Fundamentos da Matemática
Fernando Torres

Números Complexos

Gabriel Tebaldi Santos

RA: 160508

Sumário

Historia

Historicamente, os números complexos começaram a ser estudados graças à grande contribuição do matemático Girolamo Cardano (1501-1576). Esse matemático mostrou que mesmo tendo um termo negativo em uma raiz quadrada era possível obter uma solução para a equação do segundo grau: $x^2 - 10x + 40 = 0$. Essa contribuição foi de grande importância, pois até então os matemáticos não acreditavam ser possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. A partir dos estudos de Girolamo Cardano, outros matemáticos estudaram sobre esse impasse na matemática, obtendo uma formalização rigorosa com Friedrich Gauss (1777-1855).

O conjunto dos números complexos é o conjunto que possui maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos. É necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos.

Introdução:

O fato de que um número negativo não tem raiz quadrada parece ter sido sempre claro para os matemáticos que se depararam com a questão.
As equações de segundo grau apareceram na matemática já nas tabuletas de argila da Suméria, aproximadamente 1700 anos antes de Cristo e,
ocasionalmente, levaram a radicais de números negativos; porém, não foram elas, em momento algum, que sugeriram o uso de números complexos.
A rigor, uma equação era vista como a formulação matemática de um problema concreto; assim, se no processo de resolução aparecia uma raiz quadrada de um número negativo, isto era interpretado apenas como uma indicação de que o problema originalmente proposto não tinha solução. Como veremos neste capítulo, foram só as equações de terceiro grau que impuseram a necessidade de trabalhar com estes números.
Vejamos inicialmente alguns antecedentes. Um primeiro exemplo desta atitude aparece na Arithmetica de Diophanto. Aproximadamente no ano de 275 d.c. ele considera o seguinte problema:
Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados.
Chamando x e y o comprimento dos catetos desse triângulo temos, na nossa notação atual:

$$\frac{1}{2}xy = 7 \quad ; \quad x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2.$$

Substituindo y em função de x obtemos a equação:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0,$$

cujas raízes são:

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Neste ponto Diophanto observa que só poderia haver solução se $(\frac{172}{2})^2 \geq 24 \times 336$ o que implica, obviamente, que não existe o triângulo procurado. Neste contexto, é claro que não há necessidade alguma de introduzir um sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.
Outras referências à questão aparecem na matemática indiana. Aproximadamente no ano 850 d.c., o matemático indiano Mahavira afirma:
... como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem portanto raiz quadrada.
Já no século XII o famoso matemático Bhaskara (1114-1185 aprox.) escreve:
O quadrado de um positivo é positivo; e a raiz quadrada de um positivo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado.

Também na matemática européia aparecem observações desta natureza, Luca Paccioli, na sua Summa di Arithmetica Geometria, publicada em 1494, escreve que a equação $x^2 + c = bx$ é solúvel somente se $\frac{1}{4}b^2 \geq c$ e o matemático francês Nicolas Chuquet (1445-1500 aprox.) faz observações semelhantes sobre ``soluções impossíveis'' num manuscrito não publicado de 1484.

Desde que os babilônios descobriram a forma de resolver equações quadráticas, se passaram mais de 3000 anos até a descoberta da fórmula que da as raízes das equações de terceiro grau por Del Ferro, Cardano e Tartaglia no início do século XVI. Dada a equação $X^3 = aX + b$, a fórmula de Cardano-Tartaglia que permite obter uma raiz é:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Esta fórmula, junto com o método de resolução das equações de quarto grau, foi dada a público em 1545, no Ars Magna, de Cardano. A publicação desta obra deu um novo impulso ao estudo da álgebra.

É claro que quando $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} < 0$ a fórmula parece não ter sentido: porém, mesmo neste caso, a equação pode ter solução.

Em 1575, um outro algebrista italiano chamado Raphael Bombelli publicou um livro chamado Álgebra em que descreve as idéias de Cardano de forma didática. é precisamente neste livro onde aparece pela primeira vez a necessidade explícita de introduzir os números complexos e também uma primeira apresentação do assunto.

Ao aplicar a fórmula acima ao exemplo $x^3 = 15X + 4$, Bombelli obtém:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

mas é facil perceber diretamente que $x = 4$ é uma solução desta equação.

