12. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Dagens program

- Gennemgang af aflevering
- Opsamling fra sidst – kapitel 8 (Solow med produktive eksternaliteter)
- Kort introduktion til kapitel 9 (Solow med R&D)
- Exc. 9.1, 9.3, 9.4, 9.5

- **HUSK, AT UNDERVISNINGEN ER AFLYST PÅ MANDAG – I STEDET SES VI ONSDAG D. 22. DECEMBER FRA 10-13**

Kommentarer til aflevering

- I er blevet gode!
- Husk at læse opgaven ordentligt – flere af jer springer halvdelen af nogle af opgaverne over – særligt hvis det er noget med intuition. Det er vigtigt til eksamen, at læser opgaverne ordentligt!
- Hvornår skal man vise INADA-betingelserne?
  - Ikke nødvendigt at vise INADA-betingelserne bare fordi man skal regne en SS-værdi!
  - Man skal vise dem, hvis man på en eller anden måde bliver bedt om at vise eller illustrere, at ***"modellen indebærer konvergens"*** mod et givent SS-punkt
  - Typisk i forbindelse med at man skal tegne et transitionsdiagram

- **Intuition intuition intuition! Øv det! Jeg kan ikke sige det nok gange, men det er altså her man henter de rigtig sjove point til eksamen ☺**

Endogen vækst

- Fælles for de udgaver af Solow-modellen vi har arbejdet med indtil nu er, **at vækst er opstået eksogent** - enten via stød til økonomien eller i form af teknologiske ændringer
- Vækstraten i de teknologiske ændringer g har ligeledes været eksogen indtil nu, dvs. **vi har ikke vist, hvor væksten kommer fra eller hvad der har skabt vækst**
- Vi kunne godt tænke os en model, der kan forklare den langsigtede vækst i BNP pr. arbejder
- Hvis vi ved hvor væksten kommer fra, kan vi analysere hvordan økonomisk politik kan påvirke de parametre, som påvirker den langsigtede vækst i BNP pr. arbejder

- Derfor introducerer kapitel 8 og 9 Solowmodeller med endogen vækst:
  - Kapitel 8: Ny viden kommer fra learning by doing
  - Kapitel 9: Ny viden kommer fra forskning

Kapitel 8: Learning by doing og produktive eksternaliteter

- Mange store opfindelser kommer ikke nødvendigvis fra målrettet forskning, men fra praktikere og håndværkere der på baggrund af deres erfaring og virke får gode idéer
- Vi **antager** derfor, at **viden kommer fra at arbejde:** $\boldsymbol{A_t = K_t^{ø}}$**,** hvor ø måler, i hvor høj grad kapital påvirker viden.
- **Produktive eksternaliteter**: Vi antager med denne antagelse implicit, at en stigning i aggregeret kapital kommer alle virksomheder til gode: Hvis mængden af kapital øges i en virksomhed, øges produktiviteten også i de andre virksomheder – også selvom de ikke har øget deres niveau af kapital (viden er et ikke rivaliserende gode og diffunderer mellem virksomheder)

- Vi skelner mellem to tilfælde: Endogen og semi-endogen vækst

1) Endogen vækst: $ø = 1 \Rightarrow Y_t = K_t L_t^{1-a}$. Eksternaliteten er så kraftig, at marginalproduktet af kapital er konstant.

2) Semi-endogen vækst: $ø < 1 \Rightarrow Y_t = K_t^{a+(1-a)ø} L_t^{1-a}, a + (1-a) < 1$. Eksternaliteten er ikke lige så kraftig, og vi har stadig faldende marginalprodukt til kapital. Semi-endogen, fordi væksten i SS også afhænger af befolkningsvæksten n>0, for at modvirke faldende marginalprodukt.

Bemærk, at analyse og resultat forskellig for de to tilfælde!

Kapitel 9: Vækst fra forskning og udvikling

- Vækst er endogen, denne gang ikke som følge af produktive eksternaliteter, men grundet målrettet forskning, som øger det teknologiske niveau A_t.
- Der er en konstant og eksogen andel af befolkningen, s_R beskæftiget i forskningssektoren: $L_{At} = s_R L_t$
- Økonomien har derfor også to former for output, hhv. almindelige goder/varer $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_{Yt})^{1-\alpha}$ og ny teknologi A_t
- Forøgelser i teknologi sker nu ved $A_{t+1} - A_t = \rho A_t^{\phi} L_{At}^{\lambda}$
- Bemærk, at A_t indgår på begge sider → eksisterende teknologi indgår altså i fremstillingen af ny teknologi.

Kapitel 9: Vækst fra forskning og udvikling

- Akkumulation af viden: $A_{t+1} - A_t = \rho A_t^{\phi} L_{At}^{\lambda}$ - hvordan skal vi fortolke vores parametre?
  - $\boldsymbol{\phi}$ siger noget om, i hvilken grad eksisterende teknologi (idéer) bidrager til fremstillingen af ny teknologi (idéer). Der relaterer sig to effekter til $\boldsymbol{\phi}$:
    - **Standing on shoulders** (høj ø): Idéer avler nye idéer og nye problemer der skal have løsninger
    - **Fishing out** (lille ø): Desto flere ting der bliver opfundet, desto sværere bliver det at finde på nye opfindelser.
  - **Stepping on toes**: en effekt der relaterer sig til λ. Hver forsker L_{At} bidrager med et antal idéer – men desto flere forskere, desto større er sandsynligheden for, at to forskere får den præcis samme idé
  - Vi antager $0 < \phi \leq 1$ og $\lambda < 1$

Vækstraten i teknologi er givet ved $g_t = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho A_t^{\phi - 1} L_{At}^{\lambda} = \rho A_t^{\phi - 1} (s_R L_t)^{\lambda}$

Kapitel 9: Den samlede model

THE COMPLETE R&D-BASED GROWTH MODEL

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_{Yt})^{1-\alpha}, \quad (5)$$

$$A_{t+1} - A_t = \rho A_t^{\phi} L_{At}^{\lambda}, \qquad A_0 > 0 \text{ given} \quad (6)$$

$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t, \qquad K_0 > 0 \text{ given} \quad (7)$$

$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 > 0 \text{ given} \quad (8)$$

$$L_{Yt} + L_{At} = L_t \quad (9)$$

$$L_{At} = s_R L_t. \quad (10)$$

Exercise 9.1 - Rivaliserende og/eller eksluderbare goder

- I PDF'en er der en lang liste over forskellige slags goder
- Diskutér med jeres sidemakker eller i mindre grupper, i hvilken kasse i boksen til højre, de forskellige goder hører til.
- Find selv på 5 ting mere, og placer dem.

DEGREE OF RIVALRY

DEGREE OF EXCLUDABILITY	RIVAL	NON-RIVAL
FULLY EXCLUDABLE (OR CLOSE)	Potatoes, bread, beers	Passage of a bridge
INTERMEDIATELY EXCLUDABLE	Fish in the sea? (think of quotas, etc.)	Computer code for spreadsheet
NON-EXCLUDABLE (OR CLOSE)	Fish in the sea	Fresh air, national defence

Exercise 9.3 - Goden-rule i modellen med semi-endogen vækst

1) Find de golden rule værdier for hhv. s og s_R, der maksimerer output pr. arbejder

Hints:

- Tag udgangspunkt i $c_t = (1-s)y_t$ og indsæt ligning (21) fra bogen (y_t^*)
- Tag ln og differentier med hhv. s og s_R og isolér

2) Beskriv (med ord), hvordan s_R påvirker niveauet af y_t^* hhv. positivt og negativt

Hints:

- Kig på ligning (5)-(10) i kapitlet

Exercise 9.3 - Goden-rule i modellen med semi-endogen vækst

2) Beskriv (med ord), hvordan s_R påvirker niveauet af y_t^* hhv. positivt og negativt

Intuition:

- **Andelen af forskere,** s_R, påvirker vækststien for y_t^* gennem to modsatrettede effekter
- **Positivt:** En højere andel forskere fører alt andet lige til et højere teknologisk niveau A_t, hvilket påvirker output positivt og dermed vil trække y_t^* mod et højere niveau
- **Negativt:** Hvis en høj andel af de beskæftigede arbejder inden for R&D betyder det, at der er færre tilbage til at producere andre varer og goder, hvilket trækker ned i det samlede output, og dermed også niveauet for y_t^*

Exercise 9.3 - Goden-rule i modellen med semi-endogen vækst

2) Bestem golden rule andelen for investeringerne i R&D, s_R, hvis vi antager at $n = 1\%$ pr. år og $g_{se} = 2\%$ pr. år. Sammenlign med de faktiske R&D-investeringsandele fra bogen. Over- eller underinvesterer vi i R&D iflg. modellen?

Hints:

- Tag udgangspunkt i udtrykket $g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1$, og indsæt parameterværdierne. Bestem et estimat for $\frac{\lambda}{1-\phi}$, ved at tage ln og isolere $\frac{\lambda}{1-\phi}$
- Omskriv resultatet fra vores golden rule fra før, så $s_R = \frac{\frac{\lambda}{1-\phi}}{1+\frac{\lambda}{1-\phi}}$
- Indsæt estimatet for $\frac{\lambda}{1-\phi}$ i udtrykket for s_R

Exercise 9.4 – Skalaeffekter i en kapitel 9 model

- Kapitel 9 modellen med endogen vækst $\phi = 1$ har været kritiseret for den implicerede skala-effekt: et stigende input fra arbejdskraft (dvs. befolkningsvækst $n > 0$), medfører iflg. Modellens specifikationer evigt voksende teknologiske såvel som økonomiske vækstrater. Dette er ikke plausibelt rent empirisk!
- Betragter man i stedet kapitel 9 modellen med semi-endogen vækst $0 < \phi < 1$, har vi ikke samme implikationer af befolkningsvækst. I en model med semi-endogen vækst er $n > 0$ blot medvirkende til at sikre positiv og konstant vækst i modellen.

