Taller de Reforzamiento

# Introducción a Matrices

Sesión 1

**Chamorro Rodriguez, Gianfranco David**
E-mail: gianfranco.chamorror@gmail.com

Enero 2023

---

El presente documento sirve de apoyo para el taller de reforzamiento de Econometría, durante el cual se trabajarán conceptos que serán necesarios para iniciar un curso introductorio de pregrado o reforzar conceptos olvidados. Se brindará una perspectiva amable junto a material que permitara a los participantes abarcar temas mas complejos adelante.

---

## 1. MATRICES

$$\mathrm{A}_{(fila,columna)} = A_{(n,k)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

### 1.1. MATRIZ CUADRADA

$$\mathrm{A}_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 18 & 23 & 19 \\ 32 & 16 & 13 \\ 25 & 75 & 9 \end{bmatrix}$$

## 1.2. MATRIZ SIMÉTRICA

$$\mathrm{a}_{(i,k)} = a_{(k,i)}$$

$$\mathrm{A}_{(3,3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 7 & 9 & 8 \\ 10 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

## 1.3. MATRIZ DIAGONAL

$$\mathrm{C}_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

## 1.4. MATRIZ ESCALAR

$$\mathrm{D}_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

## 1.5. MATRIZ IDENTIDAD

$$\mathrm{I}_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 1.6. MATRIZ TRIANGULAR

$$\mathrm{P}_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{(Matriz Triangular Inferior)}$$

$$Q_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ \underline{0} & 5 & 8 \\ \underline{0} & \underline{0} & 9 \end{bmatrix} \quad \text{(Matriz Triangular Superior)}$$

# 2. Operaciones con Matrices

## 2.1. IGUALDAD DE MATRICES

Sea la matriz A igual a la matriz B si $a_{(i,k)} = b_{(i,k)}$

$$A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad = \qquad B_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

## 2.2. MATRIZ TRANSPUESTA

Se obtiene intercambiando el orden de la fila con el de la columna de cada elemento generando una nueva matriz. Sea una matriz A cuya transpuesta denominamos A', donde el elemento $a_{(i,k)} = a'_{(k,i)}$.
Ejemplo :

$$A_{(2,3)} \qquad ; \qquad A'_{(3,2)}$$

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ d_{21} & e_{22} & f_{23} \end{bmatrix} A'_{(3,2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & d_{12} \\ b_{21} & e_{22} \\ c_{31} & f_{32} \end{bmatrix}$$

*Por lo tanto una Matriz simétrica A será igual a su matriz transpuesta
*La transpuesta de una matriz transpuesta es la matriz original (C')'=C

## 2.3. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE MATRICES

$$A_{(i,k)} + B_{(i,k)} = C_{(i,k)}$$
$$A_{(i,k)} - B_{(i,k)} = D_{(i,k)}$$

- **LEY CONMUTATIVA**

$$A\pm B = B\pm A$$

- **LEY ASOCIATIVA**

$$(A\pm B)\pm C = A\pm(B\pm C)$$

- **TRANSPUESTA**

$$(A\pm B)' = A'\pm B'$$

## 2.4. PRODUCTO DE MATRICES

$$A_{(i,j)} * B_{(j,n)} = C_{(i,n)}$$

Ejemplo:

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 4*2+5*7+2*3_{(1,1)} & 4*4+5*1+2*5_{(1,2)} \\ 2*2+3*7+1*3_{(2,1)} & 2*4+3*1+1*5_{(2,2)} \end{bmatrix}$$

$$AB_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 49 & 31 \\ 28 & 16 \end{bmatrix}$$