Bombelli decidiu trabalhar como se raízes quadradas de números negativos fossem verdadeiros números. Ele concebe que a raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$ pode ser um ``número'' da mesma forma, isto é, do tipo $a + \sqrt{b}$. Talvez, a raiz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$ seja da forma $a - \sqrt{b}$. Neste caso, ter-se-ia que $x = a + \sqrt{b} + a - \sqrt{b} = 4$, donde é fácil deduzir que $a = 2$. Assumindo que se aplicam a estes números as regras usuais dos cálculos algébricos não foi difícil descobrir que $b = -1$ e verificar que, de fato,

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}.$$

Bombelli percebeu claramente a importância deste achado. Ele diz:

Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre cubo igual a uma quantidade e um número. ... A princípio, a coisa toda me pareceu mais basea em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova.

O caso em que $(\frac{a}{3})^3 > (\frac{b}{2})^2$, era chamado na época de casus irreducibilis porque qualquer tentativa de calcular de fato o valor da incógnita pela fórmula de Cardano-Tartaglia, sem conhece-lo antecipadamente leva, de novo, à equação de terceiro grau original. Porém, este era, em certo sentido, o mais importante de todos, pois é justamente o caso em que a equação considerada tem três raízes reais.

A origem de i ao quadrado igual a -1:

No estudo dos números complexos deparamo-nos com a seguinte igualdade: $i^2 = -1$.

A justificativa para essa igualdade está geralmente associada à resolução de equações do 2º grau com raízes quadradas negativas, o que é um erro. A origem da expressão $i^2 = -1$ aparece na definição de números complexos, outro assunto que também gera muita dúvida. Vamos compreender o motivo de tal igualdade e como ela surge.

Primeiro, faremos algumas definições.

1. Um par ordenado de números reais (x, y) é chamado de número complexo.
2. Os números complexos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.
3. A adição e a multiplicação de números complexos são definidas por:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 , \; y_1 + y_2)$

$(x_1, y_1)*(x_2, y_2) = (x_1*x_2 - y_1*y_2 , \; x_1*y_2 + y_1*x_2)$

Exemplo 1. Considere $z_1 = (3, 4)$ e $z_2 = (2, 5)$, calcule $z_1 + z_2$ e z_1*z_2.
Solução:
$z_1 + z_2 = (3, 4) + (2, 5) = (3+2, 4+5) = (5, 9)$
$z_1*z_2 = (3, 4)*(2, 5) = (3*2 - 4*5, 3*5 + 4*2) = (-14, 23)$

Utilizando a terceira definição fica fácil mostrar que:
$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$
$(x_1 , 0)*(x_2, 0) = (x_1*x_2, 0)$

Essas igualdades mostram que no que diz respeito às operações de adição e multiplicação, os números complexos (x, y) se comportam como números reais. Nesse contexto, podemos estabelecer a seguinte relação: (x, 0) = x.

Usando essa relação e o símbolo i para representar o número complexo (0, 1), podemos escrever qualquer número complexo (x, y) da seguinte forma:

$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)*(y, 0) = x + iy \longrightarrow$ que é a chamada de forma normal de um número complexo.

Assim, o número complexo (3, 4) na forma normal fica 3 + 4i.

Exemplo 2. Escreva os seguintes números complexos na forma normal.

a) (5, – 3) = 5 – 3i
b) (– 7, 11) = – 7 + 11i
c) (2, 0) = 2 + 0i = 2
d) (0, 2) = 0 + 2i = 2i

Agora, observe que chamamos de i o número complexo (0, 1). Vejamos o que ocorre ao fazer i2.
Sabemos que i = (0, 1) e que $i^2 = i*i$. Segue que:
$i^2 = i*i = (0, 1)*(0, 1)$
Utilizando a definição 3, teremos:
$i^2 = i*i = (0, 1)*(0, 1) = (0*0 – 1*1, 0*1 + 1*0) = (0 – 1, 0 + 0) = (– 1, 0)$

Como vimos anteriormente, todo número complexo da forma (x, 0) = x. Assim,
$i^2 = i*i = (0, 1)*(0, 1) = (0*0 – 1*1, 0*1 + 1*0) = (0 – 1, 0 + 0) = (– 1, 0) = – 1$.
Chegamos à famosa igualdade $i^2 = – 1$.