1) Forklar intuitivt, hvorfor befolkningsvækst ikke har de same implikationer i en model med semi-endogen vækst, som i en model med endogen vækst

2) Den semi-endogene vækstmodel kan i stedet siges at indeholde en skalaeffekt, men på niveauer frem for på vækstrater: dvs. at en højere befolkningsvækst leder til et højere niveau af BNP pr. arbejder i SS. **Forklar ud fra ligning (21) og (22) i kapitlet, hvad intuitionen bag denne skalaeffekt er**

Exercise 9.4 – Skalaeffekter i en kapitel 9 model

Forklar intuitivt, hvorfor befolkningsvækst ikke har de same implikationer i en model med semi-endogen vækst, som i en model med endogen vækst

INTUITION

- Vi betragter modellen med semi-endogen vækst, hvor $0 < \phi < 1$ og $n > 0$. De teknologiske og økonomiske vækstrater, g_t og g_t^Y er konstante og positive på langt sigt.
- Når $\phi < 1$ (tilpas meget mindre end 1) vil "the fishing-out effect", dvs. at det gradvist bliver sværere at opfinde/opdage nye ting/teknologi, være stærk nok til, at holde den teknologiske vækstrate i skak – også på trods af befolkningsvækst og dermed på langt sigt også vækstraten i BNP pr. arbejder.

- Ligning (21) og (22) viser, at en stor initial arbejdsstyrke, L_0, medfører en højere vækstbane for y_t^* i SS: større arbejdsstyrke fører altså til et højere niveau af indkomst pr. arbejder på den lange bane.
- Intuitionen for denne niveau-skala-effekt er, at en større arbejdsstyrke for en given andel ansat i R&D medfører et flere ansatte i R&D-sektoren. Det betyder, at det teknologiske niveau stiger.
- Bemærk, at denne skalaeffekt kun eksisterer i vores modeller med semi-endogen vækst!
- Man kan diskutere, om denne skala-effekt er plausibel – men den er mere plausibel end scenariet i modellen med strikt endogen vækst

Exercise 9.5 – Den kvantitative effekt af en permanent stigning i ρ

Betragt et scenarie hvor økonomien befinder sig i SS, og der pludselig sker et stød til produktivitetsparameteren ρ, der stiger permanent til et nyt højere niveau, ρ'.

Vi ser delvist bort fra perioderne indtil stødet, og betragter i stedet følgende perioder: Periode 0 = SS, Periode 1=SS, men stød rammer. Periode 2 = Stødet har ramt, på vej mod ny SS.

1) Vis, at den teknologiske vækstrate fra periode 1 (hvor stødet sker) til periode 2 er givet ved

$$g_1 = \frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{\rho'}{\rho} g_{se}$$

Hint 1: Tag udgangspunkt i $g_t = \rho A_t^{\phi-1}(s_R L_t)^{\lambda}$ og skriv den op for g_1 og g_0, og bestem g_1/g_0

Hint 2: Husk, at $A_1 = A_0(1+g_0)$ og $L_1 = L_0(1+n)$

Hint 3: Udnyt til sidst, at vi er i SS i periode 0, dvs. $g_0 = g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1$

Exercise 9.5 – Den kvantitative effekt af en permanent stigning i ρ

2) Vis i et transitionsdiagram, hvordan g_t udvikler sig over tid og hvordan diagrammet påvirkes af ændringen i ρ

Hint 1: Betragt (transitions)ligningen for g: $g_{t+1} = (1+n)^{\lambda} g_t (1+g_t)^{ø-1}$

Hint 2: Bemærk at kurven ikke flytter sig – men der sker noget alligevel! Brug evt. figur 9.4 til inspiration

3) Ændrer den langsigtede vækstrate for y_t^* sig, som følge af parameterændringen? Hvad er de langsigtede effekter på output og forbrug pr. arbejder som følge af parameterændringen?

Hint: Den langsigtede vækstrate i BNP pr. arbejder er givet ved g_{se}, som givet på forrige slide – kig desuden på (21) som vi brugte i 9.4

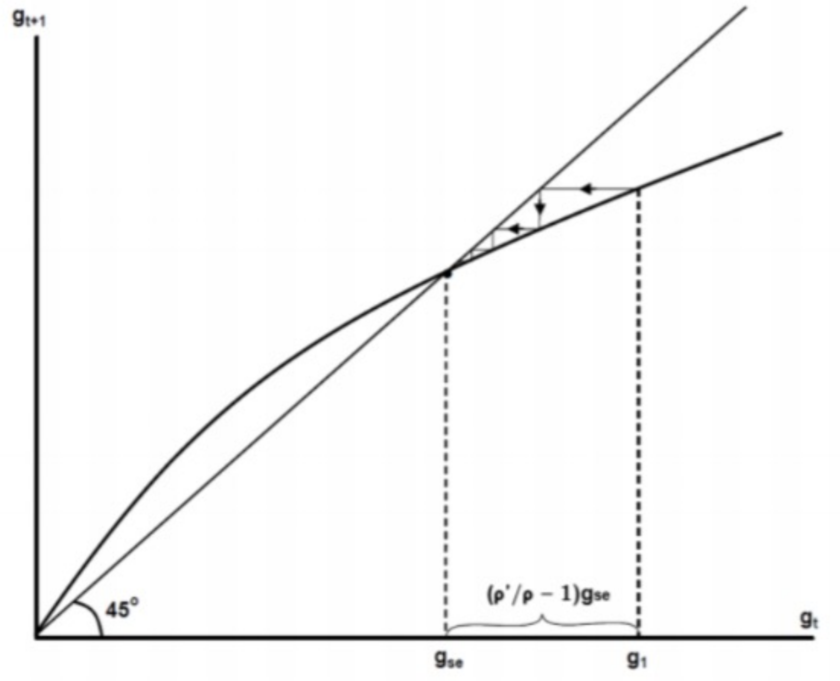
4) Hvad er den langsigtede effekt på vækstraten i BNP pr. arbejder af en permanent stigning i ρ, hvis vi betragter en model med **endogen vækst,** dvs. ø=1, n=0?

Hint: Vækstraten er givet ved $g_t = \rho(s_R L)^{\lambda} = g_e$ i modellen med endogen vækst

Exercise 9.5 – Den kvantitative effekt af en permanent stigning i ρ

INTUITION

- En stigning i ρ til ρ' medfører et hop i den teknologiske vækstrate fra g_{se} til g_1
- Imidlertid fører stigning ikke til en ændring af vækstraten i SS, idet den er uafhængig af ρ og kun afhænger af befolkningsvæksten
- Derfor vil vækstraten efter stødet konvergere tilbage til gen generelle vækstrate, fordi $fishing - out$ effekten udtynder den forøgede produktivitet inden for R&D



Exercise 9.5 – Den kvantitative effekt af en permanent stigning i ρ

INTUITION

- g_{se}, den fælles langsigtede vækstrate for y_t og k_t påvirkes ikke af stigningen i ρ
- Imidlertid medfører stigningen i ρ en højere vækstbane for BNP pr. arbejder og dermed et højere niveau i SS for y_t^*. Dette er blot en effekt af en stigning i det teknologiske niveau A_t, som følge af at der er flere mennesker beskæftiget inden for R&D.
- Stigningen i y_t^* medfører også en stigning i forbruget, som er givet ved $c_t^* = (1-s)y_t^*$
- I forhold til modellen med streng endogen vækst, er den langsigtede vækstrate givet ved $g_t = g_e = \rho(s_R L)^\wedge\lambda$ og er dermed konstant. En permanent stigning i ρ vil derfor føre til en højere vækstrate for BNP pr. capita på langt sigt.

Tak for i dag!

HUSK HJEMMEOPGAVE 8 I NÆSTE UGE

11. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

Dagens program

- Endogen vækst
- Kort introduktion til kapitel 8 – Solow med produktive eksternaliteter
- Exc. 8.2 og 8.3

- Kort introduktion til kapitel 9 – Solow med R&D
- Exc. 9.1

- **HUSK AT AFLEVERE SEMESTERETS SIDSTE (!!!) HJEMMEOPGAVE I NÆSTE UGE**

Endogen vækst

- Fælles for de udgaver af Solow-modellen vi har arbejdet med indtil nu er, **at vækst er opstået eksogent** - enten via stød til økonomien eller i form af teknologiske ændringer
- Vækstraten i de teknologiske ændringer g har ligeledes været eksogen indtil nu, dvs**. vi har ikke vist, hvor væksten kommer fra eller hvad der har skabt vækst**
- Vi kunne godt tænke os en model, der kan forklare den langsigtede vækst i BNP pr. arbejder
- Hvis vi ved hvor væksten kommer fra, kan vi analysere hvordan økonomisk politik kan påvirke de parametre, som påvirker den langsigtede vækst i BNP pr. arbejder

- Derfor introducerer kapitel 8 og 9 Solowmodeller med endogen vækst:
  - Kapitel 8: Ny viden kommer fra learning by doing
  - Kapitel 9: Ny viden kommer fra forskning

Kapitel 8: Learning by doing og produktive eksternaliteter

- Mange store opfindelser kommer ikke nødvendigvis fra målrettet forskning, men fra praktikere og håndværkere der på baggrund af deres erfaring og virke får gode idéer
- Vi **antager** derfor, at **viden kommer fra at arbejde: $A_t = K_t^{ø}$,** hvor ø måler, i hvor høj grad kapital påvirker viden.
- **Produktive eksternaliteter**: Vi antager med denne antagelse implicit, at en stigning i aggregeret kapital kommer alle virksomheder til gode: Hvis mængden af kapital øges i en virksomhed, øges produktiviteten også i de andre virksomheder – også selvom de ikke har øget deres niveau af kapital (viden er et ikke rivaliserende gode og diffunderer mellem virksomheder)

- Vi skelner mellem to tilfælde: Endogen og semi-endogen vækst

1) **Endogen vækst**: $ø = 1 \Rightarrow Y_t = K_t L_t^{1-a}$. Eksternaliteten er så kraftig, at marginalproduktet af kapital er konstant.

