Matematik B F2021 Forelæsning 1 (uge 6)

Kort intro til kurset

+

EMEA: 15.1-5

Matricer og matrixregning

Kursusinformation (Absalon)

Matematik B forår 2021: Vigtig information om kurset

Se også kurser.ku.dk, direkte link: https://kurser.ku.dk/course/a%c3%98kb08007u/2020-2021

Bemærk: Al undervisning indtil 1. april vil være online

Undervisningen

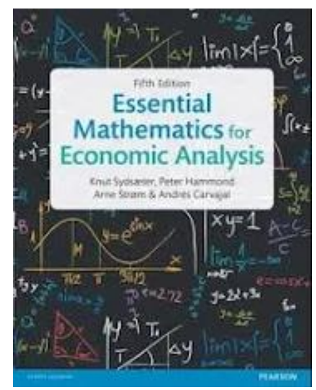
Undervisningen i Matematik B består af:

- 3 timers forelæsninger i 14 uger fra uge 6 til 20, dog ingen forelæsning i uge 13 pga påske. Forelæsningerne afholdes fredage kl. 10-13 i Chr Hansen auditoriet og/eller online afhængig af Corona-situationen. Forelæser er Thomas Jensen (tj@econ.ku.dk).

- 3 timers holdundervisning i 14 uger fra uge 7 til 21, dog kun én undervisningsgang i uge 13-14 pga påske (dette aftales på holdene). Underviser og skema for de enkelte hold kan findes på kurser.ku.dk. Holdundervisningen afholdes fysisk eller online afhængig af Corona-situationen.

Planer for de enkelte forelæsninger og holdundervisningsgange vil være tilgængelige på Absalon.

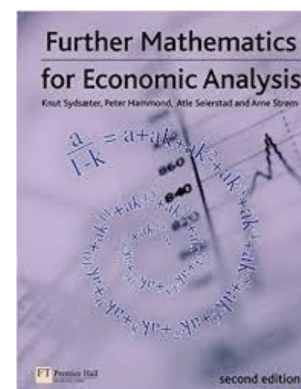
***VIGTIGT:** Undervisningen forudsætter, at I har forberedt jer og deltager aktivt! Der er specifikke minimumsforventninger til jeres forberedelse – læs dem under beskrivelsen af forelæsninger og holdundervisning nedenfor.*



Undervisningsmateriale

Vi bruger nedenstående lærebøger i kurset. Bemærk, at den første er bogen fra Matematik A.

- Sydsæter, Hammond, Strøm og Carvajal: "Essential Mathematics for Economic Analysis". Fifth edition. Pearson, 2016.
- Sydsæter, Hammond, Seierstad og Strøm: "Further Mathematics for Economic Analysis". Second edition. Prentice Hall/Pearson, 2008.

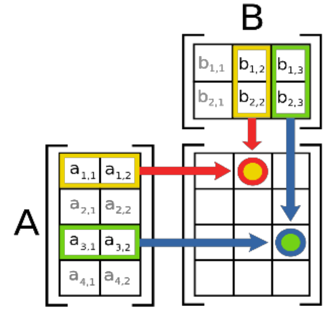


Eventuelt supplerende materiale vil blive lagt på Absalon.

Om papir, blyant og IT-værktøjer

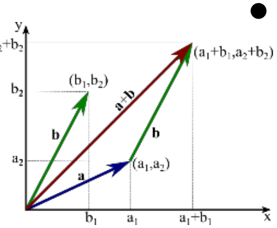
Som udgangspunkt er vores eneste værktøjer i dette kursus papir og blyant. Det betyder, at alle opgaver bør laves uden brug af lommeregner, CAS-værktøjer og lignende. Formålet med dette er at styrke

Kort om det faglige indhold



Overordnet består kurset af to dele:

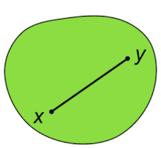
- **Lineær algebra** (forelæsning 1-7)
  - Bl.a. lineære ligningssystemer, matricer, vektorer, determinanter, egenværdier og -vektorer, kvadratiske former

