a veracidade do mesmo.

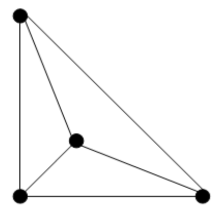

Figura 4: Exemplo de grafo planar

Apesar de ser considerado incorreta a teoria de Kempe, ela foi grande influenciadora para que em 1977 Kenneth Appel (1932-2013) e Wolfgang Haken(1928) com o auxílio do uso de um computador, provassem novamente que a teoria das quatro cores era correta.

Os mapas estudados por esses matemáticos são considerados mapas que podem ser representados por um grafo, o nome que esse grafo leva é grafo dual.

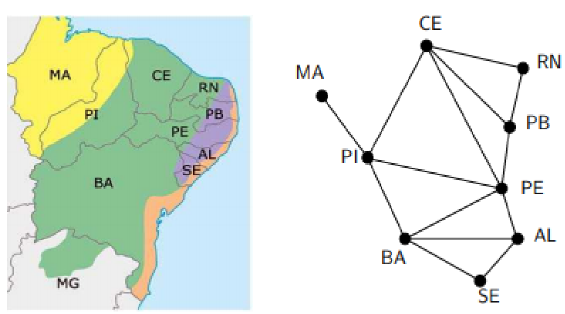

Figura 5: Exemplo de grafo Dual

1.2.2 Complexidade da solução

Nos problemas envolvendo coloração própria de vértices, encontrar um número k de cores possíveis é mais simples do que encontrar $\chi(G)$, visto que se tivermos n vértices podemos ter que $k = n$ e ter uma cor para cada vértice do grafo. Baseado nessa afirmação podemos concluir que a maior dificuldade para este tema é encontrar o número cromático da instância ou o menor número de cores possível, transformando este tema em um problema computacional extremamente difícil aonde validar uma solução é simples porém achar uma solução se torna muito difícil. Validar uma solução como citado acima nos casos de coloração própria é simples pois baseado na instância que nos foi dada, podemos validar todos os vértices adjacentes a ele de forma rápida, validando se eles tem ou não a mesma cor. Já para criarmos uma solução isso se torna extremamente difícil, dado um grafo G aonde $V(G) = \{v_1, ...V_n\}$, para encontrar a solução com o melhor número cromático desta instância devemos validar todas as situações e adjacências de todos os vértices do grafo, para isso normalmente são utilizados algoritmos de busca que serão citados e explicados posteriormente.

1.2.3 Aplicação reais do tema

Neste tópico iremos descrever algumas aplicações no nosso dia aonde o auxílio do conceito de coloração própria de grafos seria útil para encontrarmos a melhor solução para o problema escolhido.

1.2.3.1 Organização de provas de uma universidade

Um dos melhores de exemplo do uso da coloração própria em aplicações reais é na organização de provas de uma universidade aonde é necessário que duas disciplinas que contiverem alunos em comum não podem ter suas provas agendadas no mesmo horário, levando-nos a seguinte pergunta, qual seria o menor número de horários que a universidade teria de usar para aplicar todas as provas respeitando as regras da instância?

1.2.3.2 Organizações de produtos químicos em uma indústria

Em uma indústria química existem n produtos, aonde muitos deles compartilham o mesmo tipo de composição, produtos esses que não podem ser colocados juntos devido a possibilidade de que uma reação química estragassem os mesmos. Baseado nessa instância, qual seria o menor número de compartimentos possíveis para guardar esses produtos de forma que produtos com a mesma composição não podem ser colocados juntos.

1.3.3.3 Atribuição de frequências de rádio

Nesse caso o grafo nos ajuda da seguinte forma. Os transmissores (antenas) são representados como vértices. Uma estação não pode se sobrepor a outra,

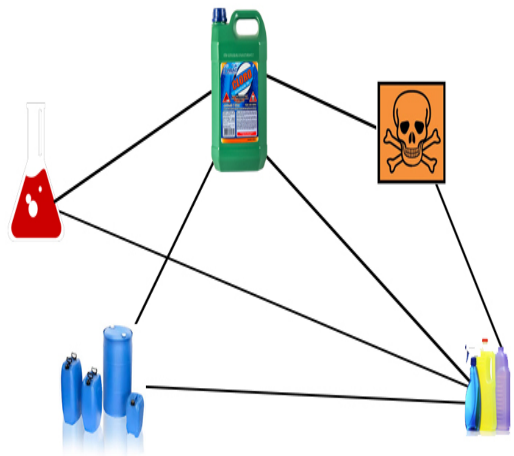

Figura 6: Exemplo de separação de produtos químicos

caso isso venha a ocorrer, causará interferência, porque elas poderiam usar a mesma frequência.