Adição, subtração, multicação e divisão de números complexos:

Os números complexos são escritos na sua forma algébrica da seguinte forma: a + bi, sabemos que a e b são números reais e que o valor de a é a parte real do número complexo e que o valor de bi é a parte imaginária do número complexo.

Podemos então dizer que um número complexo z será igual a a + bi (z = a + bi).

Com esses números podemos efetuar as operações de adição, subtração e multiplicação, obedecendo à ordem e características da parte real e parte imaginária.

➢ Adição:

- $(7 + 8i) + (2 + 6i) = (7 + 2) + (8i + 6i) = 9 + 14i$
- $(3 + 2i) + (1 + 4i) = (3 + 1) + (2i + 4i) = 4 + 6i$
- $(16 + 25i) + (34 + 15i) = (16 + 34) + (25i + 15i) = 50 + 40i$

➢ Subtração

A subtração é realizada tal qual a adição, através da redução dos termos semelhantes, ou ainda subtraindo separadamente as partes reais e as partes imaginárias.

Exemplos da Subtração de Números Complexos

- $(7 + 8i) - (2 + 6i) = (7 - 2) + (8i - 6i) = 5 + 2i$
- $(3 + 2i) - (1 + 4i) = (3 - 1) + (2i - 4i) = 2 - 2i$
- $(16 + 25i) - (34 + 15i) = (16 - 34) + (25i - 15i) = -18 + 10i$

➢ Multiplicação

Realizamos a multiplicação de números complexos tratando-os como **binômios** e os multiplicando como tal, ou seja, multiplicando cada termo do primeiro binômio por cada termo do segundo:

$= 3 + 17i + 10i^2$

Note que o último termo é **10i²** e visto que $i = \sqrt{-1}$, logo **i² = -1**, o que nos permite continuar os cálculos substituindo **i²** por **-1**:

$3 + 17i + 10i^2 = 3 + 17i + 10 \cdot -1 = -7 + 17i$

Portanto:

$(3 + 2i) \cdot (1 + 5i) = -7 + 17i$

Exemplos da Multiplicação de Números Complexos

- $= -8 + 24i + 2i - 6i^2 = -8 + 26i - 6 \cdot -1 = -2 + 26i$
- $= 434 - 140i + 775i - 250i^2 = 434 + 635i - 250 \cdot -1 = 684 + 635i$
- $= 25 - 40i + 40i - 64i^2 = 25 - 64 \cdot -1 = 89$

➢ Divisão

A divisão de números complexos é realizada multiplicando o dividendo e o divisor pelo **conjugado** do divisor.

Observe no último exemplo de multiplicação acima que ao multiplicarmos o **número imaginário** **5 + 8i** pelo seu conjugado **5 - 8i** obtivemos como resultado o **número real** **89**.

A multiplicação de um **número imaginário** pelo seu **conjugado** sempre resulta em um **número real** e isto pode ser utilizado para realizar a divisão de números complexos.

Agora vejamos este exemplo de divisão:

$(5 + 3i) \div (2 - 7i)$

Para começar vamos multiplicar o divisor e o dividendo pelo conjugado do divisor como explicado acima:

$$(5 + 3i) \div (2 - 7i) = \frac{(5 + 3i) \cdot (2 + 7i)}{(2 - 7i) \cdot (2 + 7i)}$$

Para realizar o produto no **<u>denominador</u>** vamos recorrer aos **produtos notáveis**, mais especificamente ao **<u>produto da soma pela diferença de dois termos</u>**, onde temos que:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Continuando o processo da divisão temos:

$$\frac{(5 + 3i) \cdot (2 + 7i)}{(2 - 7i) \cdot (2 + 7i)} = \frac{(5 \cdot 2) + (5 \cdot 7i) + (3i \cdot 2) + (3i \cdot 7i)}{2^2 - (7i)^2} = \frac{10 + 35i + 6i + 21i^2}{4 - 49i^2} =$$

$$= \frac{10 + 41i + 21 \cdot -1}{4 - 49 \cdot -1} = \frac{-11 + 41i}{53} = -\frac{11}{53} + \frac{41}{53}i$$

Note que inicialmente tínhamos o divisor imaginário **2 - 7i** e no final temos o divisor real **53**. É por isto que utilizamos o **conjugado** como expediente para realizar a divisão, assim conseguimos transformar um **divisor imaginário** em um **divisor real**, o que facilita muito as coisas, como pudemos ver na passagem do penúltimo para o último passo.

