Opgave 1: Solowmodellen og arbejdsudbud

Spørgsmål 1:

Ud fra betingelserne (1), (4) og $k_t = K_t/N_t$:

$$y_t = \frac{Y_t}{N_t} = \frac{BK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}}{N_t} = \frac{BK_t^{\alpha}\lambda N_t^{1-\alpha}}{N_t} = BK_t^{\alpha}(\lambda N_t)^{1-\alpha}N_t^{-1} = BK_t^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}N_t^{-\alpha} = B\lambda^{1-\alpha}\frac{K_t^{\alpha}}{N_t^{\alpha}}$$

$$\underline{= B\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha}}$$

Hvor

$$k_t = K_t/N_t$$
$$0 < \lambda < 1$$
$$0 < \alpha < 1$$

Spørgsmål 2:

Vi omskriver ligning 3, for at finde K_{t+1}:

$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t \Longrightarrow K_{t+1} = S_t - \delta K_t + K_t = S_t + (1-\delta)K_t$$

Vi indsætter definitionen for K_{t+1} samt anvender ligning (5) og (2):

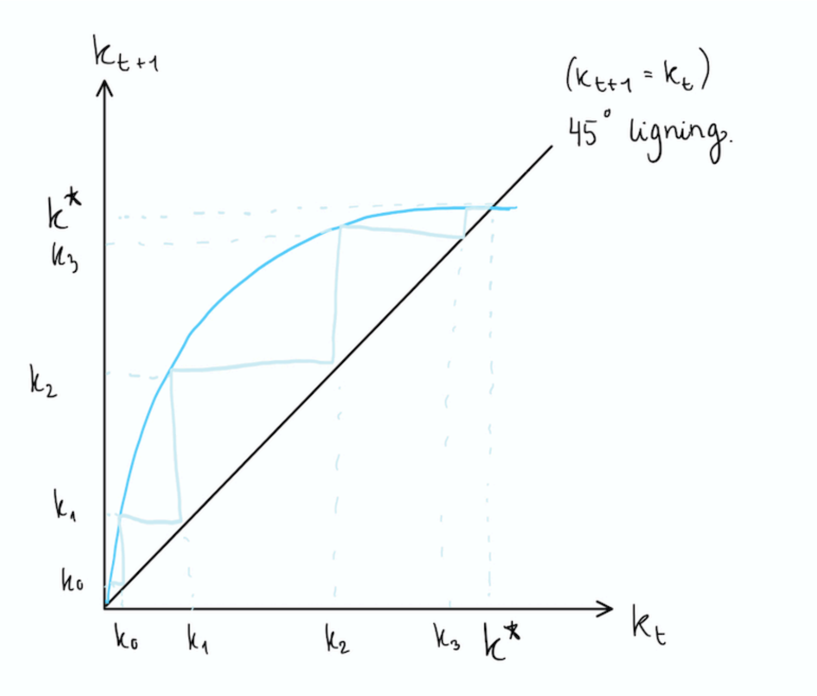
$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} = \frac{S_t + (1-\delta)K_t}{(1+n)N_t} = \frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{(1+n)N_t}$$

Vi bruger nu definitionen $\frac{Y_t}{N_t} = y_t = B\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha}$ samt at $k_t = \frac{K_t}{N_t}$

$$= \frac{sB\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t}{(1+n)} = \frac{1}{1+n}(sB\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t)$$

Nedenfor ses et transitionsdiagram, hvor $k_0 > 0$. Det ses, at der er konvergens mod en steady state hvor $k_{t+1} = k_t = k*$

Når $k_0 < k*$, ses en konvergens mod k*. Da vi starter i et lavt udgangspunkt for k_0 ses der en vækst i kapital pr. capita. Denne vækst bliver mindre jo større k_t bliver, og ender i et punkt hvor k_t ikke stiger mere og derfor ligger fast. I dette punkt er der steady state. Konvergensen mod steady state kommer fordi der er en generel antagelse om aftagende marginalprodukt. Effekten af at investere bliver mindre jo mere der spares op. I steady state er effekten af investering lig nedslidningen på kapitalen, og derfor er $k_t = k*$.

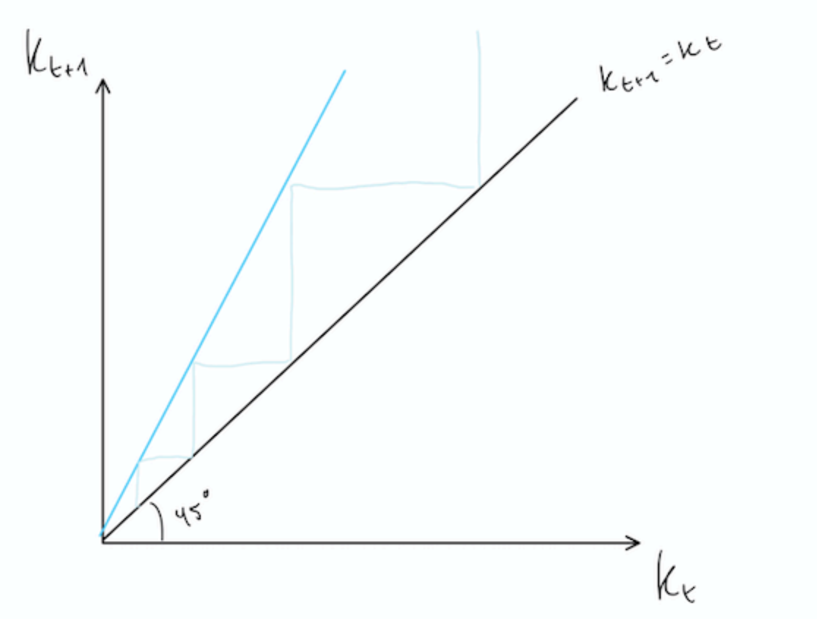


Spørgsmål 3:

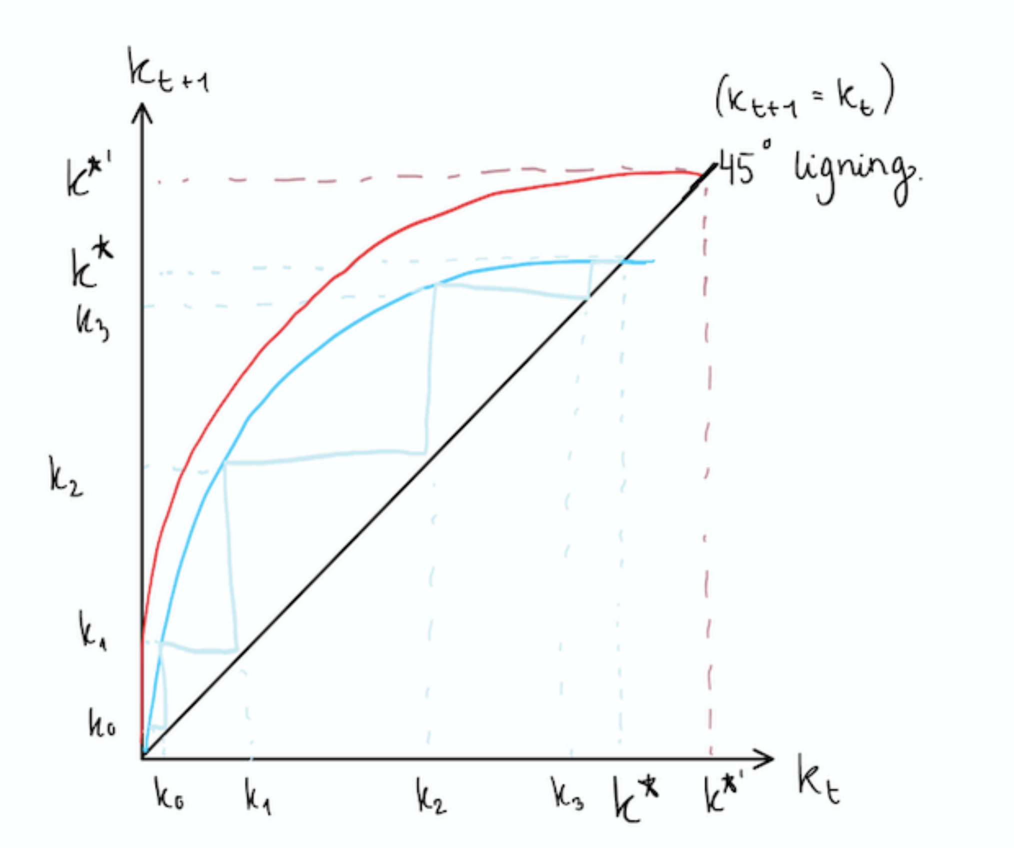
Ved alpha = 1, ses at transitionsligningen bliver = $\frac{1}{1+n}(sB\lambda k_t + (1-\delta)k_t)$

Hermed er transitionsligningen en ret linje, hvilket medfører konstant marginalprodukt til K_t. Da hældningen > 1, betyder dét, at transitionsligningen aldrig vil skære 45 graders ligningen, hvorfor der aldrig vil komme et strengt positivt steady state niveau for k_t.

I denne situation, vil økonomien være evigt voksende. Grundet det konstante marginalprodukt, vil man ikke komme til et k_t niveau hvor kapital pr. capita ligger fast.



Spørgsmål 4:



λ er andelen af befolkningen der arbejder. Når λ stiger til λ', bliver hældningen på transitionsligningen større. Jf. ovenfor ses dermed også et højere niveau i k*. Intuitionen bagved er, at når en større andel af befolkningen indgår i arbejdsstyrken, vil det medføre højere kapitalniveau pr. capita, da flere bidrager til den økonomiske produktion og dermed vækst. Grafen for transitionsligningen skubbes altså opad ved en stigning i λ.

Når λ stiger, skaber det vækst, fordi en større andel af befolkningen er produktive. Væksten i produktiviteten er ikke 1:1 med væksten i λ, da man antager aftagende marginalprodukt for kapital. Mens λ skaber vækst, betyder det aftagende marginalprodukt at væksten konvergerer mod steady state og derefter går i stå.

Jf. transitionsligningen, er kapitalniveauet i år k_t forudbestemt ud fra arbejdskraften og kapital for perioden forinden (k_{t-1}). Derfor vil en ændring i λ i år t først påvirke kapitalniveauet i år t+1.

Spørgsmål 5:

Definition på steady state = $k_{t+1} = k_t = k*$

Solowligningen:

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(sB\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha} - (n+\delta)k_t)$$

Jf. definitionen af steady state ovenfor, ses, at venstre side af Solowligningen = 0.

$$0 = \frac{1}{1+n}(sB\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha} - (n+\delta)k_t)$$

$$(n+\delta)k_t \cdot \frac{1}{1+n} = \frac{1}{1+n}sB\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha} => (n+\delta)k_t = sB\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha} => k_t = \frac{sB\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha}}{(n+\delta)} =>$$

$$k_t = B\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha} \cdot \left(\frac{s}{(n+\delta)}\right) => \frac{k_t}{k_t^{\alpha}} = B\lambda^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{s}{(n+\delta)}\right) => k_t^{1-\alpha} = B\lambda^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{s}{(n+\delta)}\right) =>$$

$$k_t = (B\lambda^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} => k_t = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda\left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Vi husker nu, at i steady state er $k_{t+1} = k_t = k*$

k* $= B^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda\left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Dette indsætter vi nu i udtrykket for y_t som vi fandt i spørgsmål 1:

$$y_t = B\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha} => y_t = B\lambda^{1-\alpha}\left(B^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda\left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}$$

$$=> y_t = B\lambda^{1-\alpha}\left(B^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\lambda^{\alpha}\left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) =>$$

$$y *= B^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda \cdot \left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Regneregel der anvendes: $B^1 = B^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}$

Spørgsmål 6:

$$\ln(y*) = \frac{1}{1-\alpha}\ln(B) + \ln(\lambda) + \frac{\alpha}{1-\alpha}[\ln(s) - \ln(n+\delta)]$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \ln(y)}{\partial \ln(\lambda)} = 1$$

(Vi ser at $\ln(\lambda)$ kun indgår i et led. Når et tal differentieres mht. sig selv, giver det 1)

I steady state er elasticiteten af BNP/capita mht. λ = 1. Det betyder, at når λ ændres 1 pct. ændres BNP/capita (y*) med 1 pct.

Spørgsmål 7:

Fra spørgsmål 1 har vi:
$y_t = B\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha}$

$$\ln(y_t) = \ln(B) + (1-\alpha)\ln(\lambda) + \alpha \cdot \ln(k_t)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \ln(y_t)}{\partial \ln(\lambda)} = 1 - \alpha$$

Elasticiteten er herfor mindre end 1, da $\alpha[0; 1]$. Grunden hertil er aftagende marginalprodukt. Inden vi når steady state, er produktionsfunktionen uelastisk mht. λ, hvilket betyder, at når andelen af befolkningen der arbejder stiger med 1 pct., stiger BNP pr. capita med mindre end 1 pct. Det aftagende marginalprodukt forklarer netop denne sammenhæng.

Makroøkonomi 1 - Hjemmeopgave 2

Sarah Fogh Mikkelsen

6. oktober 2020

Spørgsmål 1

Steady stateværdierne k* og y* findes vha. ligningerne:

$$k^* = \beta^{\frac{1}{1-\alpha}} * \frac{s}{n+\delta}^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{1}$$

$$y^* = \beta^{\frac{1}{1-\alpha}} * \frac{s}{n+\delta}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{2}$$

Vi indsætter de givne parameterværdier:

$$k^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} * \frac{0,131}{0,025+0,05}^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{2,31}}$$

$$y^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} * \frac{0,131}{0,025+0,05}^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{1,32}}.$$

Vi ser at steady state værdierne $k^* = \underline{\underline{2,31}}$ og $y^* = \underline{\underline{1,32}}$

Spørgsmål 2

Vi benytter igen ligning (1) og (2), til at udlede steady state værdierne ved de forskellige parameterændringer:

Scenarie 1

Opsparingskvoten ændres til s'=0,222, alle andre parametre er uændrede.

$$k^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} * \frac{0,222}{0,025+0,05}^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{5,09}}$$

$$y^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} * \frac{0,222}{0,025+0,05}^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{1,72}}$$

Ved en stigning i opsparingskvoten ser vi en stigning i både kapital per arbejder og BNP per arbejder. Altså et samlet højere steady state niveau.

Scenarie 2

Vækstraten i befolkningen ændres til n'=0,008, alle andre parametre er uændrede.

$$k^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} * \frac{0,131}{0,008+0,05}^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{3,39}}$$

$$y^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} * \frac{0,131}{0,008+0,05}^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{1,50}}$$

Ved et fald i befolkningsvæksten ser vi igen en stigning i både kapital per arbejder og BNP per arbejder, hvilket igen leder til et samlet højere steady state niveau. Denne stigning er relativt mindre end effekten ved en stigning i opsparingskvoten.

Scenarie 3

Opsparingskvoten ændres til s'=0,222, vækstraten i befolkningen ændres til n'=0,008, alle andre parametre er uændrede.

$$k^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} * \frac{0,222}{0,008+0,05}^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{7,49}}$$

$$y^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} * \frac{0,222}{0,008+0,05}^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{1,96}}$$

Samlet effekt ved stigning i opsparingskvoten og samtidigt fald i befolkningsvæksten, giver den relativt største stigning i steady state niveauet.

Spørgsmål 3

Vi finder de relative stigninger i y^* for de ovenstående 3 scenarier.

Scenarie 1:

$$(\frac{1,72}{1,32} - 1) * 100 = 30,18pct.$$

Scenarie 2:

$$(\frac{1,50}{1,32} - 1) * 100 = 13,71pct.$$

Scenarie 3:

$$(\frac{1,96}{1,32} - 1) * 100 = 48,03pct.$$

Vi kan se af ovenstående, at effekten i scenarie 3, overstiger summen af effekterne i scenarie 1 og 2.
Isoleret giver en stigning i opsparingskvoten et højere steady state niveau, da mere opsparing betyder flere midler investeret i kapitalapparatet. Det samme gør sig gældende for et isoleret fald i befolkningsvæksten, da dette betyder at udtyndingen af kapitalapparatet reduceres, jf. solowligningen. Således opnås mere kapital pr. arbejder ved et fald i n.
Sker disse to ændringer samtidig, opnås ikke kun summen af de isolerede effekter, men en ændring større end denne. Dette skyldes at parametrene påvirker hinanden og dermed forstærker hinandens marginale effekter.

Spørgsmål 4

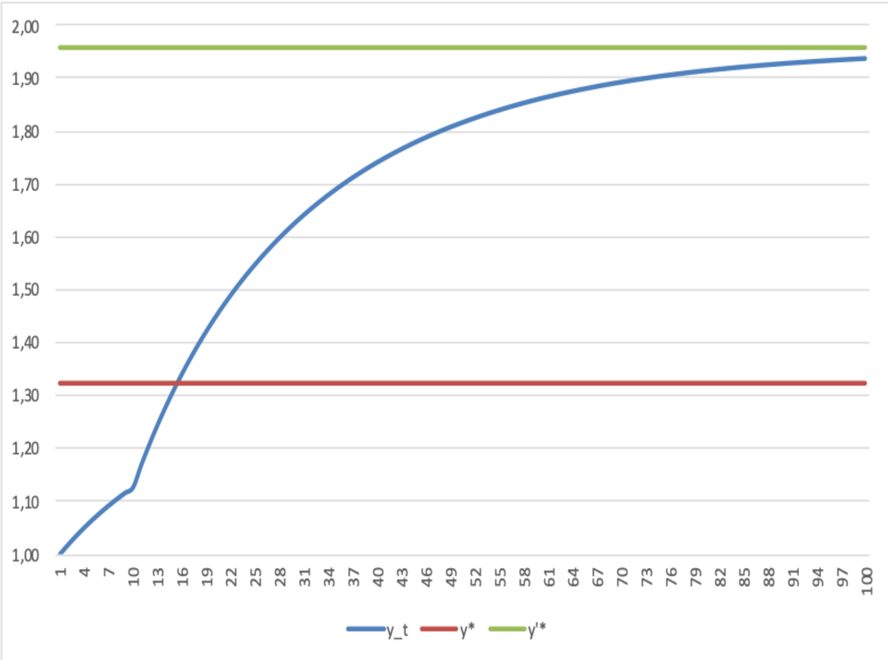
Til at simulere modellen benyttes transitionsligningen til at finde værdierne for hhv. k_t og y_t:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n} s\beta k_t^\alpha + (1-\delta)k_t$$

Hvor

$$y_t = \beta k_t^\alpha$$

Simuleringen nedenfor viser, at y_t fra år 1-9 konvergerer mod $y^* = 1,32$, mens y_t fra år 10 og frem konvergerer mod $y^* = 1,96$.



Det kan estimeres vha. ovenstående figur, at halvdelen af afstanden mellem y^* og y'^* er tilbagelagt efter ca. 31 år.

Spørgsmål 5

Nye steady state værdier for baseline:

$$k^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} * \frac{0,131}{0,025+0,05}^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{3,05}}$$

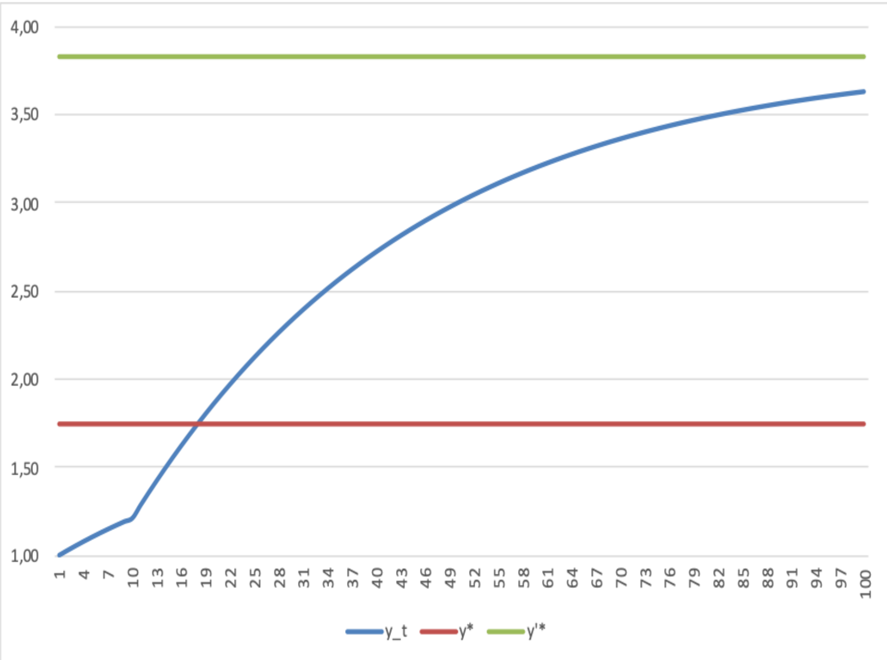
$$y^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} * \frac{0,131}{0,025+0,05}^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{1,75}}.$$

Nye steady state værdier for scenarie 3:

$$k'^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} * \frac{0,222}{0,008+0,05}^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{14,65}}$$

$$y'^* = 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} * \frac{0,222}{0,008+0,05}^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{3,83}}$$

Den nye simulering er tegnet i nedenstående diagram.



Den procentmæssige ændring fra det gamle til det nye steady state ses at være større i tilfældet hvor $\alpha = \frac{1}{2}$ end hvor $\alpha = \frac{1}{3}$

For at finde forklaringen på dette, ser vi på elasticiteten af y^*. Som udgangspunkt lineariserer vi ligning (2) fra spørgsmål 1, ved at tage logaritmen på begge sider:

$$ln(y^*) = \frac{1}{1-\alpha} ln(\beta) + \frac{\alpha}{1-\alpha}(ln(s) - ln(n+\delta))$$

Vi finder nu elasticiteten af y^* med hensyn til s:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial ln(y^*)}{\partial ln(s)} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Vi finder nu elasticiteten af y^* mht. s ved $\alpha = \frac{1}{2}$ og ved $\alpha = \frac{1}{3}$:

For $\alpha = \frac{1}{3}$ er elasticiteten $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$
For $\alpha = \frac{1}{2}$ er elasticiteten $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Vi kan af ovenstående udlede, at effekten af en ændring i s, forøges når α stiger. Vi ser at elasticiteten er enhedselastisk for $\alpha = \frac{1}{2}$. Dette betyder at når vi øger s med 1 pct. vil y^* tilsvarende stige med 1 pct.

