PROBLEMA 1

Dado el siguiente modelo

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

Asumiendo el método de minimos cuadrados ordinarios, ¿ Cómo podemos estar seguros que estamos minimizando la $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2$? **Demuetre** su respuesta.

Solución

Rescordar :

- **FRP :** $E(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}$
- **FRM :** $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$
- $\hat{u}_i = e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

Entonces, para demostrar el problema, partimos de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} e_i &= Y_i - \hat{Y}_i \\ e_i &= Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i} \\ e_i^2 &= (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})^2 \\ \sum_{i=1}^{n} e_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, para minimizar $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2$ empleamos el método de minimos cuadrados ordinarios (**MCO**).

Condición necesaría de primer orden : Establece, que las primeras derivadas parciales con respecto a los estimadores $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, tienen que igualarse a cero.

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 0 \,, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 0 \,, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_3} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 0$$

Condición suficiente de segundo orden : Establece, que $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2$ será un mínimo, si los menores principales directores del determinante (simétrico) son de la siguiente manera , $|H_1| > 0$; $|H_2| > 0$; $|H_3| > 0$. Donde

$$|H_1| = \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_1^2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 2n > 0 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_1^2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 & \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_1 \partial \hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_2 \partial \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 & \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_2^2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ 2\sum_{i=1}^{n} X_{2i} & 2\sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 \end{vmatrix} > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_1^2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 & \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_1 \partial \hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 & \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_1 \partial \hat{\beta}_3} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_2 \partial \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 & \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_2^2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 & \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_2 \partial \hat{\beta}_3} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_3 \partial \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 & \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_3 \partial \hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 & \frac{\partial^2}{\partial \hat{\beta}_3^2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \end{vmatrix}$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{n} X_{2i} & 2\sum_{i=1}^{n} X_{3i} \\ 2\sum_{i=1}^{n} X_{2i} & 2\sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 & 2\sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{3i} \\ 2\sum_{i=1}^{n} X_{3i} & 2\sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{3i} & 2\sum_{i=1}^{n} X_{3i}^2 \end{vmatrix} > 0$$

Por lo tanto, gracias a la condición suficiente de segundo orden, podemos estar seguros que estamos minimizando $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$.