PROBLEMA 2

Dado cinco observaciones $U_{-2}, U_{-1}, U_0, U_1, U_2$ en puntos de tiempo igualmente espaciados $t = -2, -1, 0, 1, 2$ indicar como se ajusta una parábola a las observaciones por mínimos cuadrados ordinarios y **demostrar** que el valor dado por la parábola en el tiempo $t = 0$ es :

$$\frac{1}{35}(-3U_{-2} + 12U_{-1} + 17U_0 + U_1 - 3U_2)$$

Solución

Sea el modelo econométrico de una parábola que se ajusta a las observaciones .

$$U_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + u_t \quad , \quad t = -2, -1, 0, 1, 2$$

Modelo estimado

$$\hat{U}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 t + \hat{\beta}_3 t^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}
e_t &= U_t - \hat{U}_t \\
e_t &= U_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 t - \hat{\beta}_3 t^2 \\
e_t^2 &= (U_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 t - \hat{\beta}_3 t^2)^2 \\
\sum_{t=-2}^{2} e_t^2 &= \sum_{t=-2}^{2} (U_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 t - \hat{\beta}_3 t^2)^2
\end{aligned}$$

Por consiguiente, para ajustar la parábola a las observaciones, empleamos el método de mínimos cuadrados ordinarios (**MCO**).

Condición necesaría de primer orden : Establece, que las primeras derivadas parciales con respecto a los estimadores $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, tienen que igualarse a cero.

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} \sum_{t=-2}^{2} e_t^2 = 0 \Longleftrightarrow 2 \sum_{t=-2}^{2} (U_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 t - \hat{\beta}_3 t^2)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_2} \sum_{t=-2}^{2} e_t^2 = 0 \Longleftrightarrow 2 \sum_{t=-2}^{2} (U_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 t - \hat{\beta}_3 t^2)(-t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_3} \sum_{t=-2}^{2} e_t^2 = 0 \Longleftrightarrow 2 \sum_{t=-2}^{2} (U_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 t - \hat{\beta}_3 t^2)(-t^2) = 0$$

Desarrollando obtenemos las siguientes ecuaciones normales

$$\sum_{t=-2}^{2} U_t = n\hat{\beta}_1 + \sum_{t=-2}^{2} t\hat{\beta}_2 + \sum_{t=-2}^{2} t^2\hat{\beta}_3$$
$$\sum_{t=-2}^{2} U_t t = \sum_{t=-2}^{2} t\hat{\beta}_1 + \sum_{t=-2}^{2} t^2\hat{\beta}_2 + \sum_{t=-2}^{2} t^3\hat{\beta}_3$$
$$\sum_{t=-2}^{2} U_t t^2 = \sum_{t=-2}^{2} t^2\hat{\beta}_1 + \sum_{t=-2}^{2} t^3\hat{\beta}_2 + \sum_{t=-2}^{2} t^4\hat{\beta}_3$$

Expresando en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \sum_{t=-2}^{2} U_t \\ \sum_{t=-2}^{2} U_t t \\ \sum_{t=-2}^{2} U_t t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=-2}^{2} t & \sum_{t=-2}^{2} t^2 \\ \sum_{t=-2}^{2} t & \sum_{t=-2}^{2} t^2 & \sum_{t=-2}^{2} t^3 \\ \sum_{t=-2}^{2} t^2 & \sum_{t=-2}^{2} t^3 & \sum_{t=-2}^{2} t^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

Despejando el vector columna de los estimadores $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=-2}^{2} t & \sum_{t=-2}^{2} t^2 \\ \sum_{t=-2}^{2} t & \sum_{t=-2}^{2} t^2 & \sum_{t=-2}^{2} t^3 \\ \sum_{t=-2}^{2} t^2 & \sum_{t=-2}^{2} t^3 & \sum_{t=-2}^{2} t^4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=-2}^{2} U_t \\ \sum_{t=-2}^{2} U_t t \\ \sum_{t=-2}^{2} U_t t^2 \end{pmatrix}$$

En el siguiente cuadro puede ver los siguientes resultados para puntos igualmente espaciados $t = -2, -1, 0, 1, 2$

t	U_t	$U_t t$	$U_t t^2$	t	t^2	t^3	t^4
-2	U_{-2}	$-2U_{-2}$	$4U_{-2}$	-2	4	-8	16
-1	U_{-1}	$-U_{-1}$	U_{-1}	-1	1	-1	1
0	U_0	0	0	0	0	0	0
1	U_1	U_1	U_1	1	1	1	1
2	U_2	$2U_2$	$4U_2$	2	4	8	16
Suma total	$\sum_{t=-2}^{2} U_t$	$\sum_{t=-2}^{2} U_t t$	$\sum_{t=-2}^{2} U_t t^2$	$\sum_{t=-2}^{2} t$	$\sum_{t=-2}^{2} t^2$	$\sum_{t=-2}^{2} t^3$	$\sum_{t=-2}^{2} t^4$

por lo tanto del cuadro anterior obtenemos

$$\sum_{t=-2}^{2} U_t = U_{-2} + U_{-1} + U_0 + U_1 + U_2$$
$$\sum_{t=-2}^{2} U_t t = -2U_{-2} - U_{-1} + 0 + U_1 + 2U_2$$
$$\sum_{t=-2}^{2} U_t t^2 = 4U_{-2} + U_{-1} + 0 + U_1 + 4U_2$$
$$\sum_{t=-2}^{2} t = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0$$
$$\sum_{t=-2}^{2} t^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$$
$$\sum_{t=-2}^{2} t^3 = -8 - 1 + 0 + 1 + 8 = 0$$
$$\sum_{t=-2}^{2} t^4 = 16 + 1 + 0 + 1 + 16 = 34$$

Remplazando los valores

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_{-2} + U_{-1} + U_0 + U_1 + U_2 \\ -2U_{-2} - U_{-1} + 0 + U_1 + 2U_2 \\ 4U_{-2} + U_{-1} + 0 + U_1 + 4U_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \\ \hat{\beta}_2 \\ \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{35}(-3U_{-2} + 12U_{-1} + 17U_0 + 12U_1 - 3U_2) \\ \\ \frac{1}{70}(10U_{-2} - 5U_{-1} - 10U_0 - 5U_1 + 10U_2) \\ \\ \frac{1}{350}(50U_{-2} - 25U_{-1} - 5U_0 - 25U_1 + 50U_2) \end{pmatrix}$$

Retomando el modelo estimado

$$\hat{U}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 t + \hat{\beta}_3 t^2$$

El valor dado por la parábola en el tiempo t=0 es:

$$\hat{U}_0 = \hat{\beta}_1$$
$$\hat{U}_0 = \frac{1}{35}(-3U_{-2} + 12U_{-1} + 17U_0 + 12U_1 - 3U_2) \qquad \blacksquare$$