For at finde elasticiteten af y^* med hensyn til n, benytter vi formlen for elasticitet i et punkt:

$$\varepsilon_n = n\frac{\frac{\partial y^*}{\partial n}}{y^*} = n\frac{\frac{-\alpha}{1-\alpha}\beta^{\frac{1}{1-\alpha}}s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(n+\delta)^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}}{\beta^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{s}{n+\delta}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = n\frac{-\alpha}{1-\alpha}(n+\delta)^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}(n+\delta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}(n^2+\delta n)$$

Da elasticiteten er numerisk, kan vi definere elasticiteten af y^* med hensyn til n som:

$$\varepsilon_n = \frac{\alpha}{1-\alpha}(n^2+\delta n)$$

Vi finder nu elasticiteten af y^* mht. n ved $\alpha = \frac{1}{2}$ og ved $\alpha = \frac{1}{3}$:

For $\alpha = \frac{1}{3}$ er elasticiteten $\frac{1}{2}(n^2 + \delta n)$
For $\alpha = \frac{1}{2}$ er elasticiteten $(n^2 + \delta n)$

Det ses af ovenstående at effekten er størst ved $\alpha = \frac{1}{2}$. Altså desto større α desto større effekt

Intuitionen for, at den procentmæssige ændring fra gammelt til nyt steady state er større når alpha stiger, tager udgangspunkt i, at alpha er et udtryk for kapitalens andel af den samlede produktion. Når alpha stiger, stiger kapitalens andel af produktionen, hvilket leder til en mere kapitaltung produktion. Vi ved at ændringer i opsparingen og befolkningsvæksten direkte påvirker kapitalakkumulationen. Dette må betyde, at desto mere kapitaltung produktionen er, desto større en effekt vil en ændring i hhv. opsparingen og befolkningsvæksten have på den samlede produktion.

Makroøkonomi 1 - Hjemmeopgave 3

Opgave 2 – Kapitalen i det 21. århundrede

2.1

For at angive et udtryk for realløn og reallejesats tages udgangspunkt i profitten for den repræsentative virksomhed:

$$\pi = F(K_t, L_t) - r_t K_t - w_t L_t$$

For at opnår markedsclearing gælder følgende FOC:

$$0 = \pi_k'$$
$$0 = F_k'(K_t, L_t) - r_t$$
$$F_k'(K_t, L_t) = r_t$$

Og

$$0 = \pi_L'$$
$$0 = F_L'(K_t, L_t) - w_t$$
$$F_L'(K_t, L_t) = w_t$$

Vi kan i ovenstående FOC indsætte Solowmodellens ligning (1):

Vi finder et udtryk for reallejesatsen:

$$F_k'(K_t, L_t) = r_t$$

$$\alpha K_t^{\alpha-1}(A_t L_t)^{1-\alpha} = r_t$$

$$\alpha \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1} = r_t$$

$$\boldsymbol{\alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} = r_t}$$

Vi finder et udtryk for reallønnen:

$$F_L'(K_t, L_t) = w_t$$

$$K_t^{\alpha} A_t (1-\alpha)(A_t L_t)^{-\alpha} = w_t$$

$$A_t (1-\alpha) \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} = w_t$$

$$\boldsymbol{A_t(1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha} = w_t}$$

Arbejdernes indkomstlønandel findes ved $\frac{w_t L_t}{Y_t}$:

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{A_t(1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha} L_t}{K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1-\alpha)K^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}}{K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\frac{w_t L_t}{Y_t} = 1-\alpha}$$

Kapitalens bruttoindkomstandel findes ved $\frac{r_t K_t}{Y_t}$:

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \frac{\alpha\tilde{k}_t^{\alpha-1} K_t}{K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}}$$

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \frac{\alpha K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}}{K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\frac{r_t K_t}{Y_t} = \alpha}$$

Grundlæggende gælder det, at ca. 2/3 af indkomsten går til arbejderne. Set ud fra ovenstående værdier, er en plausibel værdi af α derfor at $\alpha = \left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

2.2

For at udlede transitionsligningen dividerer vi kapitalakkumulationsligningen med $A_{t+1}L_{t+1}$:

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = \frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{(1+g)A_t(1+n)L_t}$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{A_t L_t}$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t\right]$$

Ved at dividere Solowmodellens produktionsfunktion (ligning (1)), ses at $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$:

$$\frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{K^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}}{A_t L_t}$$

$$\tilde{y}_t = \frac{K^{\alpha}}{(A_t L_t)^{\alpha}}$$

$$\tilde{y}_t = \frac{K^{\alpha}}{(A_t L_t)^{\alpha}}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$$

Vi kan indsætte denne lighed i vores udledning af transitionsligningen:

$$\boldsymbol{\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right]}$$

Vi ser at modellen indebærer ovenstående transitionsligning for $\tilde{k}_t$.

Vi finder Solowligningen som funktion af $\tilde{k}_t$:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t - (1+n)(1+g)\tilde{k}_t\right]$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta-(1+g+n+ng))\tilde{k}_t\right]$$

$$\boldsymbol{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{k}_t^{\alpha} - (\delta+g+n+ng))\tilde{k}_t\right]}$$

2.3

I steady state gælder det at:

$$\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t = \tilde{k}^*$$

Denne betingelse betyder, at venstre side af solowligningen må være = 0. Højresiden af solowligningen vil være = 0, når parentesen $[s\tilde{k}_t^\alpha - (\delta + g + n + ng))\tilde{k}_t] = 0$. Vi kan ved hjælp af dette, finde værdien af $\tilde{k}_t$ i steady state, hvor det gælder at: $\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t = \tilde{k}^*$:

$$[s\tilde{k}_t^\alpha - (\delta + g + n + ng))\tilde{k}_t] = 0$$

$$s\tilde{k}_t^\alpha = (\delta + g + n + ng))\tilde{k}_t$$

$$\frac{s}{\delta + g + n + ng} = \frac{\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t^\alpha}$$

$$\frac{s}{\delta + g + n + ng} = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{s}{\delta + g + n + ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \tilde{k}_t^*}$$

Vi ser, at modellen indebærer konvergens af $\tilde{k}_t$, til ovenstående steady state-værdi.

Vi ved fra opg. 2.2 at $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$. Vi benytter denne lighed, til at finde steady state-værdien for $\tilde{y}_t$:

$$\tilde{y}_t^* = \left(\tilde{k}_t^*\right)^\alpha$$

$$\boldsymbol{\tilde{y}_t^* = \left(\frac{s}{\delta + g + n + ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

Vi ser at modellen indebære konvergens af $\tilde{y}_t$, til ovenstående steady state-værdi.

Afslutningsvis benytter vi den givne definition af z: $z_t \equiv \frac{K_t}{Y_t}$:

$$\tilde{z}_t^* = \frac{\tilde{k}_t^*}{\tilde{y}_t^*}$$

$$\tilde{z}_t^* = \frac{\left(\frac{s}{\delta + g + n + ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s}{\delta + g + n + ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

$$\tilde{z}_t^* = \left(\frac{s}{\delta + g + n + ng}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\tilde{z}_t^* = \frac{s}{\delta + g + n + ng}}$$

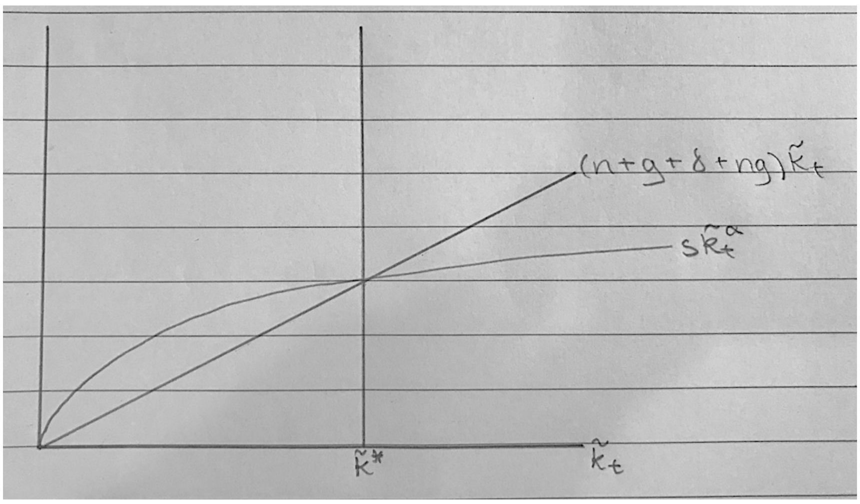
Vi ser at modellen indebære konvergens af $\tilde{z}_t$, til ovenstående steady state-værdi.

En plausibel størrelse af z, indebære et bud på en plausible størrelse af opsparingsraten samt udtynding og nedslidningsraten. En opsparingsrate på omkring 20 pct., vil være rimelig plausible. Denne skal være større end nedslidnings- og udtyndingsraten for at der kan opstå kapitalakkumulation. Dette betyder at en plausible størrelse på nedslidnings- og udtyndingsraten må være mindre end 20 pct., et bud er ca. 10 pct. Dette giver i alt et bud på en plausible værdi af z* på ca. 200 pct.

2.4

$$z_t = \frac{K_t}{Y_t} = \frac{K_t}{K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}} = \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{1-\alpha} = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$$

Jf. ovenstående udledning ses det, at kapital-output forholdet er defineret ved $z_t \equiv \tilde{k}_t^{1-\alpha}$. Da α er defineret i intervallet (0,1), og eksponenten dermed er positiv, ses det at kapital-output forholdet er konstant voksende i over tid. Dette ses ligeledes af nedenstående Solowdiagram, hvor $\tilde{k}_t$ konvergerer opad mod steady state-værdien $\tilde{k}^*$.



Fra 2.1, ved vi at reallønnen er defineret ved: $w_t = A_t(1-\alpha)\tilde{k}_t^\alpha$. Endnu engang ved vi at α er defineret i intervallet (0,1), og dermed er parentesen $(1-\alpha)$ og $\tilde{k}_t^\alpha$ voksende. Vi ved desuden at

konstanten A_t er voksende. Dermed ser vi at reallønnen, ligesom kapital-outputforholdet er en voksende størrelse over tid. Modsat gælder det når vi ser på reallejesatsen defineret ved: $r_t = \alpha\tilde{k}_t^{\alpha-1}$. Det ses at eksponenten er negativ og dermed, at reallejesatsen er aftagende over tid.

Afslutningsvis ses på lønandelen, som jf. 2.1 er defineret ved $1-\alpha$. Da α er en konstant, er lønandelen konstant over tid. Dette er ikke i overensstemmelse med Pikettys tese, som lyder at i den tid hvor kapital-output forholdet er voksende, vil lønandelen opleve en faldende tendens. Pikettys tese som lyder på at samfundets samlede formuer og indkomster kan fortsætte deres stigende tendens over tid, er dog fint i overensstemmelse med modellen, som netop beskriver monotont voksende kapitaloutput forhold og reallønssatser over tid.

2.5

Solowmodellens konvergensproces bestemmes som udgangspunkt af modellens konvergensrate. Konvergensraten er et udtryk for hvor stor en andel af afstanden til steady state som mindskes hver periode, typisk udtrykt ved parameteren λ.
Opgaven oplyser at den teoretiske konvergensrate er givet ved: $(1-\alpha)(n+g+\delta)$. Jf. 2.1 er et palusibelt bud på størrelsen af $\alpha = \frac{1}{3}$. Jf. 2.3 er et plausibelt bud på størrelsen af udtynding og nedslidningsraten 10 pct. Vi ser her at der er tale om en størrelse, lidt mindre end udtyndings- og nedslidningsraten, et plausibelt bud kan altså være ca. 8 pct. Dette giver en konvergensrate = $\frac{2}{3} * 8 = 5{,}33\ pct$. Afstanden til steady state bliver derfor reduceret med ca. 5 pct. per år.

Vi ved at modellen overvurderer konvergenshastigheden, og vi antager derfor at den reelle konvergensrate må være under ca. 5 pct. Det kan således godt tage mere end et årti at tilbagelægge 50 pct. af den initiale værdi til steady state.
Pikettys teser peger bl.a. på at det stigende kapital-output forhold skal forstås som et steady state fænomen. Med udgangspunkt i konvergensraterne, som netop tyder på en voksende tendens mod et steady state, kan det altså ikke afkræftes at Piketty har ret, i hans forståelse af den voksende økonomi, som værende en genopbygning af økonomien efter 2 verdenskrige og krisen i 30'erne.

2.6

Den eneste ændring fra 2.2, er $s => s'$, samt antagelsen at $n+g$ er en størrelse meget tæt på 0. Dette kan vises i modellen ved at sætte $\delta = 0$ i Solowligningen fra 2.2:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\,[s'\tilde{k}_t^{\alpha} - (g+n+ng))\tilde{k}_t]$$

Vi finder steady state-værdierne ved $\tilde{k}^* = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t$, hvilket indikerer at Solowligningens venstreside må være = 0. Dette opstår når $[s'\tilde{k}_t^{\alpha} - (g+n+ng))\tilde{k}_t] = 0$:

$$[s'\tilde{k}_t^{\alpha} - (g+n+ng))\tilde{k}_t] = 0$$

$$s'\tilde{k}_t^{\alpha} = (g+n+ng))\tilde{k}_t$$

$$\frac{\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t^{\alpha}} = \frac{s'}{g+n+ng}$$

$$\tilde{k}_t^{1-\alpha} = \frac{s'}{g+n+ng}$$

$$\boldsymbol{\tilde{k}_t^* = \left(\frac{s'}{g+n+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

Vi ved at $\tilde{y}_t^* = {\tilde{k}_t^*}^{\alpha}$. Vi finder herved steady stateværdien for $\tilde{y}_t^*$:

$$\boldsymbol{\tilde{y}_t^* = \left(\frac{s'}{g+n+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

Afslutningsvis ved vi at $\tilde{z}_t^* = \frac{\tilde{k}_t^*}{\tilde{y}_t^*}$, vi finder herved steady state værdien for $\tilde{z}_t^*$:

$$\tilde{z}_t^* = \frac{\left(\frac{s'}{g+n+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s'}{g+n+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

$$\tilde{z}_t^* = \left(\frac{s'}{g+n+ng}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\tilde{z}_t^* = \frac{s'}{g+n+ng}}$$

Vi ser at betingelserne for nedenstående udledning ikke har ændret sig:

$$z_t = \frac{K_t}{Y_t} = \frac{K_t}{K_t^{\alpha}(A_tL_t)^{1-\alpha}} = \left(\frac{K_t}{A_tL_t}\right)^{1-\alpha} = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$$

Det må derfor fortsat gøre sig gældende at z_t kan defineres ved: $z_t = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$. z_t udvikler sig derfor i den nye model, på samme måde som i den gamle, da $\tilde{k}_t$ fortsat er en voksende størrelse og α er en konstant.

Vi ser på steady state-værdien for kapital-output forholdet i den nye model: $\tilde{z}_t^* = \frac{s'}{g+n+ng}$, overfor den gamle model: $\tilde{z}_t^* = \frac{s}{\delta+g+n+ng}$. Vi ser at når n+g går mod et lavere niveau, vil steady state-værdien i både den nye og den gamle model stige til et højere niveau. Det gælder for n+g gående mod 0, at steady state-værdien i den gamle model vil gå mod $\frac{s}{\delta}$, mens steady state-værdien i den nye model vil gå mod ∞.
Pikettys tese lyder på voksende og dermed fremtidigt høje værdier for indkomst og kapital-output forholdet. Den nye model understøtter denne tese, med en steady state værdi som principielt er uendeligt høj. Modsat er den gamle model mindre forenelig med tesen, da denne udviser en begrænset steady state-værdi.

2.7
Vi kan aflæse udviklingen af kapital-output forholdet i ligning (CES2). Vi ser at det gælder at begge eksponenter bliver positive ved $\sigma < 1$. Når $\tilde{k}_t$ konvergerer mod $\tilde{k}^*$ nedefra er $\tilde{k}_t$, en monotont voksende størrelse. Dette betyder at z_t vokser, ved $\sigma < 1$.
Ved $\sigma > 1$, gælder det jf. ligning (CES2), at begge eksponenter vil være negative. Der er fortsat tale om en monotont voksende $\tilde{k}_t$, hvilket leder til at z_t også vokser, ved $\sigma < 1$. Alt i alt betyder dette at z_t vokser, uafhængigt værdien af σ.

Vi kan aflæse udviklingen af lønandelen i ligning (CES1). Vi ser her, at for $\sigma < 1$, vil eksponenten være negativ, hvilket betyder at lønandelen vil vokse, ved en voksende værdi af $\tilde{k}_t$.
Modsat gælder det for $\sigma > 1$, hvor eksponenten vil være positiv hvilket betyder at ved en voksende værdi af $\tilde{k}_t$ vil lønandelen være faldende. Netop denne konklusion er i overensstemmelse med Pikettys tese, som lyder, at ved et voksende kapital-output forhold vil lønandelen være faldende. Altså er modellen i overensstemmelse med Piketty for $\sigma > 1$.

For at udlede værdien af lønandelen i steady state, indsætter vi værdien for $\tilde{k}_t$ i steady state (ligning (CES4)), i ligningen for lønandelen (ligning (CES1)).

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha[\left(\frac{(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1-\alpha)}{\frac{\alpha(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} + (1-\alpha)}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1-\alpha)}{\frac{\alpha(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left[(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1-\alpha) * \left[(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]}{\alpha(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left[(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1-\alpha) * \left[(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]}{\alpha(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1-\alpha) * \left[(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]}{(1-\alpha)(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = 1 - \frac{(1-\alpha)\alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(1-\alpha)(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = 1 - \frac{\alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = 1 - \alpha\left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

Vi ser, at vi i ovenstående kan indsætte definitionen fra ligning (CES5), $z^* = \frac{s}{(n+g+\delta+ng)}$:

$$\boldsymbol{\left(\frac{w_t L_t}{Y_t}\right)^* = 1 - \alpha(z^*)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}$$

Vi har nu udledt lønandelen i steady state.

Jf. ligning (CES5), vil steady state-værdien for kapital-outputforholdet vokse, når n+g skifter mod et lavere niveau. Dette har jf. ovenstående udledning en direkte effekt på steady state-værdien for lønandelen. Når n+g skifter nedad, vil z* vokse, hvilket betyder at $\left(\frac{w_t L_t}{Y_t}\right)$, må være aftagende. Ved $\sigma < 1$, vil eksponenten være negativ. Dette betyder, at når z* vokser, bliver lønandelen mindre og mindre negativ, den er altså tiltagende. Ved $\sigma > 1$, vil eksponenten være positiv. I dette tilfælde vil en voksende værdi af z* gøre lønandelen mere og mere negativ, altså aftagende.

I overensstemmelse med Pikettys tese, ser vi at kapital-output forholdet stiger, som følge af et fald i n+g, uanset værdien af σ. Altså at kapital-output forholdet vokser, som et steady state fænomen. Lønandelen i steady state, ses dog kun at falde, ved en stigende værdi af z*, for $\sigma > 1$. Udviklingen i lønandelen er altså kun i overenstemmelse med Piketty, betinget af at $\sigma \text{ må være} > 1$.

Makroøkonomi 1 - Hjemmeopgave 4

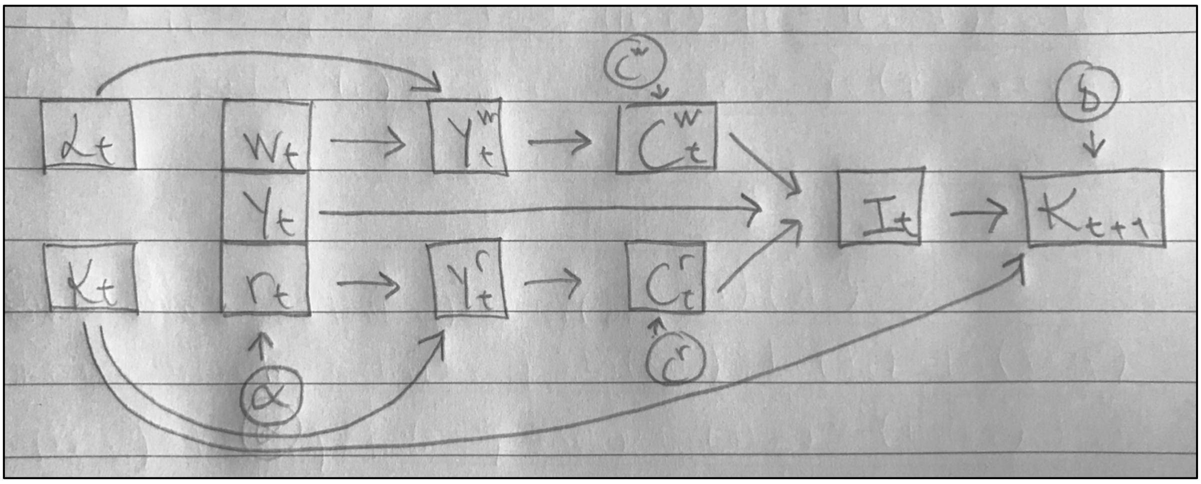
Opgave 2 – Den basale Solowmodel med forskellig opsparingstilbøjelighed for kapitalindkomst og lønindkomst

2.1

Kapitalindkomst genereres modsat lønindkomst ikke gennem arbejde men afkast fra kapital. Lønindkomst går til husholdningerne som benytter denne til dagligt forbrug. Heriblandt kan husholdningerne benytte en større eller mindre andel af lønindkomsten på forbrug. Det må antages, at de husholdninger som har en relativt stor opsparingsandel, vil opnå et højere afkast fra investeringer i kapital. Således vil størstedelen af kapitalindkomsten tilfalde husholdningerne med størst opsparingsandel. Alt andet lige betyder dette, at opsparingstilbøjeligheden må være større for kapitalindkomsten end lønindkomsten og antagelsen i (7) må derfor antages at være rimelig.