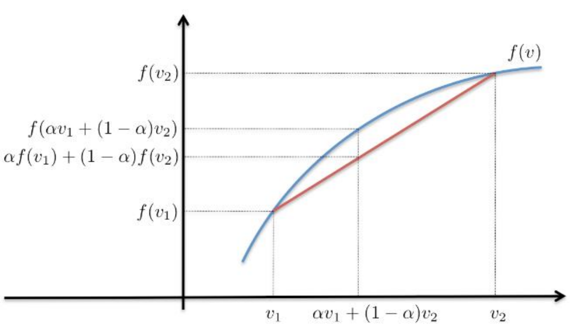


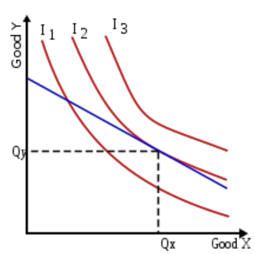
$$\begin{cases} -x \quad\;\; + z = 3 \\ -2x - y + 5z = -1 \\ 2x + y \qquad = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

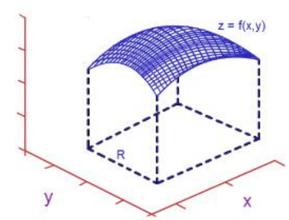
- **Emner i matematisk analyse** (forelæsning 8-13)
  - Bl.a. (mere om) konvekse- og konkave funktioner af flere variable og optimeringsproblemer, dobbeltintegraler, differensligninger, differentialligninger (af 1. orden)







Differentialligning	Type
$y' = x^2y^2$	1. orden
$y'' + x = y$	2. orden
$y'y = x$	1. orden
$y'\sqrt{x} + y = 3$	1. orden
$y''' + y'' = y$	3. orden
$y' = \dfrac{x^2+xy}{xy+y^2}$	1. orden



I dag: Matricer og matrixregning

- **Nyt matematisk begreb: Matricer**
  - Grundlæggende introduktion og simple matrix-operationer (15.2)
  - Matrix-multiplikation (15.3-4)
  - Transponering og symmetriske matricer (15.5)
  - Lineære ligningssystemer og matricer (15.1,2,3)

    (kun kort, mere i senere forelæsninger)

Hvad er en matrix? (15.2)

En $m \times n$ matrix (m rækker, n søjler):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Alle elementer/indgange a_{ij} er (reelle) tal

Første index er rækkenummer, andet index er søjlenummer.
a_{ij} er altså elementet i den i'te række, j'te søjle

Vi bruger også notationen $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$

To matricer $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ og $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ er ens ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$) hvis

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{for alle } i = 1, \ldots, m \text{ og } j = 1, \ldots, n$$

Søjler og rækker:

j'te søjle

i'te række

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kvadratisk matrix: $n \times n$ matrix (altså samme antal søjler og rækker)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonal

Eksempler på matricer

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 2×2

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3×3 $\qquad$ 3×1

"søjlevektor"

$$\mathbf{y} = (11,\ 77,\ -5,\ 0)$$

"rækkevektor"

1×4

Simple matrix-operationer

Addition og skalar-multiplikation

[NB: skalar=tal]

Lad:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad \mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Definition (s.586):

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$$

"på hver plads"!

Regneregler for addition og skalar-mult.

Lad $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ være $m \times n$ matricer og α, β være reelle tal

Lad $\mathbf{0}$ være $m \times n$ matricen hvor alle elementer er 0 (*nulmatricen*)

Da gælder følgende (s.587):

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad \mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A} \qquad \mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$$

$$(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A} \qquad \alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$$

Bevis: Brug regneregler for reelle tal...

Øvelser

1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Bestem matricen $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$

2

Bestem reelle tal α og β så flg er opfyldt:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

pingo.coactum.de (NY KODE TIL MAT B: 131061)

Ekstra øvelse til de hurtige: Se slide 12

1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 11 \\ 4 & -1 & 4 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

2

$$\underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha+2\beta \\ 3\alpha+\beta & 4\alpha+2\beta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4 ligninger:

$\alpha + \beta = 1 \rightarrow \beta = 1 - \alpha \Rightarrow \underline{\beta = 1 - 2 = -1}$

$2\alpha + 2\beta = 2$ ✓

$3\alpha + \beta = 5 \rightarrow 3\alpha + (1-\alpha) = 5 \Leftrightarrow 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \underline{\alpha = 2}$

$4\alpha + 2\beta = 6$ ✓

Ekstra øvelse til de hurtige:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 2 \\ 5 & q \end{pmatrix}$$

Der er fire ubekendte i denne matrix-ligning.
Fra øvelse 2 kender I allerede én løsning.
Findes der andre løsninger? NEJ!

