TALLER 2: Límites y continuidad

Cálculo en varias variables

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Escuela de matemáticas

1. Halle el límite, si existe, o demuestre que no existe

   (I) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.$

   (II) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}.$

   (III) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)} \frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}.$

   (IV) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

   (V) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$

   (VI) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x}$

   (VII) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

   (VIII) $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^8}$

   (IX) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

2. Dadas las funciones

$$f(x,y) = y\ln(x) \text{ y } g(z) = \sin(z),$$

   halle el conjunto más grande en el cual la función compuesta $h(x,y) = g(f(x,y))$ es continua.

3. Dada la función f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2+xy}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   determine el conjunto en el cual f es continua.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x^4+y^4}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ c, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Determine, si es posible, el valor de c para que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \\ 0, & \text{si } x^2+y^2 < 1 \end{cases}.$$

   Determine la continuidad de f.

6. Dada la función f definida por

$$f(x,y,z) = x + y\sqrt{x+z},$$

   determine el conjunto más grande en el cual f es continua.

Nota: Ejercicio reto

7. Suponga que f y g son funciones de dos variables que cumplen las siguientes condiciones:
   (i) $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$; $g(tx,ty) = t^n g(x,y)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$;
   (ii) $g(1,1) \neq 0$ y $g(1,0) \neq 0$;
   (iii) $g(1,1)\cdot f(1,0) \neq g(1,0)\cdot f(1,1)$.

   Muestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ no existe.