2.2

Nedenfor ses modellens kausale struktur illustreret ved pilediagram:



2.3

For at udlede ligning (11) tager vi udgangspunkt i ligning (4)

$$Y_t^r = r_t K_t$$

Vi indsætter definitionen for r_t fra ligning (2):

$$Y_t^r = \alpha \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1} K_t$$

$$Y_t^r = \alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} K_t^1$$

$$Y_t^r = \alpha K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

Vi ser at $K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = Y_t$ jf. ligning (1):

$$Y_t^r = \alpha Y_t$$

Ovenfor ses ligning (11).

For at udlede ligning (12) tager vi udgangspunkt i ligning (5):

$$Y_t^w = w_t L_t$$

Vi indsætter definitionen for w_t fra ligning (3):

$$Y_t^w = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{Lt}\right)^\alpha L_t$$

$$Y_t^w = (1-\alpha)K_t^\alpha L^{-\alpha} L_t^1$$

$$Y_t^w = (1-\alpha)K_t^\alpha L^{1-\alpha}$$

Vi ser at $K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = Y_t$ jf. ligning (1):

$$Y_t^w = (1-\alpha)Y_t$$

Ovenfor ses ligning (12).

For at udlede ligning (13) tager vi udgangspunkt i ligning (11) og (12):

$$Y_t^r + Y_t^w = \alpha Y_t + (1-\alpha)Y_t$$

$$Y_t^r + Y_t^w = \alpha Y_t + Y_t - \alpha Y_t$$

$$Y_t^r + Y_t^w = Y_t$$

Ligning (13) indikere at summen af lønindkomst og kapitalindkomst udgør det samlede BNP. Altså clearer markedet og der er dermed ingen forekomst af ren profit i modellen.

2.4

For at udlede ligning (14) tager vi udgangspunkt i ligning (8):

$$Y_t = C_t^r + C_t^w + I_t$$

$$Y_t - C_t^r - C_t^w = I_t$$

Vi indsætter definitionerne for C_t^r og C_t^w fra (6) og (7), samt definitionen for Y_t fra (13):

$$Y_t^r + Y_t^w - c^r Y_t^r - c^w Y_t^w = I_t$$

$$Y_t^r(1 - c^r) + Y_t^w(1 - c^w) = I_t$$

Vi indsætter definitionerne for Y_t^r og Y_t^w fra (11) og (12):

$$\alpha Y_t(1 - c^r) + (1 - \alpha)Y_t(1 - c^w) = I_t$$

$$Y_t[\alpha(1 - c^r) + (1 - \alpha)(1 - c^w)] = I_t$$

Vi ser at udtrykket i den firkantede parentes stemmer overens med definitionen for s:

$$sY_t = I_t$$

Ovenfor ses ligning (14). Ligningen udtrykker at bruttoinvesteringen I_t udgør en andel s af den samlede produktion Y_t. Opsparingsraten er defineret ved s, hvilket betyder at ligningen fortæller at bruttoopsparingen = bruttoinvesteringen.

Vi indsætter $c_w = 1$ i følgende udtryk fra udledningen af ligning (14) : $Y_t[\alpha(1 - c^r) + (1 - \alpha)(1 - c^w)] = I_t$.

$$Y_t[\alpha(1 - c^r) + (1 - \alpha)(1 - 1)] = I_t$$

$$Y_t \alpha(1 - c^r) = I_t$$

Vi indsætter definitionen af Y_t^r fra ligning (11):

$$Y_t^r(1 - c^r) = I_t$$

$$Y_t^r - c^r Y_t^r = I_t$$

Vi indsætter definitionen af C_t^r fra ligning (6):

$$Y_t^r - C_t^r = I_t$$

$$Y_t^r = C_t^r + I_t$$

Ovenfor ses det ønskede udtryk.

2.5

Vi viser dynamikken i K_t ved at udlede transitionsligningen. Vi tager Udgangspunkt i ligning (9) hvor vi indsætter definitionen for bruttoinvesteringen givet ved ligning (14):

$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K^t$$

Da $c^w = 1$, er definitionen for s nu: $s \equiv \alpha(1-c^r) + (1-\alpha)(1-1) = \alpha(1-c^r)$. Vi indsætter denne:

$$K_{t+1} = \alpha(1-c^r)Y_t + (1-\delta)K^t$$

Ved at indsætte ligning (10) i ligning (1) følger:

$$Y_t = K_t^\alpha * 1^{1-\alpha} = K_t^\alpha$$

Vi indsætter dette:

$$K_{t+1} = \alpha(1-c^r)K_t^\alpha + (1-\delta)K^t$$

Vi har nu udledt transitionsligningen.
Transitionsligningen angiver af værdien for kapital i perioden t+1, bestemmes af kapitalen i periode t fratrukket nedslidning, angivet ved $(1-\delta)Kt$, samt bruttoopsparingen i periode t angivet ved $\alpha(1-c^r)$.

Vi kan fra transitionsligningen udlede Solowligningen ved af fratrække K_t på begge sidder af ligningen:

$$K_{t+1} - K_t = \alpha(1-c^r)K_t^\alpha + K^t - \delta K^t - K^t$$

$$K_{t+1} - K_t = \alpha(1-c^r)K_t^\alpha - \delta K^t$$

Ovenfor ses Solowligningen.
Solowligningen angiver ligeledes at ændringen i kapitalen fra periode t til periode t+1 udgøres af bruttoopsparingen i periode t fratrukket nedslidningen i kapitalapparatet i periode t.

2.6

For at modellens dynamik på langt sigt indebærer konvergens af K_t mod steady state må INADA-betingelserne være opfyldt:

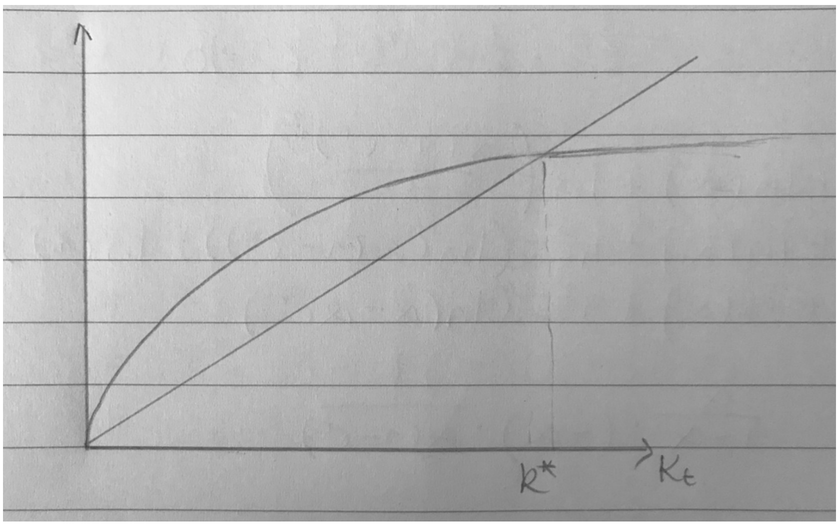
1. *Transitionsligningen går igennem (0,0) i transitionsdiagrammet (K_{t+1} som funktion af K_t):*
$$0 = \alpha(1-c^r) * 0^\alpha + (1-\delta) * 0$$
$$0 = 0$$

2. *Transitionskurven skal være konstant voksende:*
$$\frac{dK_{t+1}}{dK_t} = \alpha^2(1-c^r)K_t^{\alpha-1} + (1-\delta) \qquad > \mathbf{0}$$

3. *Transitionskurven skal have en konstant aftagende hældning:*
Det ses af $\frac{dK_{t+1}}{dK_t}$, at når K_t vokser vil hældningen være aftagende, da α er defineret i intervallet (0,1) og eksponenten dermed er mindre end 1. Dette betyder at for voksende K_t vil hældningen være konstant aftagende.

4. *Hældningen går mod et tal mindre end 1:*
Det ses af transitionsligningen, at når $K_t \to \infty$, vil hældningen gå mod $(1-\delta)$. Da δ jf. ligning (9) er defineret mellem 0 og 1, går hældningen altså mod et tal mindre end 1.

Når transitionskurven opfylder ovenstående egenskaber, vil den agere som på nedenstående illustration:



Jf. ovenstående ses, at modellens dynamik på langt sigt indebærer konvergens mod steady state. Vi kan udlede steady state-værdien fra transitionsligningen, hvor vi indsætter steady state-betingelsen: $K_{t+1} = K_t = K^*$:

$$K^* = \alpha(1-c^r){K^*}^{\alpha} + (1-\delta)K^*$$

$$K^* - (1-\delta)K^* = \alpha(1-c^r){K^*}^{\alpha}$$

$$1-(1-\delta) = \alpha(1-c^r){K^*}^{\alpha-1}$$

$$\delta = \frac{\alpha(1-c^r)}{{K^*}^{1-\alpha}}$$

$$\delta {K^*}^{1-\alpha} = \alpha(1-c^r)$$

$$ {K^*}^{1-\alpha} = \frac{\alpha(1-c^r)}{\delta}$$

$$\boldsymbol{K^*} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha(1-c^r)}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-\alpha}}}$$

2.7

For at finde steady state-værdien for Y_t, tager vi udgangspunkt i ligning (1), hvor i vi indsætter betingelsen fra ligning (10), hvor $L_t = 1$:

$$Y^* = {K^*}^{\alpha} * 1^{1-\alpha}$$

$$Y^* = {K^*}^{\alpha}$$

Vi indsætter K^* fra 2.6:

$$\boldsymbol{Y^*} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha(1-c^r)}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{1-\alpha}}}$$

For at finde steady state-værdien for z_t tager vi igen udgangspunkt i steady state-værdierne for hhv. Y_t og K_t:

$$\boldsymbol{z^*} = \frac{K^*}{Y^*} = \frac{\left(\frac{\alpha(1-c^r)}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{\alpha(1-c^r)}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{\alpha(1-c^r)}{\delta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\boldsymbol{\alpha(1-c^r)}}{\boldsymbol{\delta}}$$

For at finde steady state-værdien for r_t tager vi udgangspunkt i ligning (2):

$$r^* = \alpha {K^*}^{\alpha-1} = \alpha \left(\frac{\alpha(1-c^r)}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}^{\alpha-1}} = \alpha \left(\frac{\delta}{\alpha(1-c^r)}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-1}} = \frac{\delta}{(1-c^r)}$$

For at finde steady state-værdien for Y_t^r tager vi udgangspunkt i ligning (11):

$$Y^{r*} = \alpha Y^* = \alpha \left(\frac{\alpha(1-c^r)}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

For at finde steady state-værdien for Y_t^w tager vi udgangspunkt i ligning (12):

$$Y^{w*} = (1-\alpha)Y^* = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha(1-c^r)}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

For at finde steady state-værdien for C_t^r tager vi udgangspunkt i ligning (6):

$$C^{r*} = c^r Y^{r*} = c^r \, \alpha \left(\frac{\alpha(1-c^r)}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

For at finde steady state-værdien for C_t^w tager vi udgangspunkt i ligning (7), vi husker desuden at det antages at $c^w = 1$:

$$C^{w*} = c^w Y^{w*} = (1-\ \alpha)\left(\frac{\alpha(1-c^r)}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

For at finde steady state-værdien for I_t tager vi udgangspunkt i ligning (14):

$$I^* = sY^* = s\left(\frac{\alpha(1-c^r)}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Vi ser af C^{w*}, at denne vil maksimeres ved at c^r er så lille en størrelse som muligt. Jf. ligning (6) betyder dette at $c^r = 0$, vil maksimere C^{w*}. Forbruget af lønindkomsten vil altså maksimeres ved at forbrugstilbøjeligheden af kapitalindkomsten er på sit minimum. Dette betyder at vi sparer maksimalt kapital op. Dette vil lede til maksimal steady state værdi af BNP, som så leder til maksimalt forbrug af lønindkomsten i steady state.

Vi ser af C^{r*}, at c^r indgår som en hhv. positiv og negativ effekt. Den positive effekt kommer af, at desto større forbrugstilbøjeligheden er af kapitalindkomsten, desto større vil forbruget af kapitalindkomsten selvsagt blive. Den negative effekt kommer af, at desto større forbrugstilbøjeligheden er, desto mindre opsparing i kapitalindkomst vil der være, hvilket betyder mindre BNP i steady state, og dermed mindre mulighed for forbrug af kapitalindkomst i steady state. For at finde den optimale værdi af c^r for C^{r^*}, må vi differentiere logaritmen til C^{r^*} mht. c^r:

$$\ln(C^{r^*}) = \ln(c^r) + \ln(\alpha) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\ln\big(\alpha(1-c^r)\big) - \ln(\delta)\right]$$

$$\frac{\partial \ln\left(C^{r^*}\right)}{\partial c^r} = \frac{1}{c^r} + \frac{\alpha}{1-\alpha}(-\alpha)\frac{1}{\alpha(1-c^r)}$$

$$0 = \frac{1}{c^r} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{(1-c^r)}$$

$$\frac{1}{c^r} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{(1-c^r)}$$

$$(1-c^r) = \frac{\alpha}{1-\alpha}c^r$$

$$(1-c^r)(1-\alpha) = \alpha c^r$$

$$1-\alpha-c^r+\alpha c^r = \alpha c^r$$

$$1-\alpha = \alpha c^r - \alpha c^r + c^r$$

$$1-\alpha = c^r$$

Altså vil C^{r^*} optimeres ved $c^r = 1-\alpha$.

2.8

I perioden:

Når c^r falder sker det direkte at forbruget af kapitalindkomsten, C_t^r, i perioden vil falde. Da K_t er prædetermineret og L_t bestemt ved (10) er outputtet Y_t, ikke være påvirket i selve perioden hvor faldet sker. Det samme gælder derfor også r_t, w_t, Y_t^r, Y_t^w og C_t^w. Da $I_t = Y_t - C_t^w - C_t^r$, må det gælde at bruttoinvesteringen stiger med ligeså meget som forbruget i kapitalindkomst falder.

På langt sigt:

På langt sigt er K_t ikke længere prædetermineret, hvilket betyder at Y_t påvirkes af faldet i c^r. Når forbruget af kapitalindkomst falder, sker en stigning i Y_t, da mere kapitalindkomst spares op. Dette genererer stigninger både i Y_t^r og Y_t^w. Den samlede lønindkomst påvirkes også af faldet i forbrugstilbøjeligheden for kapitalindkomst, da lønindkomsten afhænger af størrelsen på det samlede BNP som påvirkes positivt af en stigning i opsparingen af kapitalindkomst.

<u>I nyt steady state:</u>
I nyt steady state ses jf. 2.7 at Y_t vil være steget. Vi ser desuden af steady state udtrykkene fra 2.7 at hhv. $Y_t^r, Y_t^w, C_t^w \; og \; I_t$ vil være steget til et højere niveau, som en konsekvens af, at mere kapital opspares i økonomien. Kun reallejesatsen r_t ses at være på et lavere niveau, hvilket intuitivt passer med at udbuddet af kapital er steget.

Makroøkonomi 1 - Hjemmeopgave 5

Spørgsmål 1 – Skolegang, humankapital og indkomst

1.a)
Som udgangspunkt er antal års skolegang et godt mål for humankapital. Humankapital i modellen betegner evner tilknyttet hver enkelt arbejder. Det må antages, at det alt andet lige gælder, at den enkelte arbejders evner øges, desto flere års skolegang den enkelte har. På denne måde fungerer antallet af års skolegang altså godt som mål for humankapital.
Desuden skal der tages højde for uddannelse udgør en alternativomkostning ved at dem under uddannelse ikke er på arbejdsmarkedet. Det må antages, at borgerne kun uddanner sig hvis gevinsten ved ekstra års uddannelse overstiger omkostningen ved ikke at være på arbejdsmarkedet, hvilket må være endnu et argument for, at antal års skolegang er et godt mål for humankapital. Det er desuden et godt kvantitativt mål, som nemt kan inkorporeres i matematiske modeller.
Der må dog tages forbehold for kvaliteten af undervisningen, da det må antages, at et veludviklet land, som har brugt mange år på at udvikle et effektivt uddannelsessystem, vil opnå en større stigning i produktivitet per arbejder ved x antal års skolegang, sammenlignet med et udviklingsland. Herudover vil et veludviklet land have flere ressourcer og overskud til rådighed til at prioritere denne investering i en længere periode.
Der må altså tages forbehold for visse forbehold når man benytter antal års skolegang som mål for humankapital. Alt andet lige, må det dog konkluderes at antallet af års skolegang er en god indikator når man måler humankapital under de fleste omstændigheder.

1.b)
Figuren viser en pæn sammenhæng mellem antal års skolegang og BNP/indbygger. Der kan dog ikke på baggrund af denne sammenhæng konkluderes at et højere uddannelsesniveau øger BNP/indbygger, da samvariation ikke er det samme som kausalitet. Altså kan det ikke udledes fra figuren, hvilken variabel som er den forklarende og hvilken som er den afhængige. Dette betyder, at det ligeledes kan være et højt BNP/indbygger som forårsager et højt uddannelsesniveau, ligesom det omvendte kan være tilfældet. Det virker desuden plausibelt at andre faktorer har indflydelse på enten en eller begge variable i figuren, hvilket figuren ikke kan give oplysninger om. Alt i alt kan vi ikke på baggrund af figuren konkludere at et højere uddannelsesniveau øger BNP/indbygger, vi kan blot konkludere at de to variable har en høj grad af samvariation.

Spørgsmål 2: Finansiering af uddannelsessystemet

2.a)
Solowmodellen fra pensumbogen har nedenstående akkumulationsligning for humankapital:

$$H_{t+1} = s_H Y_t + (1 - \delta) H_t$$

Hvis vi fratrækker H_t på begge sidder får vi ligningen for udviklingen i humankapital over en periode:

$$H_{t+1} - H_t = s_H Y_t - \delta H_t$$

Af ovenstående ligning ser vi at s_H udgør som den andel af produktionen/indkomsten som går til finansiering af humankapitalen (uddannelsessystemet). Altså kan s_H fortolkes som en skattesats på indkomst, som regeringen benytter for at finansierer uddannelsessystemet.

2.b)
For at vise Solowligningen for $\tilde{k}$, finder vi først transitionsligningen, ved at tage udgangspunkt i K_t-kapitalakkumulationsligningen, som vi dividerer med $A_{t+1}L_{t+1}$:

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = \frac{s_K Y_t + (1-\delta-\tau)K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

Vi indsætter definitionen for A_{t+1} og L_{t+1}, samt definitionen $\tilde{k}_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}$:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{s_K Y_t + (1-\delta-\tau)K_t}{(1+g)A_t(1+n)L_T}$$

Vi ser på højresiden at vi kan benytte definitionerne $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$ og $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{s_K \tilde{y}_t + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)}$$

Vi indsætter nu produktionsfunktionen med tildevariable, $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi}$:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)}$$

Vi har nu transitionsligningen for $\tilde{k}_{t+1}$. For at nå til Solowligningen trækker vi $\tilde{k}_t$ fra på begge sider:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)} - \tilde{k}_t$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)} - \frac{(1+g)(1+n)\tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)}$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t - (1+g)(1+n)\tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)}$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t - (1+n+g+ng)\tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)}$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + \tilde{k}_t(1-\delta-\tau-1-n-g-ng)}{(1+g)(1+n)}$$

$$\boldsymbol{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (\delta+\tau+n+g+ng)\tilde{k}_t\right)}$$

Ovenfor ses Solowligningen for $\tilde{k}_{t+1}$.

For at vise Solowligningen for $\tilde{h}_t$, finder vi først transitionsligningen, ved at tage udgangspunkt i H_t-kapitalakkumulationsligningen, som vi dividerer med $A_{t+1}L_{t+1}$:

$$\frac{H_{t+1}}{A_{t+1}K_{t+1}} = \frac{\tau K_t + (1-\delta)H_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

Vi indsætter definitionen for A_{t+1} og L_{t+1}, samt definitionen $\tilde{h}_{t+1} = \frac{H_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}$:

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{\tau K_t + (1-\delta)H_t}{(1+g)A_t(1+n)L_t}$$

Vi ser på højresiden at vi kan benytte definitionerne $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$ og $\tilde{h}_t = \frac{H_t}{A_t L_t}$:

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{\tau \tilde{k}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t}{(1+g)(1+n)}$$

Vi har nu transitionsligningen for $\tilde{h}_{t+1}$. For at nå til Solowligningen trækker vi $\tilde{h}_t$ fra på begge sider:

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{\tau \tilde{k}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t}{(1+g)(1+n)} - \tilde{h}_t$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{\tau \tilde{k}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t}{(1+g)(1+n)} - \frac{(1+g)(1+n)\tilde{h}_t}{(1+g)(1+n)}$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{\tau \tilde{k}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t - (1+g)(1+n)\tilde{h}_t}{(1+g)(1+n)}$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{\tau \tilde{k}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t - (1+n+g+ng)\tilde{h}_t}{(1+g)(1+n)}$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{\tau \tilde{k}_t + \tilde{h}_t(1 - \delta - 1 - n - g - ng)}{(1+g)(1+n)}$$

$$\boldsymbol{\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)}(\tau \tilde{k}_t - (\delta + n + g + ng)\tilde{h}_t)}$$

Ovenfor ses Solowligningen for $\tilde{h}_{t+1}$.

Solowligningen for fysisk kapital minder meget om modellen fra bogen, med den undtagelse at τ er tilføjet i udtyndings- og nedslidningselementet. Dette giver intuitivt mening, da τ er den andel af den fysiske kapital, som nu benyttes til at finansiere uddannelsessystemet og dermed ikke bidrager til at øge kapitalakkumulationen.

