Matematik A E2020
Uge 39, Forelæsning 1

Afsnit 6.1-6.4 og 6.6-6.8

Start på differentialregning

Differentialkvotient og tangent (6.1-2)

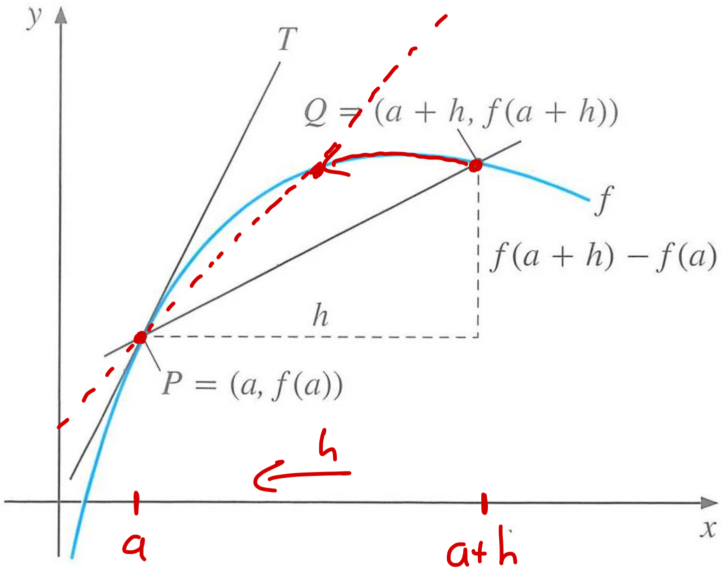


Figure 6.2.3 Newton quotient

Differentialkvotient:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tangentens ligning:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Hvis $y = f(x)$ er differentiabel overalt,
har vi flg notation for den afledte fkt $f'(x)$:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Eksempel (jvf øvelse fra sidst): For $f(x) = x^2$ er $f'(x) = 2x$

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \xrightarrow{h \to 0} 2x$$

Eksempel/øvelse

Lad $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.
Vis: For ethvert $a \neq 0$ gælder $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

For $h \neq 0$:

[Hint: Opstil differenskvotient og forlæng med passende udtryk]

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a-(a+h)}{h \cdot a \cdot (a+h)}$$

forlæng med a og $a+h$

$$= \frac{-h}{h \cdot a \cdot (a+h)} = \frac{-1}{a \cdot (a+h)}$$

$$\xrightarrow{h \to 0} -\frac{1}{a^2}$$

Dvs: $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

Monotoniforhold (6.3)

$$f'(x) \geq 0 \text{ for alle } x \text{ i interval } I \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ er voksende i } I$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ for alle } x \text{ i interval } I \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ er aftagende i } I$$

$$f'(x) = 0 \text{ for alle } x \text{ i interval } I \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ er konstant i } I$$

$$f'(x) > 0 \text{ for alle } x \text{ i interval } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ er strengt voksende i } I$$

$$f'(x) < 0 \text{ for alle } x \text{ i interval } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ er strengt aftagende i } I$$

Bemærk: "$\Leftarrow$" gælder ikke!

Fx: $f(x) = x^3$ str. voksende men $f'(0) = 0$

"$\Rightarrow$" SENERE (MIDDELVÆRDISÆTN, næste uge)

"$\Leftarrow$" Antag f voksende

$$f(x+h) - f(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{hvis } h > 0 \\ \leq 0 & \text{hvis } h < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \text{ for alle } h \neq 0.$$

Derfor må også $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$ $\square$

Differentialkvot. i økonomi (6.4)

En virksomhed producerer én type af vare.

$C(x)$: Omkostningen ved produktion af x enheder, "omkostningfkt"

$C'(x)$: "Marginalomkostningen" ved produktionen x

$$\underbrace{C'(x) \approx}_{h=1} \frac{C(x+1) - C(x)}{1} = C(x+1) - C(x)$$

Antag virksomheden kan afsætte produktion til fast pris p

Profitfunktion: $\pi(x) = p \cdot x - C(x)$

Marginal profit: $\pi'(x) = p - C'(x)$

Differentiabel => Kontinuert (s. 262-3)

$$\boxed{\text{Hvis } f \text{ er differentiabel i } x = a, \text{ så er } f \text{ kontinuert i } x = a}$$

f kont i a: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

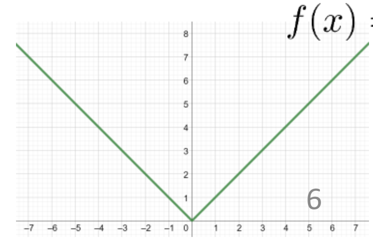
Dvs $f(a+h) \to f(a)$ hvis $h \to 0$

$$f(a+h) - f(a) \overset{h \neq 0}{=} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \xrightarrow{h \to 0} f'(a) \cdot 0 = \underline{0}$$

Dermed er f kont i a.

Det omvendte gælder ikke!

$f(x) = |x|$



Regneregel: Potensfunktioner (s. 190)

Lad $a \in \mathbb{R}$ og betragt potensfunktionen $f(x) = x^a$.
Da har vi:

$$f'(x) = ax^{a-1} \qquad \text{(hvor defineret)}$$

$\left.\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right\}$ ✓ (nemme)

$a=2$ ✓ (øvelse)

$a=-1$ ✓ (tidligere i dag)

$a=\frac{1}{2}$ (til holdøv.)