Exemplos da Divisão de Números Complexos

- $(12 + 23i) \div (7 - 18i) = \frac{(12 + 23i) \cdot (7 + 18i)}{(7 - 18i) \cdot (7 + 18i)} = \frac{(12 \cdot 7) + (12 \cdot 18i) + (23i \cdot 7) + (23i \cdot 18i)}{7^2 - (18i)^2} =$

$$= \frac{84 + 216i + 161i + 414i^2}{49 - 324i^2} = \frac{84 + 377i + 414 \cdot -1}{49 - 324 \cdot -1} = \frac{-323 + 377i}{373} = -\frac{323}{373} + \frac{377}{373}i$$

- $(-6 - 9i) \div (12 + 35i) = \frac{(-6 - 9i) \cdot (12 - 35i)}{(12 + 35i) \cdot (12 - 35i)} =$

$$= \frac{(-6 \cdot 12) + (-6 \cdot -35i) + (-9i \cdot 12) + (-9i \cdot -35i)}{12^2 - (35i)^2} = \frac{-72 + 210i - 108i + 315i^2}{144 - 1225i^2} =$$

$$= \frac{-72 + 102i + 315 \cdot -1}{144 - 1225 \cdot -1} = \frac{-387 - 102i}{1369} = -\frac{387}{1369} - \frac{102}{1369}i$$

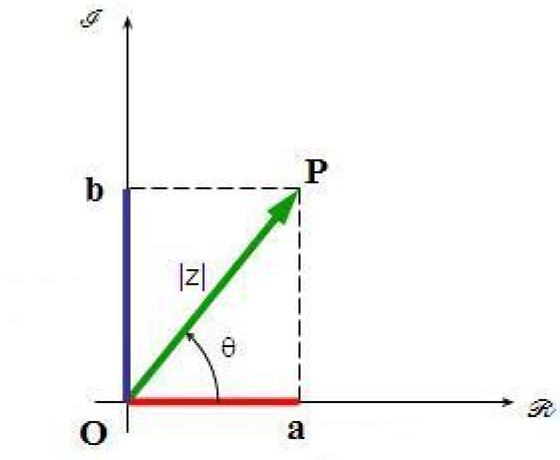
- $(19 - 31i) \div (17 + 29i) = \frac{(19 - 31i) \cdot (17 - 29i)}{(17 + 29i) \cdot (17 - 29i)} =$

$$= \frac{(19 \cdot 17) + (19 \cdot -29i) + (-31i \cdot 17) + (-31i \cdot -29i)}{17^2 - (29i)^2} = \frac{323 - 551i - 527i + 899i^2}{289 - 841i^2} =$$

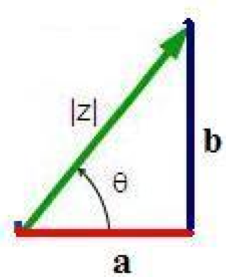
$$= \frac{323 - 1078i + 899 \cdot -1}{289 - 841 \cdot -1} = \frac{-576 - 1078i}{1130} = -\frac{576}{1130} - \frac{1078}{1130}i = -\frac{288}{565} - \frac{539}{565}i$$

Argumento de um número complexo:

Os números complexos são uma extensão do conjunto dos números reais. Na verdade, número complexo é um par ordenado de números reais (a, b). Escrito na forma normal, o par ordenado (a, b) fica z = a + bi. Representando esse número complexo no plano de Argand-Gauss, teremos:



O segmento de reta OP é chamado de módulo do número complexo. O arco formado entre o eixo horizontal positivo e o segmento OP, no sentido anti-horário, é chamado de argumento de z. Observe a figura abaixo para determinarmos as características do argumento de z.



No triângulo retângulo formado, podemos afirmar que:

$$sen\ \theta = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

$\boldsymbol{\theta} = \arg(z)$

Podemos constatar, também, que:

$|z|^2 = a^2 + b^2$ (pelo teorema de Pitágoras)

Ou

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplo 1. Dado o número complexo z = 2 + 2i, determine o módulo e o argumento de z.