2) **Semi-endogen vækst:** $ø < 1 \Rightarrow Y_t = K_t^{a+(1-a)ø} L_t^{1-a}, a + (1-a) < 1$. Eksternaliteten er ikke lige så kraftig, og vi har stadig faldende marginalprodukt til kapital. Semi-endogen, fordi væksten i SS også afhænger af befolkningsvæksten n>0, for at modvirke faldende marginalprodukt.

Bemærk, at analyse og resultat forskellig for de to tilfælde!

Kapitel 8: Den samlede (generelle) model

THE COMPLETE GROWTH MODEL BASED ON PRODUCTIVE EXTERNALITIES

$$Y_t = (K_t)^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}, \tag{6}$$

$$A_t = K_t^\phi, \tag{7}$$

$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t, \qquad K_0 \text{ given} \tag{8}$$

$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ given} \tag{9}$$

Semi-endogen vækst ($\phi < 1$)

Transitionsligning:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{1+n}\tilde{k}_t\left[s\tilde{k}_t^{\alpha-1} + (1-\delta)k_t\right]^{1-\phi} = \frac{1}{1+n}\left[s\tilde{k}_t^{\frac{\alpha+\phi-\alpha\phi}{1-\phi}} + (1-\delta)\tilde{k}_t^{\frac{1}{1-\phi}}\right]^{1-\phi}$$

SS-værdier:

$$\tilde{k}_t = \tilde{k}^* = \left(\frac{s}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha = \left(\frac{s}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Endogen vækst ($\phi = 1$, AK-modellen)

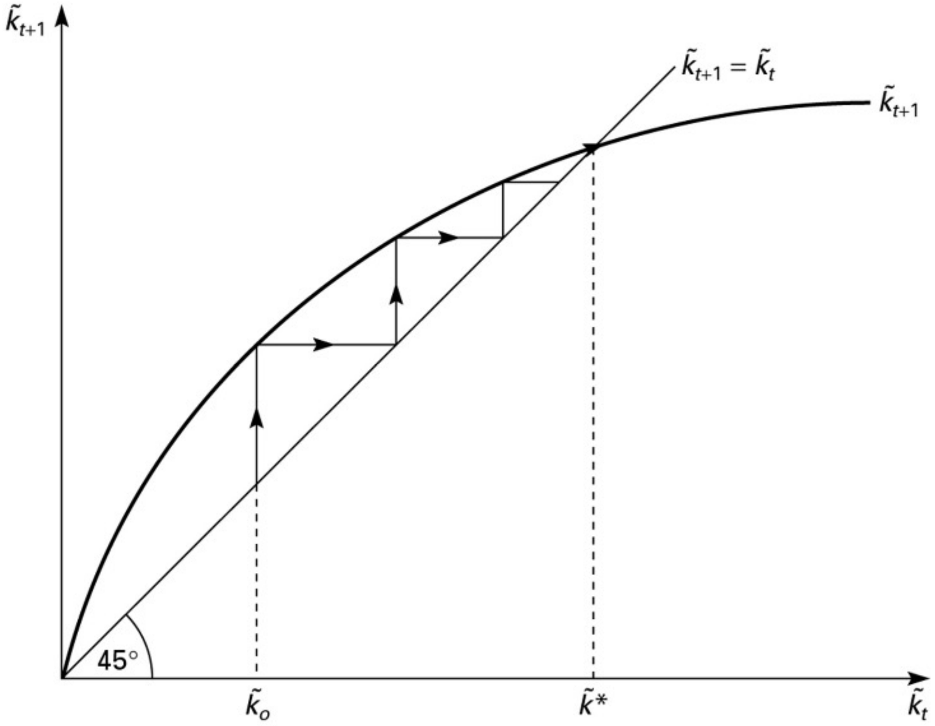
Transitionsligning (i udgangspunktet):

$$k_{t+1} = (sA_t + 1 - \delta)k_t$$

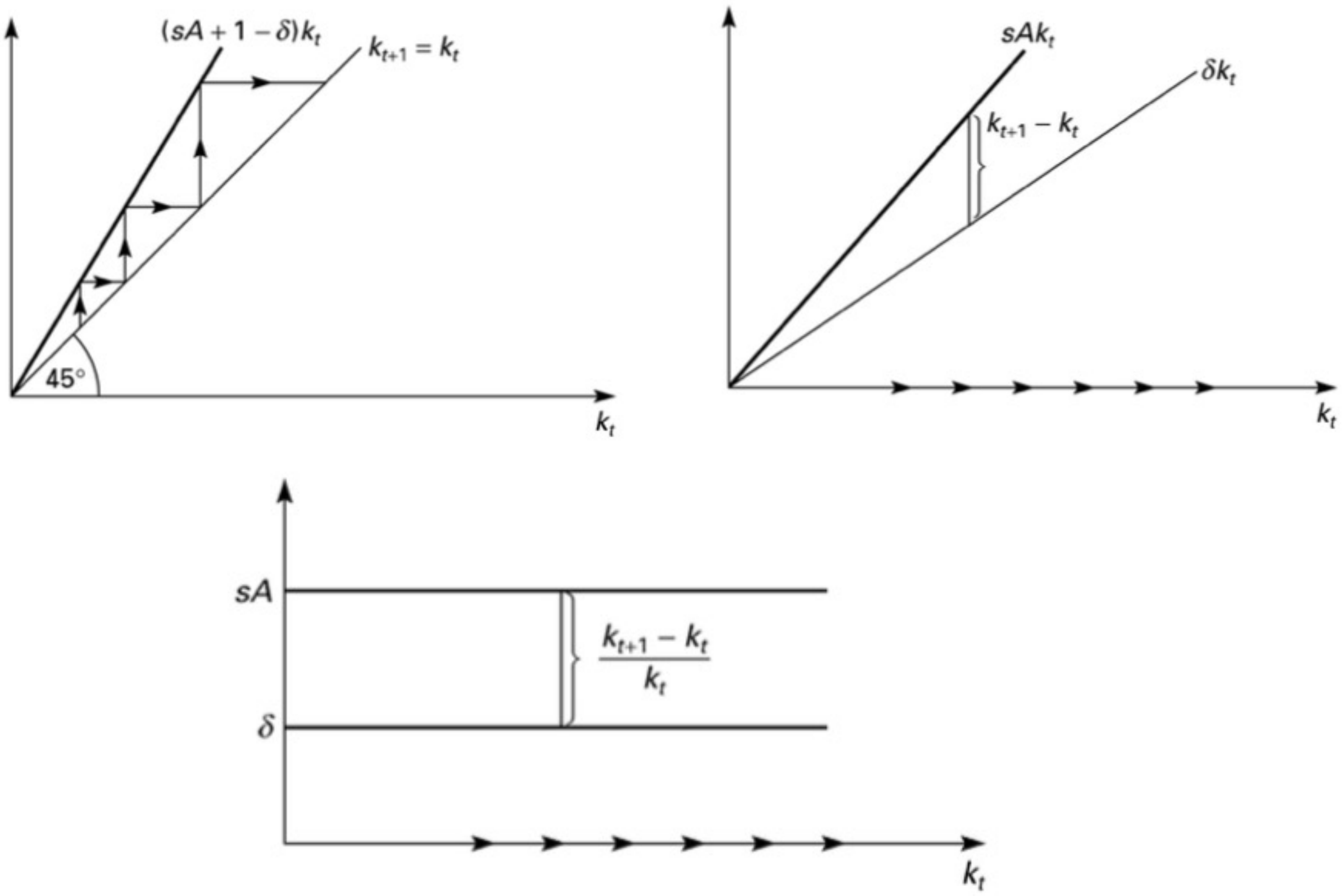
Ingen SS værdier, fordi vi ikke har nogen konvergens!

Transitionsdiagram for semi-endogen vækst

Figure 8.1 The transition diagram of the model of semi-endogenous growth



Diagrammer for endogen vækst



Exc. 8.2: Produktive eksternaliteter og konvergenshastighed

Vi kan ud fra transitionsligningen bestemme konvergenshastigheden for et land, når det er på sin langsigtede vækstbane mod SS. Det gøres ved at linearisere transitionsligningen i SS og skrive den på generisk form.

Den lineære approksimation for dette kapitel givet ved $\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda(\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t)$, hvor $\lambda = 1 - G'(\tilde{k}^*)$.

1) Forklar, på hvilken måde $\boldsymbol{\lambda}$ er et udtryk for konvergenshastigheden for $\tilde{y}_t$, og vis, at du selv kan komme frem til dette resultat.

Hint: Husk, at det må være modellen for semi-endogen vækst vi betragter ($\phi < 1$), idet der ikke er konvergens i modellen med endogen vækst ($\phi = 1$).