På samme måde minder Solowligningen for human kapital meget om ligningen fra bogen, med den forskel at bogens variabel s_H i denne ligning er erstattet af τ. I opgaven sker der altså et positivt bidrag til humankapital gennem en formueskat, τ, hvis størrelse afhænger af den fysiske kapital i indeværende periode. Modsat giver pensumbogens model et positivt bidrag gennem en andel af indkomsten/produktionen, s_H, som afhænger af størrelsen på indkomsten/produktionen i indeværende år.

2.c)

I steady state er der ikke længere nogen udvikling i hverken $\tilde{k}_t$ eller $\tilde{h}_t$, hvilket betyder at begge Solowligninger må være = 0, da det gælder at $\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t = \tilde{k}^*$ og $\tilde{h}_{t+1} = \tilde{h}_t = \tilde{h}^*$. For at kunne tegne fasediagrammet, med $\tilde{k}_t$ på 1. aksen og $\tilde{h}_t$ på 2. aksen, må vi derfor isolere $\tilde{h}_t$ i begge Solowligninger hvor venstresiderne = 0, således at vi får $\tilde{h}_t$ som funktion af $\tilde{k}_t$.

Vi finder først nullcline for $\tilde{k}_t$, hvor $\Delta\tilde{k}_t = 0$:

$$0 = \frac{1}{(1+g)(1+n)}(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (\delta + \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t)$$

$$\frac{(\delta + \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)} = \frac{s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi}}{(1+g)(1+n)}$$

$$(\delta + \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t = s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi}$$

$$\tilde{h}_t^{\varphi} = \frac{(\delta + \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t}{s_K \tilde{k}_t^{\alpha}}$$

$$\tilde{h}_t = \left[\frac{(\delta + \tau + n + g + ng)}{s_K} * \frac{\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\varphi}}$$

$$\tilde{h}_t = \left[\frac{(\delta + \tau + n + g + ng)}{s_K}\right]^{\frac{1}{\varphi}} * \left[\frac{\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\varphi}}$$

$$\tilde{h}_t = \left[\frac{(\delta + \tau + n + g + ng)}{s_K}\right]^{\frac{1}{\varphi}} * \frac{\tilde{k}_t^{\frac{1}{\varphi}}}{\tilde{k}_t^{\frac{\alpha}{\varphi}}}$$

$$\boldsymbol{\tilde{h}_t = \left[\frac{(\delta + \tau + n + g + ng)}{s_K}\right]^{\frac{1}{\varphi}} * \tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha}{\varphi}}}$$

Vi finder herefter nullcline for $\tilde{h}_t$, hvor $\Delta\tilde{h}_t = 0$:

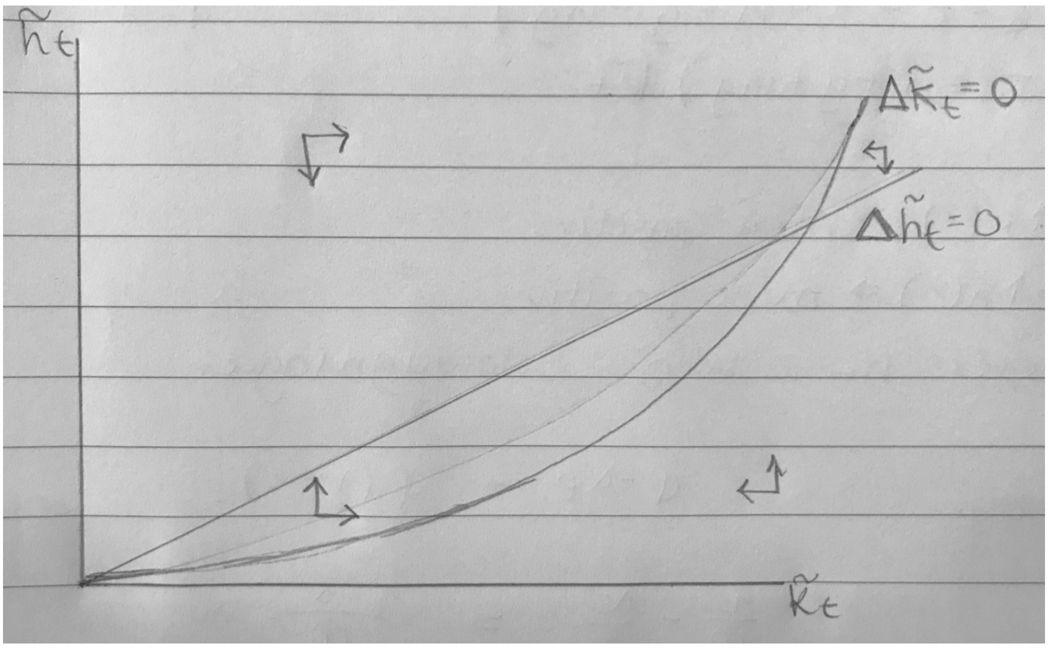
$$0 = \frac{1}{(1+g)(1+n)}(\tau\tilde{k}_t - (\delta + n + g + ng)\tilde{h}_t)$$

$$\frac{(\delta + n + g + ng)\tilde{h}_t}{(1+g)(1+n)} = \frac{\tau\tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)}$$

$$(\delta + n + g + ng)\tilde{h}_t = \tau\tilde{k}_t$$

$$\boldsymbol{\tilde{h}_t = \frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)} * \tilde{k}_t}$$

Vi kan nu indtegne de to ligninger i vores fasediagram:



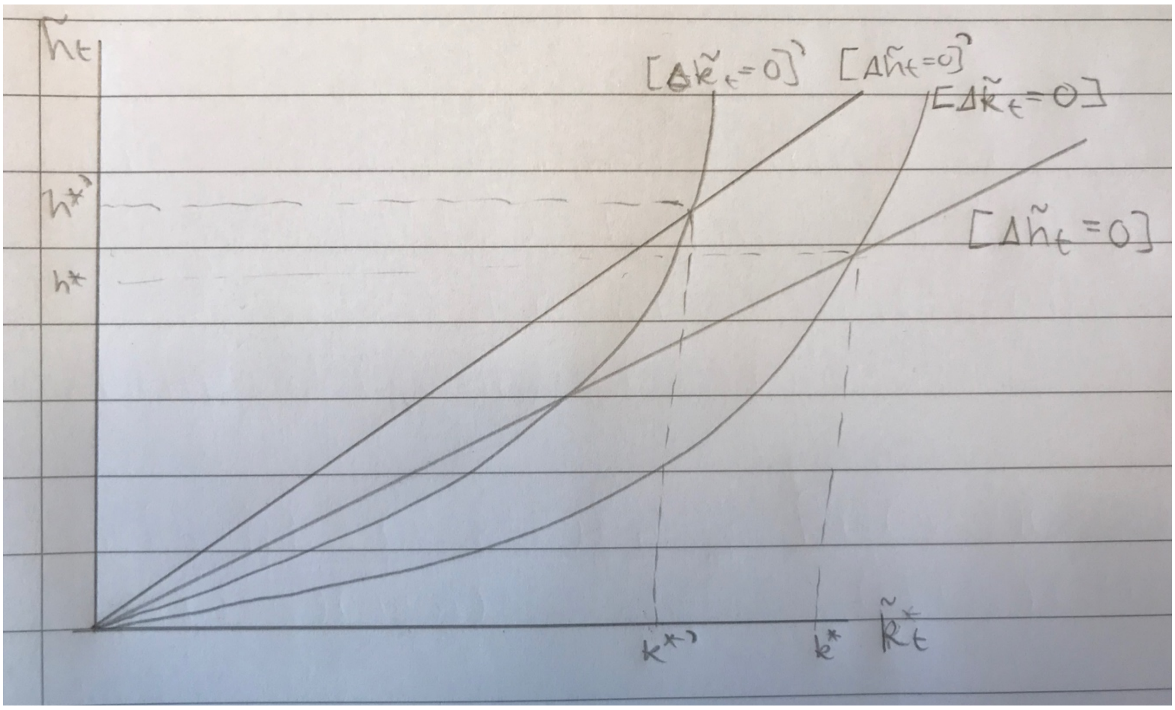
Nullcline for $\tilde{h}_t$ er i fasediagrammet tegnet som en ret linje, da vi af $\tilde{h}_t = \frac{\tau}{(\delta+n+g+ng)} * \tilde{k}_t$, kan aflæse, at $\tilde{h}_t$ blot er en lineær funktion af $\tilde{k}_t$.

Modsat er nullcline for $\tilde{k}_t$ tegnet konveks. Dette er valgt da vi af $\tilde{h}_t = \left[\frac{(\delta+\tau+n+g+ng)}{s_K}\right]^{\frac{1}{\varphi}} * \tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha}{\varphi}}$, kan aflæse at hvis $\alpha = \varphi$, vil eksponenten være > 1. Dette er et estimat foretaget fra antagelsen af $\alpha > 0$ og $\varphi < 1$, hvilket altså må betyde at de to størrelser er relativt tæt på hinanden, begge i intervallet (0,1). Den klassiske antagelse lyder desuden at $\alpha = \varphi = \frac{1}{3}$. Vores antagelsen, at linjen $\Delta\tilde{k}_t = 0$, skal tegnes konveks, må altså være rimelig plausible.

Pilene i fasediagrammet indikerer hvilken retning nullclines for hhv $\tilde{h}_t$ og $\tilde{k}_t$ bevæger sig. Vi kan aflæse af Solowligningen for fysisk kapital, at i de tilfælde hvor $\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t > 1$, altså over nullcline for $\tilde{k}_t$, vil det ved alle kombinationer af $\tilde{k}_t$ og $\tilde{h}_t$ gælde at $\tilde{k}_t$ vil være stigende. Ligeledes vil det for $\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t > 1$, altså under nullcline for $\tilde{k}_t$, gælde at $\tilde{k}_t$ vil være aftagende, for alle kombinationer af $\tilde{k}_t$ og $\tilde{h}_t$. Den samme intuition kan benyttes for $\tilde{h}_t$ ved at se på Solowligningen for humankapital.

2.d)

Vi ser af ligningerne fra 2.c) at når τ stiger, vil hældningen for både $\Delta\tilde{k}_t = 0$ og $\Delta\tilde{h}_t = 0$ blive stejlere. Dette betyder, jf. nedenstående fasediagram, at steady state-værdien for $\tilde{k}_t$ vil blive lavere, mens den vil stige for $\tilde{h}_t$. Intuitivt giver dette mening, da en stigning i τ, betyder at andelen per periode investeret i humankapital vil stige, hvilket netop betyder at steady state-værdien for $\tilde{h}_t$ vil være højere. En større andel investeret i human kapital, betyder dog også at der må investeres en mindre andel i fysisk kapital, hvilket ses i fasediagrammet, ved at steady state-værdien for $\tilde{k}_t$ netop bliver lavere.



2.e)
Vi finder steady state-værdien for $\tilde{y}_t$, ved at finde steady state-værdierne for hhv. $\tilde{k}_t$ og $\tilde{h}_t$:

Vi finder først steady state-værdien for $\tilde{k}_t$, ved at sætte venstreside i solowligningen for fysisk kapital lig 0:

$$0 = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (\delta + \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t\right)$$

$$\frac{(\delta + \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)} = \frac{s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi}}{(1+g)(1+n)}$$

$$(\delta + \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t = s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi}$$

$$\frac{\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t^{\alpha}} = \frac{s_K \tilde{h}_t^{\varphi}}{(\delta + \tau + n + g + ng)}$$

$$\tilde{k}_t^{1-\alpha} = \frac{s_K \tilde{h}_t^{\varphi}}{(\delta + \tau + n + g + ng)}$$

$$\tilde{k}_t^{*} = \left[\frac{s_K \tilde{h}_t^{\varphi}}{(\delta + \tau + n + g + ng)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Vi finder derefter steady state-værdien for $\tilde{h}_t$, ved at sætte venstreside i solowligningen for human kapital lig 0:

$$0 = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left(\tau \tilde{k}_t - (\delta + n + g + ng)\tilde{h}_t\right)$$

$$\frac{(\delta + n + g + ng)\tilde{h}_t}{(1+g)(1+n)} = \frac{\tau \tilde{k}_t}{(1+g)(1+n)}$$

$$(\delta + n + g + ng)\tilde{h}_t = \tau \tilde{k}_t$$

$$\tilde{h}_t^{*} = \frac{\tau \tilde{k}_t}{(\delta + n + g + ng)}$$

Vi indsætter steady state-værdien $\tilde{h}_t^{*}$ i vores udtryk for $\tilde{k}_t^{*}$, for at få et udtryk der alene afhænger af $\tilde{k}_t$:

$$\tilde{k}_t^* = \left[\frac{s_K\left(\frac{\tau\tilde{k}_t}{(\delta+n+g+ng)}\right)^{\varphi}}{(\delta+\tau+n+g+ng)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\tilde{k}_t^{*\,1-\alpha} = \frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)} * \left(\frac{\tau\tilde{k}_t}{(\delta+n+g+ng)}\right)^{\varphi}$$

$$\frac{\tilde{k}_t^{*\,1-\alpha}}{\tilde{k}_t^{\varphi}} = \frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)} * \frac{\tau^{\varphi}}{(\delta+n+g+ng)^{\varphi}}$$

$$\tilde{k}_t^{*\,1-\alpha-\varphi} = \frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)} * \frac{\tau^{\varphi}}{(\delta+n+g+ng)^{\varphi}}$$

$$\tilde{k}_t^* = \left[\frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)} * \frac{\tau^{\varphi}}{(\delta+n+g+ng)^{\varphi}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}$$

Vi indsætter nu dette udtryk i vores steady state-værdi for $\tilde{h}_t^*$, for at få et udtryk der alene afhænger af $\tilde{h}_t^*$:

$$\tilde{h}_t^* = \frac{\tau}{(\delta+n+g+ng)} * \left[\frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)} * \frac{\tau^{\varphi}}{(\delta+n+g+ng)^{\varphi}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}$$

$$\tilde{h}_t^{*\,1-\alpha-\varphi} = \frac{\tau^{1-\alpha-\varphi}}{(\delta+n+g+ng)^{1-\alpha-\varphi}} * \frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)} * \frac{\tau^{\varphi}}{(\delta+n+g+ng)^{\varphi}}$$

$$\tilde{h}_t^{*\,1-\alpha-\varphi} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{(\delta+n+g+ng)^{1-\alpha}} * \frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)}$$

$$\tilde{h}_t^* = \left[\frac{\tau^{1-\alpha}}{(\delta+n+g+ng)^{1-\alpha}} * \frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}$$

Vi indsætter nu de fundne steady state-værdier i produktionsfunktionen med tildevariable:

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi}$$

$$\tilde{y}_t^* = \left[\frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)} * \frac{\tau^{\varphi}}{(\delta+n+g+ng)^{\varphi}}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} * \left[\frac{\tau^{1-\alpha}}{(\delta+n+g+ng)^{1-\alpha}} * \frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)}\right]^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

$$\tilde{y}_t^* = \frac{s_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}}{(\delta+\tau+n+g+ng)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}} * \frac{\tau^{\frac{\varphi\alpha}{1-\alpha-\varphi}}}{(\delta+n+g+ng)^{\frac{\varphi\alpha}{1-\alpha-\varphi}}} * \frac{\tau^{\frac{(1-\alpha)\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}{(\delta+n+g+ng)^{\frac{(1-\alpha)\varphi}{1-\alpha-\varphi}}} * \frac{s_K^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}{(\delta+\tau+n+g+ng)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}$$

$$\tilde{y}_t^* = \frac{s_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} * s_K^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}{(\delta+\tau+n+g+ng)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} * (\delta+\tau+n+g+ng)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}} * \frac{\tau^{\frac{\varphi\alpha}{1-\alpha-\varphi}} * \tau^{\frac{(1-\alpha)\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}{(\delta+n+g+ng)^{\frac{\varphi\alpha}{1-\alpha-\varphi}} * (\delta+n+g+ng)^{\frac{(1-\alpha)\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}$$

$$\tilde{y}_t^* = \frac{s_K^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}{(\delta+\tau+n+g+ng)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}} * \frac{\tau^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}{(\delta+n+g+ng)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}$$

$$\tilde{y}_t^* = \left[\frac{\tau}{\delta+n+g+ng}\right]^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left[\frac{s_K}{\delta+\tau+n+g+ng}\right]^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

Ovenfor ses steady state-værdien for $\tilde{y}_t^*$.

2.f)
Da $\ln(\tilde{c}^*)$ er en monotont voksende transformation af $\tilde{c}^*$, kan vi maksimere denne i stedet og få samme resultat. Vi finder $\ln(\tilde{c}^*)$:

$$\ln(\tilde{c}^*) = ln(1-s_K) + \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}\ln\left(\frac{\tau}{\delta+n+g+ng}\right) + \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}\ln\left(\frac{s_K}{\delta+\tau+n+g+ng}\right)$$

$$\ln(\tilde{c}^*) = ln(1-s_K) + \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}[\ln(\tau) - \ln(\delta+n+g+ng)] + \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}[\ln(s_K) - \ln(\delta+\tau+n+g+ng)]$$

Vi finder golden rule værdien for s_K ved at differentierer $\ln(\tilde{c}^*)$ mht. s_K og sætter lig 0:

$$\frac{\partial \ln(\tilde{c}^*)}{\partial s_K} = \frac{-1}{1-s_K} + \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi} * \frac{1}{s_K}$$

$$0 = \frac{-1}{1-s_K} + \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi} * \frac{1}{s_K}$$

$$\frac{1}{1-s_K} = \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi} * \frac{1}{s_K}$$

$$s_K = \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}(1-s_K)$$

$$(1-\alpha-\varphi)s_K = (\alpha+\varphi)(1-s_K)$$

$$(1-\alpha-\varphi)s_K = \alpha - \alpha s_K + \varphi - \varphi s_K$$

$$s_K - \alpha s_K - \varphi s_K + \alpha s_K - \varphi s_K = \alpha + \varphi$$

$$\boldsymbol{s_K^{gr} = \alpha + \varphi}$$

Vi finder golden rule værdien for τ ved at differentierer $\ln(\tilde{c}^*)$ mht. τ og sætter lig 0:

$$\frac{\partial \ln(\tilde{c}^*)}{\partial \tau} = \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi} * \frac{1}{\tau} + \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi} * \frac{-1}{\delta+\tau+n+g+ng}$$

$$0 = \frac{\varphi}{(1-\alpha-\varphi)\tau} - \frac{(\alpha+\varphi)}{(1-\alpha-\varphi)(\delta+\tau+n+g+ng)}$$

$$\frac{(\alpha+\varphi)}{(1-\alpha-\varphi)(\delta+\tau+n+g+ng)} = \frac{\varphi}{(1-\alpha-\varphi)\tau}$$

$$(1-\alpha-\varphi)\tau(\alpha+\varphi) = \varphi(1-\alpha-\varphi)(\delta+\tau+n+g+ng)$$

$$\frac{(1-\alpha-\varphi)\tau(\alpha+\varphi)}{\varphi(1-\alpha-\varphi)} = \delta+\tau+n+g+ng$$

$$\frac{\tau(\alpha+\varphi)}{\varphi} = \delta+\tau+n+g+ng$$

$$\frac{\tau\alpha}{\varphi} + \tau = \delta+\tau+n+g+ng$$

$$\frac{\tau\alpha}{\varphi} = \delta+n+g+ng$$

$$\tau\alpha = (\delta+n+g+ng)\varphi$$

$$\boldsymbol{\tau^{gr} = \frac{(\delta+n+g+ng)\varphi}{\alpha}}$$

Vi finder det teknologijusterede golden rule forbrugsniveau som funktion af modellens parametre:

$$\tilde{c}^* = \left(1 - s_K^{gr}\right) * \left[\frac{\tau^{gr}}{\delta + n + g + ng}\right]^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left[\frac{s_K^{gr}}{\delta + \tau + n + g + ng}\right]^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

$$\tilde{c}^* = (1 - (\alpha + \varphi)) * \left[\frac{\frac{(\delta + n + g + ng)\varphi}{\alpha}}{\delta + n + g + ng}\right]^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left[\frac{\alpha + \varphi}{\delta + \tau + n + g + ng}\right]^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

$$\boldsymbol{\tilde{c}^* = (1 - \alpha - \varphi) * \left[\frac{\varphi}{\alpha}\right]^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left[\frac{\alpha + \varphi}{\delta + \tau + n + g + ng}\right]^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}$$

2.g)
Jf. 2.f) ser vi at den fundne værdi for s_K^{gr} svarer til $s_K^{gr} + s_H^{gr}$ fra pensumbogen. Opgavens model finansierer uddannelsessystemet gennem en formueskat, modsat pensumbogens model, som finansierer uddannelsessystemet gennem en indkomstskat. For at opgavens model må være optimal, må s_K^{gr} altså indeholde både s_K^{gr} og s_H^{gr} fra pensumbogen.

Hvis vi tager udgangspunkt i antagelsen: $\alpha = \varphi = \frac{1}{3}$, kan vi sammenligne resultaterne for $\tilde{c}^{*gr}$ i opgaven og $\tilde{c}^{*gr}$ i pensumbogen:

$$\tilde{c}^{*gr}_{pensumbog} = \tilde{c}^{*gr}_{opgave} \Leftrightarrow$$

$$(1 - \alpha - \varphi) * \left[\frac{\alpha}{\delta + n + g + ng}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left[\frac{\varphi}{\delta + n + g + ng}\right]^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} = (1 - \alpha - \varphi) * \left[\frac{\varphi}{\alpha}\right]^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left[\frac{\alpha + \varphi}{\delta + \tau + n + g + ng}\right]^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{\frac{1}{3}}{\delta + n + g + ng}\right]^1 \left[\frac{\frac{1}{3}}{\delta + n + g + ng}\right]^1 = \left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{\frac{2}{3}}{\delta + \tau + n + g + ng}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{9}}{(\delta + n + g + ng)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{(\delta + \tau + n + g + ng)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(\delta + n + g + ng)^2} = \frac{4}{(\delta + \tau + n + g + ng)^2}$$

Vi ser af ovenstående at resultatet vil afhænge af størrelsen på τ. Det må dog antages, at τ i de fleste tilfælde vil have en størrelse der gør, at udtrykket i opgavens model vil være mindre end udtrykket i pensumbogen.
Rent efficient vil det være at fortrække at forbruget er så stort som muligt. Altså vil man ikke ud fra et rent efficiensbaseret synspunkt kunne argumentere for at uddannelsessystemet bør finansieres gennem en formueskat, da finansiering på baggrund af en indkomstskat, vil lede til en samlet højere forbrug. Argumenter for en formueskat skal i stedet ses ud fra et formål om at nedbringe formueulighed.