Solução: Pelo número complexo z = 2 + 2i, sabemos que a = 2 e b = 2. Segue que:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$sen\ \theta = \frac{b}{|Z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Com os valores de seno e cosseno percebemos que $\boldsymbol{\theta}$ é um arco notável, assim, podemos afirmar que $\boldsymbol{\theta} = 45^o$ou $\frac{\pi}{4}$.

Exemplo 2. Determine o argumento do número complexo z = – 3 – 4i.
Solução: Para determinar o argumento de z, precisamos conhecer o valor de |z|. Assim, como a = – 3 e b = – 4, teremos:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Segue que:

$$sen\ \theta = \frac{b}{|Z|} = \frac{-4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{-3}{5}$$

Nesse caso, $\boldsymbol{\theta}$ não é um ângulo notável. Dessa forma, precisamos determinar o valor da tangente de $\boldsymbol{\theta}$. Sabemos que:

$$tg\ \theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta}$$

Assim,

$$tg\ \theta = \frac{{}^{-4}/_{5}}{{}^{-3}/_{5}} = \frac{4}{3}$$

Portanto, $\boldsymbol{\theta}$ é o arco cuja tangente é 4/3.

Nos casos em que o argumento não for um ângulo notável, é preciso determinar o valor de sua tangente, como feito no exemplo anterior, para só depois podermos afirmar quem é o argumento.

Exemplo 3. Dado o número complexo z = – 6i, determine o argumento de z.
Solução: Vamos calcular o valor do módulo de z.

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = \sqrt{0+36} = 6$$

Segue que:

$$sen\ \theta = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\cos\theta = \frac{0}{6} = 0$$

De acordo com os valores de seno e cosseno, podemos afirmar que $\boldsymbol{\theta} = 270°$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

Conjunto dos números complexos:

Números Imaginários

No conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) a $\sqrt{25}$ é igual a **5**, mas qual é a $\sqrt{-25}$?
Como sabemos, não existe a raiz quadrada real de um radicando negativo com índice par.
No conjunto dos números reais o máximo que podemos fazer é simplificar o radical desta forma:
$\sqrt{-25} = \sqrt{-1 \cdot 5^2} = 5\sqrt{-1}$
Ainda assim o fator $\sqrt{-1}$ não é um número real, pois o **radicando** **-1** é um número negativo.
Para maiores informações sobre como retiramos o número **5** do radical, você pode consultar o nosso artigo sobre **a radiciação e suas propriedades**.

Unidade Imaginária

A solução para este tipo problema surgiu com a criação dos números imaginários, cuja **unidade imaginária**representada pela letra **i**, é igual a $\sqrt{-1}$.
Utilizando-se do conceito de **número imaginário** podemos dizer que a $\sqrt{25}$ é igual a **5i**, pois:
$\sqrt{-25} = \sqrt{-1 \cdot 5^2} = 5\sqrt{-1} = 5i$
Agora vamos solucionar a **equação do segundo grau** abaixo:
$x^2 + 2x + 5 = 0$
O primeiro passo é calcularmos o seu discriminante:

$\Rightarrow \Delta = 4 - 20 \Rightarrow \Delta = -16$
Como o discriminante é negativo, a equação não possui raízes reais:

$\Rightarrow x = \frac{-2}{2} \pm \frac{4\sqrt{-1}}{2} \Rightarrow x = -1 \pm 2\sqrt{-1}$
Mas possui raízes imaginárias ao substituirmos $\sqrt{-1}$ por **i**:

Nos dois exemplos acima, $\sqrt{-25}$ e $\sqrt{-16}$, temos um radicando que é o valor simétrico de um quadrado perfeito, ou seja, o oposto de **25** e de **16**, que são quadrados perfeitos, mas mesmo que não o fossem, ainda assim poderíamos trabalhar com o conceito de números imaginários.
Vejamos o exemplo do número $\sqrt{-13}$:
$\sqrt{-13} = \sqrt{-1 \cdot 13} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{13} = i\sqrt{13}$
Observe que não eliminamos o **radical**, pois o número **13** não é um quadrado perfeito, mas agora temos um radicando positivo.