### 2.4.1. PRODUCTO INTERNO

Sea Y un vector $nx1$

$$\text{Y}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} Y_{1,1} \\ Y_{2,1} \\ \vdots \\ Y_{n,1} \end{bmatrix} \qquad ; \qquad Y'_{(1,n)} = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & \dots & Y_{1,n} \end{bmatrix}$$

$$Y'_{(1,n)}Y_{(n,1)} = (Y'_{1,1} * Y_{1,1}) + (Y'_{1,2} * Y_{2,1}) + \cdots + (Y'_{n,1} * Y_{1,n})$$

$$\text{Y'Y}_{(1,1)} = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$$

$$\text{Y'Y}_{(1,1)} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

### 2.4.2. PRODUCTO EXTERNO

$$\text{Y}_{(n,1)}Y'_{(1,n)} = YY'_{(n,n)} = \begin{bmatrix} Y_1^2 & Y_1Y_2 & \dots & Y_1Y_n \\ Y_2Y_1 & Y_2^2 & \dots & Y_2Y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_nY_1 & Y_nY_2 & \dots & Y_n^2 \end{bmatrix}$$

## 2.5. SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{cases} 9 = 6x + 2y + 7z \\ 6 = 2x + y + 3z \\ 5 = 9x + 3y + 4z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

## 2.6. MATRIZ IDENTIDAD

$$\mathrm{AI}=\mathrm{A}$$

$$\mathrm{IA}=\mathrm{A}$$

Sea una matriz no simétrica $\mathrm{B}_{(n,k)}$

$$\mathrm{B}_{(n,k)}\mathrm{I}_{(k)}=\mathrm{B}_{(n,k)}$$

$$\mathrm{I}_{(n)}\mathrm{B}_{(n,k)}=\mathrm{B}_{(n,k)}$$

# LEY ASOCIATIVA

$$(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC})$$

# LEY DISTRIBUTIVA

$$\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$$

## TRANSPUESTA DE PRODUCTO

$$(AB)' = B'A'$$
$$(ABC)' = C'B'A'$$

## ESCALAR POR MATRIZ

$$cA = c\ [a]_{i,k}$$

# 3. Suma de Elementos

### 3.1. LA MATRIZ *i*

Sea el vector columna $i$:

$$i_{(n,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad i'_{(1,n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \end{bmatrix}$$

Para hallar la suma de elementos del vector columna Y:

$$Y_{(n,1)} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$i'_{(1,n)}Y_{(n,1)} = (y_1 * 1) + (y_2 * 1) + \cdots + (y_n * 1)$$
$$i'Y_{(1,1)} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Si los elementos de $X$ fueran igual a una constante $c$ , entonces $[X] = c[i]$

$$\sum X_i = i'(ci)$$
$$= \text{c } \underline{(i'i)} \rightarrow (Producto\ Interno \sum i^2)$$
$$= \sum X_i = c\underline{n} \rightarrow número\ de\ observaciones$$

Una constante $c$ y vector $X$

$$\sum cX_i = c \sum X_i = c\ i'X$$

Si $c = 1/n$ obtendremos una media aritmética

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i = \frac{1}{n} i'X$$

Deducimos :

$$\sum X_i = i'X = n\bar{X}$$

# 4. Matriz Idempotente Útil

## 4.1. DESVIACIONES CON RESPECTO A LA MEDIA

Recordemos $\bar{x}$:

$$i\bar{x} = i\frac{1}{n}i'x$$
$$= \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \\ \vdots \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{n}\ i\ i'}_{MATRIZ_{(n,n)}} \quad x$$

$$[x - \bar{x}] = [x - \frac{1}{n} ii'x]$$

**Recordemos [X]=I[X]**

$$[IX - \frac{1}{n}ii'X]$$

$$\underbrace{[I - \frac{1}{n}\, i\, i']}_{M^\circ}\ X$$

La Matriz idemponente tiene como diagonal $1 - 1/n$ y fuera de la diagonal $-1/n$

**Propiedades:**
$M^\circ$ es simétrica. $M^\circ M^\circ = M^\circ$ $M^{\circ\prime} M^\circ = M^\circ$
A partir del resultado podemos ver :

$$M^\circ i = [I - \tfrac{1}{n}ii']i$$

$$= i - \tfrac{1}{n}i(i'i)$$

$$= 0$$

Esto implica $i'M^\circ = 0$:

$$\sum(X_i - \bar{X}) = i'M^\circ X = 0$$

Para una variable X la suma de cuadrado de desviaciones es:

$$\sum(X_i - \bar{X})^2 = \sum(X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)$$

$$= (\sum X_i^2) - n\bar{X}^2$$

En términos matriciales:

