Opgave 1

a $f(x) = (x+2)e^x = xe^x + 2e^x$

for at opstille Taylorpolynomiet skal f' og f'' findes

$$P_n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$f' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x + 2e = e^x(3+x)$$

$$f'' = e^x \cdot (3+x) + e^x \cdot 1 = 3e^x + xe^x + e^x = e^x(4+x)$$

$f(0) = 2$ $\quad f'(0) = 3$ $\quad f''(0) = 4$

$$P_2 = 2 + \frac{3}{1}(x-0) + \frac{4}{2}(x-0)^2$$
$$P_2 = 2 + 3x + 2x^2$$
$$P_2 = 2x^2 + 3x + 2$$

b)

$$\lim_{x\to -2} = \frac{(x+2)e^x}{\ln(x+3)} = \frac{(-2+2)e^{-2}}{\ln(-2+3)} = \frac{0}{0}$$

Derfor bruges L'Hospitals

$f' = e^x(3+x)$ Denne fås fra tidligere

$f' = \frac{1}{x+3} \cdot 1 = \frac{1}{x+3}$ Dette indsættes

$$\lim_{x\to -2} \frac{e^x(3+x)}{\frac{1}{x+3}} = \frac{e^{-2}(3-2)}{\frac{1}{3-2}} = \frac{e^{-2} \cdot 1}{1} = \frac{e^{-2}}{1} = e^{-2}$$

Opgave 2

a)

$$\int_1^4 2x + \frac{1}{2x}\,dx = \frac{2}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\ln(x) = \left[x^2 + \frac{1}{2}\cdot\ln(x)\right]_1^4$$

$$4^2 + \frac{1}{2}\ln(4) - \left(1^2 + \frac{1}{2}\ln(1)\right) = 16 + \frac{1}{2}\cdot\ln(4) - 1 = 15 + \ln(2)$$

$$\int_1^2 4x(x-1)^3\,dx$$

Jeg bruger partiel integration

$f(x) = 4x \quad g'(x) = (x-1)^3$

$F(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4$

$F'(x) = \frac{4}{4}(x-1)^3 = (x-1)^3$

$$4x\cdot\frac{1}{4}(x-1)^4 - \int 4\cdot\frac{1}{4}(x-1)^4\,dx$$

$$x(x-1)^4 - 1\cdot\frac{1}{5}(x-1)^5 = \left[x(x-1)^4 - \frac{1}{5}(x-1)^5\right]_1^2$$

$$2(2-1)^4 - \frac{1}{5}(2-1)^5 - \left(1(1-1)^4 - \frac{1}{5}(1-1)^5\right)$$

$$2\cdot 1^4 - \frac{1}{5}\cdot 1^5 - 1\cdot 0^4 + \frac{1}{5}\cdot 0^2 = \frac{10}{5} - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

b)

$$\int x f'(x)\,dx = x f(x) - F(x) + C$$

$F'(x) = f(x)$

hvis $x f(x) - F(x) + C$ differentieres

Derfor fåes $(x f(x) - F(x) + C)' = 1\cdot f(x) + x\cdot f'(x) - F'(x) + 0$

$= f(x) - f(x) + x f'(x)$

$= 0 + x\cdot f'(x)$

$= x f'(x)$

Derfor er $\int x f'(x)\,dx = x f(x) - F(x) + C$

Opgave 3

a $f(x,y) = \ln(x^2y+1) - y$

$f(2,1) = \ln(2^2 \cdot 1 + 1) - 1 = \ln(5) - 1$

$e^{\ln(5)-1}$ → Man ganger e^x i hvert led
ln og e går ud i første led, og bliver
5. Dette efterlader os med en rest på
e^{-1}, som er det andet led. Derfor
$f(2,1) \; 5e^{-1} = \frac{5}{e}$

b $f_1'(x,y) = \frac{1}{x^2y+1} \cdot 2xy$ $\quad f_2' = \frac{1}{x^2y+1} \cdot x^2 - 1$

Hvis Foc er opfyldt e (1,0) et
kritisk punkt

$f_1'(1,0) = \frac{1}{1^2 \cdot 0 +} \cdot 0 = 0$ $\quad f_2'(1,0) = \frac{1}{1^2 \cdot 0 + 1} \cdot 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

Derfor er (1,0) et kritisk punkt.

b fortsat

$$f_1' = \frac{1}{x^2y+1} \cdot 2xy \qquad f_2' = \frac{1}{x^2y+1} \cdot x^2 - 1$$

$f_1' = 0$ $\qquad$ $f_2' = 0$

$y = 0$ $\qquad$ Jeg indsætter $y=0$

$$\frac{1}{x^2y+1} \cdot 2xy = 0 \qquad \frac{x^2}{x^2 \cdot 0 + 1} = 1$$

$$2xy = 0(x^2y+1)$$

$$x^2 = 1$$

$$y = \frac{0}{2x}$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$y = 0$$

$$x = 1 \lor x = -1$$

Derfor er der to kritiske punkter.
$(-1,0) \lor (1,0)$

d

$f_1' = (x^2y+1)^{-1} \cdot 2xy \qquad f_2' = (x^2y+1)^{-1} \cdot x^2 - 1$

$f_{11}'' = -(x^2y+1)^{-2} \cdot 2xy \cdot 2y = -\frac{4xy^2}{(x^2y+1)^2}$

$f_{22}'' = -(x^2y+1)^{-2} \cdot x^2 \cdot x^2 = -\frac{x^4}{(x^2y+1)^2}$

$f_{11}''(1,0) - \frac{4 \cdot 1 \cdot 0^2}{(1^2 \cdot 0+1)^2} = \frac{0}{1} = 0$

$f_{22}''(1,0) = -\frac{1^4}{(1^2 \cdot 0+1)^2} - \frac{1}{1} = -1$

$H(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} A = f_{11}'' \\ B = f_{12}'' = f_{21}'' \\ C = f_{22}'' \end{array}$

Vha. $AC - B^2$ bestemmes punktet $(1,0)$

$0 \cdot (-1) - 2^2 = -4 < 0$

$AC - B^2 < 0$ derfor er det et Sadelpunkt f

x^2 altid positiv $+1$ altid positiv

y må derfor ikke være negativ

y skal være $y \geq 0$

Derfor