Generelt: Senere, brug $x^a = \left(e^{\ln(x)}\right)^a = e^{a \cdot \ln(x)}$

Regneregler: Sum, produkt, kvotient (6.7)

Antag f, g er differentiable i x.
Så er funktionerne $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ og $\frac{f}{g}$ (hvis $g(x) \neq 0$) differentiable i x med:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Øvelse

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Differentiér funktionerne f og g:

$f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^2 + 1), \text{ hvor } x > 0$

pingo.coactum.de (185415)

$$f'(x) = \left(2 \cdot \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^2+1) + \left(2x^{\frac{1}{2}}+1\right) \cdot 2x$$

$$= x^{-\frac{1}{2}}(x^2+1) + \left(2x^{\frac{1}{2}}+1\right)2x = x^{3/2} + x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{3/2} + 2x$$

$$\underline{= 5x^{3/2} + 2x + x^{-\frac{1}{2}}}$$

$g(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$

$$g'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - (x^3+2)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 - 4x}{(x^2+1)^2}$$

$$\underline{= \frac{x^4 + 3x^2 - 4x}{(x^2+1)^2}}$$

Bevis: Kvotientreglen

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}}$$

forlæng med $g(x)$ og $g(x+h)$

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x)\, g(x+h)}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)} - \frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)g(x)}{h\, g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{g(x)}{g(x)g(x+h)} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{f(x)}{g(x)g(x+h)}$$

$$\xrightarrow{h\to 0} f'(x)\cdot\frac{g(x)}{g(x)^2} - g'(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

Produktreglen: Økon. eks (ex 6.7.4)

$D(P)$: efterspørgsel (demand) efter virksomheds produkt som fkt af pris P

Virksomhedens indtægt (revenue): $R(P) = P \cdot D(P)$

Hvad sker der hvis virksomheden øger prisen en smule (fx 1 kr)?

a) Højere indtægt pr solgt vare ($\uparrow$)

b) Lavere efterspørgsel ($\downarrow$)

Ændringen i revenue (approximativt):

$$R'(P) = \underbrace{1 \cdot D(P)}_{a \, > 0} + \underbrace{P \cdot D'(P)}_{b \, < 0}$$

Kædereglen (6.8)

Differentiation af sammensat funktion $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Antag $g(x)$ er differentiabel i x_0 og at $f(u)$ er differentiabel i $u_0 = g(x_0)$. Da er $f \circ g$ differentiabel i x_0 med:

$$(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0))$$

$y = f(u)$ $u = g(x)$

Med "Leibniz-notation":

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

(se bogen!)

Eksempel: Bestem $h'(x)$ når $h(x) = (x^2+1)^5$

$h(x) = (f \circ g)(x)$, hvor $g(x) = x^2+1$ og $f(u) = u^5$

$h'(x) = 2x \cdot 5(x^2+1)^4 = \underline{10x(x^2+1)^4}$

Øvelse

Differentiér flg funktioner:

$$r(x) = \sqrt{x^5 + \frac{1}{x}}, \quad \text{hvor } x > 0$$

$r(x) = (f \circ g)(x)$, hvor $g(x) = x^5 + x^{-1}$ og $f(u) = u^{\frac{1}{2}}$

$$r'(x) = (5x^4 - x^{-2}) \cdot \frac{1}{2}(x^5 + x^{-1})^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{5x^4 - x^{-2}}{2\sqrt{x^5 + x^{-1}}}}}$$

$$s(x) = (1 + \sqrt{x^4 + 2}\,)^3$$

[Hvis tid!]

$$s(x) = (1 + \sqrt{x^4 + 2}\,)^3$$

$$g(x) = x^4 + 2$$

$$f(u) = 1 + \sqrt{u}$$

$$h(y) = y^3$$

$$s(x) = (h \circ f \circ g)(x) = h(f(g(x)))$$

$$t(x) = (f \circ g)(x) = 1 + \sqrt{x^4 + 2}$$

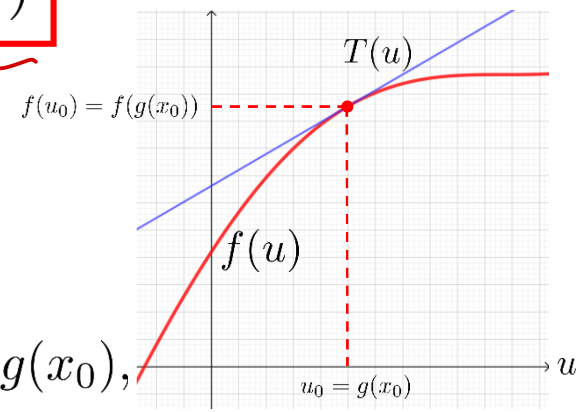
$$t'(x) = 4x^3 \cdot \frac{1}{2}(x^4+2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2}}$$

$$s(x) = (h \circ t)(x)$$

$$s'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2}}\, 3\left(1 + \sqrt{x^4+2}\,\right)^2 = \frac{6x^3\left(1+\sqrt{x^4+2}\,\right)^2}{\sqrt{x^4+2}}$$

Lad os argumentere for at kædereglen gælder (ikke fuldt bevis!):

$$\boxed{(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0))}$$



Lad $T(u)$ være tangenten til f i punktet $u_0 = g(x_0)$:

$$T(u) = f'(u_0)(u - u_0) + f(u_0)$$

Da T er en "god approksimation" til f omkring $u_0 = g(x_0)$, er $T \circ g$ en "god approksimation" til $f \circ g$ omkring x_0

Derfor rimeligt at antage: $(f \circ g)'(x_0) = (T \circ g)'(x_0)$

$$(T \circ g)(x) = T(g(x)) = f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + f(g(x_0))$$

$$(T \circ g)'(x) = f'(g(x_0))\, g'(x)$$

$$(T \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$