Makroøkonomi 1 - Hjemmeopgave 6

Spørgsmål 2 – Solow modellen med begrænsede ressourcer og mulighed for økonomisk vækst på langt sigt

2.1

Ved konstant skalaafkast gælder: $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$. Vi ser om dette gælder for modellens produktionsfunktion:

$$F(\lambda K, \lambda L, \lambda X, \lambda E) = (\lambda K_t)^{\alpha}(A_t \lambda L_t)^{\beta}(\lambda X)^{\kappa}(\lambda E_t)^{\varepsilon}$$

$$F(\lambda K, \lambda L, \lambda X, \lambda E) = \lambda^{\alpha+\beta+\kappa+\varepsilon}\, K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} E_t^{\varepsilon}$$

Modellen antager at $\alpha + \beta + \kappa + \varepsilon = 1$:

$$F(\lambda K, \lambda L, \lambda X, \lambda E) = \lambda\, K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} E_t^{\varepsilon}$$

$$F(\lambda K, \lambda L, \lambda X, \lambda E) = \lambda F(K, L, X, E)$$

Da ovenstående lighed er opfyldt, gælder der konstant skalaafkast.

Konstant skalaafkast er plausiblet jf. replikationsargumentet. Dette antager at fordobler man mængden af input, må det være plausibelt at man kan fordoble mængden af output, ved blot at udføre den samme produktionsproces for dobbelt så mange input.
Der er desuden tale om input, som trækker i forskellige retninger. Kapital og arbejdskraft vil løbende akkumuleres og således trække i retning af øget input på langt sigt. Modsatrettet gælder at oliereserven løbende bliver mindre, hvilket betyder mindre og mindre energi til at skabe den øgede produktion. Afslutningsvis er land en fast variabel, som dermed er medvirkende årsag til aftagende marginalprodukt for den stigende kapital og arbejdskraft. Således kan produktionen altså ikke blot stige i det uendelige, og konstant skalaafkast må være en plausible antagelse.

2.2

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} E_t^{\varepsilon}$$

Vi dividerer med L_t:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^{\alpha} A_t^{\beta} L_t^{\beta} X^{\kappa} E_t^{\varepsilon}}{L_t}$$

Da modellen antager at $\alpha + \beta + \kappa + \varepsilon = 1$, kan vi omskrive nævnerens eksponent:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^\alpha A_t^\beta L_t^\beta X^\kappa E_t^\varepsilon}{L_t^{\alpha+\beta+\kappa+\varepsilon}}$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^\alpha A_t^\beta L_t^\beta X^\kappa E_t^\varepsilon}{L_t^\alpha L_t^\beta L_t^\kappa L_t^\varepsilon}$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\alpha \left(\frac{A_t L_t}{L_t}\right)^\beta \left(\frac{X_t}{L_t}\right)^\kappa \left(\frac{E_t}{L_t}\right)^\varepsilon$$

Vi indsætter vores definerede pr. arbejder variable:

$$\boldsymbol{y_t = k_t^\alpha A_t^\beta x_t^\kappa e_t^\varepsilon}$$

Ovenfor ses pr. arbejder produktionsfunktionen.

Vi finder den approksimative vækstrate for y_t, ved at tage udgangspunkt i forholdet $\frac{y_t}{y_{t-1}}$:

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \frac{k_t^\alpha A_t^\beta x_t^\kappa e_t^\varepsilon}{k_{t-1}^\alpha A_{t-1}^\beta x_{t-1}^\kappa e_{t-1}^\varepsilon}$$

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{k_t}{k_{t-1}}\right)^\alpha \left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right)^\beta \left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right)^\kappa \left(\frac{e_t}{e_{t-1}}\right)^\varepsilon$$

Vi tager logaritmen til ovenstående udtryk:

$$\ln\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right) = \alpha \ln\left(\frac{k_t}{k_{t-1}}\right) + \beta \ln\left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right) + \kappa \ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) + \varepsilon \ln\left(\frac{e_t}{e_{t-1}}\right)$$

$$\begin{aligned}\ln(y_t) - \ln(y_{t-1}) \\ &= \alpha[\ln(k_t) - \ln(k_{t-1})] + \beta[\ln(A_t) - \ln(A_{t-1})] + \kappa[\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})] \\ &+ \varepsilon[\ln(e_t) - \ln(e_{t-1})]\end{aligned}$$

Vi indsætter definitionerne for de approksimative vækstrater:

$$\boldsymbol{g_t^y = \alpha g_t^k + \beta g_t^A + \kappa g_t^x + \varepsilon g_t^e}$$

Vi ser ovenfor udtrykket for den approksimative vækstrate for y_t.

2.3
Vi finder som udgangspunkt den approksimative vækstrate for g:

Vi får oplyst at det gælder, at kapital og output vokser med samme hastighed, dette betyder at kapital-output forholdet er konstant, og må derfor ligeledes medføre at: $\boldsymbol{g_t^k = g_t^y}$.

Vi finder den approksimative vækstrate for A, ved at isolere i (4):

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + g => \frac{A_t}{A_{t-1}} = 1 + g$$

Vi kan af ovenstående udlede at $\boldsymbol{g_t^A \approx g}$.

Vi finder den approksimative vækstrate for x ved definitionen for g_t^x:

$$g_t^x = \ln(x_t) - \ln(x_{t-1})$$

$$g_t^x = \ln\left(\frac{X}{L_t}\right) - \ln\left(\frac{X}{L_{t-1}}\right)$$

$$g_t^x = \ln X - \ln(L_t) - [\ln(X) - \ln(L_{t-1})]$$

$$g_t^x = -\ln(L_t) + \ln(L_{t-1})$$

$$g_t^x = -[\ln(L_t) - \ln(L_{t-1})]$$

$$g_t^x = -g_t^L$$

Da dette er tilfældet, kan vi finde den approksimative vækstrate for x, ved at udlede vækstraten for L fra (3):

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1 + n => \frac{L_t}{L_{t-1}} = 1 + n$$

$$g_t^L = -g_t^x \approx n$$

$$\boldsymbol{g_t^x \approx -n}$$

Afslutningsvis finder vi den approksimative vækstrate for e:

$$g_t^e = \ln(e_t) - \ln(e_{t-1})$$

$$g_t^e = \ln\left(\frac{E_t}{L_t}\right) - \ln\left(\frac{E_{t-1}}{L_{t-1}}\right)$$

$$g_t^e = \ln(E_t) - \ln(L_t) - [\ln(E_{t-1}) - \ln(L_{t-1})]$$

$$g_t^e = \ln(E_t) - \ln(E_{t-1}) - \ln(L_t) + \ln(L_{t-1})$$

$$g_t^e = \ln(E_t) - \ln(E_{t-1}) - [\ln(L_t) - \ln(L_{t-1})]$$

$$g_t^e = \ln(E_t) - \ln(E_{t-1}) - g_t^L$$

Vi ved fra udledningen af g_t^x, at det gælder at: $g_t^L = -g_t^x \approx n$

$$g_t^e = \ln(E_t) - \ln(E_{t-1}) - n$$

Vi ved fra (5) at:

$$g_t^e = \ln(s_E R_t) - \ln(s_E R_{t-1}) - n$$

$$g_t^e = \ln(\mathrm{s_E}) + \ln(R_t) - [\ln(s_E) + \ln(R_{t-1})] - n$$

$$g_t^e = \ln(R_t) - \ln(R_{t-1}) - n$$

Vi finder nu vækstraten for R_t fra (5)

$$R_t = R_{t-1} - E_{t-1}$$

Vi indsætter ligning (6)

$$R_t = R_{t-1} - s_E R_{t-1}$$

$$R_t = (1 - s_E)R_{t-1}$$

$$\frac{R_t}{R_{t-1}} = 1 - s_E$$

Vi kan af ovenstående udlede at $g_t^R = -s_E$. Dette indsætter vi nu i vores udtryk for g_t^e:

$$\boldsymbol{g_t^e \approx -\mathrm{s_E} - n}$$

Vi kan nu indsætte de fundne approksimative vækstrater i (8):

$$g_t^y \approx \alpha g_t^k + \beta g_t^A + \kappa g_t^x + \varepsilon g_t^e$$

$$g_t^y \approx \alpha g_t^y + \beta g + \kappa(-n) + \varepsilon(-\mathrm{s_E} - n)$$

$$g_t^y - \alpha g_t^y \approx \beta g - \kappa n - \varepsilon \mathrm{s_E} - \varepsilon n$$

$$(1-\alpha) g_t^y \approx \beta g - \kappa n - \varepsilon(\mathrm{n} + \mathrm{s_E})$$

$$\frac{(1-\alpha) g_t^y}{(1-\alpha)} \approx \frac{\beta}{(1-\alpha)} g \frac{\kappa}{(1-\alpha)} n - \frac{\varepsilon}{(1-\alpha)}(\mathrm{n} + \mathrm{s_E})$$

Vi husker at $\alpha + \beta + \kappa + \varepsilon = 1$ Derfor må det gælde at $1 - \alpha = \beta + \kappa + \varepsilon$:

$$g_t^y \approx \frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon} g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon} n - \frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}(\mathrm{n} + \mathrm{s_E})$$

Vi ser at ingen af elementerne på højresiden har angivet et tidsindeks. Altså må den approksimative vækstrate for y_t være konstant og det må gælde at:

$$\boldsymbol{g_t^y \approx g^y \approx \frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon} g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon} n - \frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}(\mathrm{n} + \mathrm{s_E})}$$

Af ovenstående ligning kan det udledes at vækst i befolkningen på langt sigt vil lede til et pres på produktionen. Dette ses, da befolkningsvæksten, n, bidrager negativt til vækstraten for output. Omfanget af dette negative bidrag afhænger af størrelsen på hhv. κ og ε. Dette betyder, at desto mere et land er afhængig af mængden af land og de begrænsede ressourcer, desto mere vil befolkningsvækst påvirke mængden af output på langt sigt.
Den samme intuition bruges for s_E, som ligeledes bidrager negativt til vækstraten for output. Desto mere et land er afhængig af mængden af begrænsede ressourcer (størrelsen på ε), desto mere vil en stigning i s_E, påvirker væksten output på lang sigt.

2.4

Figuren viser en negativ sammenhæng mellem vækst i output og vækst i arbejdskraft. Vi ser af ligning (9), at modellen antager at væksten i output er en funktion negativt påvirket af væksten i arbejdskraft. Dette stemmer overens med den negative hældning på figurens kurve. Modellen antager altså kausalitet, med output som den afhængige variabel og arbejdskraft som den

forklarende variabel. Af figuren kan vi dog ikke aflæse om der er tale om omvendt kausalitet – altså om det er lav vækst i BNP som får befolkningsvæksten til at stige, og ikke omvendt.
Alt i alt må det dog antages at der er en pæn overensstemmelse mellem figuren og modellens teoretiske resultater.

2.5

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \frac{k_t^\alpha A_t^\beta x_t^\kappa e_t^\varepsilon}{k_{t-1}^\alpha A_{t-1}^\beta x_{t-1}^\kappa e_{t-1}^\varepsilon}$$

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{k_t}{k_{t-1}}\right)^\alpha \left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right)^\beta \left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right)^\kappa \left(\frac{e_t}{e_{t-1}}\right)^\varepsilon$$

Da vi har balanceret vækst gælder det at $\frac{y_t}{y_{t-1}} = \frac{k_t}{k_{t-1}}$:

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\alpha \left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right)^\beta \left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right)^\kappa \left(\frac{e_t}{e_{t-1}}\right)^\varepsilon$$

Vi ved fra (4) at $\frac{A_t}{A_{t-1}} = 1 + g$:

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\alpha (1+g)^\beta \left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right)^\kappa \left(\frac{e_t}{e_{t-1}}\right)^\varepsilon$$

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\alpha (1+g)^\beta \left(\frac{\frac{X}{L_t}}{\frac{X}{L_{t-1}}}\right)^\kappa \left(\frac{\frac{E_t}{L_t}}{\frac{E_{t-1}}{L_{t-1}}}\right)^\varepsilon$$

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\alpha (1+g)^\beta \left(\frac{L_{t-1}}{L_t}\right)^\kappa \left(\frac{E_t L_{t-1}}{E_{t-1} L_t}\right)^\varepsilon$$

Vi ved fra (3) at $\frac{L_{t-1}}{L_t} = \frac{1}{1+n}$:

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\alpha (1+g)^\beta \left(\frac{1}{1+n}\right)^\kappa \left(\frac{1}{1+n}\frac{E_t}{E_{t-1}}\right)^\varepsilon$$

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\alpha (1+g)^\beta \left(\frac{1}{1+n}\right)^\kappa \left(\frac{1}{1+n}\frac{E_t}{E_{t-1}}\right)^\varepsilon$$

Vi indsætter definitionen for E_t fra (6):

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^{\alpha} (1+g)^{\beta} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{1+n}\frac{s_E R_t}{s_E R_{t-1}}\right)^{\varepsilon}$$

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^{\alpha} (1+g)^{\beta} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{1+n}\frac{R_t}{R_{t-1}}\right)^{\varepsilon}$$

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^{\alpha} (1+g)^{\beta} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{1+n}\frac{R_t}{R_{t-1}}\right)^{\varepsilon}$$

Vi ved fra (5) at: $R_t = R_{t-1} - s_E R_{t-1} \Rightarrow R_t = R_{t-1}(1-s_E) \Rightarrow \frac{R_t}{R_{t-1}} = 1 - s_E$:

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^{\alpha} (1+g)^{\beta} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{\kappa} \left(\frac{1-s_E}{1+n}\right)^{\varepsilon}$$

Vi indsætter definitionen for f_t^y:

$$f_t^y = \left(f_t^y\right)^{\alpha} (1+g)^{\beta} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{\kappa} \left(\frac{1-s_E}{1+n}\right)^{\varepsilon}$$
$$f_t^{y^{1-\alpha}} = (1+g)^{\beta} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{\kappa} \left(\frac{1-s_E}{1+n}\right)^{\varepsilon}$$

$$f_t^{y^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}} = (1+g)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{\frac{\kappa}{1-\alpha}} \left(\frac{1-s_E}{1+n}\right)^{\frac{\varepsilon}{1-\alpha}}$$

Vi husker endnu engang at $\alpha + \beta + \kappa + \varepsilon = 1$ Derfor må det gælde at $1 - \alpha = \beta + \kappa + \varepsilon$:

$$f_t^y = (1+g)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon}} \left(\frac{1-s_E}{1+n}\right)^{\frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}}$$

Da ingen af elementerne på højresiden har angivet tidsindeks, må f_t^y være konstant og det må derfor gælde at:

$$f^y = (1+g)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon}} \left(\frac{1-s_E}{1+n}\right)^{\frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}}$$

Vi tager logaritmen på begge sider for at sammenligne med (9):

$$\ln\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right) = \frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}\ln(1+g) + \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon}\ln\left(\frac{1}{1+n}\right) + \frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}\ln\left(\frac{1-s_E}{1+n}\right)$$

$$\ln(y_t) - \ln(y_{t-1}) = \frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}\ln(1+g) + \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon}[\ln(1) - \ln(1+\mathrm{n})] + \frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}[\ln(1-\mathrm{s_E}) - \ln(1+n)]$$

$$\ln(y_t) - \ln(y_{t-1}) = \frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}\ln(1+g) - \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon}\ln(1+\mathrm{n}) + \frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}[\ln(1-\mathrm{s_E}) - \ln(1+n)]$$

Vi indsætter approksimationerne fra opgavens hint og definitionen $g_t^y = \ln(y_t) - \ln(y_{t-1})$:

$$g_t^y = \frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon}n + \frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}(-\mathrm{s_E} - n)$$

$$g_t^y = \frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon}n - \frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}(n - s_E)$$

Vi ser at ovenstående = (9), og dermed gælder at vækstfaktoren fra (10) er i overensstemmelse med den approksimative vækstrate fra (9).

2.6

$$z_{t+1} = \frac{k_{t+1}}{y_{t+1}}$$

Vi indsætter (7):

$$z_{t+1} = \frac{k_{t+1}}{k_{t+1}^{\alpha}A_{t+1}^{\beta}x_{t+1}^{\kappa}e_{t+1}^{\varepsilon}}$$

$$z_{t+1} = k_{t+1}^{1-\alpha}A_{t+1}^{-\beta}x_{t+1}^{-\kappa}e_{t+1}^{-\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}\right)^{1-\alpha}(A_{t+1})^{-\beta}\left(\frac{X}{L_{t+1}}\right)^{-\kappa}\left(\frac{E_{t+1}}{L_{t+1}}\right)^{-\varepsilon}$$

Vi indsætter (2), (3), (4) og (6):

$$z_{t+1} = \left(\frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{(1+n)L_t}\right)^{1-\alpha} \left((1+g)A_t\right)^{-\beta} \left(\frac{X}{(1+n)L_t}\right)^{-\kappa} \left(\frac{s_E R_{t+1}}{(1+n)L_t}\right)^{-\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{sy_t + (1-\delta)k_t}{(1+n)}\right)^{1-\alpha} \left((1+g)A_t\right)^{-\beta} \left(\frac{x_t}{(1+n)}\right)^{-\kappa} \left(\frac{s_E R_{t+1}}{(1+n)L_t}\right)^{-\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{1+g}\right)^{\beta} \left(\frac{1}{(1+n)}\right)^{-\kappa} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{-\varepsilon} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} (s_E R_{t+1})^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)}\right)^{1-\alpha-\kappa-\varepsilon} \left(\frac{1}{1+g}\right)^{\beta} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} (s_E R_{t+1})^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

Vi husker at $\alpha + \beta + \kappa + \varepsilon = 1$ dermed må det gælde at $\beta = 1 - \alpha - \kappa - \varepsilon$:

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)}\right)^{\beta} \left(\frac{1}{1+g}\right)^{\beta} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} (s_E R_{t+1})^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} (s_E R_{t+1})^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

Vi ved fra (5) at: $R_{t+1} = R_t - s_E R_t \Rightarrow R_{t+1} = R_t(1 - s_E)$:

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} \left(s_E R_t (1-s_E)\right)^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} (s_E R_t)^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

Vi indsætter (6):

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} \left(\frac{sy_t}{k_t} + \frac{(1-\delta)k_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} (E_t)^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} \left(\frac{s}{z_t} + (1-\delta)\right)^{1-\alpha} k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} \left(\frac{E_t}{L_t}\right)^{-\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} \left(\frac{s}{z_t} + (1-\delta)\right)^{1-\alpha} k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} e_t^{-\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} \left(\frac{s}{z_t} + (1-\delta)\right)^{1-\alpha} k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} e_t^{-\varepsilon}$$

Vi ved fra tidligere i udledningen at det gælder at: $z_{t+1} = k_{t+1}^{1-\alpha} A_{t+1}^{-\beta} x_{t+1}^{-\kappa} e_{t+1}^{-\varepsilon}$, det må derfor gælde at: $z_t = k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} e_t^{-\varepsilon}$:

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} \left(\frac{s}{z_t} + (1-\delta)\right)^{1-\alpha} z_t$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} \left(\frac{sz_t}{z_t} + (1-\delta)z_t\right)^{1-\alpha} \frac{z_t}{z_t^{1-\alpha}}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} (s + (1-\delta)z_t)^{1-\alpha} z_t^{\alpha}$$

Ovenfor fremgår ligning (11).

2.7

Vi finder steady state niveauet, hvor det gælder at $z_{t+1} = z_t = z^*$:

$$z_t = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} (s + (1-\delta)z_t)^{1-\alpha} z_t^{\alpha}$$

$$z_t^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} (s + (1-\delta)z_t)^{1-\alpha}$$

$$z_t = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} (1-s_E)^{\frac{-\varepsilon}{1-\alpha}} (s + (1-\delta)z_t)$$

$$z_t\big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} (1-s_E)^{\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} = s + (1-\delta)z_t$$

$$z_t\big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} (1-s_E)^{\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} - (1-\delta)z_t = s$$

$$z_t[\big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}(1-s_E)^{\frac{\varepsilon}{1-\alpha}}-(1-\delta)]=s$$

$$z_t=\frac{s}{\big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}(1-s_E)^{\frac{\varepsilon}{1-\alpha}}-(1-\delta)}$$

Vi ved fra antagelserne at: $\alpha+\beta+\kappa+\varepsilon=1 \Leftrightarrow 1-\alpha=\beta+\kappa+\varepsilon$

$$z^*=\frac{s}{\big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}}(1-s_E)^{\frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}}-(1-\delta)}$$

Ovenfor ses steady stateniveauet z^*.

For at vise at modellen opfylder konvergens til et konstant niveau z^*, må de fire nedenstående betingelser være opfyldt:

1. *Transitionsligningen går gennem (0,0)*: Dette er opfyldt, da $z_{t+1}=0$ for $z_t=0$.
2. *Transitionskurven er konstant voksende:*
   $$\frac{\partial z_{t+1}}{\partial z_t}=\left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta}(1-s_E)^{-\varepsilon}(1-\delta)(1-\alpha)(s+(1-\delta)z_t)^{-\alpha}\alpha z^{\alpha-1}$$
   Modellen antager at $s_E, \delta\ og\ \alpha$ alle er parametre mindre end 1. Udtrykket er derfor positivt, og ligningen opfylder dermed at transitionskurven er konstant voksende.
3. *Transitionskurvens hældning er konstant aftagende*: Vi ser at for voksende z_t vil $\frac{\partial z_{t+1}}{\partial z_t}$ blive mindre og mindre. Dette betyder at hældningen er konstant aftagende.
4. *Hældningen går mod et tal mindre end 1*: For $z_t\rightarrow\infty$, går $\frac{\partial z_{t+1}}{\partial z_t}\rightarrow 0$, hvilket betyder at kravet er opfyldt.

