Matematik A E2020
Uge 45, Forelæsning 2

Afsnit 11.1, 11.3(-s.420), 11.5

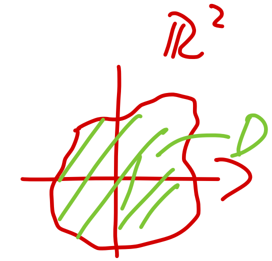
Funktioner af flere variable:

Intro og grundlæggende begreber

Funktioner af to variable: Intro

- I økonomi støder vi ofte på situationer, hvor en (afhængig) variabel bestemmes af to eller flere (uafhængige) variable
  - Forbrugssituation med to varer, forbrugerens præferencer modelleres vha. nyttefunktion:
  $$u(x, y)$$
  - Produktion med to inputs (fx. arbejdskraft og kapital), en virksomheds output modelleres vha. produktionsfunktion:
  $$F(L, K)$$
  - Marked med to producenter (”duopol”), hver producents profit afhænger både af egen produktion og af konkurrentens produktion:
  $$\pi_i(q_1, q_2), \qquad i = 1, 2$$

Funktioner af to variable (11.1)



Lad $D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad (\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\})$

En (reel) funktion f af to reelle variable x, y med *definitionsmængde* (domain) D er en forskrift/"regel", der til ethvert $(x,y) \in D$ knytter et reelt tal

$$f(x,y)$$

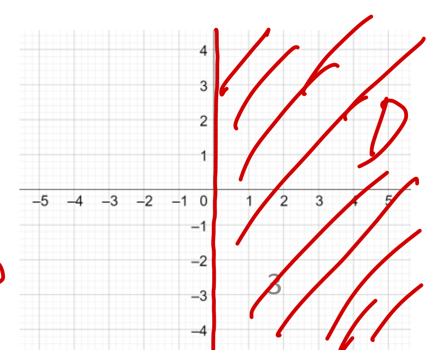
En sådan funktion skrives også $f : D \to \mathbb{R}$

Hvis $D = \mathbb{R}^2$ skrives altså $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Eksempler:

$f(x,y) = x^2 + y^2$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$g(x,y) = \sqrt{x} + xy$ for alle (x,y) med $x \geq 0$



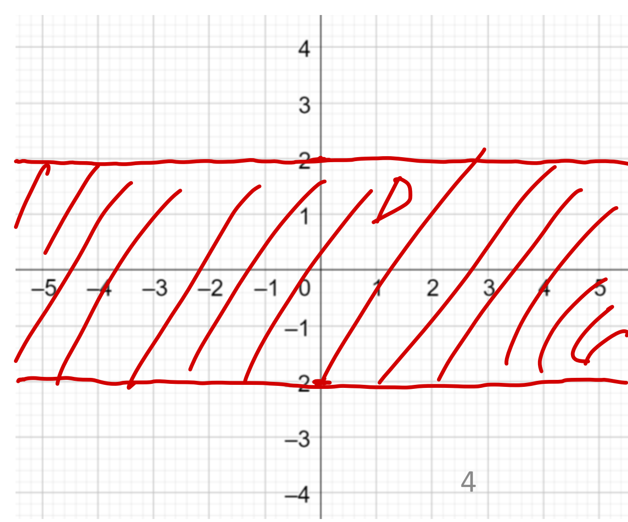
$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Værdimængde} \text{ (range) for } f : D \to \mathbb{R} : \\ \qquad R_f = \{ f(x,y) \, : \, (x,y) \in D \} \\ \qquad\qquad \text{"alle de værdier } f \text{ antager"} \end{array}}$$

Øvelse:

Find definitionsmængde og værdimængde for funktionen givet ved forskriften

$$f(x,y) = x^2 + \sqrt{4 - y^2}$$

Skitsér definitionsmængden i et x,y-koordinatsystem



Def. mgd: $4 - y^2 \geq 0 \iff 4 \geq y^2 \iff -2 \leq y \leq 2$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 2\}$

Værdimgd: $f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in D$.