Hint: Fremgangsmåden ift. linearisering er identisk med fremgangsmåden i kapitel 5, sektion 4 (s. 25-26 i PDF'en)

2) Vis, at konvergenshastigheden er givet ved $\lambda = (1-\alpha)(1-\phi)\frac{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}} = (1-\alpha)(1-\phi)\left[1 - \frac{(1-\delta)}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}}\right]$

3) Vis, at for $\phi = 0$ er konvergenshastigheden den samme som i kapitel 5, og at for $\phi \to 1$ går $\lambda \to 0$. Forklar intuitivt, hvorfor stort ϕ implicerer langsom konvergens.

Hint: Konvergenshastigheden i kapitel 5 givet ved $\lambda \equiv 1 - G'(\tilde{k}^*) \approx (1-\alpha)(n+\delta)$, for $g = 0$

Exc. 8.2: Produktive eksternaliteter og konvergenshastighed

1) Forklar, på hvilken måde $\boldsymbol{\lambda}$ er et udtryk for konvergenshastigheden for $\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{t}}$

Intuition:

- Jf. udtrykket er λ den relative andel af det tilbageværende "gap" (afstand fra periode t til y*), der tilbagelægges mellem periode t og t+1.
- Derfor kan det ses som et udtryk for den hastighed, som $\tilde{y}_t$ konvergerer med mod $\tilde{y}^*$

3) Vis, at for $\phi = 0$ er konvergenshastigheden den samme som i kapitel 5, og at for $\phi \rightarrow 1$ går $\lambda \rightarrow 0$. Forklar intuitivt, hvorfor stort ϕ implicerer langsom konvergens.

Intuition:

- $\phi = 0$: Den produktive eksternalitet elimineres, og modellen reduceres til den generelle solow model for $g = 0$, dvs. den basale solow model (kapitel 3)
- $\phi \rightarrow 1$: Når $\phi \rightarrow 1$, går leddet $(1 - \phi)$ i det generelle udtryk mod nul. Det implicerer, at eksponenten $\frac{1}{1-\phi} \rightarrow \infty$, hvorved $\lambda \rightarrow 0$
- Et stort ϕ kan fortolkes som en større gennemslagskraft fra den produktive eksternalitet, hvilket reducerer det aftagende marginalprodukt til K_t og k_t. Aftagende marginalprodukt er det der fører til konvergens. Hvis $\phi = 1$ er den produktive ekstenalitet stærk nok til at eliminere det aftagende marginalprodukt, og der vil ikke længere være konvergens i modellen (endogen vækst i stedet for semi-endogen vækst)

Exc. 8.3: Produktive eksternaliteter fra K_t/L_t i stedet for K_t

- I kapitlet argumenteres der for, at man ved at modellere den produktive eksternalitet som $A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\phi$ i stedet for $A_t = K_t^\phi$, som vi ellers gør igennem kapitlet.
- Afhængigt af hvordan vi modellerer den produktive eksternalitet kan vi opnå aftagende skala-afkast, og derigennem konvergens (det er godt!)

1) Opstil argumenter for at bruge hhv. $A_t = K_t^\phi$ og $A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\phi$. Diskuter, hvilken definition du finder mest plausibel.

Hint: Kommer learning by doing fra den samlede mængde kapital eller kapital pr. arbejder? Får vi mere ud af kapitalen, hvis vi har meget kapital pr. arbejder?

Exc. 8.3: Produktive eksternaliteter fra K_t/L_t i stedet for K_t

1) Diskuter argumenter for at bruge hhv. $A_t = K_t^{\phi}$ og $A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi}$ og overvej, hvilken definition du finder mest plausibel.

Hint: Kommer learning by doing fra den samlede mængde kapital eller kapital pr. arbejder? Får vi mere ud af kapitalen, hvis vi har meget kapital pr. arbejder?

Intuition:

- I kapitlet refererer de til det, som de kalder **"the learning effect",** der taler for $A_t = K_t^{\phi}$. **The learning effect** er en tilsiger at det ikke nødvendigvis kræver en maskine til hver person, men at man godt kan lære at bruge en maskine, fx en computer, og blive bedre, selvom man deler det med andre.
- Omvendt kan man argumentere for, at man lærer bedre og hurtigere, hvis man ikke er så mange om at dele den samme computer/maskine. Dette taler for $A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi}$.
- Intet rigtigt eller forkert, men overvejelser om hvad der er vigtigst: at have adgang til en computer eller at have sin egen computer.

Exc. 8.3: Produktive eksternaliteter fra K_t/L_t i stedet for K_t

2a) Vis, at $\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\phi}}{(1+n)^{\phi}}$, når vi bruger definitionen $A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi}$

Hint: Tag udgangspunkt i modellens ligninger og definitioner. Brug dem til at opskrive A_{t+1}, og divider derefter med A_t

2b) Vis desuden, at transitionsligningen nu er givet ved $\tilde{k}_{t+1} = \left(\frac{1}{1+n}\right)^{1-\phi} \tilde{k}_t\left[s\tilde{k}_t^{\alpha-1} + (1-\delta)k_t\right]^{1-\phi}$.

Hint 2: Start fra $\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{K_t}}{\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t}}$ og brug udtrykket fra 2a samt definitionen af L_{t+1} fra modellens definitioner

Exc. 8.3: Produktive eksternaliteter fra K_t/L_t i stedet for K_t

3a) Find SS værdier for $\tilde{k}^*$ og $\tilde{y}^*$

Hint: Udnyt, at $\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t$ i SS, og at $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$ (gælder også i SS)

3b) Vis, at vækstraten i A_t, $\tilde{k}^*$ og $\tilde{y}^*$ er den samme og vis, at den er lig 0 – også hvis $n > 0$.

Hint: Det er ikke nødvendigt at tage log i denne opgave! I stedet kan vi være lidt kreative.

- Brug udtrykket $\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \left(\frac{1}{1+n}\right)^{1-\phi}\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{1-\phi}$ og husk, at der ikke er nogen vækst i tilde-variable i SS. Hvad må der om $\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t}$?
- Brug ovenstående til at finde et udtryk for $\frac{K_{t+1}}{K_t}$, som vi kan indsætte i det udtryk for $\frac{A_{t+1}}{A_t}$ som vi udledte på forrige slide i 2a.
- Som argument for, at væksten er lig 0 i SS uafhængigt af n, kig på definitionerne af $\tilde{k}_t = \frac{k_t}{A_t}$ og $\tilde{y}_t = \frac{y_t}{A_t}$. Hvad må der gælde om k_t og y_t?

Exc. 8.3: Produktive eksternaliteter fra K_t/L_t i stedet for K_t

3a) Find SS værdier for $\tilde{k}^*$ og $\tilde{y}^*$

LØSNING

Finder st. st. værdi for $\tilde{k}^*$ ved $\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t = \tilde{k}^*$

Lettest at tage udgangspunkt i næst-sidste step!

$$1 = \left(\frac{1}{1+n}\right)^{1-\varphi} \left(s(\tilde{k}^*)^{\alpha-1} + (1-\delta)\right)^{1-\varphi} \Leftrightarrow$$

$$1+n = s(\tilde{k}^*)^{\alpha-1} + (1-\delta) \Leftrightarrow$$

$$1+n-(1-\delta) = s\tilde{k}^{*\,\alpha-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n+\delta}{s} = (\tilde{k}^*)^{\alpha-1} \Leftrightarrow \tilde{k}^* = \left(\frac{n+\delta}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha-1} = \frac{1}{-(1-\alpha)}} = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Indsætter i $\tilde{y}^* = (k^*)^{\alpha} = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Exc. 8.3: Produktive eksternaliteter fra K_t/L_t i stedet for K_t

3b) Vis, at vækstraten i A_t, k_t og y_t er den samme og vis, at den er lig 0 – også hvis $n > 0$.

LØSNING:

- Hvis vi : $\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \left(\frac{1}{1+n}\right)^{1-\phi}\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{1-\phi} \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{1+n}\right)^{1-\phi}\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{1-\phi} \Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 + n$
- Det kan vi indsætte i vores udtryk for $\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\phi}}{(1+n)^{\phi}} = \frac{(1+n)^{\phi}}{(1+n)^{\phi}} = 1$ => dermed ingen vækst i A_t
- Herfra kan vi argumentere for, at væksten må være 0 i $\widetilde{k^*}_t = \frac{k_t}{A_t}$ og $\widetilde{y^*}_t = \frac{y_t}{A_t}$; begge udtryk er konstante i SS, ergo må k_t og y_t vokse med samme rate som A_t, dvs. 0

Exc. 8.3: Produktive eksternaliteter fra K_t/L_t i stedet for K_t

4a) Vis, at den aggregerede produktionsfunktion for modellen med den nye definition af $A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi}$ er givet ved $K_t^{\alpha+\phi(1-\alpha)} L_t^{(1-\phi)(1-\alpha)}$

Hint: Tag udgangspunkt i ligning (6) og indsæt $A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi}$

4b) Er arbejdskraft uproduktivt på det aggregerede niveau? Er der forskel på for $\phi = 1$ og $\phi < 1$?

4c) Hvorfor er der ikke positiv, semi-endogen vækst i modellen?

Exc. 8.3: Produktive eksternaliteter fra K_t/L_t i stedet for K_t

4a) Vis, at den aggregerede produktionsfunktion for modellen med den nye definition af $A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi}$ er givet ved $K_t^{\alpha+\phi(1-\alpha)} L_t^{(1-\phi)(1-\alpha)}$

4b) Er arbejdskraft uproduktivt på det aggregerede niveau? Er der forske på for $\phi = 1$ og $\phi < 1$?