Udfra ovenstående kan det dermed konkluderes at, modellen opfylder konvergens mod et konstant niveau $z^*=\frac{s}{\big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}}(1-s_E)^{\frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}}-(1-\delta)}$.

2.8

Jf. opgave 2.3 og 2.4, antager modellen en negativ sammenhæng mellem befolkningsvækst og langsigtet vækst i produktionen. Det samme gælder for mængden af begrænsede ressourcer som benyttes i produktionen – desto mere afhængig produktionen er af begrænsede ressourcer (fx olie) som input, desto mere pessimistisk er modellen overfor fremtidig langsigtet vækst. I lyset at dette, har modellen altså et optimistisk syn på langsigtet vækst for veludviklede lande, som typisk karakteriseres ved lav befolkningsvækst og mindre afhængighed af land og begrænsede ressourcer. Modsat gælder udviklingslande, som typisk karakteriseres ved høj befolkningsvækst og høj afhængighed af mængden af land og begrænsede ressourcer som input i produktionen. Disse resultater kan desuden udledes af ligning (10), som netop viser at desto større n og s_E, desto mindre vil vækstfaktoren for indkomst pr. arbejder være.

Ovenstående resultater er baseret på en Cobb-Douglas produktionsfunktion. Denne antager en substitutions elasticitet = 1. I dette tilfælde betyder det fuld substitution mellem hhv. teknologi og begrænsede ressourcer. Der må tages forbehold for hvorvidt denne antagelse er plausible – hvilket den realistisk må antages, til en vis grad, ikke at være.
Der kan tages forbehold for dette ved at se på den mere generelle produktionsfunktion, CES funktionen, som ses i ligning (1'). Denne tillader variation i substitutionselasticiteten, og tager dermed højde for at produktionen kan ændre sig ved at ændre forskellige inputs andel af den samlede produktion. Her ville det være relevant at se på, at teknologi ikke nødvendigvis fuldt ud kan erstatte begrænsede naturressourcer.

Makroøkonomi 1 – Hjemmeopgave 7

Opgave 2 - Giver fri kapitalbevægelighed højere indkomst per arbejder, også når der er en risikopræmie på kapital placeret i indlandet?

2.1

Vi tager udgangspunkt i ligning (C2) og (C3):

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{sY_t + K_t}{(1+n)L_t}$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sy_t + k_t)$$

Vi indsætter definitionen $\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} \Leftrightarrow y_t = \frac{K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t^\alpha L_t^{1-\alpha}} \Leftrightarrow y_t = k_t^\alpha$:

$$\boldsymbol{k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sk_t^\alpha + k_t)}$$

Ovenfor ses transitionsligningen.

2.2

Vi finder steady state-værdien k_c^*, ved at indsætte steady state-betingelsen $k_c^* = k_{t+1} = k_t$ i (C4):

$$k_t = \frac{1}{1+n}(sk_t^\alpha + k_t)$$

$$k_t(1+n) = (sk_t^\alpha + k_t)$$

$$1 + n = \frac{sk_t^\alpha + k_t}{k_t}$$

$$1 + n = sk_t^{\alpha-1} + 1$$

$$n = sk_t^{\alpha-1}$$

$$k_t^{\alpha-1} = \frac{n}{s}$$

$$\boldsymbol{k_c^*} = \left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{s}}\right)^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\alpha-1}}}$$

Ovenfor ses steady state-værdien for kapital per arbejder.

Fra vores kendte definition $y_t = k_t^\alpha$ finder vi steady state-værdien y_c^*:

$$\boldsymbol{y_c^*} = \boldsymbol{k_c^{*\alpha}} = \left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{s}}\right)^{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha-1}}}$$

Ovenfor ses steady state-værdien for indkomst per arbejder.

Det risikokorrigerede afkast er defineret ved $r_t - \varepsilon$, hvor ε angiver risikoen for, at kapitalen går tabt. Den samlede risikokorrigerede indkomst, må således tage højde for, at kapitalen eventuelt kan gå tabt. Dette kan angives ved εK_t. Vi kan således definere den samlede risikokorrigerede indkomst ved: $\hat{Y} = Y_t - \varepsilon K_t$.

Vi finder steady state-værdien y_c^*:

$$\frac{\hat{Y}}{L_t} = \frac{Y_t - \varepsilon K_t}{L_t}$$

$$\hat{y}_t = y_t - \varepsilon k_t$$

Vi indsætter steady state-betingelserne: $k_c^* = k_{t+1} = k_t$ og $y_c^* = y_{t+1} = y_t$

$$\hat{y}_t = \left(\frac{n}{s}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \varepsilon\left(\frac{n}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\hat{y}_t = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\hat{y}_t = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Vi ser at $\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1-\alpha+\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n}\right)$. Vi indsætter dette:

$$\hat{y}_t = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n}\right)$$

$$\boldsymbol{y_c^* = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1 - \varepsilon\frac{s}{n}\right)}$$

Ovenfor ses steady state-værdien for den risikokorrigerede indkomst per arbejder.

2.3

Ligning (O3) betegner indlandets BNI (indlændingenes samlede indkomst). Ligningen beskriver hvordan indlandets BNI afhænger af hhv. indlandets BNP, realrenten, risikopræmien på kapitalplacering i indlandet og landets nettofordringer.
BNI udgøres af landet BNP, som herefter enten tillægges den indkomst som indlandet har opnået ved investeringer i udlandet eller fratrækkes den gæld som indlandet har opbygget ved lån i udlandet (udlandet ejer mere i indlandet, end indlandet ejer i udlandet). Denne størrelse afhænger af hhv. realrenten og risikopræmien.

Ligning (O6) angiver en ligevægt i en økonomi med fuld kapitalmobilitet og ingen mulighed for arbitrage. Ligningen viser at renteniveauet plus den risiko som en investor løber ved sin investering netop, er givet ved $\alpha\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1}$. Ligevægten kommer af, at hvis fx den indenlandske rente r falder, vil investeringerne trække mod udlandet, hvilket betyder at kapitalen vil falde. Da udbuddet af kapital nu er faldet, må renten tilsvarende stige. Dette ses matematisk ved at K_t falder og får højresiden i ligningen til at falde og ligevægten må opretholdes ved at $\bar{r}$ tilsvarende stiger på højresiden.

Den indenlandske nationalindkomst består af løn til arbejdskraft og afkast på formue. Vi bliver oplyst at hele indlandets formue er placeret i indenlandsk kapital. Når vi finder den indenlandske nationalindkomst, skal denne derfor bestå af den samlede indkomst (inkl. det afkast som arbejdskraften opnår på sin investerede formue) og fratrækkes den risiko der er ved at investere sin kapital indenlandsk, ε. Derfor er det nu meningsfuldt at definere den indenlandske nationalindkomst som: $\hat{Y}_t^n = Y_t^n - \varepsilon V_t$.

2.4

Vi ved fra ligning (O1) at:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t}$$

$$y_t = \frac{K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}$$

$$y_t = k_t^\alpha$$

$$y_t = k_t^\alpha + \alpha k_t^\alpha - \alpha k_t^\alpha$$

$$y_t = \alpha k_t^\alpha + (1-\alpha)k_t^\alpha$$

$$y_t = \alpha k_t^{\alpha-1+1} + (1-\alpha)k_t^\alpha$$

$$y_t = \alpha k_t^{\alpha-1}k_t + (1-\alpha)k_t^\alpha$$

Fra ligning (O6) får vi definitionen: $\bar{r} + \varepsilon = \alpha k_t^{\alpha-1}$ og fra ligning (O7) får vi definitionen: $w_t = (1-\alpha)k_t^\alpha$. Vi indsætter disse:

$$\boldsymbol{y_t = (\bar{r} + \varepsilon)k_t + w_t}$$

Ovenfor ses ligning (O8).

Vi ved fra ligning (O3):

$$\frac{Y_t^n}{L_t} = \frac{Y_t + (\bar{r} + \varepsilon)F_t}{L_t}$$

$$y_t^n = y_t + (\bar{r} + \varepsilon)f_t$$

Vi indsætter ligning (O8)

$$y_t^n = (\bar{r} + \varepsilon)k_t + w_t + (\bar{r} + \varepsilon)f_t$$

$$y_t^n = w_t + (\bar{r} + \varepsilon)(k_t + f_t)$$

Vi indsætter definitionen fra (O2): $V_t = K_t + F_t \Leftrightarrow \frac{V_t}{L_t} = \frac{K_t + F_t}{L_t} \Leftrightarrow v_t = k_t + f_t$:

$$\boldsymbol{y_t^n = w_t + (\bar{r} + \varepsilon)v_t}$$

Ovenfor ses ligning (O9).

Vi kender finder den risikokorrigerede nationalindkomst per arbejder:

$$\frac{\hat{Y}_t^n}{L_t} = \frac{Y_t^n - \varepsilon V_t}{L_t}$$

$$\hat{y}_t^n = y_t^n - \varepsilon v_t$$

Vi indsætter ligning (O9):

$$\hat{y}_t^n = w_t + (\bar{r} + \varepsilon)v_t - \varepsilon v_t$$

$$\boldsymbol{\hat{y}_t^n = w_t + \bar{r} v_t}$$

Ovenfor ses ligning (O10).

Ligning (O10) viser, at den risikokorrigerede indkomst per arbejder er en størrelse afhængig af realløn, realrente og indlandets formue. Realrenten er givet ved $\bar{r}$ og altså ikke $(\bar{r} + \varepsilon)$ som vi så i ligning (O9), som viser indkomsten per arbejder hvor der ikke er korrigeret for risiko. Risikoen forsvinder i ligning (O10), da den samlede størrelse $(\bar{r} + \varepsilon)$ er nødt til at være det samme i alle økonomier ved fri kapitalmobilitet. Hvis dette ikke gjaldt, ville der opstå arbitrage, hvilket i sidste ende igen ville føre til at alle lande giver et afkast på $(\bar{r} + \varepsilon)$. Således gælder det at alle lande giver et risikokorrigeret afkast på $\bar{r}$.

2.5

Vi isolerer k_t i ligning (O6):

$$\alpha k_t^{\alpha-1} = \bar{r} + \varepsilon$$

$$k_t^{\alpha-1} = \frac{\bar{r} + \varepsilon}{\alpha}$$

$$k_t = \left(\frac{\bar{r} + \varepsilon}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Da der ikke optræder nogen tidsindeks på højresiden, må det gælde at kapital per arbejder straks vil tilpasse sig et nyt steady state-niveau.

Fra (O1) ved vi at det gælder, at: $y_t = k_t^\alpha = \left(\frac{\bar{r}+\varepsilon}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$. Fortsat optræder der ingen tidsindeks på højresiden og vi må derfor foretage samme konklusion – at BNP per arbejder straks vil tilpasse sig til et nyt steady state-niveau.

Afslutningsvis ser vi på reallønnen, med udgangspunkt i (O7):

$$w_t = (1 - \alpha)k_t^\alpha$$

Vi indsætter i ovenstående udtryk, vores definition af $y_t = k_t^{\alpha}$:

$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{\bar{r}+\varepsilon}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

$$\boldsymbol{w^* = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

Endnu engang ser vi ingen tidsindeks, og reallønnen vil derfor straks tilpasse sig et nyt steady state-niveau.

2.6

Vi tager udgangspunkt i ligning (O4):

$$\frac{V_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{sY_t^n + V_t}{(1+n)L_t}$$

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sy_t^n + v_t)$$

Vi indsætter ligning (O9):

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}(s(w_t + (\bar{r}+\varepsilon)v_t) + v_t)$$

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sw_t + s(\bar{r}+\varepsilon)v_t + v_t)$$

Vi indsætter (O7):

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}(s(1-\alpha)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} + s(\bar{r}+\varepsilon)v_t + v_t)$$

$$v_{t+1} = \frac{v_t + s(\bar{r}+\varepsilon)v_t}{1+n} + \frac{s(1-\alpha)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}}{1+n}$$

$$v_{t+1} = \frac{1+s(\bar{r}+\varepsilon)}{1+n}v_t + \frac{s}{1+n}(1-\alpha)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}$$

Vi ser fra (O6) at følgende gælder: $\bar{r}+\varepsilon = \alpha\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1} \Leftrightarrow \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{K_t}{L_t} = \left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$:

$$v_{t+1} = \frac{1+s(\bar{r}+\varepsilon)}{1+n} v_t + \frac{s}{1+n}(1-\alpha)\left(\left(\frac{\alpha}{\bar{r}\ +\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}$$

$$v_{t+1} = \frac{1+s(\bar{r}+\varepsilon)}{1+n} v_t + \frac{s}{1+n}(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}\ +\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Vi indsætter ligning definitionen fra (O11):

$$\boldsymbol{v_{t+1} = \frac{1+s(\bar{r}+\varepsilon)}{1+n} v_t + \frac{s}{1+n} w^*}$$

Ovenfor ses ligning (O12).

Vi finder steady state-værdien v^*, ved at indsætte steady state-betingelsen: $v^* = v_{t+1} = v_t$ i (O12):

$$v_t = \frac{1+s(\bar{r}+\varepsilon)}{1+n} v_t + \frac{s}{1+n} w^*$$

$$(1+n)v_t = [1+s(\bar{r}+\varepsilon)]v_t + sw^*$$

$$(1+n)v_t - [1+s(\bar{r}+\varepsilon)]v_t = sw^*$$

$$v_t[(1+n) - (1+s(\bar{r}+\varepsilon))] = sw^*$$

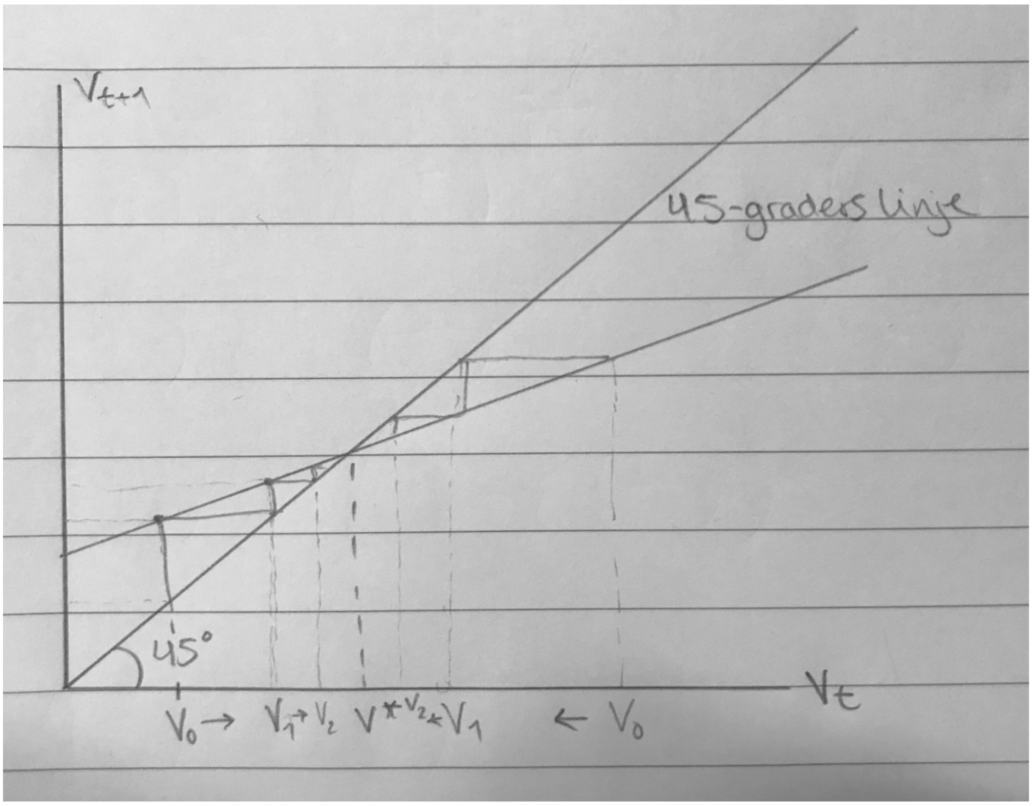
$$v_t = \frac{sw^*}{1+n-1-s(\bar{r}+\varepsilon)}$$

$$v_t = \frac{s}{n-s(\bar{r}+\varepsilon)} w^*$$

$$\boldsymbol{v^* = \frac{\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)} w^*}$$

Ovenfor ses ligning (O13).

Vi ser af (O12) at transitionsligningen for v_{t+1} er en ret linje, som har skæring med anden aksen ved $v_{t+1} = \frac{s}{1+n} w^*$. Vi kan desuden udlede kurvens hældning: $\frac{\partial v_{t+1}}{\partial v_t} = \frac{1+s(\bar{r}+\varepsilon)}{1+n} < 1$. Vi kan afgøre at kurven har en hældning mindre end 1, da modellen antager at $s(\bar{r}+\varepsilon) < n$. Da 45-graders linjen har en konstant hældning = 1, startende i punktet (0,0), må det gælde at transitionskurven, som har en positiv skæring med anden aksen, samt en hældning mindre end 1, må have en entydig skæring med 45-graders linjen. Nedenstående transitionsdiagram illustrerer, at for ethvert vilkårligt $v_0 > 0$, vil modellen indebære konvergens af v_t:



2.7

$$\hat{y}_t^n = w_t + \bar{r}v_t$$

$$\hat{y}_t^n = w^* + \bar{r}\frac{\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}w^*$$

$$\hat{y}_t^n = \left(1 + \bar{r}\frac{\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)w^*$$

$$\hat{y}_t^n = \left(\frac{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)} + \frac{\bar{r}\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)w^*$$

$$\hat{y}_t^n = \left(\frac{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)+\bar{r}\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)w^*$$

$$\hat{y}_t^n = \left(\frac{1-\frac{s}{n}\bar{r}-\varepsilon\frac{s}{n}+\bar{r}\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)w^*$$

$$\boldsymbol{\hat{y}_t^n = \frac{1-\varepsilon\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}w^*}$$

Ovenfor ses ligning (O14).

2.8

For at vise at følgende gælder: $\hat{y}^{n^*} > \hat{y}_c^*$, tager vi udgangspunkt i (O11) og (O14):

$$\hat{y}^{n^*} = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} * \frac{1-\varepsilon\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}$$

For at sammenligne den risikokorrigerede nationalindkomst i hhv. den åbne og lukkede økonomi, finder vi det relative forhold mellem disse. Vi definerer dette som x:

$$x = \frac{\hat{y}^{n^*}}{\hat{y}_c^*} = \frac{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1-\varepsilon\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}}{\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1-\varepsilon\frac{s}{n}\right)}$$

$$x = \frac{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}}{\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

$$x = \frac{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\frac{1}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}$$

$$x=(1-\alpha)\frac{\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\frac{1}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}$$

$$x=(1-\alpha)\left(\frac{\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}}{\frac{s}{n}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}$$

$$x=(1-\alpha)\left(\frac{\frac{\alpha n}{s}}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}$$

For at vise at $\hat{y}^{n^*}$ikke vil være større end $\hat{y}_c^*$ i knivsægstilfældet, omskriver vi dette: $\frac{\alpha n}{s}=\bar{r}+\varepsilon \Leftrightarrow \alpha=\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)$. Hvis det desuden gælder at $\frac{\alpha n}{s}=\bar{r}+\varepsilon$, må $\frac{\frac{\alpha n}{s}}{\bar{r}+\varepsilon}=1$

$$x=(1)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{(1-\alpha)}{1-\alpha}$$

$$x=1$$

Altså vil den risikokorrigerede indkomst i den hhv. lukkede og åbne økonomi, være lig hinanden i knivsægstilfældet hvor $\frac{\alpha n}{s}=\bar{r}+\varepsilon$.
For at kigge på tilfælde uden for knivsægstilfældet benytter vi definitionen $\frac{\alpha n}{s}=r_c^*$:

$$x=(1-\alpha)\left(\frac{r_c^*}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r_c^*}(\bar{r}+\varepsilon)}$$

Vi definerer det relative forhold mellem realrenten i den åbne og lukkede økonomi som $\hat{r}=\frac{\bar{r}+\varepsilon}{r_c^*}$:

$$x=(1-\alpha)\left(\frac{1}{\hat{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{1-\alpha\hat{r}}$$

Vi ved at nævneren på højresiden er positiv da:

$$\alpha\hat{r}<1$$

$$\alpha\frac{\bar{r}+\varepsilon}{r_c^*}<1$$

$$\alpha(\bar{r}+\varepsilon) < r_c^*$$

$$\alpha(\bar{r}+\varepsilon) < \frac{\alpha n}{s}$$

$$(\bar{r}+\varepsilon) < \frac{n}{s}$$

$$s(\bar{r}+\varepsilon) < n$$

Ovenfor ses modellens stabilitetsantagelse, hvilket medfører at nævneren må være veldefineret.