Quadrado perfeito é qualquer número inteiro maior ou igual a zero, que podemos representar pelo quadrado de um número também inteiro, por exemplo, **144** é um quadrado perfeito, pois: **144 = 12^2**
Há casos em que alguns fatores do número saem do radical e outros fatores não. Veja o exemplo do número $\sqrt{-24}$:

Números Complexos

Ao estudarmos os **conjuntos numéricos fundamentais** vimos que os **números racionais** podem ser expressos na forma de uma fração, com numerador e denominador inteiros e com denominador diferente de zero:
$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0$
De forma semelhante os **números complexos** podem ser representados por meio de uma expressão algébrica:
$z = a + bi$
Sendo **a** e **b** números reais e **i** a **unidade imaginária**.
a é a parte real do número complexo **z** e **bi** é a sua parte imaginária.
Definimos o conjunto dos números complexos como:
$\mathbb{C} = \{z = a + bi\colon a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$
O **conjunto dos números reais** ($\mathbb{R}$) e o **conjunto dos números imaginários** ($\mathbb{I}$) são subconjuntos do **conjunto dos números complexos** ($\mathbb{C}$). Em função disto um número complexo pode ser **imaginário**, **imaginário puro** ou**real**.

Exemplos de Números Imaginários

Para **a ≠ 0** e **b ≠ 0** temos um **número imaginário**:
- $z = 8 + 4i$
- $z = -3 + 2i$
- $z = 7 - 6i$

Como podemos observar um **número imaginário** possui uma parte real e outra imaginária.

Exemplos de Números Imaginários Puros

Para **a = 0** e **b ≠ 0** temos um **número imaginário puro**:
- $z = 0 + 5i \Rightarrow z = 5i$
- $z = 0 - 3i \Rightarrow z = -3i$
- $z = 0 + i\sqrt{2} \Rightarrow z = i\sqrt{2}$

Números imaginários puros possuem apenas a parte imaginária.

Exemplos de Números Reais

Para **a ≠ 0** e **b = 0** temos um **número real**:

- $z = 3 + 0i \Rightarrow z = 3$
- $z = -2 + 0i \Rightarrow z = -2$
- $z = \sqrt{3} + 0i \Rightarrow z = \sqrt{3}$

Números reais não possuem a parte imaginária.

Conjugado de um Número Complexo

O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\overline{z} = a - bi$. Observe que tanto **z**, quanto o seu conjugado possuem a mesma parte real, mas as partes imaginárias são opostas. Quando ambas as partes, real e imaginária, são iguais, os números também o são. A igualdade só ocorre nestas condições.

As raízes imaginárias $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ da equação $\mathbf{x^2 + 2x + 5 = 0}$, solucionada mais acima, são conjugadas uma da outra:

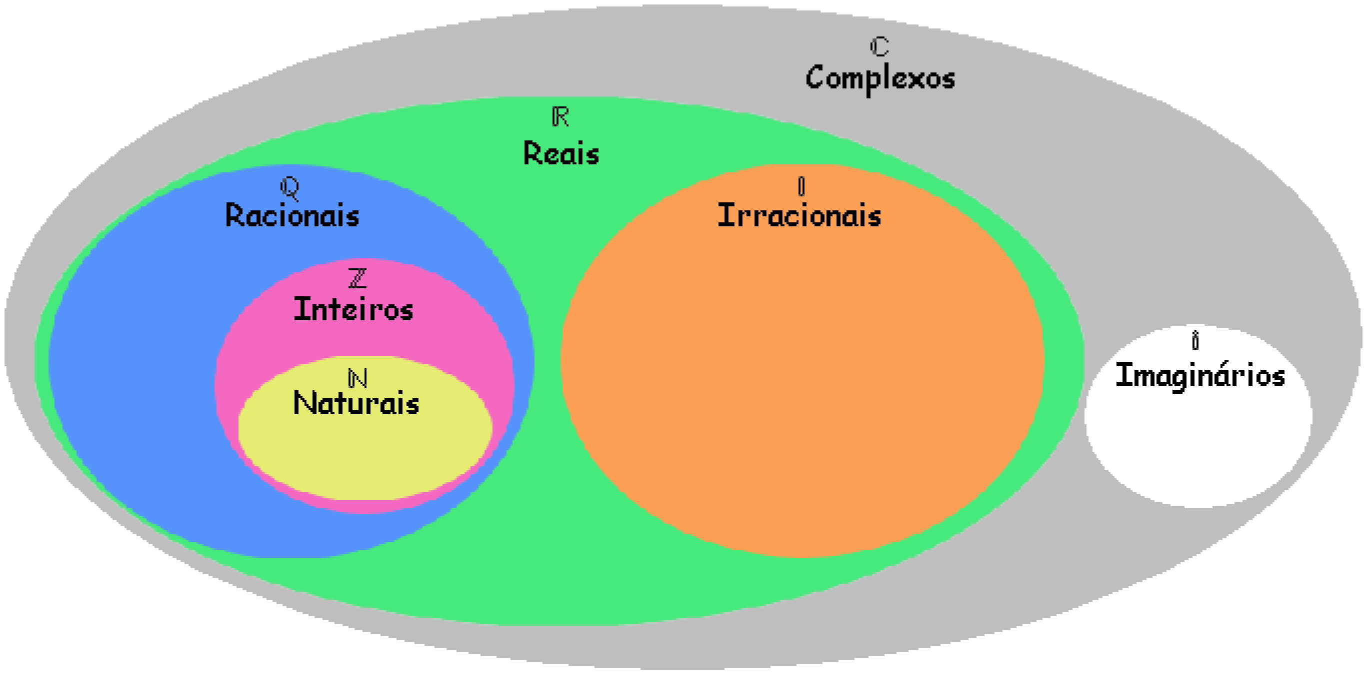
$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2i \\ x_2 = -1 - 2i \end{cases} \Rightarrow x_1 = \overline{x_2}, \quad \overline{x_1} = x_2$$