4c) Hvorfor er der ikke positiv, semi-endogen vækst i modellen?

Intuition:

- Arbejdskraft er produktiv på aggregeret niveau, når $\phi < 1$ – ikke når $\phi = 1$.
- Imidlertid udviser den aggregerede produktionsfunktion i vores nuværende form konstante afkast til K_t og L_t til sammen (fordi $\alpha + \phi(1-\alpha) + (1-\alpha)(1-\phi) = 1$
- Stigende afkast til kapital og arbejdskraft i den aggregerede produktionsfunktion er fundamentet for semi-endogen vækst.
- Fordi vi ikke har aftagende skala-afkast til modellen, har vi heller ikke semi-endogen vækst i denne model.

Exc. 8.3: Produktive eksternaliteter fra K_t/L_t i stedet for K_t

Givet vores konklusion på forrige slide, kan man komme til at lave den konklusion, at størrelsen af ϕ er irrelevant, når modellen alligevel ikke udviser (semi)endogen vækst i SS.

Det er dog en misforståelse. Størrelsen af ϕ er måske irrelevant i SS, men den er relevant for vores SS-niveauer og konvergensprocessen frem mod SS.

5) Vis, at de niveauet af kapital pr. indbygger og BNP pr. indbygger er konstant i SS og at de er givet ved

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)(1-\phi)}} \text{ og } y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\phi(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\phi)}}$$

Hint:

- Brug, SS-værdierne for $\tilde{k}^*$ som vi fandt tidligere, og udnyt at at $k_t = \tilde{k}_t A_t$ og at $A_t = k_t^{\phi}$, dvs. opstil $k^* = \tilde{k}^* k^{*\phi}$
- Husk at $y_t = k_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}$, når I skal finde SS-værdien for y^*

Exc. 8.3: Produktive eksternaliteter fra K_t/L_t i stedet for K_t

måske irrelevant i SS, men den er relevant for vores SS-niveauer og konvergensprocessen frem mod SS.

5) Vis, at de niveauet af kapital pr. indbygger og BNP pr. indbygger er konstant i SS og at de er givet ved $k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)(1-\phi)}}$ og $y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\phi(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\phi)}}$

LØSNING

Vis, at $k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)(1-\varphi)}}$ $\quad y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\varphi(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\varphi)}}$

pr. capita produktionsfunktion: $y_t = k_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}$, $A_t = k_t^{\varphi}$

$$y_t = k_t^{\alpha}(k_t^{\varphi})^{1-\alpha} \Rightarrow y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\varphi)}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\varphi(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\varphi)}}$$

$$= \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\varphi(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\varphi)}}$$

$$k_t = \tilde{k}_t A_t = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} k_t^{\varphi} \Leftrightarrow k_t^{1-\varphi} = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)(1-\varphi)}}$$

Tak for i dag!

HUSK HJEMMEOPGAVE 8 I NÆSTE UGE

10. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Dagens program

- Evaluering + sidste undervisningsgang
- Gennemgang af hjemmeopgave 6
- Exercise 4.5
- Exercise 4.6

- **HUSK AT AFLEVERE HJEMMEOPGAVE 7 I NÆSTE UGE**

Evaluering + sidste undervisningsgang og spørgetime

- Hvis man ikke har udfyldt evaluering endnu, får man 5 minutter til det nu ☺

- Bagefter har jeg har to korte spørgsmål til jer
- I skal derfor gå ind på https://www.socrative.com og find rummet "KUMAKRO1". Det tager 2 sekunder.

Husk, at jeg kan se, hvorvidt man svarer eller ej!

Hjemmeopgave 6 – Generel feedback

- Generelt gode opgaver! Det er småtingene vi skal justere på nu, så I får dem helt på plads inden eksamen!
- Husk at læse opgaven ordentligt – især når I sidder til eksamen og har travlt! Mange af jer springer dele af opgaverne over ☹
- Husk at angive jeres resultater klart og tydeligt, eksempelvis med to streger under, eller at tilføje en sætning under sidste udregning med et "hermed vist", så man ikke skal lede efter jeres resultater. Det viser noget overskud og at I har et overblik.
- Husk, notationen: SS-værdier angives med en * (eksempelvis z*) – det er en lille detalje, men det er vigtigt at huske!

- Hvis man til eksamen ligger mellem to karakterer, er det de små ting der afgør det. Til eksamen går I mega travlt, så det er en rigtig god idé at øve de her ting allerede nu, så de gode vaner sidder på rygraden allerede nu.

Hjemmeopgave 6

2.1 Show that the production function exhibits constant returns to scale to the four inputs capital, labour, land and energy. Give an argument why this is plausible.

Mine kommentarer:
- Det er **replikationsargumentet** de fisker efter her, ift. argumentet om hvorfor det er plausibelt.
- Flere nævner, at det på sigt nok er urealistisk at man kan blive ved med at fordoble input, når vi har en model med land og olie. Super god pointe!

2.3 Show that along a balanced growth path, g_t^y must be approximately a constant g^y (without subscript t) and that:

$$g^y \approx \frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon} g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon} n - \frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon} (n + s_E) . \tag{9}$$

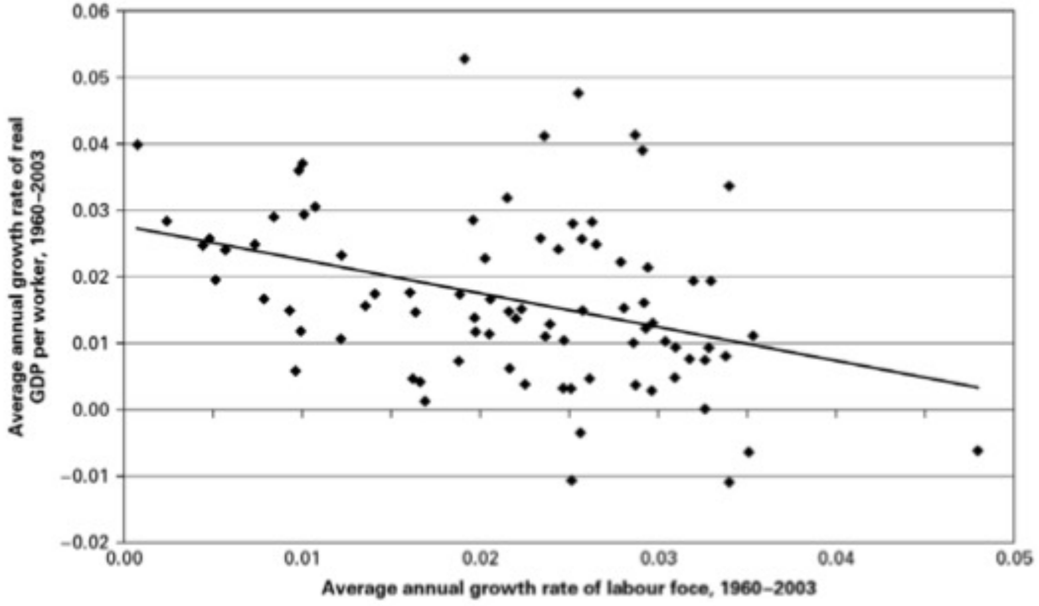
Explain intuitively the influence on long run economic growth of the labour force growth rate and the "extraction rate" s_E, respectively

Mine kommentarer:
- Argumenter for, hvorfor I gør som I gør ☺
- "Fordi vi jf. opgaveformuleringen er i en balanceret vækstproces, må k og y vokse med samme rate, da z er kendetegnet ved at være konstant i en balanceret vækstproces"

Intuition:
- Modstridende effekter i vækstraten i y: positivt bidrag fra teknologisk vækst, men negativt bidrag fra jord og olie pga. befolkningsvækst og brug af de udtømmelige ressourcer (olie)
- Den teknologiske vækst skal være større end de modsvarende growth drag, for at g^y>0

Gennemgang af hjemmeopgave 6

Figure 1. Average annual growth rate of real GDP per worker against average annual growth rate of labour force across 83 countries



Note: The indicated line of best fit is estimated by OLS. The slope estimate is −0.5 with a standard error of 0.14.

Mine kommentarer:

- **Hvad ser I?** (negativ korrelation ml. befolkningsvækst og vækst i BNP)
- **Hvordan kan vi relatere dette til modellen?** (modellen prædikterer også en negativ sammenhæng mellem de to)
- Herefter kan man inddrage paramterestimater, kritiske kommentarer vedr. åben/lukket økonomi (virkelighed ift. model), kausalitet, udeladt variabel bias …

Hjemmeopgave 6

2.7 Verify that under the assumptions made here, starting from any $z_0 > 0$, the transition equation (11) does indeed imply convergence of the capital-output ratio to a constant level z^*, and that:

$$z^* = \frac{s}{((1+n)(1+g))^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}}(1-s_E)^{\frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}} - (1-\delta)} \tag{12}$$

Mine kommentarer:

- **Husk at læse teksten ordentligt – mange af jer har ikke verificeret at antagelserne om konvergens holder**
- Tegn gerne et transitionsdiagram efter I har argumenteret for konvergens, og sig at under disse antagelser, vil konvergensen altså se sådan ud i et transitionsdiagram.
- Flere af jer skriver, at hældningen går mod 0, når z_t går mod uendelig. Det passer ikke – den går mod noget, der er mindre end 1 --> overvej om I behøver dette argument (svar: nej, givet at de øvrige kriterier er opfyldt havde vi ikke haft en skæring (z*), hvis ikke hældningen var konvergeret mod noget mindre end 1, for z_t gående mod uendelig. Rettevejledningen gør nedestående.