Vi finder nu udtrykket for $\ln(x)$:

$$\ln(x) = ln(1-\alpha) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) + \ln\left(\frac{1}{1-\alpha\hat{r}}\right)$$

$$\ln(x) = ln(1-\alpha) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(1) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(\hat{r}) + \ln(1) - \ln(1-\alpha\hat{r})$$

$$\ln(x) = ln(1-\alpha) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(\hat{r}) - \ln(1-\alpha\hat{r})$$

Vi differentierer udtrykket mht. $\hat{r}$:

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{x})}{\partial \hat{r}} = -\frac{\alpha}{(1-\alpha)\hat{r}} - (-\alpha)\frac{1}{1-\alpha\hat{r}}$$

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{x})}{\partial \hat{r}} = -\frac{\alpha}{(1-\alpha)\hat{r}} + \frac{\alpha}{1-\alpha\hat{r}}$$

For $\hat{r} = 1$ gælder i ovenstående udtryk:

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{x})}{\partial \hat{r}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0$$

Vi ser at det relative forhold mellem y i den åbne og lukkede økonomi når et minimum for $\hat{r} = 1$, da den førsteordensafledte = 0. Vi viste tidligere at x i dette tilfælde = 1. Vi ser desuden, at så længe det gælder at $0 < \alpha\hat{r} < 1$, vil den førsteordensafledte til x være strengt voksende, hvilket betyder at for alle andre tilfælde end $\hat{r} = 1$ (knivsægstilfældet), vil den risikokorrigerede nationalindkomst i den åbne økonomi være større end i lukkede økonomi. Betingelsen $0 < \alpha\hat{r} <$

1, må være overholdt da vi ved at α er en størrelse defineret mellem 0 og 1. I definitionen for x, har vi desuden $\hat{r}$ i nævneren, hvilket må betyde at $\hat{r}$ er en størrelse større end 1. Alt i alt må det derfor gælde at $0 < \alpha\hat{r} < 1$.
Vi har dermed vist at den risikokorrigerede nationalindkomst i den åbne økonomi vil være større end i den lukkede, for alle andre tilfælde end knivsægstilfældet.

Makroøkonomi 1 – Hjemmeopgave 8

Opgave 1 - Konvergens

1.1

Ubetinget konvergens:

Hypotesen om ubetinget konvergens lyder, at BNP pr. arbejder på langt sigt vil konvergere mod den samme vækststi for alle lande. Dette betyder at alle lande vil konvergere til samme niveau for indkomst pr. arbejder.

Ubetinget konvergens implicerer derfor at fattigdom vil være ikke eksisterende på langt sigt, da hypotesen antager at alle lande vil nå samme niveau for indkomst pr. arbejder.

Betinget konvergens:

Hypotesen om betinget konvergens lyder, at BNP pr. arbejder på langt sigt vil konvergere mod en specifik vækststi for det enkelte land, afhængig af landets strukturelle karakteristika. Altså vil lande som er relativt ens, med samme strukturelle karakteristika konvergere mod samme vækststi – heraf betinget konvergens.

Desto længere et land er fra sin vækststi desto hurtigere vil dette land vækste, for at nå vækststien sammen med de lande som deler strukturelle karakteristika.

Betinget konvergens implicerer modsat ubetinget konvergens, en fortsat eksistens af fattigdom, da fattige lande blot vil nå samme vækststi som andre strukturelt lignende fattige lande.

1.2

Hypotesen omkring ubetinget konvergens siger at alle lande på sigt vil konvergere mod samme niveau for BNP pr. arbejder og herefter ligge fast på dette niveau. Figur 1 viser ikke en sammenhæng som tyder på at der er tale om ubetinget konvergens. Vi ser desuden dette af ligning (1), hvor β_2 er en meget lille størrelse. Figur 2 viser dog en sammenhæng som principielt støtter hypotesen om ubetinget konvergens. Vi ser dette af den svagt negative sammenhæng, som netop siger at desto højere et initialt indkomstniveau et land har, desto lavere en vækstrate vil landet have (da alle skal konvergere til samme vækststi og dermed må fattige lande vækste hurtigere). Trods disse resultater er vi dog bekendt med, at empirien ikke understøtter ubetinget konvergens, men nærmere betinget konvergens.

1.3

Vi kan fra ligningerne i 1.2 udlede sammenhængen mellem årlig vækst og initialt indkomstniveau:

$$\frac{\ln(y_t) - \ln(y_o)}{t} = \beta_3 - \beta_4 \ln\,(y_0)$$

$$\ln(y_t) - \ln(y_o) = t\beta_3 - t\beta_4 \ln(y_0)$$

$$\ln(y_t) = t\beta_3 - t\beta_4 \ln(y_0) + \ln(y_o)$$

$$\ln(y_t) = t\beta_3 + \ln(y_0)(1 - t\beta_4)$$

Vi bliver oplyst at det fattige land initialt har 10 pct. af det rige lands BNP. Dette betyder at $\ln\left(y_0^{poor}\right) - \ln\left(y_0^{rich}\right) = \ln(0{,}1)$. For at det fattige land skal ende med 90 pct. af det rige lands BNP, må det i år t gælde at $\ln\left(y_t^{poor}\right) - \ln\left(y_t^{rich}\right) = \ln(0{,}9)$. Vi isolerer for t i dette udtryk for at finde frem til hvor længe det vil tage det fattige land, at nå dette indkomstniveau:

$$\ln\left(y_t^{poor}\right) - \ln\left(y_t^{rich}\right) = \left[t\beta_3 + \ln\left(y_0^{poor}\right)(1 - t\beta_4)\right] - \left[t\beta_3 + \ln\left(y_0^{rich}\right)(1 - t\beta_4)\right]$$

$$\ln(0{,}9) = t\beta_3 + \ln\left(y_0^{poor}\right)(1 - t\beta_4) - t\beta_3 - \ln\left(y_0^{rich}\right)(1 - t\beta_4)$$

$$\ln(0{,}9) = \ln\left(y_0^{poor}\right)(1 - t\beta_4) - \ln\left(y_0^{rich}\right)(1 - t\beta_4)$$

$$\ln(0{,}9) = (1 - t\beta_4)[\ln\left(y_0^{poor}\right) - \ln\left(y_0^{rich}\right)]$$

$$\ln(0{,}9) = (1 - t\beta_4)\ln(0{,}1)$$

$$\frac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}1)} = 1 - t\beta_4$$

$$t\beta_4 = 1 - \frac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}1)}$$

$$t = \frac{\left(1 - \frac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}1)}\right)}{\beta_4}$$

$$t = \frac{\left(1 - \frac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}1)}\right)}{0{,}005}$$

$$t \approx 190{,}85$$

Vi ser af ovenstående at det vil tage det fattige land over 190 år at nå et indkomstniveau svarende til 90 pct. af det rige lands BNP. I relation til figur 2, må det altså vurderes, at trods figurens støtte af ubetinget konvergens, er der tale om en meget langsom konvergens. Resultatet i figur 2 er altså relativt svagt.

Opgave 2 – Humankapital og R&D

2.1

Vi finder den approksimative vækstrate i BNP pr. produktionsarbejder ved:

$$\frac{Y_t}{L_{Y_t}} = \frac{K_t^{\alpha} H_t^{\phi} (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\phi}}{L_{Yt}}$$

$$\frac{Y_t}{L_{Y_t}} = \frac{K_t^{\alpha} H_t^{\phi} (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\phi}}{L_{Yt}^{1-\alpha-\phi+\alpha+\phi}}$$

$$\frac{Y_t}{L_{Y_t}} = \frac{K_t^{\alpha} H_t^{\phi} (A_t L_{Yt})^{1} (A_t L_{Yt})^{-\alpha} (A_t L_{Yt})^{-\phi}}{L_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{\phi} L_{Yt}^{1} L_{Yt}^{-\alpha} L_{Yt}^{-\phi}}$$

$$\frac{Y_t}{L_{Y_t}} = \left(\frac{K_t}{L_{Yt}}\right)^{\alpha} \left(\frac{H_t}{L_{Yt}}\right)^{\phi} \left(\frac{A_t L_{Yt}}{L_{Yt}}\right) \left(\frac{A_t L_{Yt}}{L_{Yt}}\right)^{-\alpha} \left(\frac{A_t L_{Yt}}{L_{Yt}}\right)^{-\phi}$$

Vi indsætter vores pr. arbejder variable:

$$y_t = (k_t)^{\alpha} (h_t)^{\phi} (A_t) (A_t)^{-\alpha} (A_t)^{-\phi}$$

$$y_t = k_t^{\alpha} h_t^{\phi} A_t^{1-\alpha-\phi}$$

Vi har nu fundet vores pr. arbejder produktionsfunktion.

Vi finder den approksimative vækstrate:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}^{\alpha} h_{t+1}^{\phi} A_{t+1}^{1-\alpha-\phi}}{k_t^{\alpha} h_t^{\phi} A_t^{1-\alpha-\phi}}$$

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{h_{t+1}}{h_t}\right)^{\phi} \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{1-\alpha-\phi}$$

Vi tager logaritmen:

$$\ln\left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right) = \alpha \ln\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right) + \phi \ln\left(\frac{h_{t+1}}{h_t}\right) + (1-\alpha-\phi)\ln\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)$$

$$\ln(y_{t+1}) - \ln(y_t) = \alpha[\ln(k_{t+1}) - \ln(k_t)] + \phi[\ln(h_{t+1}) - \ln(h_t)] + (1-\alpha-\phi)[\ln(A_{t+1}) - \ln(A_t)]$$

Vi indsætter de approksimative vækstrater, samt definitionen $\hat{g}_t = \ln(A_{t+1}) - \ln(A_t)$:

$$g_t^y = \alpha g_t^k + \phi g_t^h + (1-\alpha-\phi)\hat{g}_t$$

Ovenfor ses ligning (12).

Hvis y_t, k_t og h_t vokser med samme hastighed må det gælde at $g_t^y = g_t^k = g_t^h$.

$$g_t^y = \alpha g_t^y + \phi g_t^y + (1-\alpha-\phi)\hat{g}_t$$

$$g_t^y - \alpha g_t^y - \phi g_t^y = (1-\alpha-\phi)\hat{g}_t$$

$$g_t^y(1-\alpha-\phi) = (1-\alpha-\phi)\hat{g}_t$$

$$g_t^y = \frac{(1-\alpha-\phi)\hat{g}_t}{(1-\alpha-\phi)}$$

$$g_t^y = \hat{g}_t$$

I tilfældet hvor y_t, k_t og h_t vokser med samme hastighed gælder det at vækstraten i BNP pr. produktionsarbejder vokser med hastigheden $\hat{g}_t = \ln(A_{t+1}) - \ln(A_t)$. Fortolkningen af dette vil være, at væksten i BNP i denne situation er drevet af væksten i vidensniveauet.

2.2

Når antallet af forskere er konstant over tid udvikler vidensniveauet sig ved:

$$g_t = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \frac{\rho A_t^{\phi} L_A^{\lambda}}{A_t} = \rho A_t^{\phi-1} L_A^{\lambda}$$

Vi ser at vidensniveauets udvikling afhænger positivt af ϕ.
ϕ angiver udbudselasticiteten af vidensniveauet i økonomien. Pensumbogen antager $\phi \leq 1$. Dette skyldes to antagelser henholdsvis 'standing on shoulders' og 'fishing out'.

'Standing on shoulders' er antagelsen som ligger til grund for $\phi > 0$. Denne antagelser implicerer, at det er nemmere at skabe nu viden desto mere viden man har i forvejen. Altså at størrelsen på A_{t+1} vil afhænge positivt af størrelsen på A_{t+1}.

'Fishing out' er antagelsen som ligger til grund for $\phi < 1$. Denne antagelse implicerer, at det bliver svære at komme på nye idéer desto flere idéer som der findes på – den antager implicit at det er de nemmeste idéer som findes på først og herefter er der kun sværere idéer tilbage at finde på. Dette tenderer altså mod en udbudselasticitet mindre end 1. Havde vi at $\phi > 1$, ville vækstraten være voksende med A_t, hvilket betyder at vækstraten ville øges mere og mere med tiden. Dette ønskes ikke og derfor antager pensumbogen $\phi \leq 1$.

Hvis ϕ er tæt på 1 i produktionen af ny viden implicerer modellen at lang sigts vækst i BNP pr. arbejder afhænger positivt af andelen af forskere (L_A), samt positivt af opsparings- og investeringsraten. Disse antagelser virker alle forholdsvis plausible.
Det egentlige problem ved modellen hvor $\phi = 1$ er de enorme skalaeffekter som medføres. Dette kommer bl.a. af at vi ikke har aftagende marginalprodukt til viden, og dermed vil viden vokse eksplosivt ud i det uendelige – hvilket langt fra stemmer overens med virkeligheden. Skalaeffekterne kommer af, at en større andel af forskere ift. den samlede arbejdsstyrke vil medføre permanent stigende vækstrater i BNP pr. arbejder, i denne delopgave hvor vi ser på antallet af forskere som konstant, vil vækstraten derfor være konstant. Dette vil være et argument for ϕ tæt på 1 i produktionen af ny viden.

2.3

Den eksakte vækstrate er givet ved $g_t = \frac{A_{t+1}-A_t}{A_t}$:

$$\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \frac{\rho A_t^{\phi} L_{At}^{\lambda}}{A_t}$$

$$g_t = \rho A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda}$$

Vi finder først transitionsligningen for vækstraten i vidensniveauet:

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = \frac{\rho A_{t+1}^{\phi-1} L_{At+1}^{\lambda}}{\rho A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda}}$$

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{L_{At+1}}{L_{At}}\right)^{\lambda}$$

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{s_R L_{t+1}}{s_R L_t}\right)^{\lambda}$$

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\lambda}$$

Vi indsætter definitionerne for vækstraten i vidensniveauet samt vækstraten i befolkningen:

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = (1+g_t)^{\phi-1}(1+n)^{\lambda}$$

Vi isolerer g_{t+1} for at finde transitionsligningen:

$$g_{t+1} = (1+g_t)^{\phi-1}(1+n)^{\lambda} g_t$$

Ovenfor ses ligning (13).

Vi indsætter steady state betingelsen ($g_{se} = g_{t+1} = g_t$):

$$g_{se} = (1+g_{se})^{\phi-1}(1+n)^{\lambda} g_{se}$$

$$1 = (1+g_{se})^{\phi-1}(1+n)^{\lambda}$$

$$\frac{1}{(1+g_{se})^{\phi-1}} = (1+n)^{\lambda}$$

$$(1+g_{se})^{1-\phi} = (1+n)^{\lambda}$$

$$1+g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

$$g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1$$

Vi ser at kun for $\phi < 1$ er eksponenten defineret. Vi ser at hvis $\phi = 1$ findes steady state vækstraten ikke, da $\phi = 1$ medfører skalaeffekter og dermed eksplosiv vækst. Dette betyder at når antallet af forskere stiger, vil vækstraten for vidensniveauet være stigende, og dermed er der altså ikke en steady state vækstrate for vidensniveauet for $\phi = 1$.

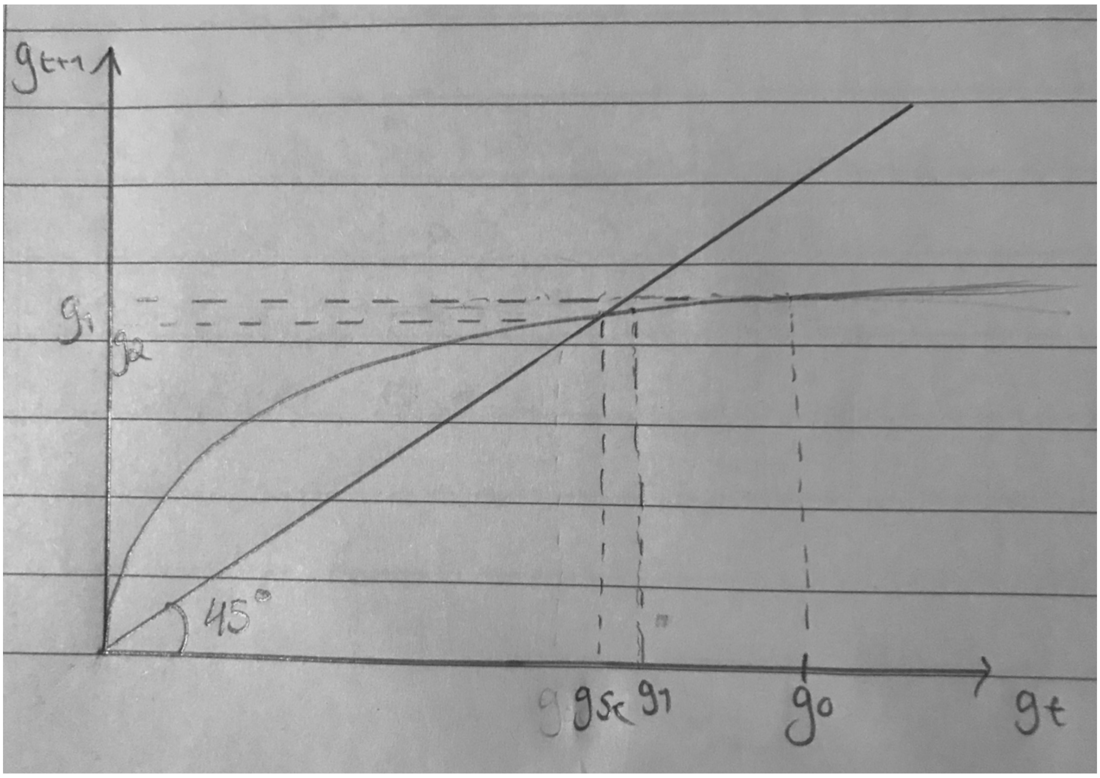
For at illustrere hvordan g_t udvikler sig over tid, undersøger vi hvorvidt vækstraten konvergerer mod sin steady state værdi. For at dette gør sig gældende må fire nedenstående betingelser være opfyldt:

1. Transitionsligningen går gennem (0,0): Dette ser vi er opfyldt, da $g_{t+1} = 0$ for $g_t = 0$.
2. Transitionskurven er konstant voksende:
$$\frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t} = (1+n)^{\lambda}\left[(1+g_t)^{\phi-1} + g_t(\phi-1)(1+g_t)^{\phi-2}\right]$$
$$= (1+n)^{\lambda}\left[\frac{1}{(1+g_t)^{1-\phi}} + \frac{g_t(\phi-1)}{(1+g_t)^{2-\phi}}\right]$$

   For at transitionskurven er voksende må det jf. ovenstående gælde at $\frac{1}{(1+g_t)^{1-\phi}} + \frac{g_t(\phi-1)}{(1+g_t)^{2-\phi}} > 0$. Vi undersøger denne betingelse:
$$\frac{1}{(1+g_t)^{1-\phi}} + \frac{g_t(\phi-1)}{(1+g_t)^{2-\phi}} > 0$$
$$\frac{1}{(1+g_t)^{1}(1+g_t)^{-\phi}} > -\frac{g_t(\phi-1)}{(1+g_t)^{2}(1+g_t)^{-\phi}}$$
$$1 > -\frac{g_t(\phi-1)}{1-g_t}$$
$$\frac{1}{\phi-1} > -\frac{g_t}{1+g_t}$$
$$\frac{1}{1-\phi} < \frac{g_t}{1+g_t}$$

   Vi ser af ovenstående, at kun såfremt $0 < \phi < 1$, vil transitionskurven være voksende.
3. Transitionskurvens hældning er konstant aftagende: Vi ser, at for voksende g_t bliver $\frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t}$ mindre og mindre. Dermed er hældningen konstant aftagende.
4. Hældningen går mod et tal mindre end 1: For $g_t \to \infty$, går $\frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t}$ mod 0. Altså er kravet opfyldt.

Baseret på ovenstående kan det konkluderes at vækstraten i vidensniveauet konvergerer mod en steady state værdi $g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1$, såfremt $0 < \phi < 1$. Nedenstående diagram viser hvordan g_t bevæger sig mod sin steady state værdi for $g_0 > g_{se}$.



2.4

Vi udleder først transitionsligningen for fysisk kapital pr. effektiv produktionsarbejder, ved at tage udgangspunkt i ligning (4):

$$K_{t+1} = s_K Y_t + K_t(1-\delta)$$

Vi omskriver ligning (6) og (7), for at få $\tilde{k}_{t+1}$:

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{Yt+1}} = \frac{s_K Y_t + K_t(1-\delta)}{A_{t+1}L_{Yt+1}}$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{s_K Y_t + K_t(1-\delta)}{A_{t+1}L_{Yt+1}}$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{\frac{s_K Y_t + K_t(1-\delta)}{A_t L_{Yt}}}{\frac{A_{t+1}L_{Yt+1}}{A_t L_{Yt}}}$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{s_K \tilde{y}_t + \tilde{k}_t(1-\delta)}{\frac{A_{t+1}L_{Yt+1}}{A_t L_{Yt}}}$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)\left(\frac{L_{Yt+1}}{L_{Yt}}\right)}(s_K\tilde{y}_t + \tilde{k}_t(1-\delta))$$

Vi omskriver ligning (3):

$$Y_t = K_t^\alpha H_t^\phi (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\phi}$$

$$\frac{Y_t}{A_t L_{Yt}} = \frac{K_t^\alpha H_t^\phi (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\phi}}{A_t L_{Yt}}$$

$$\tilde{y}_t = \frac{K_t^\alpha H_t^\phi (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\phi}}{A_t L_{Yt}^{1-\alpha+\alpha-\phi+\phi}}$$

$$\tilde{y}_t = \frac{K_t^\alpha H_t^\phi (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\phi}}{A_t L_{Yt}^{1-\alpha+\alpha-\phi+\phi}}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha \tilde{h}_t^\phi$$

Vi indsætter denne i udledningen:

$$\boldsymbol{\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}(s_K\tilde{k}_t^\alpha\tilde{h}_t^\phi + (1-\delta)\tilde{k}_t)}$$

Ovenfor ses ligning (14).

Vi udleder transitionsligningen for humankapital pr. effektiv produktionsarbejder, ved at tage udgangspunkt i ligning (5):

$$H_{t+1} = s_H Y_t + H_t(1-\delta)$$

$$\frac{H_{t+1}}{A_{t+1}L_{Yt+1}} = \frac{s_H Y_t + H_t(1-\delta)}{A_{t+1}L_{Yt+1}}$$

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{\frac{s_H Y_t + H_t(1-\delta)}{A_t L_{Yt}}}{\frac{A_{t+1}L_{Yt+1}}{A_t L_{Yt}}}$$

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{s_H \tilde{y}_t + \tilde{h}_t(1-\delta)}{\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)\left(\frac{L_{Yt+1}}{L_{Yt}}\right)}$$

Vi bruger endnu engang omskrivningen af ligning (3):

$$\boldsymbol{\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}(s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{h}_t)}$$

Ovenfor ses ligning (15).