Matrix-ligningen giver 4 lign. med 4 ubekendte:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha+\beta=p \\ 2\alpha+2\beta=2 \end{array}\right\} \text{ giver } \underline{p=1} \text{ og så } \beta=1-\alpha \rightarrow \underline{\beta=1-2=-1}$$

$$3\alpha+\beta=5 \rightarrow 3\alpha+(1-\alpha)=5 \iff \underline{\alpha=2}$$

$$4\alpha+2\beta=q \rightarrow 4\cdot 2+2\cdot(-1)=q \iff \underline{q=6}$$

Altså netop 1 løsn: $\underline{p=1,\ q=6,\ \alpha=2,\ \beta=-1}$, som er den vi kendte fra øvelse 2

Matrixmultiplikation (15.3)

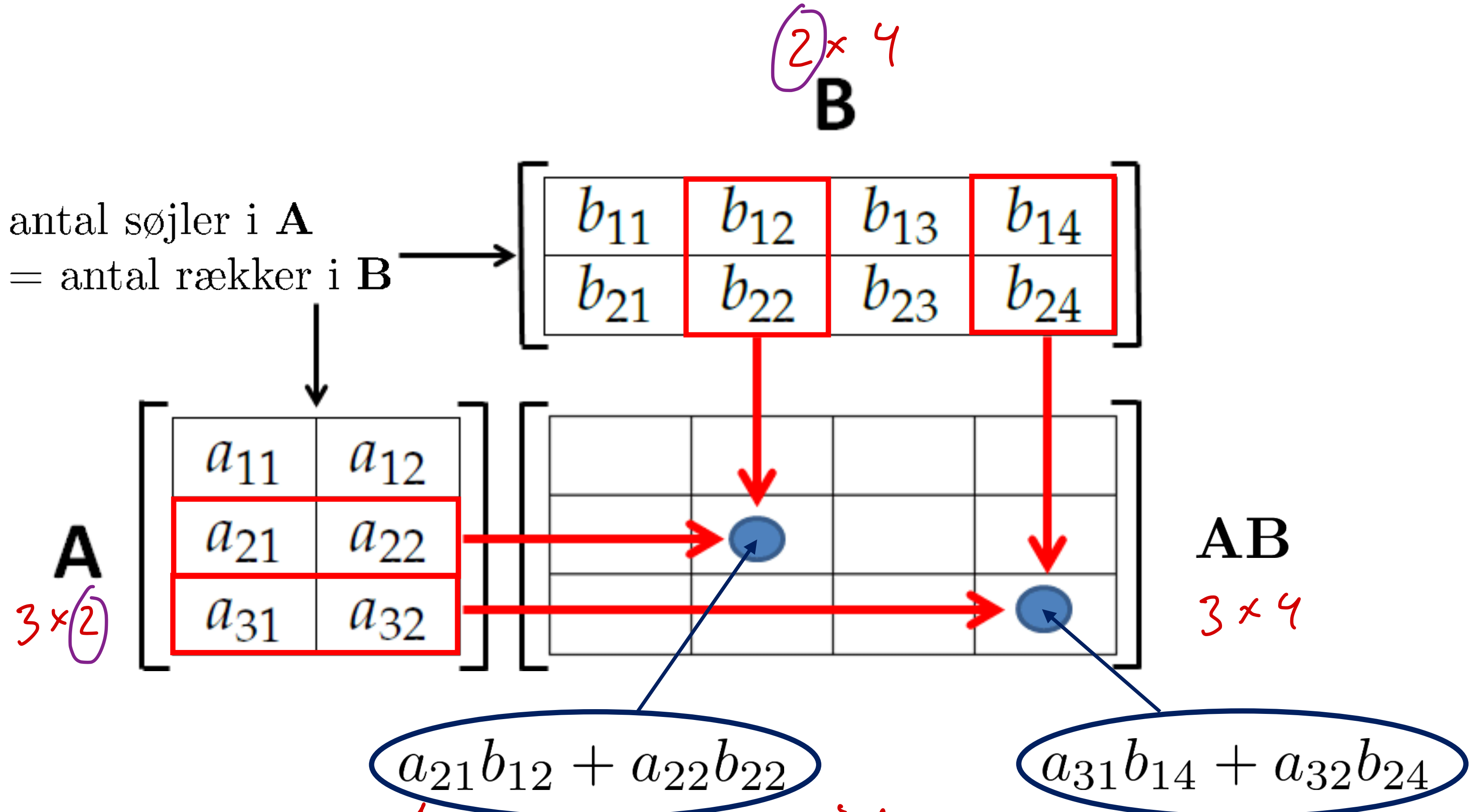
Vi starter med et eksempel:

$$\underset{2\times 2}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix} \qquad \underset{2\times 3}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Matrixproduktet **AB** er da en 2×3 matrix og udregnes på følgende måde:

$$\begin{array}{cc} & B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix} & \underset{AB}{\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 0\\ 5 & 7 & 6\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 5 & 7 & 6\end{pmatrix}\end{array}$$

Lidt mere generelt…



Indre produkt af anden række i A
og anden søjle i B

Øvelse

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2×2 $\quad$ 2×3 $\quad$ 3×3

Udregn matrixprodukterne $\mathbf{AB}$ og $\mathbf{BC}$

Hvilke af følgende matrixprodukter giver mening?