Exemplos de Números Complexos e seu Conjugado

- $z = 7i \;\; e \;\; \overline{z} = -7i$
- $z = 3 + 2i \;\; e \;\; \overline{z} = 3 - 2i$
- $z = -8 - 5i \;\; e \;\; \overline{z} = -8 + 5i$

Conjuntos Numéricos em Diagrama

No diagrama abaixo observamos que o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é um subconjunto do conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$).



Através deste diagrama podemos concluir que todo número real é complexo, mas nem todo número complexo é real, pois um número complexo pode possuir uma parte imaginária, mas os números reais não a possuem.

Oposto, conjugado e igualdade de números complexos:

Para determinarmos o oposto, o conjugado e a igualdade de qualquer número complexo precisamos conhecer alguns fundamentos.

Oposto

O oposto de qualquer número real é o seu simétrico, o oposto de 10 é -10, o oposto de -5 é +5. O oposto de um número complexo respeita essa mesma condição, pois o oposto do número complexo z será – z.

Por exemplo: Dado o número complexo z = 8 – 6i, o seu oposto será:
- z = - 8 + 6i.

Conjugado

Para determinarmos o conjugado de um número complexo, basta representar o número complexo através do oposto da parte imaginária. O conjugado de z = a + bi será:

$\bar{z} = a - bi$

Exemplo:
z = 5 – 9i, o seu conjugado será:

z = – 2 – 7i, o seu conjugado será

Igualdade

Dois números complexos serão iguais se, e somente se, respeitarem a seguinte condição:
Partes imaginárias iguais
Partes reais iguais

Dado os números complexos z1 = a + bi e z2 = d + ei, z1 e z2, serão iguais se, somente se, a = d e bi = ei.

Observações:

A soma de números complexos opostos será sempre igual a zero.

z + (-z) = 0.

O conjugado do conjugado de um número complexo será o próprio número complexo.
$\bar{\bar{z}} = z$

Não existe relação de ordem no conjunto dos números complexos, então não podemos estabelecer quem é maior ou menor.

Exemplo 1

Dado o número complexo z = - 2 + 6i, calcule o seu oposto, o seu conjugado e o oposto do conjugado.

Oposto
- z = 2 - 6i

Conjugado
$\bar{z} = -2 - 6i$

Oposto do conjugado
$\bar{z} = -2 - 6i$
$-\bar{z} = 2 + 6i$

Exemplo 2

Determine a e b de modo que $-2 + 9i = \overline{a + bi}$.