1. For $z_t = 0$ one has $z_{t+1} = 0$, that is, it passes through (0,0). Follows directly from (11).
2. The curve is everywhere strictly increasing. Follows directly from (11).
3. There is a unique, strictly positive intersection between the transition curve and the 45°-line.

This was shown above, since the intersection is the unique $z^* > 0$.

4. The slope of the transition curve at zero is strictly positive: Differentiating (11) gives:

$$\frac{dz_{t+1}}{dz_t} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta}(1-s_E)^{-\varepsilon}\left[(1-\alpha)(s+(1-\delta)z_t)^{-\alpha}(1-\delta)z_t^{\alpha} + (s+(1-\delta)z_t)^{1-\alpha}\alpha z_t^{\alpha-1}\right]$$

Hjemmeopgave 6

Mine kommentarer:

- Mange af jer har sprunget denne opgave over ☹
- **Intuition**: I skal diskutere hhv. det optimistiske og det pessimistiske synspunkt i forhold til langsigtet balanceret vækst i en model med begrænsede og udtrømmelige ressourcer og inddrage betydningen af substitutionselasticiteten.
- Når vi snakker om substitutionselasticiteten her, handler det om hvorvidt og hvor let vi kan substituere væk fra land og olie mod noget andet (som vi skal udvikle via vores teknologi)

- Substitutionselasticitet mindre end 1: Vi vil konvergere mod en vækstfaktor mindre end 1 (1-sE)/(1+n) og dermed også en negativ vækstrate i BNP pr. indbygger.. Det betyder, at vi på langt sigt ikke er i stand til i tilstrækkelig grad at substituere væk fra brugen af naturressourcer i produktionen, uafhængigt af vækst i g

- Substitutionselasticitet = 1: Cobb-Douglas er specialtilfælde af CES-funktion, og er kendetegnet ved substitutionselasticitet =1, så vi skal kigge på vores almindelige model og vores udtryk for væksten fra tidligere. Her er konklusionen ikke ubetinget negativ, hvis den teknologiske vækstrate er tilstrækkelig høj, vil vi have (positiv) vækst i BNP pr. indbygger. Mekanisme: I takt med at ressourcer bliver udtyndet bliver de meget dyre -> det bliver meget profitabelt at udvikle/sælge et substitut.

Hjemmeopgave 6

$$f_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \frac{\beta A_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\beta A_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \kappa x_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \varepsilon e_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}(1+g)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

$$\boxed{+\frac{\kappa x_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\beta A_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \kappa x_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \varepsilon e_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\left(\frac{1}{1+n}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}$$

$$+\frac{\varepsilon e_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\beta A_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \kappa x_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \varepsilon e_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\left(\frac{1-s_E}{1+n}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

Since $g > 0$, we have $A_t \to \infty$ for $t \to \infty$, and since $n > 0$ we have $x_t \to 0$, and since $s_E > 0$ we have $e_t \to 0$. Therefore:

$$f_t \to f = \begin{cases} \frac{1-s_E}{1+n} \text{ for } \sigma < 1 \\ \\ 1+g \text{ for } \sigma > 1 \end{cases}$$

Det her led går mod 0, for σ<1. Det kan virke lidt underligt, nu fordi potenserne er de samme, og både e_t og x_t går mod 0.

Forklaringen er, at der er forskel på, hvor hurtigt x_t (land) og e_t (energi/olie) går mod 0. Derfor går $\kappa x_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ **langsommere** mod ∞ end $\epsilon e_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$.

Grænseværdien for dette udtryk er derfor 0, jf.

dette udtryk $\frac{\kappa x_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{0+\kappa x_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = 0$

RECAP FRA SIDST

Kapitel 4 – Lille åben økonomi

- Vi gik fra lukket til **lille, åben** økonomi.
- Overordnet stadig helt standard kapital 3 antagelser, men
- Et land kan enten finansiere sine investeringer med kapital fra indlandet eller kapital fra udlandet, ligesom investorerne kan investere både i indlandet og udlandet
- Reallejesatsen er ikke længere givet som marginalproduktet på kapital, men bestemmes nu af verdensmarkedsrenten og er dermed eksogent givet. Den antages konstant i modellen. Medfører, at også reallønnen er givet eksogent.
- Hvis der kommer et stød til økonomien, vil tilpasningen grundet de åbne kapitalmarkeder ske med det samme – modsat den lukkede økonomi, hvor et stød førte til højere BNP gennem akkumulation af kapital og dermed tog længere tid.
- Kun fri bevægelighed for kapital og varer – ikke mennesker.

Exc. 4.1 og 4.4: Recap

- **4.1:** Vi undersøgte elasticiteten af y_t^n mht. s for hhv. en åben økonomi og en lukket økonomi og konkluderede at elasticiteten påvirkes forskelligt af en ændring i opsparingstilbøjeligheden afhængigt af om det er åben eller lukket økonomi – og at gevinsten ved en stigning i opsparingstilbøjeligheden er størst i åben økonomi.
- **Intuition:** I en lukket økonomi vil en stigning i opsparingstilbøjeligheden medføre en højere kapitalintensitet (fordi S=I, vi investerer vores opsparing i kapital). Det fører til et fald i marginalproduktet på kapital, dvs. realrenten r_c^*, givet at vi allerede var i SS. I en åben økonomi vi vil derimod placere den ekstra opsparing i internationale kapitalmarkeder til verdensmarkedsrenten $\bar{r} > r_c^*$
- **4.4:** Vi undersøge effekten af en permanent stigning i opsparingsraten og illustrerede det i transitionsdiagrammet: ny kurve rykkede op og var stejlere!
- **Effekt on impact:** Stigning i opsparing pr. capita., fald i forbrug. Opsparingen investeres på udenlandske kapitalmarkeder i åben økonomi, så k*, y* og w* påvirkes ikke.
- **Effekt på lang sigt**: Nationalindkomst, forbrug pr. capita og velstand pr. capita vil stige i takt med at de udenlandske investeringer giver indkomst. Dette vil generere højere nationalindkomst pr. capita, der vil blive geninvesteret m.v. indtil vi når SS.
- **Sammenligning af SS værdier**: y^* påvirkes ikke, fordi produktionen i landet er uændret. og f^* stiger. Hvorvidt c^* stiger afhænger af de gjorte antagelser.

Exc. 4.6: Link mellem befolkningsvækst, investeringer og BNP?

- Der argumenteres for i kapitlet, at for en lille åben økonomi med fri kapitalmobilitet er BNP pr. arbejder i SS uafhængigt af s og n.

  Det kan vi bl.a. se direkte, når vi kigger på SS for y: $y^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

- Imidlertid viser figurer fra kapitel 3 en ret klar sammenhæng mellem y^*, n og s. Derfor skal vi undersøge, hvorvidt vi kan konkludere at lande i virkeligheden opfører sig mere som åbne økonomier end lukkede økonomier og at kapitalbevægelser i virkeligheden ikke er så vigtige for økonomisk performance.

- **Med andre ord: Er figurerne fra kapitel 3 på næste slide i modstrid med forudsigelserne fra kapitel 4 eller kan vi vise, at der er et link mellem y^*, n og s i SS?**

Exc. 4.6: Link mellem befolkningsvækst, investeringer og BNP

Figure 3.6 Real GDP per worker against the average investment share, 67 countries

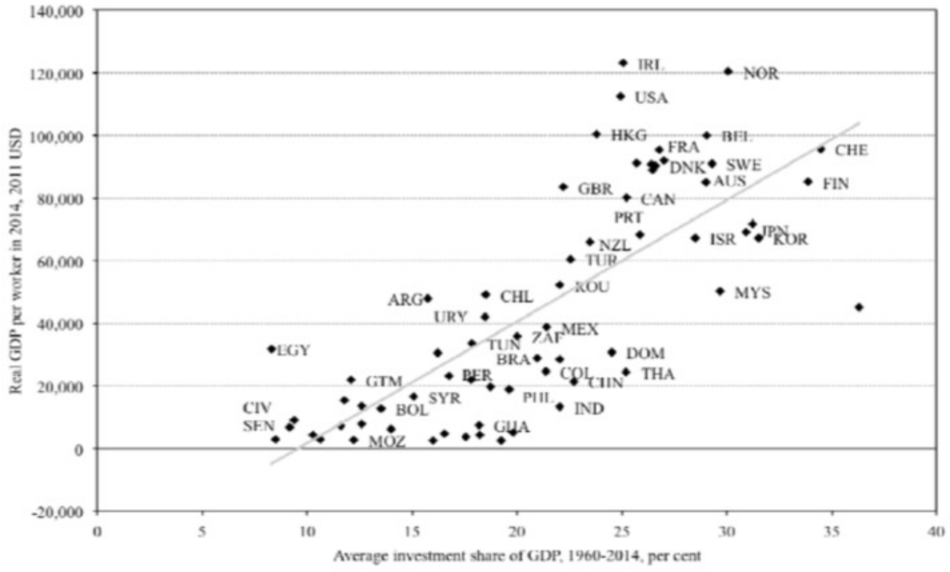
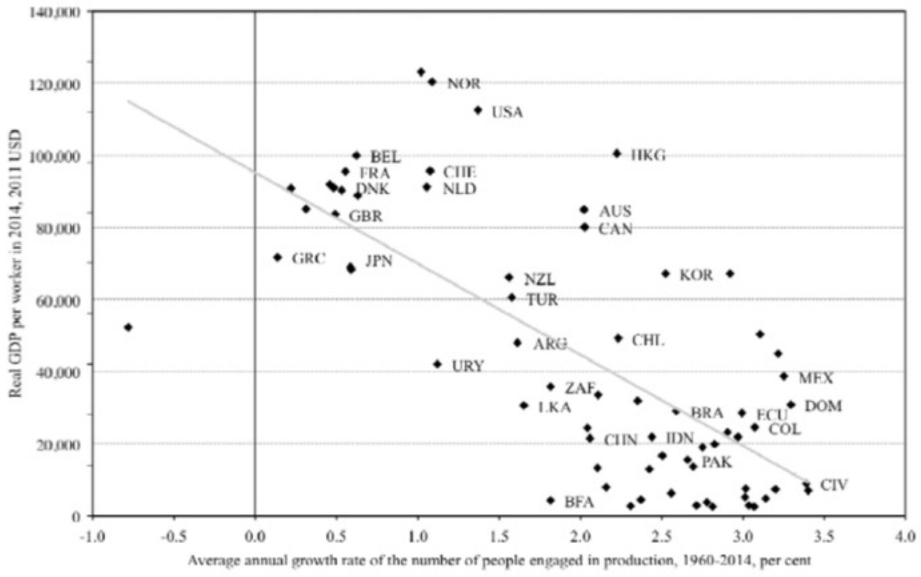


