Opgave H

Tabel 1: Simultane fordeling af mand og kvindes arbejdstid

		X_m :		
		0	20	40
	0	0.01	0.00	0.10
X_k :	20	0.02	0.06	0.20
	40	0.05	0.06	0.50

1)

	0	20	40	Sum
0	0.01	0.00	0.10	0.11
20	0.02	0.06	0.20	0.28
40	0.05	0.06	0.50	0.61
Sum	0.08	0.12	0.80	1

Herved fås de marginale fordelinger for hhv. mænd og kvinder

$$X_m(0) = 0.08$$
$$X_m(20) = 0.12$$
$$X_m(40) = 0.8$$
$$Sum = 0.08 + 0.12 + 0.8 = 1$$

og kvinder

$$X_k(0) = 0.11$$
$$X_k(20) = 0.28$$
$$X_k(40) = 0.61$$
$$Sum = 0.11 + 0.28 + 0.61 = 1$$

2)

Middelværdien findes vha. vægtet gns.

$$\mathbb{E}X_m = 0 \cdot 0.08 + 20 \cdot 0.12 + 40 \cdot 0.8 = 34{,}4$$
$$\mathbb{E}X_k = 0 \cdot 0.11 + 20 \cdot 0.28 + 40 \cdot 0.61 = 30$$

Var findes ved $\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}X^2$

$$Var(X_m) = 0^2 \cdot 0.08 + 20^2 \cdot 0.12 + 40^2 \cdot 0.8 = 1328 - 34.4^2 \approx 144{,}64$$
$$Var(X_k) = 0^2 \cdot 0.11 + 20^2 \cdot 0.28 + 40^2 \cdot 0.61 = 1088 - 30^2 = 188$$

Spredningen kan regnes til.

$$\sigma^2(X_m) = 144{,}64$$
$$\sigma(X_m) = \sqrt{144{,}64} \approx 12{,}02664$$
$$\sigma^2(X_k) = 188$$
$$\sigma(X_k) = \sqrt{188} \approx 13{,}71131$$

3)

Før korrelationen kan udledes, skal kovariansen findes.

$$Cov(X_m, X_k) = \mathbb{E}(X_m \cdot X_k) - \mathbb{E}(X_m) \cdot \mathbb{E}(X_k)$$
$$\mathbb{E}(X_m \cdot X_k) = (20 \cdot 20 \cdot 0.06) + (20 \cdot 40 \cdot 0.06) + (40 \cdot 20 \cdot 0.20) + (40 \cdot 40 \cdot 0.5)$$
$$= 1032$$
$$Cov(X_m, X_k) = 1032 - (34.4 \cdot 30) = 0$$

Kovarisen indsættes i formlen for korrelation.

$$Corr(X_m, X_k) = \frac{Cov(X_m, X_k)}{\sqrt{Var(X_m) \cdot Var(X_k)}}$$

Kovariansen er lig 0. Derfor er korrelationen mellem de to 0.

4)

Bruger formlen

$$P(X = x_i | X \in A) = \frac{p(x_i)}{P(X \in A)}$$

$$Betinget = \frac{Simultane}{Marginale}$$

$$P(0|0) = \frac{0.01}{0.08} = 0{,}125 = \frac{1}{8}$$

$$P(20|0) = \frac{0.00}{0.12} = 0$$

$$P(40|0) = \frac{0.10}{0.8} = 0{,}125 = \frac{1}{8}$$

$$P(0|20) = \frac{0.02}{0.08} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

$$P(20|20) = \frac{0.06}{0.12} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$$

$$P(40|20) = \frac{0.2}{0.8} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

$$P(0|40) = \frac{0.05}{0.08} = 0{,}625 = \frac{5}{8}$$

$$P(20|40) = \frac{0.06}{0.12} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$$

$$P(40|40) = \frac{0.5}{0.8} = 0{,}625 = \frac{5}{8}$$

5)

Da korrelationen er lig 0, er X_m og X_k uafhængige. X

6)

Vi opstiller den stokastiske variabel $\tilde{X} = \frac{X_k + X_m}{2}$

a)

Denne stokastiske variabel viser den gennemsnitlige arbejdstid for en hustand bestående af en mand og en kvinde.

b)

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_k + X_m}{2}\right) = \frac{\mathbb{E}(X_m) + \mathbb{E}(X_k)}{2} = \frac{34{,}4 + 30}{2} = 32{,}2$$

$$Var(aX_m + bX_k) = a^2 Var(X_m) + b^2 Var(X_k) + 2ab Cov(X_m, X_k)$$

$$Var\left(\frac{1}{2}X_m + \frac{1}{2}X_k\right) = \frac{1}{2}^2 Var(X_m) + \frac{1}{2}^2 Var(X_k) + 2 \cdot \frac{1}{2}^2 Cov(X_m, X_k)$$

$$Var\left(\frac{1}{2}X_m + \frac{1}{2}X_k\right) = \frac{1}{4}144{,}64 + \frac{1}{4}188 + \frac{2}{4} \cdot 0 = 83{,}16$$

$$\sigma^2 = 83.16$$

$$\sigma = \sqrt{83.16} \approx 9{,}11921 \approx 9{,}12$$