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = (X_i - \bar{X})'(X_i - \bar{X})$$

$$= (M^\circ X)'(\mathrm{M}^\circ X)$$

$$= \mathrm{X'}\underbrace{\mathrm{M}^{\circ\prime}\mathrm{M}^\circ}X$$

$$= \mathrm{X'}M^\circ X$$

Podemos construir una **Matriz de Suma de Cuadrados y Productos Cruzados** de desviaciones respecto de las medias para dos vectores $X$ e $Y$.

$$\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = (\mathrm{M}^\circ X)'(M^\circ Y)$$

$$\begin{bmatrix} \sum (X_i - \bar{X})^2 & \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \\ \sum (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}) & \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'M^\circ X & X'M^\circ Y \\ Y'M^\circ X & Y'M^\circ Y \end{bmatrix}$$

## 5. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Sea la matriz X por los vectores:

$$\mathrm{X}=[\ x_1 \quad x_2\ ]$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{4} & \underline{2} \\ \underline{1} & \underline{3} \end{bmatrix} \qquad =[10]$$

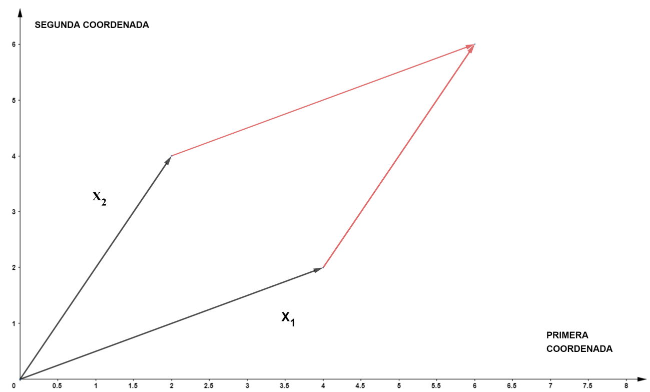


Figura 1: Determinante de la Matriz X

## 5.1. MATRIZ 2X2

La determinante de una matriz 2x2 se obtiene de la resta del producto de los dos elementos de la diagonal principal menos el producto de los dos elementos de la diagonal secundaria.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \longrightarrow det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

## 5.2. MATRIZ 3x3

En matrices de 3x3 se suele usar la **Regla de SarrUs** que consiste en un esquema gráfico para los productos positivos y otro para los negativos.
Sea la matriz A

$$\text{A}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{bmatrix} \underline{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \underline{a_{2,1}} & \underline{a_{2,2}} & a_{2,3} \\ \underline{a_{3,1}} & \underline{a_{3,2}} & \underline{a_{3,3}} \\ a_{1,1} & \underline{a_{1,2}} & \underline{a_{1,3}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \underline{a_{2,3}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \underline{a_{1,3}} \\ a_{2,1} & \underline{a_{2,2}} & \underline{a_{2,3}} \\ \underline{a_{3,1}} & \underline{a_{3,2}} & \underline{a_{3,3}} \\ \underline{a_{1,1}} & \underline{a_{1,2}} & a_{1,3} \\ \underline{a_{2,1}} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

Es decir :

$\det(A) = (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3})-(a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}+a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}+a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3})$

# 6. INVERSA DE UNA MATRIZ

Una matriz $A_(n,n)$ es invertible si la matriz $B_(n,n)$ existe tal que:

$$AB = BA = I \qquad ; \qquad B = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(\mathrm{A}^T))$$

## 6.1. Demostración en una matriz 2x2

Sea una matriz y su inversa :

