PROBLEMA 3

En el modelo

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \mu_i \ , \ \text{i} = 1, 2, \ldots, n$$

Sabemos que

$$X^t X = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$X^t Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Determine la estimación de los coeficientes del modelo propuesto si $\beta_1 = \beta_2$

Solución

Dado que tenemos el siguiente modelo de tres variables

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \mu_i$$

Ahora, aplicando el operador de esperanza matemática se tiene la siguiente función de regresión poblacional

$$E(Y_i) = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} \ \ , \ \ E(\mu_i) = 0$$

Condición de $\beta_1 = \beta_2 = \beta^*$

$$E(Y_i) = \beta^* (X_{1i} + X_{2i})$$

Dado que el propósito es estimar los parámetros de la función de regresión poblacional, entonces se considera la siguiente estimación

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i}$$

Condición de $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \hat{\beta}^*$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}^* (X_{1i} + X_{2i})$$

Como la variable observada no siempre coincide con la variable estimada existe la posibilidad de que se generen errores muestrales de forma que por definición se tiene:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_1 = Y_i - \hat{\beta}^* (X_{1i} + X_{2i})$$

entonces, para poder obtener el estimador

$$Min \ \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}^* (X_{1i} + X_{2i})\right)^2$$

Por la condición de primer orden se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}^*}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 0 \leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}^*\left(X_{1i}+X_{2i}\right)\right)^2\left(-\left(X_{1i}+X_{2i}\right)\right) = 0$$

$$\hat{\beta}^* = \frac{X_{11}Y_1 + X_{12}Y_2 + X_{21}Y_1 + X_{22}Y_2}{\left(X_{11}+X_{21}\right)^2 + \left(X_{12}+X_{22}\right)^2} \qquad \bigstar$$

Del modelo

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \mu_i$$

se tiene para $i = 1, 2$

$$Y_1 = \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + \mu_1$$
$$Y_2 = \beta_1 X_{12} + \beta_2 X_{22} + \mu_2$$

Por tanto, en forma matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

Del cual

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \ , \ X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, haciendo algunos cálculos básicos se tiene

$$X^{'}X = \begin{pmatrix} X_{11}^2 + X_{12}^2 & X_{11}X_{21} + X_{12}X_{22} \\ X_{21}X_{11} + X_{22}X_{12} & X_{21}^2 + X_{22}^2 \end{pmatrix} \ , \ X^{'}Y = \begin{pmatrix} X_{11}Y_1 + X_{12}Y_2 \\ X_{21}Y_1 + X_{22}Y_2 \end{pmatrix}$$

Y dado que tenemos como dato

$$X^{'}X = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} , X^{'}Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

se pueden igualar los valores de las matrices

$$X_{11}^2 + X_{12}^2 = 10 \ , \ X_{21}^2 + X_{22}^2 = 20 \ , \ X_{11}X_{21} + X_{12}X_{22} = 0 \ , \ X_{21}X_{11} + X_{22}X_{12} = 0$$

$$X_{11}Y_1 + X_{12}Y_2 = 3 \ , \ X_{21}Y_1 + X_{22}Y_2 = 5$$

de la igualdad de matrices, se tiene

$$X_{11}X_{21} = -X_{12}X_{22}$$

Por lo tanto

$$\hat{\beta}^* = \frac{X_{11}Y_1 + X_{12}Y_2 + X_{21}Y_1 + X_{22}Y_2}{\left(X_{11}+X_{21}\right)^2 + \left(X_{12}+X_{22}\right)^2} = \frac{3+5}{30} = \frac{4}{15} = 0{,}2666\ldots \qquad \blacksquare$$