Figure 3.7 Real GDP per worker against average annual labour force growth rate, 67 countries



Exc. 4.6: Link mellem befolkningsvækst, investeringer og BNP

1) Vis, ved brug af ligning (18) og (20), at der i åben økonomi eksisterer et link mellem befolkningsvækst, investeringer og BNP pr. capita, der er givet ved følgende

$$\ln y^* = \frac{1}{1-a}\ln B + \frac{\alpha}{1-\alpha}[\ln i^* - \ln(n+\delta)]$$

Hint: Tag udgangspunkt i ligning (18) og omskriv den, så vi kan indsætte ligning (20)

2) Sammenlign herefter udtrykket, med det tilsvarende udtryk fra kapitel 3 og diskuter, hvorvidt figurerne er evidens for at kapitalbevægelser ikke er væsentlige, når man sammenligner økonomisk performance på tværs af lande.

Kapitel 3 ligning: $\ln y^* = \frac{1}{1-a}\ln B + \frac{\alpha}{1-\alpha}[\ln s - \ln n]$

Hint: Figurerne viser "investment-share". I lukket økonomi er investeringer = opsparing. Overvej, hvorvidt det samme gør sig gældende i åben økonomi.

Exc. 4.6: Link mellem befolkningsvækst, investeringer og BNP

2) Sammenlign herefter udtrykket, med det tilsvarende udtryk fra kapitel 3 og diskuter, hvorvidt figurerne er evidens for at kapitalbevægelser ikke er væsentlige, når man sammenligner økonomisk performance på tværs af lande.

Kapitel 3: $\ln y^* = \frac{1}{1-a}\ln B + \frac{\alpha}{1-\alpha}[\ln s - \ln n]$ **Kapitel 5:** $\ln y^* = \frac{1}{1-a}\ln B + \frac{\alpha}{1-\alpha}[\ln i^* - \ln n]$

Intuition:

- For den lukkede økonomi gælder netop, at I=S, så ved at substituere i* ind får vi præcis den samme ligning
- Altså forudser både vores kapitel 3 (lukket økonomi) og kapitel 4 model (åben økonomi) et positivt forhold mellem investering og BNP pr. arbejder, og et negativt forhold mellem befolkningsvækst og BNP pr. arbejder.
- Tilbage til det overordnede spørgsmål: Er figurerne i modstrid med forudsigelserne fra kapitel 4? Indikerer empirien, at kapitalmobilitet ikke er vigtigt?
- Figur 3.6 og 3.7 er ikke i modstrid med forudsigelserne fra kapitel 4. Dermed kan figurerne **ikke** ses som evidens for, at kapitalbevægelserne ikke er vigtige for økonomisk performance på tværs af lande i den virkelige verden. Med andre ord – kapitalbevægelser er vigtige!

Exc. 4.5: Vigtigheden af kapitalbevægelser ift. konvergens og permanent produktivitetschok i åben vs. lukket økonomi

- Hvis $\bar{r} > r^*_{closed}$ eller $\bar{r} < r^*_{closed}$, vil nationalindkomsten stige, såfremt økonomien går fra lukket til åben.
- **MEN,** hvis realrenten er den samme i SS for et land, uanset om økonomien er åben eller lukket, vil nationalindkomsten forblive uændret hvis vi går fra lukket til åben.
- Det kan give anledning til at tro, at der ikke er nogen forskel på åben og lukket økonomi i dette tilfælde. Det er bestemt ikke tilfældet – og det skal vi kigge nærmere på i denne opgave.

1) Vis, med udgangspunkt i ligning (27) at nationalindkomsten under de givne antagelser er den samme som i kapitel 3: $y^{*n} = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Hvad er intuitionen? **Vi antager jf. bogen, at $\boldsymbol{\delta = 0}$, så $\boldsymbol{r^*_{closed} = an/s}$ og at $\boldsymbol{\bar{r} = r^*_{closed}}$**

Hint 1: Ligning (27) er givet ved $y^{*n} = (1-\alpha)B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{1-\frac{s}{n}\bar{r}}$

Hint 2: Indsæt udtrykket for $\bar{r}$ fra antagelsen og forkort.

Exc. 4.5: Vigtigheden af kapitalbevægelser ift. konvergens og permanent produktivitetschok i åben vs. lukket økonomi

2) Vis herefter, at $v^* = k^*_{closed}$, dvs. velstand lig kapital og at de to transitionskurver har samme hældning i SS. Illustrer det ved at tegne dem i det samme transitionsdiagram. Hvad er intuitionen?

- **Hint 1:** Tag udgangspunkt i (25) og indsæt vores udtryk for $\bar{r} = r^*$. Indsæt herefter udtryk for $w*$ fra (19).
- **Hint 2:** Find hældningen for transitionsligningen for åben økonomi, ved at tage udgangspunkt i (22) og indsætte $\bar{r}$, husk $\delta = 0$. Hældningen kan aflæses direkte fra transitionsligningen.
- **Hint 3**: Find hældningen i lukket økonomi ved at differentiere mht. k_t og bagefter indsætte SS værdien for k^*_c fra før
- **Hint 4: Vi antager stadig jf. bogen, at $\delta = 0$, så $r^*_{closed} = an/s$ og at $\bar{r} = r^*_{closed}$**

Exc. 4.5: Vigtigheden af kapitalbevægelser ift. konvergens og permanent produktivitetschok i åben vs. lukket økonomi

2) Vis herefter, at $v^* = k^*_{closed}$, dvs. velstand lig kapital og at de to transitionskurver har samme hældning i SS. Illustrer det ved at tegne dem i det samme transitionsdiagram. Hvad er intuitionen?

Intuition

- Husk hvordan hhv. Y^n og V_t er defineret: $Y^n \equiv Y_t + \bar{r}F$ og $V_t \equiv K_t + F_t$
- Når vi ikke har nogen kapitalbevægelser, er vores nettofordringer, F_t, lig nul, og vi har derfor ingen ekstern renteindkomst (eller udgift). Det følger direkte af vores ligninger, at der ikke er andre kilder til velstand end gennem kapitalakkumulation.
- Vi ser, at hældningen er størst i den lukkede økonomi hele vejen indtil SS, men at vi i åben økonomi starter fra et højere punkt, idet transitionsligningen ikke starter i (0,0).
- Den større hældning betyder, at konvergensen isoleret set går hurtigere i den lukkede økonomi (og derfor også vil catche-up med den åbne økonomi på sigt), men at den åbne økonomi hele tiden vil være foran, fordi vi starter i et initialt højere punkt. Derfor er konvergensen samlet set hurtigere i den åbne økonomi.

- Forklaringen bag den hurtigere konvergens er, som vi talte om i timen, kapitelbevægelser, fordi kapitalen hele tiden er udnyttet optimalt.

Exc. 4.5: SS-værdier og simulation

3a) Antag, at B er normaliseret til 1 (dvs. $B = 1$), og at $n = 0{,}01$, $c = 0{,}2$, $a = 0{,}4$.

- Bestem SS værdierne $y^{n*} = y_c^*$ og $v^* = k_c^*$ under disse antagelser.

Hint: Tag udgangspunkt i de fundne udtryk.

3b) Antag nu, at der sker et permanent stød til økonomien og B stiger til B′=2. Økonomien befinder sig i SS når stødet sker.

- Bestem de nye SS værdier.
- Beskriv hvordan den permanente ændring i B påvirker transitionsdiagrammerne/ akkumulationen af hhv. velfærd og kapital i den åbne/lukkede økonomi. Hvilken økonomi konvergerer hurtigst mod den nye SS?

4) Simuler situationen fra exc. 3a og 3b, dvs. en situation hvor økonomien starter i SS og bliver ramt af et permanent stød, hvor B stiger til en højere værdi $B \to B'$.

Hint: Download det excel-ark der hedder Exercise 4.5 fra Diverse mappen på absalon.

Hint: Simuler begge transitionsligninger fra periode 0 og frem. Antag at stødet finder sted i periode 1. I bestemmer selv hvor mange perioder I vil lade simulationen løbe over, men jeg anbefaler minimum 200 perioder ☺

Hint: Illustrer hvordan y_c og y^n udvikler sig i et diagram, der udover y_c og y^n viser hhv. den nye og den gamle SS værdi (præcis som vi plejer). Beskriv forskelle og ligheder mellem de to serier.