1) $\mathbf{BA}$
2) $\mathbf{CC}$
3) $\mathbf{BB}$
4) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$
5) $(\mathbf{BC})\mathbf{C}$

pingo.coactum.de (131061)

$$\underset{2\times 3}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \underset{2\times 3}{AB}$$

$$\underset{3\times 3}{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 3}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \underset{2\times 3}{BC}$$

1) $\mathbf{BA}$ ✗ $B: 2\times 3$ $A: 2\times 2$
2) $\mathbf{CC}$ ✓ $C: 3\times 3$ $C: 3\times 3$
3) $\mathbf{BB}$ ✗ $B: 2\times 3$ $B: 2\times 3$
4) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ ✓ $AB: 2\times 3$ $C: 3\times 3$
5) $(\mathbf{BC})\mathbf{C}$ ✓ $BC: 2\times 3$ $C: 3\times 3$

Matrixmultiplikation: Generel Def.

s.589:

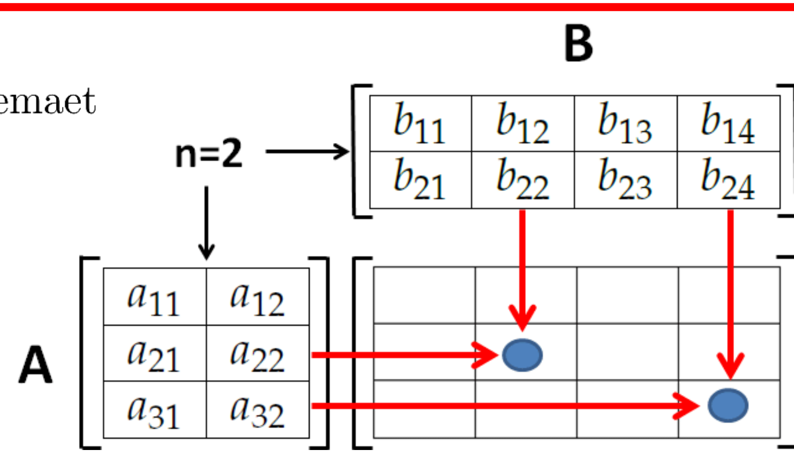
Lad $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ og $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times p}$.

Matrixproduktet $\mathbf{AB}$ er så den $m \times p$ matrix,
hvor elementet i i'te række, j'te søjle er

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

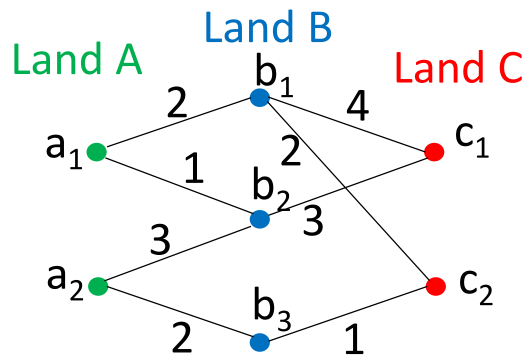
(for alle $i = 1, \ldots, m$ og $j = 1, \ldots, p$)

NB: Definitionen passer med opstillingen/skemaet fra tidligere!



Matrixmultiplikation: “Motivation”

Antal fly mellem byer i 3 lande:



$A \to B$:
$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$B \to C$:
$$Q = \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$A \to C$:
$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 1\cdot 3 & 2\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{regn selv efter!}}{=} PQ \quad \begin{pmatrix} \text{matrix-} \\ \text{produkt} \end{pmatrix}$$

(se også Example 15.4.7, s.597-8 for et lignende eksempel)

Matrixmult.: Regneregler (15.4)

Følgende regneregler gælder for alle matricer **A**, **B** og **C** med dimensioner så matrixprodukterne er definerede og alle reelle tal α (s.593):

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad = ABC$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

$$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{A})(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB})$$