Vi ser af ligning (15), at andelen af befolkningen som arbejder i R&D-sektoren, ikke påvirker humankapital pr. effektiv produktionsarbejder.

2.5

For at kunne analysere hvordan kapital pr. effektiv produktionsarbejder ($\tilde{k}_t$) og humankapital pr. effektiv produktionsarbejder ($\tilde{h}_t$) udvikler sig over tid i et fasediagram, må vi isolere $\tilde{h}_t$ som funktion af $\tilde{k}_t$ i hhv. ligning (14) og (15) hvor vi indsætter steady state betingelserne $\tilde{k}^* = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t$ og $\tilde{h}^* = \tilde{h}_{t+1} = \tilde{h}_t$:

Vi tager udgangspunkt i ligning (14), hvor vi finder nullcline for $\tilde{k}_t$:

$$\tilde{k}^* = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}(s_K {\tilde{k}^*}^{\alpha} \tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{k}^*)$$

$$(1+g_t)(1+n) = \frac{s_K {\tilde{k}^*}^{\alpha} \tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{k}^*}{\tilde{k}^*}$$

$$(1+g_t)(1+n) = s_K {\tilde{k}^*}^{\alpha-1} \tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)$$

$$\frac{(1+g_t)(1+n) - (1-\delta)}{s_K {\tilde{k}^*}^{\alpha-1}} = \tilde{h}_t^{\phi}$$

$$\frac{1 + n + g_t + ng - 1 + \delta}{s_K {\tilde{k}^*}^{\alpha-1}} = \tilde{h}_t^{\phi}$$

$$\frac{n + g_t + ng + \delta}{s_K \tilde{k}^{*\alpha-1}} = \tilde{h}_t^{\phi}$$

$$\tilde{h}_t^{\phi} = \frac{n + g_t + ng + \delta}{s_K} \tilde{k}^{*1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{\tilde{h}_t = \left(\frac{n + g_t + ng + \delta}{s_K}\right)^{\frac{1}{\phi}} \tilde{k}^{*\frac{1-\alpha}{\phi}}}$$

Ovenfor ses nullcline for $\tilde{k}_t$.

Vi finder nu nullcline for $\tilde{h}_t$, med udgangspunkt i ligning (15):

$$\tilde{h}^* = \frac{1}{(1 + g_t)(1 + n)} (s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}^{*\phi} + (1 - \delta)\tilde{h}^*)$$

$$(1 + g_t)(1 + n) = \frac{s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}^{*\phi} + (1 - \delta)\tilde{h}^*}{\tilde{h}^*}$$

$$1 + n + g_t + ng = s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}^{*\phi-1} + (1 - \delta)$$

$$\frac{1 + n + g_t + ng - 1 + \delta}{s_H \tilde{k}_t^{\alpha}} = \tilde{h}^{*\phi-1}$$

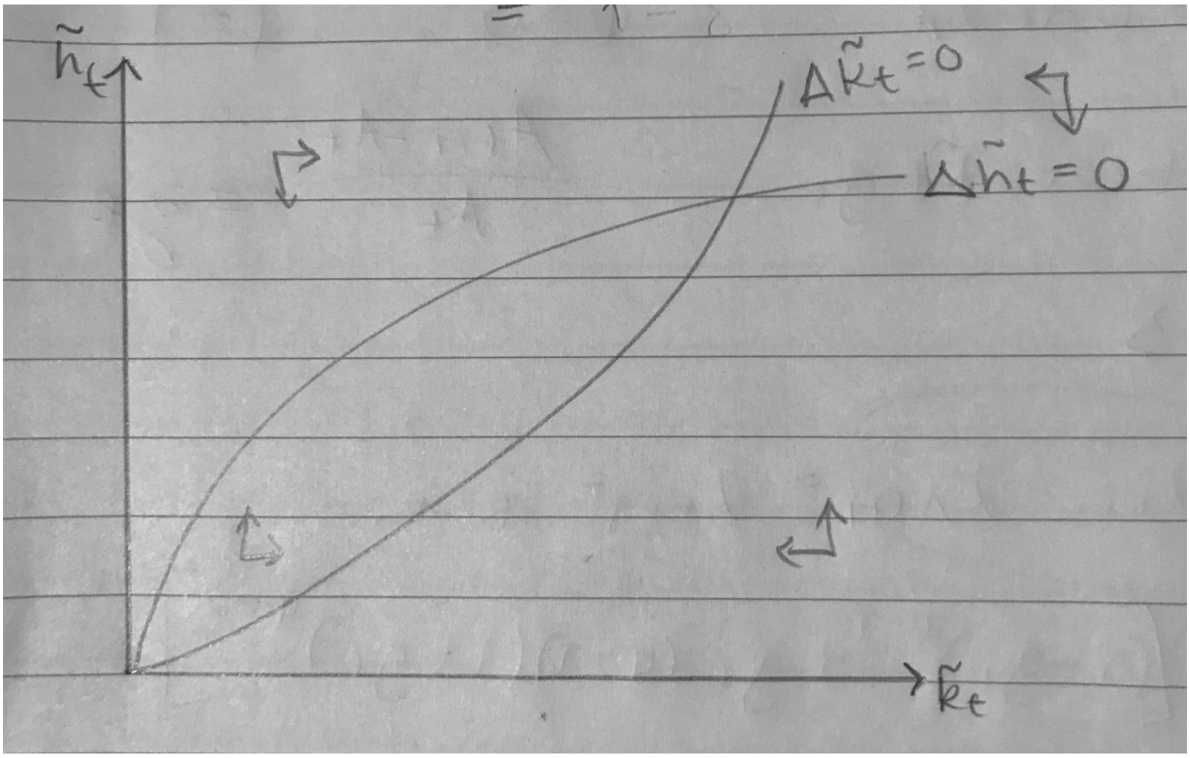
$$\tilde{h}^{*\phi-1} = \frac{n + g_t + ng + \delta}{s_H \tilde{k}_t^{\alpha}}$$

$$\tilde{h}^{*1-\phi} = \tilde{k}_t^{\alpha} \frac{s_H}{n + g_t + ng + \delta}$$

$$\boldsymbol{\tilde{h}^* = \left(\tilde{k}_t^{\alpha} \frac{s_H}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}}$$

Ovenfor ses nullcline for $\tilde{h}_t$.

Vi ser af nullcline for $\tilde{k}_t$, at for voksende $\tilde{k}_t$, vil kurven blive stejlere og stejlere. Vi ser desuden af nullcline for $\tilde{h}_t$, at for voksende $\tilde{k}_t$, vil kurven blive fladere og fladere. Vi kan nu indtegne de to ligninger for k i vores fasediagram:



Vi finder steadystateværdien for $\tilde{y}_t^*$ ved først til finde produktionsfunktionen pr. effektiv arbejder:

$$Y_t = K_t^\alpha H_t^\phi (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\phi}$$

$$\frac{Y_t}{A_t L_{Yt}} = \frac{K_t^\alpha H_t^\phi (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\phi}}{A_t L_{Yt}}$$

$$\tilde{y}_t = \frac{K_t^\alpha H_t^\phi (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\phi}}{A_t L_{Yt}^{1-\alpha+\alpha-\phi+\phi}}$$

$$\tilde{y}_t = \frac{K_t^\alpha H_t^\phi (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\phi}}{A_t L_{Yt}^{1-\alpha+\alpha-\phi+\phi}}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha \tilde{h}_t^\phi$$

Vi benytter denne omskrivning til først at finde steady state værdien for hhv. $\tilde{k}_t$ og $\tilde{h}_t$ og efterfølgende indsætte disse i ovenstående udtryk.

Vi finder først steady stateværdien for $\tilde{k}_t$:

$$\tilde{k}^* = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}\left(s_K \tilde{k}^{*^{\alpha}} \tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{k}^*\right)$$

$$(1+g_t)(1+n) = \frac{s_K \tilde{k}^{*^{\alpha}} \tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{k}^*}{\tilde{k}^*}$$

$$(1+g_t)(1+n) = s_K \tilde{k}^{*^{\alpha-1}} \tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)$$

$$\frac{(1+g_t)(1+n) - (1-\delta)}{s_K \tilde{h}_t^{\phi}} = \tilde{k}^{*^{\alpha-1}}$$

$$\frac{1+n+g_t+ng-1+\delta}{s_K \tilde{h}_t^{\phi}} = \tilde{k}^{*^{\alpha-1}}$$

$$\frac{n+g_t+ng+\delta}{s_K \tilde{h}_t^{\phi}} = \tilde{k}^{*^{\alpha-1}}$$

$$\tilde{k}^{*^{1-\alpha}} = \frac{s_K \tilde{h}_t^{\phi}}{n+g_t+ng+\delta}$$

$$\boldsymbol{\tilde{k}^* = \left(\frac{s_K \tilde{h}_t^{\phi}}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

Vi finder herefter steady stateværdien for $\tilde{h}_t$. Vi ser at denne er identisk med nullcline for $\tilde{h}_t$:

$$\boldsymbol{\tilde{h}^* = \left(\tilde{k}_t^{\alpha} \frac{s_H}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}}$$

Inden vi kan indsætte disse i vores udtryk for $\tilde{y}_t$, skal vi sørge for at de kun afhænger af parametre.

Vi finder først værdien af $\tilde{k}_t$, ved at indsætte $\tilde{h}^*$ i $\tilde{k}^*$:

$$\tilde{k}^* = \tilde{h}_t^{\frac{\phi}{1-\alpha}} \left(\frac{s_K}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\tilde{k}^* = \left(\tilde{k}_t^\alpha \frac{s_H}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{\phi}{(1-\alpha)(1-\phi)}} \left(\frac{s_K}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\tilde{k}^{*\,1-\alpha} = \left(\tilde{k}_t^\alpha \frac{s_H}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \frac{s_K}{n + g_t + ng + \delta}$$

$$\tilde{k}^{*\,1-\alpha} = \tilde{k}_t^{\frac{\alpha\phi}{1-\phi}} \left(\frac{s_H}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \frac{s_K}{n + g_t + ng + \delta}$$

Vi benytter vores steady state betingelse $\tilde{k}^* = \tilde{k}_t$:

$$\tilde{k}^{*\,1-\alpha} \tilde{k}^{*\frac{-\alpha\phi}{1-\phi}} = \left(\frac{s_H}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \frac{s_K}{n + g_t + ng + \delta}$$

$$\tilde{k}^{*\frac{(1-\alpha)(1-\phi)}{(1-\phi)}} \tilde{k}^{*\frac{-\alpha\phi}{1-\phi}} = \left(\frac{s_H}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \frac{s_K}{n + g_t + ng + \delta}$$

$$\tilde{k}^{*\frac{(1-\alpha)(1-\phi)-\alpha\phi}{(1-\phi)}} = \left(\frac{s_H}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \frac{s_K}{n + g_t + ng + \delta}$$

$$\tilde{k}^{*\frac{1-\phi-\alpha+\alpha\phi-\alpha\phi}{(1-\phi)}} = s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}} s_K \left(\frac{1}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \left(\frac{1}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{1}$$

$$\tilde{k}^{*\frac{1-\phi-\alpha}{(1-\phi)}} = s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}} s_K \left(\frac{1}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}+1}$$

$$\tilde{k}^{*\frac{1-\phi-\alpha}{(1-\phi)}} = s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}} s_K \left(\frac{1}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}+\frac{1-\phi}{1-\phi}}$$

$$\tilde{k}^{*\frac{1-\phi-\alpha}{(1-\phi)}} = s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}} s_K \left(\frac{1}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{\phi+1-\phi}{1-\phi}}$$

$$\tilde{k}^{*\frac{1-\phi-\alpha}{(1-\phi)}} = s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}} s_K \left(\frac{1}{n + g_t + ng + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}$$

$$\tilde{k}^{*\,1-\phi-\alpha} = s_H^{\phi}\, s_K^{1-\phi} \left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{1}$$

$$\tilde{k}^{*\,1-\phi-\alpha} = \frac{s_H^{\phi}\, s_K^{1-\phi}}{n+g_t+ng+\delta}$$

$$\boldsymbol{\tilde{k}^{*}} = \left(\frac{\boldsymbol{s_H^{\phi}\, s_K^{1-\phi}}}{\boldsymbol{n+g_t+ng+\delta}}\right)^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1-\phi-\alpha}}}$$

Vi indsætter nu udtrykket for k i vores udtryk for h:

$$\tilde{h}^{*} = \tilde{k}_t^{\frac{\alpha}{1-\phi}} \left(\frac{s_H}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}$$

$$\tilde{h}^{*\,1-\phi} = \tilde{k}_t^{\alpha} \frac{s_H}{n+g_t+ng+\delta}$$

$$\tilde{h}^{*\,1-\phi} = \left(\frac{s_H^{\phi}\, s_K^{1-\phi}}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}} \left(\frac{s_H}{n+g_t+ng+\delta}\right)$$

$$\tilde{h}^{*\,1-\phi} = s_H\left(s_H^{\phi}\, s_K^{1-\phi}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}} \left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}} \left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{1}$$

$$\tilde{h}^{*\,1-\phi} = s_H\left(s_H^{\phi}\, s_K^{1-\phi}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}} \left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}+1}$$

$$\tilde{h}^{*\,1-\phi} = s_H^{1} s_H^{\frac{\alpha\phi}{1-\phi-\alpha}}\, s_K^{\frac{(1-\phi)\alpha}{1-\phi-\alpha}} \left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}+\frac{1-\phi-\alpha}{1-\phi-\alpha}}$$

$$\tilde{h}^{*\,1-\phi} = s_H^{\frac{1-\phi-\alpha}{1-\phi-\alpha}} s_H^{\frac{\alpha\phi}{1-\phi-\alpha}}\, s_K^{\frac{(1-\phi)\alpha}{1-\phi-\alpha}} \left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{1-\phi}{1-\phi-\alpha}}$$

$$\tilde{h}^{*\,1-\phi} = s_H^{\frac{1-\phi-\alpha+\alpha\phi}{1-\phi-\alpha}}\, s_K^{\frac{(1-\phi)\alpha}{1-\phi-\alpha}} \left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{1-\phi}{1-\phi-\alpha}}$$

$$\tilde{h}^{*(1-\phi)(1-\phi-\alpha)} = s_H^{1-\phi-\alpha+\alpha\phi}\ s_K^{(1-\phi)\alpha}\left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{1-\phi}$$

$$\tilde{h}^{*(1-\phi)(1-\phi-\alpha)} = s_H^{1-\phi-\alpha(1-\phi)}\ s_K^{(1-\phi)\alpha}\left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{1-\phi}$$

$$\tilde{h}^{*(1-\phi-\alpha)} = s_H^{\frac{1-\phi}{1-\phi}-\alpha}\ s_K^{\alpha}\left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{1}$$

$$\tilde{h}^{*\,1-\phi-\alpha} = s_H^{1-\alpha}\ s_K^{\alpha}\,\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}$$

$$\boldsymbol{\tilde{h}^{*}} = \left(\frac{\boldsymbol{s_H^{1-\alpha}\ s_K^{\alpha}}}{\boldsymbol{n+g_t+ng+\delta}}\right)^{\boldsymbol{\frac{1}{1-\phi-\alpha}}}$$

Vi indsætter i vores udtryk for y:

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi}$$

$$\tilde{y}_t = \left(\frac{s_H^{\phi}\ s_K^{1-\phi}}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}}\left(\frac{s_K^{\alpha}s_H^{1-\alpha}}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi-\alpha}}$$

$$\tilde{y}_t = (s_K^{\alpha}s_H^{1-\alpha})^{\frac{\phi}{1-\phi-\alpha}}\left(s_H^{\phi}\ s_K^{1-\phi}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}}\left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}}\left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi-\alpha}}$$

$$\tilde{y}_t = s_K^{\frac{\alpha\phi}{1-\phi-\alpha}} s_H^{\frac{(1-\alpha)\phi}{1-\phi-\alpha}} s_H^{\frac{\alpha\phi}{1-\phi-\alpha}} s_K^{\frac{(1-\phi)\alpha}{1-\phi-\alpha}}\left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\phi}{1-\phi-\alpha}}$$

$$\tilde{y}_t = s_K^{\frac{\alpha\phi+(1-\phi)\alpha}{1-\phi-\alpha}} s_H^{\frac{(1-\alpha)\phi+\alpha\phi}{1-\phi-\alpha}}\left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\phi}{1-\phi-\alpha}}$$

$$\tilde{y}_t^{1-\phi-\alpha} = s_K^{\alpha\phi+\alpha-\alpha\phi} s_H^{\phi-\alpha\phi+\alpha\phi}\left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\alpha+\phi}$$

$$\tilde{y}_t^{1-\phi-\alpha} = s_K^{\alpha}s_H^{\phi}\left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\phi}$$

$$\tilde{y}_t^{1-\phi-\alpha} = \left(\frac{s_K}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\alpha}\left(\frac{s_H}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\phi}$$

$$\boldsymbol{\tilde{y}_t = \left(\frac{s_K}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}}\left(\frac{s_H}{n+g_t+ng+\delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi-\alpha}}}$$

Ovenfor ses ligning (16).

2.6

Vi skal udlede SS vækstbanen for BNP pr. indbygger: $\hat{y}_t^* = \frac{Y_t}{L_t}$.

Vi tager udgangspunkt i vores definition for $\tilde{y}^* = \frac{y_t^*}{A_t} \Leftrightarrow y_t^* = \tilde{y}^* A_t$.

For at komme videre med dette udtryk finder vi steady state vækstbanen for A_t:

$$g_t = \frac{A_{t+1}-A_t}{A_t} = \frac{\rho A_t^{\phi} L_{At}^{\lambda}}{A_t} = \rho A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda}$$

Vi indsætter ligning (7), samt omskriver $g_t = g_{se}$:

$$g_{se} = \rho A_t^{\phi-1}(s_R L_t)^{\lambda}$$

Vi isolerer A_t:

$$A_t^{1-\phi} = \frac{\rho s_R^{\lambda} L_t^{\lambda}}{g_{se}}$$

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} L_t^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Vi indsætter nu definitionen $L_t = (1+n)^t L_0$:

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} ((1+n)^t L_0)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+n)^{t\frac{\lambda}{1-\phi}} L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

For at få A_t udelukkede som funktion af g_{se} og ikke både g_{se} og n. Omskriver vi udtrykket for g_{se}, fra opgave 2.3:

$$g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1$$

$$1 + g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

$$(1+g_{se})^{\frac{1-\phi}{\lambda}} = 1 + n$$

VI indsætter dette i vores udtryk for A_t:

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \left((1+g_{se})^{\frac{1-\phi}{\lambda}}\right)^{t\frac{\lambda}{1-\phi}} L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Vi indsætter nu dette i vores udtryk for y_t^*:

$$y_t^* = \tilde{y}^* A_t$$

$$y_t^* = \tilde{y}^* \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Vi ved at følgende definition gælder: $\tilde{y}^* = (1-s_R)^{1-\alpha}\left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha}$. Vi kan indsætte denne definition i ovenstående:
,

$$y_t^* = (1-s_R)^{1-\alpha}\left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha} \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Ovenfor ses steady state vækstbanen for BNP pr. indbygger.

Jf. ovenstående ser vi på andelen af forskere i økonomien. Vi ser at andelen har to effekter med sig, netop et negativt led fra $(1-s_R)$ og et positivt led fra $s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$. Det negative led kommer af, at desto større andelen af forskere er, desto mindre vil andelen af arbejdskraften ansat i produktionen være. Det positive led kommer af, at en større andel af forskere betyder større forøgelse af vidensniveauet.

For at se på hvordan andelen af forskere påvirker økonomien, tager vi logaritmen til y_t^* og differentierer mht. s_R:

$$\ln(y_t^*) = (1-\alpha)\ln(1-s_R) + \ln\left(\left(\tilde{k}^*\right)^\alpha \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}\right) + \frac{\lambda}{1-\phi}\ln(s_R) + \ln\left((1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}\right)$$

$$\frac{\partial \ln(y_t^*)}{\partial s_R} = -\frac{1-\alpha}{1-s_R} + +\frac{\lambda}{(1-\phi)s_R}$$

Vi isolerer nu for s_R ved at sætte lig nul:

$$0 = -\frac{1-\alpha}{1-s_R} + +\frac{\lambda}{(1-\phi)s_R}$$

$$\frac{1-\alpha}{1-s_R} = \frac{\lambda}{(1-\phi)s_R}$$

$$(1-\phi)s_R(1-\alpha) = \lambda(1-s_R)$$

$$(1-\phi)s_R(1-\alpha) = \lambda - \lambda s_R$$

$$(1-\phi)s_R(1-\alpha) + \lambda s_R = \lambda$$

$$s_R((1-\phi)(1-\alpha)+\lambda) = \lambda$$

$$s_R = \frac{\lambda}{(1-\phi)(1-\alpha)+\lambda}$$

Vi kan af ovenstående se, at når ϕ stiger vil andelen af forskere også stige. Altså vil det påvirke væksten positivt ved større andel af forskere når ϕ stiger og dermed er det altid ønskværdigt med flere forskere når ϕ stiger i værdi.

2.7

De semi-endogene vækstmodeller forudsiger:

- Højere befolkningsniveau => højere indkomstniveau
- Mere befolkningsvækst => mere vækst i indkomsten

De endogene vækstmodeller forudsiger:

- Mere befolkningsvækst => eksplosiv vækst

Af ovenstående ser vi altså, at modellerne forudsiger en positiv sammenhæng mellem befolkningsudviklingen og økonomisk vækst. Det vides dog, at størstedelen af empirien peger modsat denne konklusion, altså en negativ sammenhæng mellem befolkningsvækst og vækst i økonomien. Vi kan dog i stedet for sammenligninger på tværs af lande, anskue alle lande som en samlet økonomi. Her vil empirien tyde på en positiv sammenhæng mellem stigninger i befolkningsniveauet og den økonomiske vækst. Således kan modellerne – trods modsigelser med empirien – fortsat benyttes til at forstå langsigtet økonomisk vækst.