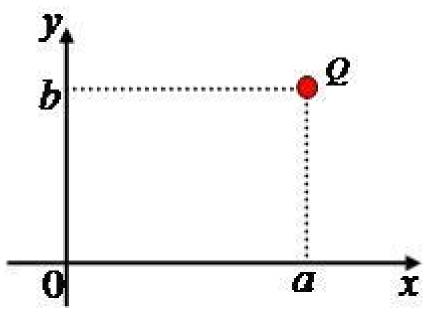
-2 + 9i = a - bi
Precisamos estabelecer a propriedade da relação de igualdade entre eles. Então:

a = - 2
b = - 9

Plano de Argand – Gauss:

Por volta do século XV, os matemáticos tinham um único pensamento: "O quadrado de um número positivo, bem como o de um número negativo, é positivo. Um número negativo não é quadrado de nenhum número, pois não existe raiz quadrada de um número negativo".
Raízes quadradas de números negativos continuavam aparecendo, e o que mais preocupava os matemáticos da época era que essas raízes, sendo desenvolvidas de acordo com as regras algébricas, forneciam resultados satisfatórios, que não podiam ser obtidos de outra forma.
Foi através de estudos relacionados aos matemáticos Wessel, Argand e Gauss, que muitos resolveram associar os números a e b de um complexo a coordenadas de um ponto no plano, criando assim uma representação geométrica para um complexo.

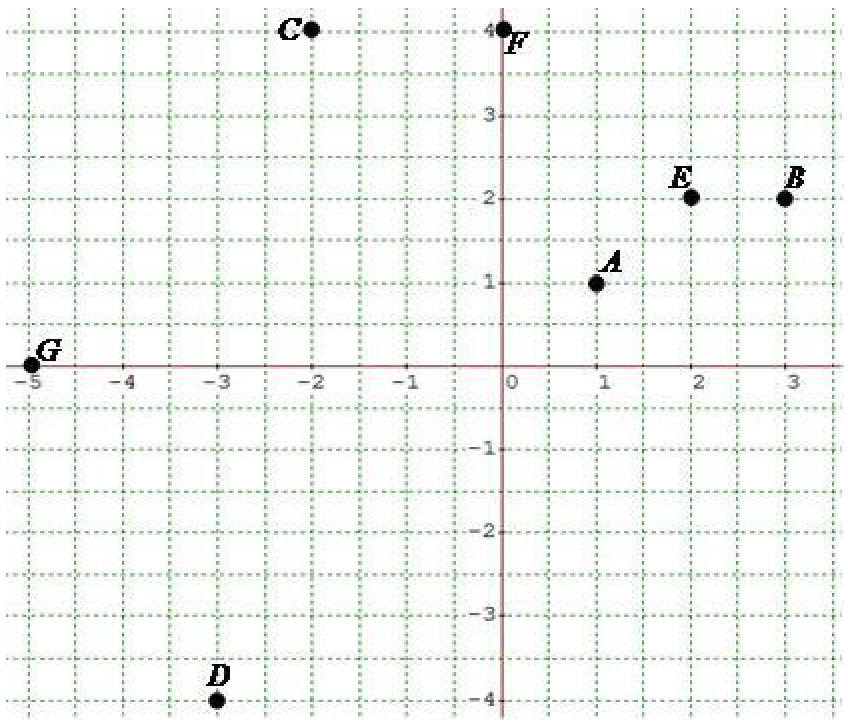
A criação dos números complexos revolucionou, de certa forma, a Matemática, pois se criava mecanismos para obtenção de resultados envolvendo a raiz quadrada de um número negativo, até então um mistério. Os complexos são formados por uma parte real (x) e outra imaginária (y), assumindo a seguinte forma algébrica: z = x + yi. O número complexo pode ser representado no plano através de um ponto Q de coordenadas (x, y), sobre o eixo x marcamos a parte real e sobre o eixo y a parte imaginária de z. O ponto Q deve receber o nome de **afixo** ou **imagem geométrica de z**.



Representando geometricamente um número complexo

a) z = 1 + i, A(1,1)
b) z = 3 + 2i, B(3,2)

c) z = -2 + 4i, C(-2,4)
d) z = -3 -4i, D(-3,-4)
e) z = 2 + 2i, E(2,2)
f) z = 4i, F(0,4)
g) z = -5, G(-5,0)



Bibliografia:

http://www.matematica.br/historia/complexos.html

http://www.brasilescola.com/matematica/a-origem-i-ao-quadrado-igual-1.htm

http://www.matematicadidatica.com.br/OperacoesNumerosComplexos.aspx

http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complexo

Gabriel Tebaldi Santos

RA: 160508