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ap + br = 1 \tag{1}$$

$$aq + bs = 0 \tag{2}$$

$$cp + dr = 0 \tag{3}$$

$$cq + ds = 1 \tag{4}$$

De (1) :

$$p = \frac{1 - br}{a}$$

Reemplazando en (3)

$$\text{c}(\tfrac{1-br}{a}) + \text{dr} = 0$$

$$\text{c}(\tfrac{1-br}{a}) + \text{dr}(\tfrac{a}{a}) = 0(\tfrac{a}{a})$$

$$\text{c(1-br)} + \text{dr(a)} = 0$$

$$\text{c-cbr} + \text{dra} = 0$$

$$\text{c} + \text{(da -cb)r} = 0$$

$$\mathbf{r=}\ \tfrac{-c}{da-bc}$$

Reemplazando **r** en (1) :

$$\text{p} = \frac{1 - b\frac{-c}{da-bc}}{a}$$

$$= \frac{1 + \frac{bc}{da-bc}}{a}$$

$$= \frac{\frac{ad-bc+bc}{da-bc}}{a}$$

$$= \frac{\frac{ad}{da-bc}}{a}$$

$$= \frac{ad}{a(ad-bc)}$$

$$\mathbf{p=}\ \tfrac{d}{ad-bc}$$

De (2) :

$$q = \frac{-bs}{a}$$

Reemplazando en (4)

$$\mathrm{c}(\frac{-bs}{a}) + \mathrm{ds} = 1$$

$$\mathrm{c}(\frac{-bs}{a}) + \mathrm{ds}(\frac{a}{a}) = 1(\frac{a}{a})$$

$$\mathrm{c(-bs) + ds(a) = a}$$

$$\mathrm{-cbs + dsa = a}$$

$$\mathrm{(da\ -cb)s = a}$$

$$\mathbf{s=}\ \frac{a}{ad-bc}$$

Reemplazando s en (4)

$$\mathrm{cq} + \mathrm{d}(\frac{a}{ad-bc}) = 1$$

$$\mathrm{cq} = 1 - (\frac{da}{ad-bc})$$

$$\mathrm{cq} = (\frac{ad-bc-ad}{ad-bc})$$

$$\mathrm{cq} = (\frac{-bc}{ad-bc})$$

$$\mathrm{q} = (\frac{-bc}{c(ad-bc)})$$

$$\mathbf{q=}\ \frac{-b}{ad-bc}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \\ \frac{-c}{da-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{-b} \\ \\ \mathbf{-c} & \mathbf{a} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(Adj(A^T))$$

Recordando que la adjunta de una matriz :

$$\text{Adj}_{ij}(\text{A})=(-1)^{(i+j)}.\ \det\text{A}_{\ (ij)}$$

**- Adj$_{11}$(A)**

$$\text{A}=\begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} = \text{Adj}_{11}(\text{A}) = (-1)^{(1+1)}\ .\ \det(d) = d$$

**- Adj$_{12}$(A)**

$$\text{A}=\begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \mathbf{c} & \underline{d} \end{bmatrix} = \text{Adj}_{12}(\text{A}) = (-1)^{(1+2)}\ .\ \det(c) = -c$$

**- Adj$_{21}$(A)**

$$\text{A}=\begin{bmatrix} \underline{a} & \mathbf{b} \\ \underline{c} & \underline{d} \end{bmatrix} = \text{Adj}_{21}(\text{A}) = (-1)^{(2+1)}\ .\ \det(b) = -b$$

**- Adj$_{22}$(A)**

$$\text{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \underline{b} \\ \underline{c} & \underline{d} \end{bmatrix} = \text{Adj}_{22}(\text{A}) = (-1)^{(2+2)}\ .\ \det(a) = a$$

$$\text{Adj(A)}=\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \text{Adj}(\text{A}^{(T)}) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### 6.2. Propiedades

- Si A  B es invertible : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
- $(kA)^{-1} = (k^{-1})(A^{-1})$

Hallar la Matriz inversa de:

$$E=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

Solución:

2 1. Hallar la determinante :

$\det(E)$ =(3*2)-(2*1)=4

2.Hallar la Matriz Transpuesta:

$$E^{(T)} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

3.Hallar la adjunta de la Matriz Transpuesta:

$2 = (-1)^{(1+1)} \,.\, \det(2) = 2$

$= (-1)^{(2+1)} \,.\, \det(2) = -2$

$= (-1)^{(1+2)} \,.\, \det(1) = -1$

$= (-1)^{(2+2)} \,.\, \det(3) = 3$

$$\mathrm{Adj}(E^{(T)}) = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

4.La Matriz inversa será:

$$E^{(-1)} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$