$f(x,2) = x^2 + \sqrt{4-2^2} = x^2$

$R_f = [0, \infty)$

Graf og niveau-kurver (11.3, -s.420)

Lad $D \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : D \to \mathbb{R}$

Grafen for f består af punkterne $(x, y, f(x, y))$, hvor $(x, y) \in D$, i det tredimensionale rum $(\mathbb{R}^3)$

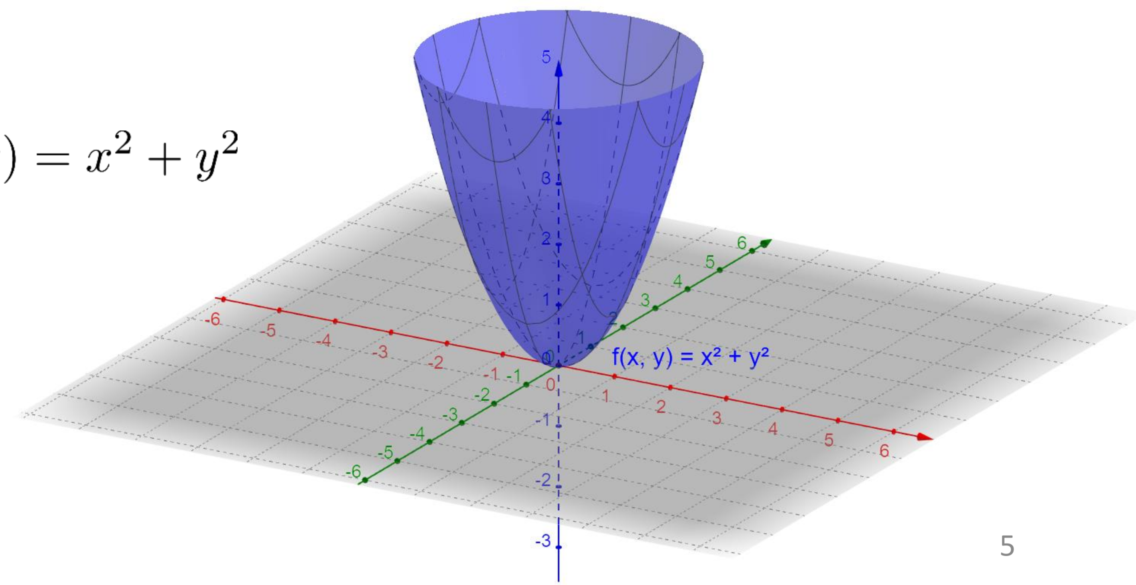
Med mængdenotation kan grafen skrives:

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in D \text{ og } z = f(x, y)\}$$

Eksempel:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x, y) = x^2 + y^2$

Graf:
Punkterne (x, y, x^2+y^2),
hvor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$



En *niveau-kurve* (level curve) for en funktion $f : D \to \mathbb{R}$ består af punkter $(x, y) \in D$, der giver samme funktionsværdi.

Altså er en niveau-kurve givet ved ligningen

$$f(x, y) = c, \quad \text{hvor } c \text{ er en konstant}$$

Ved at betragte forskellige konstanter c, fås de forskellige niveau-kurver for f

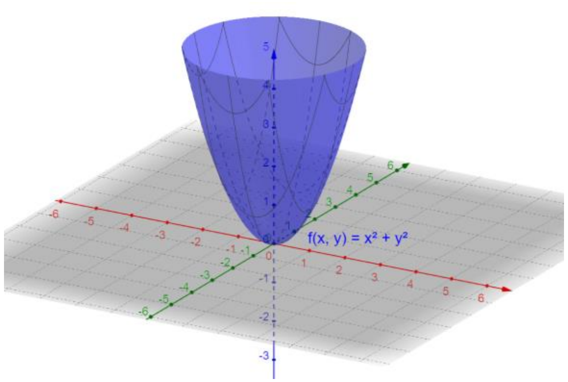
Eksempel:

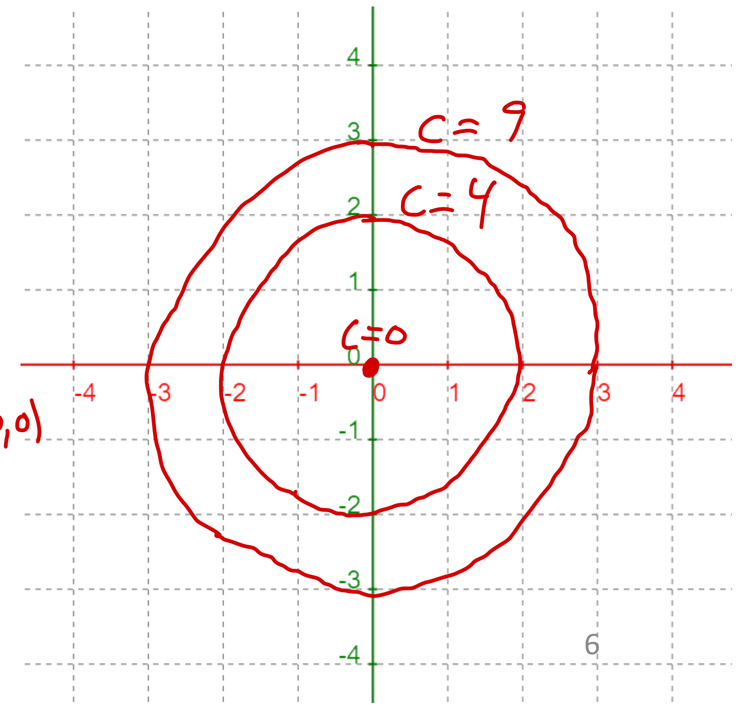
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x, y) = x^2 + y^2$

Niveau-kurver:

$$x^2 + y^2 = c$$

Cirkel med centrum i (0,0) og radius $\sqrt{c}$





Eksempler fra økonomi

Nyttefunktion (fra nyttemax-problem i uge 40):

$$u(x,y) = \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y), \quad \text{hvor } x, y > 0$$

Niveaukurver: "Indifferenskurver", hver kurve består af varebundter (x, y), der giver forbrugeren samme nytte

Ligning for indifferenskurver:

$$\frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) = c$$

Øvelse: Vis at denne ligning kan omskrives til

$$y = \frac{C}{x^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(hvor } C = e^{\frac{3c}{2}}\text{)}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) = c}$$

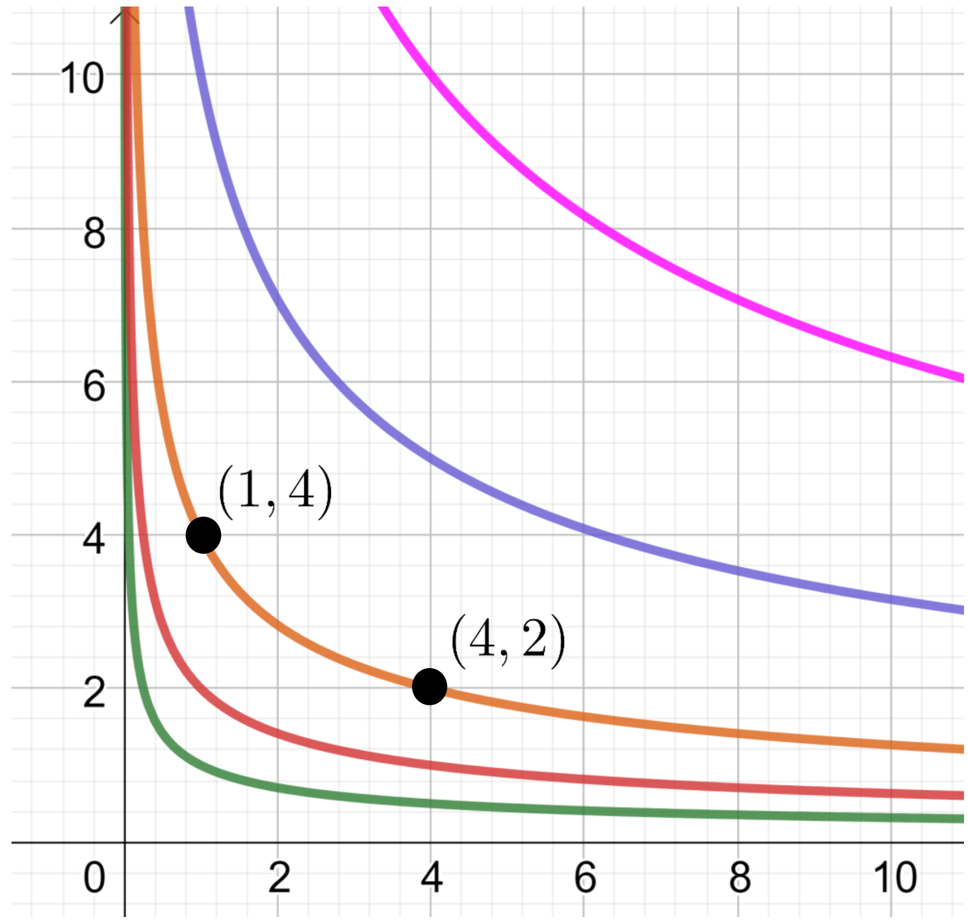
$\Leftrightarrow \quad \ln(x) + 2\ln(y) = 3c$