Bevis-metode: Vis, at elementet på en vilkårlig plads i matricen på venstresiden er lig elementet på samme plads i matricen på højresiden (fx $[(AB)C]_{il} = [A(BC)]_{il}$ for alle i, l)

Lad $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times p}$, $\mathbf{C} = (c_{ij})_{p \times q}$

Vis: $\quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

Matrixmultiplikation: Pas på!!!

s.596:

(i) Matrixprodukterne $\mathbf{AB}$ og $\mathbf{BA}$ er typisk <u>ikke</u> ens

(ii) Hvis $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, kan man <u>ikke</u> konkludere, at $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

(iii) Hvis $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ og $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, kan man <u>ikke</u> konkludere, at $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

Eksempel, der demonstrerer (i) og (ii):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $AB \neq BA$!

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) BA er nulmatricen,

men $B \neq \underline{0}$ ← nulmatricen og $A \neq \underline{0}$!

Identitetsmatricen af orden n

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$(n \times n \text{ matrix})$

"1-taller på diagonalen, 0'er alle andre steder"

For enhver $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ gælder:

$$\mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$$

$\mathbf{I}_n$ er den eneste matrix med denne egenskab!

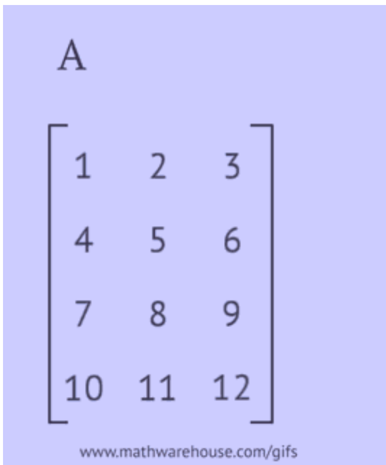
Matrix-potenser

For kvadratisk matrix $\mathbf{A}$ kan vi bruge potens-notation:

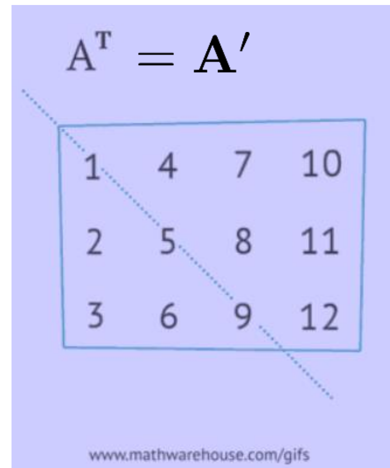
$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}\mathbf{A} \\
\mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} = (AA)A = A(AA) \\
&\vdots \\
\mathbf{A}^n &= \mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A} \qquad \text{(produkt af } n \text{ matricer)} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Transponering og symmetriske matricer (15.5)

Transponering af matricer: Først en lille animation...



Transponering



Første række i $\mathbf{A}'$ er første søjle i $\mathbf{A}$,
anden række i $\mathbf{A}'$ er anden søjle i $\mathbf{A}$, etc.

Hvis vi bruger notationen $\mathbf{A}' = (a'_{ij})$ har vi altså:

$$a'_{ij} = a_{ji}$$

(hvor a_{ji} er elementet i række j, søjle i i $\mathbf{A}$)

Regneregler for transponering

s.600:

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{A}')' &= \mathbf{A}\\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})' &= \mathbf{A}'+\mathbf{B}'\\ (\alpha\mathbf{A})' &= \alpha\mathbf{A}'\\ (\mathbf{A}\mathbf{B})' &= \mathbf{B}'\mathbf{A}'\end{aligned}}$$

NB!

Symmetriske matricer

En symmetrisk matrix er en kvadratisk matrix,
der er symmetrisk omkring diagonalen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

En kvadratisk matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ er altså symmetrisk netop hvis

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{for alle } i, j = 1, \ldots, n$$

Heraf ses:

$$\boxed{\mathbf{A} \text{ er symmetrisk} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A}}$$

Lineære lign.systemer og matricer (15.1,2,3)

2 ligninger med 2 ubekendte:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}}$$

- Ubekendte: x_1, x_2
- Koefficienter: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$
- Konstanter: b_1, b_2

Eksempel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 15 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

” Anna og Bo er tilsammen 15 år. Bo er halvt så gammel som Anna. Hvor gamle er de hver især? ”

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}}$$

Koefficientmatrix for ligningssystemet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ligningssystemet på matrixform:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Eller:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

hvor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Generelt: m ligninger, n ubekendte:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}}$$

Koefficientmatrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m x n

Ligningssystemet på matrixform: $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$

hvor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$