1.2.4 Algoritmos de coloração conhecidos

Nesta seção iremos mostrar conceitos de algoritmos conhecidos que auxiliam na obtenção da melhor solução para uma instância de coloração própria, visto que a complexidade deste problema é extremamente difícil, a maioria de seus algoritmos são baseados na premissa da busca incansável, aonde iremos executar todas as situações da instância a fim de no final separar a melhor delas.

1.2.4.1 Algoritmo de força bruta

Dado um grafo G simples onde $V(G) = \{v_1, ...V_N,\}$ o algoritmo de força bruta com o objetivo de buscar um k-coloração iria verificar cada uma das Kn atribuições possíveis verificando se cada uma delas está correta. Em uma instância pequena do problema, o algoritmo de força bruta encontraria o resultado de forma relativamente rápida, porém se consideramos que quanto

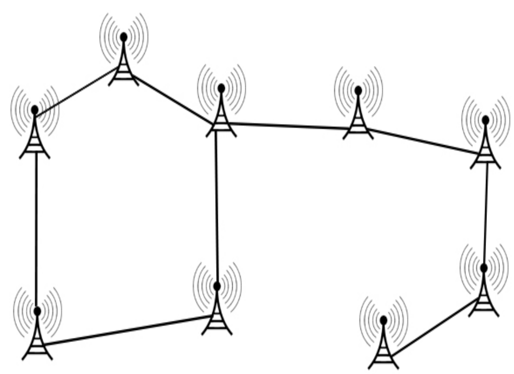

Figura 7: Exemplo de mapa de frequência de rádio

maior a instância do problema maior seria a quantidade de atribuições que deverão ser testadas, esse algoritmo se torna inutilizável e computacionalmente inviável.

1.2.4.2 Algoritmo Guloso

O algoritmo guloso é aquele que faz sempre a melhor escolha local minimizada, esperando que essa escolha se torne também a melhor escolha em um estado global da instância do problema. Este algoritmo sempre irá trazer a solução para o problema, porém esta solução não necessariamente é a melhor possível, e sim a melhor que o algoritmo encontrou dado as suas condições de busca.

1.2.4.3 Algoritmo de Welsh-Powell

Como citado no livro "Algoritmos e heurísticas - Desenvolvimento e avaliação de performance"escrito por Ruy Eduardo Campello e Nelson Maculan encontramos que o algoritmo de Welsh-Powell foi criado em 1976 e é um algoritmo guloso que visa a obtenção inicial do grau de cada vértice do grafo e ordenação dos mesmos em ordem decrescente do seu grau. Com base nisso sabemos que dado essa ordenação será associado uma cor para o primeiro vértice da lista de vértices ordenados, e também aos próximos vértices da lista que não são adjacentes aos vértices já coloridos com a primeira cor selecionada. Será feito este mesmo processo para os próximos vértices que ainda não foram coloridos, porém agora usando a próxima cor.

1.3 Objetivos

O tema dessa pesquisa é muito amplo e completo, de forma que seus conhecimentos se desdobram em várias áreas da ciência da computação e matemática, o objetivo deste projeto é que com o estudo teórico e técnico de várias técnicas e conceitos já criados anteriormente que avançam constantemente o estudo do tema atualmente. Estes estudos serão de grande influência para o nosso desenvolvimento matemático e computacional, visto que todas as técnicas até hoje criadas se desdobram dessas teorias, sendo esse o principal objetivo do projeto.

2 Materiais e métodos

3 Resultados esperados

Para os resultados esperados ao longo da nossa pesquisa, é esperado que desenvolvamos conhecimento e desenvoltura na área da matemática aplicada, que se desdobra nos estudos da Teoria de Grafos e consequentemente no estudo e aprofundamento das técnicas e teorias da coloração própria e seu estado de arte.