$\Leftrightarrow \quad e^{\ln(x)+2\ln(y)} = e^{3c}$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x \cdot y^2}_{} = e^{\ln(x)} \cdot e^{2\ln(y)} = \underline{e^{3c}}$

$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{e^{3c}}{x} \Leftrightarrow \underline{y = \frac{e^{\frac{3c}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}}$

Grafisk for $C = 1, 2, 4, 10, 20$



Bemærk: Forbrugeren er indifferent ml. varebundterne $(1, 4)$ og $(4, 2)$ (ved udregning kan checkes at $u(1, 4) = u(4, 2)$)

Nyttemax-problem:

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

Ved løsning fik vi efterspørgselsfunktionerne:

Vare 1: $x^* = \frac{m}{3p}$ Vare 2: $y^* = \frac{2m}{3q}$ (for $p, q, m > 0$)

Generelt nyttemax-problem:

$$\boxed{\max_{x,y\geq 0} u(x,y) \quad \text{under bibetingelsen} \quad px + qy \leq m}$$

Med passende antagelser fås ved løsning efterspørgselsfkt:

$x^*(p,q,m)$ $y^*(p,q,m)$

Funktioner af de <u>tre</u> variable $p, q, m > 0$

Produktionsfunktion:

$$F(L, K), \quad \text{hvor } L, K \geq 0$$

Niveaukurver: "Isokvanter", hver kurve består af kombinationer af arbejdskraft og kapital (L, K), der giver samme output

Cobb-Douglas produktionsfunktion (se ex 11.1.3-4, s. 408-9):

$$F(L, K) = AL^a K^b \qquad (A, a, b > 0 \text{ er konstanter})$$

Hvad sker der med produktionen, hvis vi ganger alle inputs med $t > 0$?

$$F(tL, tK) = A(tL)^a(tK)^b = At^aL^at^bK^b$$

$$= t^{a+b}AL^aK^b = t^{a+b}F(L,K)$$

Virksomhedens profitfunktion:

$$\pi(L,K) = pF(L,K) - wL - rK,$$

hvor p er prisen på output, w er prisen på arb.kraft og r er (leje)prisen på kapital

Profitmaksimeringsproblem:

$$\max_{L,K\geq 0} pF(L,K) - wL - rK$$

Hvis entydig løsning for alle $p, w, r > 0$ fås heraf virksomhedens "input-efterspørgselsfunktioner":

$$L^*(p,w,r) \qquad\qquad K^*(p,w,r)$$

Funktioner af de <u>tre</u> variable $p, w, r > 0$

Funktioner af n variable (11.5)

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{hvor } (x_1, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n}$$

Eksempler:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \ln(x_1) + \ldots + a_n \ln(x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i)$$

(hvor $a_1, \ldots, a_n > 0$ er konstanter)

$$f(x, y, z) = x^2 y - xz$$

Værdimængden er igen alle de værdier, som f antager

Grafen består nu af punkterne $(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ i $\mathbb{R}^{n+1}$

Lign. $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ giver nu niveau-(hyper)flader i $\mathbb{R}^n$

Øvelse (kun hvis tid)

Betragt funktionen givet ved

$$f(x,y,z) = x^2y - xz \quad \text{for alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Vis:

$$f(x+h,y,z) - f(x,y,z) = (2xy - z)h + yh^2$$

$$= (x+h)^2 y - (x+h)z - (x^2y - xz)$$

$$= (\cancel{x^2} + 2xh + h^2)y - \cancel{xz} - zh - \cancel{x^2y} + \cancel{xz}$$

$$= 2xyh + yh^2 - zh \quad = \underline{(2xy - z)h + yh^2} =$$