Exc. 4.5: SS-værdier og simulation

3a) Antag, at B er normaliseret til 1 (dvs. $B = 1$), og at $n = 0{,}01$, $c = 0{,}2$, $a = 0{,}4$. Bestem SS værdierne $y^{n*} = y_c^*$ og $v^* = k_c^*$ under disse antagelser.

$$y^{n*} = y_c^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 1^{\frac{1}{0.6}} \left(\frac{0.2}{0.01}\right)^{\frac{0.4}{0.6}} = 7.368$$

$$v^* = k_c^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = 1^{\frac{1}{0.6}} \left(\frac{0.2}{0.01}\right)^{\frac{1}{0.6}} = 147.361$$

3b) Antag nu, at der sker et permanent stød til økonomien og B stiger til B′=2. Økonomien befinder sig i SS når stødet sker. Bestem de nye SS værdier.

$$y^{n*\prime} = y_c^{*\prime} = (B')^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 2^{\frac{1}{0.6}} \left(\frac{0.2}{0.01}\right)^{\frac{0.4}{0.6}} = 23.391$$

$$v^{*\prime} = k_c^{*\prime} = (B')^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = 2^{\frac{1}{0.6}} \left(\frac{0.2}{0.01}\right)^{\frac{1}{0.6}} = 467.843$$

Exc. 4.5: SS-værdier og simulation

Beskriv hvordan den permanente ændring i B påvirker transitionsdiagrammerne/ akkumulationen af hhv. velfærd og kapital i den åbne/lukkede økonomi. Hvilken økonomi konvergerer hurtigst mod den nye SS?

Intuition

- Begge transitionskurver vil blive skubbet opad af et stød til B.
- For båden den åbne og den lukkede økonomi påvirker stødet BNP pr. capita med det samme.
- I den åbne økonomi fører dette til et opadgående pres på den indenlandske rente og tiltrækker dermed udenlandske investorer (og dermed kapital). Mængden af kapital stiger derfor allerede i samme periode som produktivitetschokket.
- I den lukkede økonomi akkumulerer kapital sig på almindelig vis.

- Det er det samme, som vi ser i simulationen – stødet er større i den åbne økonomi.

Tak for i dag!

HUSK HJEMMEOPGAVE 7 I NÆSTE UGE

9. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

Dagens program

- Overblik over semesteret – hvor er vi nu?
- Gennemgang af hjemmeopgave
- Introduktion til kapitel 4: Lille åben økonomi
- Exercise 4.1
- Exercise 4.4

Overblik over semesteret

Vi har været igennem følgende

- Kapitel 2 (Stylized facts)
- Kapitel 3 (Basal Solow)
- Kapitel 5 (Solow med teknologiske fremskridt)
- Kapitel 6 (Solow med humankapital)
- Kapitel 7 (Solow med Naturressourcer)
- **I dag, 22. november: Kapitel 4 (Solow for lille åben økonomi)**
- 29. november: Kapitel 4
- 6. december: Kapitel 8 (Solow med endogen vækst) + Kapitel 9 (Solow med R&D)
- 13. december: Kapitel 9 (Solow med R&D)
- FLYTTES: 20. december (recap)
- Spørgetime

Hjemmeopgave 5

- Overordnet nogle gode opgaver! ☺
- De fleste af jer har godt styr på opgave 1, ligesom de fleste har rigtig godt styr på fasediagrammerne – fedt!
- Derudover har I alle samme godt styr på udledningerne, særligt Solow-ligningerne

- Intuitionen kniber lidt nogle steder – men rigtig godt at I giver det et skud!
- Når I tegner fasediagrammer, skal I huske at udlede nullclines inden. I jeres diagrammer; husk desuden at angive, hvilke ligninger der hører til hvilke kurver – også selvom I synes det er tydeligt ud fra de nullclines I har fundet, hvordan de konvergerer og SS punkter.

- Vi gennemgår opgaven nu – særligt med fokus på den sidste del ☺
- Hvis man har nogle spørgsmål til mine kommentarer, er man som altid velkommen i pausen!

Gennemgang af hjemmeopgave 5

Spørgsmål 1: Skolegang, humankapital og indkomst

1.a) Er antal års skolegang et godt mål for humankapital? Kom med argumenter både for og imod.

1.b) Figur 1 viser sammenhængen mellem befolkningens skolegang og BNP/capita i år 2000. Kan vi på baggrund af figuren konkludere, at et højere uddannelsesniveau øger BNP/indbygger?

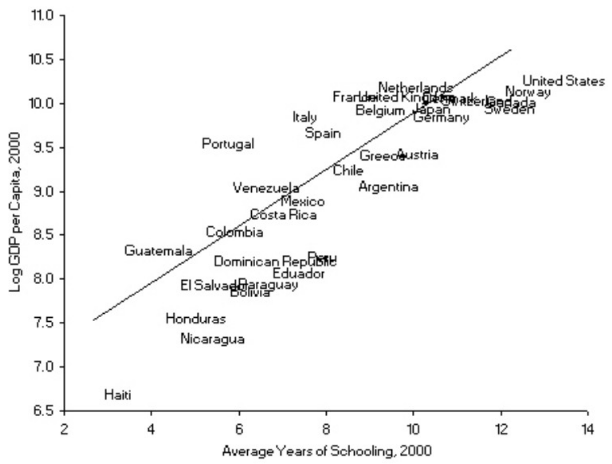


Figure 1: Figur 1: Uddannelse og BNP/capita

Mine kommentarer

1a) Humankapital er mere end uddannelse – det har I helt styr på. Fedt! Husk dog, at holde diskussionen på et makroniveau, tænk bl.a. om der kan være **forskel i kvalitet/udbytte** af x års uddannelse på tværs af lande. Et centralt, og lavpraktisk argument, som flere af jer ikke nævner er **tilgængelighed af data**. Vi har ret god data for uddannelse – og vi har ikke rigtig noget alternativ der datamæssigt er lige så godt.

1b) **Korrelationen vs. kausalitet**. Vi kan sige at der er korrelation, men ikke noget om kausaliteten: ikke utænkeligt at højt niveau af uddannelse øger BNP, men heller ikke utænkeligt at et højt uddannelsesniveau kommer som følge af et højt BNP.

Derudover potentiale for **udeladt variabel-bias** eller **selektionsbias** (som flere af jer også nævner)

Gennemgang af hjemmeopgave 5

Spørgsmål 2: Finansiering af uddannelsessystemet

I denne opgave skal du analysere hvordan forudsigelerne fra Solowmodellen med humankapital afhænger af hvordan uddannelsessystemet er finansieret.

I Solowmodellen er den eneste måde at spare en formue op på at investere i fysisk kapital. Dermed svarer formuebeskatningen til en skat på kapital. Lad skattesatsen være givet ved τ, og antag at hele skatteprovenuet bliver investeret i uddannelsessystemet. Til gengæld er det gratis at uddanne sig for borgerne, hvorfor de ikke selv skal spare op til uddannelse. Solowmodellen med humankapital bliver herved:

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} \left(A_t L_t\right)^{1-\alpha-\varphi}, \ 0 < \alpha, \varphi < 1$$

$$L_{t+1} = (1+n)\, L_t, \ L_0 \text{ givet}$$

$$A_{t+1} = (1+g)\, A_t, \ A_0 \text{ givet}$$

$$K_{t+1} = s_K Y_t + (1-\delta-\tau)\, K_t, \ K_0 \text{ givet}$$

$$H_{t+1} = \tau K_t + (1-\delta)\, H_t, \ H_0 \text{ givet}$$

Gennemgang af hjemmeopgave 5

2.a) Forklar hvorfor den udgave af Solowmodellen med humankapital du kender fra pensumbogen kan opfattes som en model hvori en regering finansierer uddannelsessystemet gennem en skat på indkomst.

Mine kommentarer:

- Opskriv hvordan humankapital akkumuleres i bogen. Det gør det lettere at forholde sig til: $H_{t+1} - H_t = s_H Y_t - \delta H_t$
- s_H fortolkes normalt som befolkningens investeringsrate i humankapital. s_H er eksogen, så husholdningen kan ikke selv bestemme sin opsparingsrate. Derfor kan s_H også fortolkes som en indkomstskat, der i dette tilfælde finansierer uddannelse
- Tænk på den opgave vi regnede sidste gang, hvor vi modificerede modellen til at kunne indeholde en stat – det er på samme måde, at vi kan argumentere for det den her gang!

2.b) Vis, at Solowligningerne der hører til ovenstående model er givet ved:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (\delta + \tau + n + g + ng)\,\tilde{k}_t\right)$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(\tau_t \tilde{k}_t - (\delta + n + g + ng)\,\tilde{h}_t\right)$$

og forklar hvorfor og hvordan de adskiller sig fra modellen i bogen.

Mine kommentarer

- Gode udledninger, I har godt styr på det!
- I forhold til hvordan ligningerne adskiller sig: Skattesatsen τ indgår nu i solowligningen for kapital på linje med depreciering, fordi husholdningerne hvert år skal afleveres τk_t til staten i skat. Vi har ikke den tilsvarende effekt i ligningen for humankapital, fordi det kun er kapital (formue) der beskattes.

Gennemgang af hjemmeopgave 5

2.c) Tegn fasediagrammet for modellen. Forklar hvorfor du tegner det som du gør.

Mine kommentarer

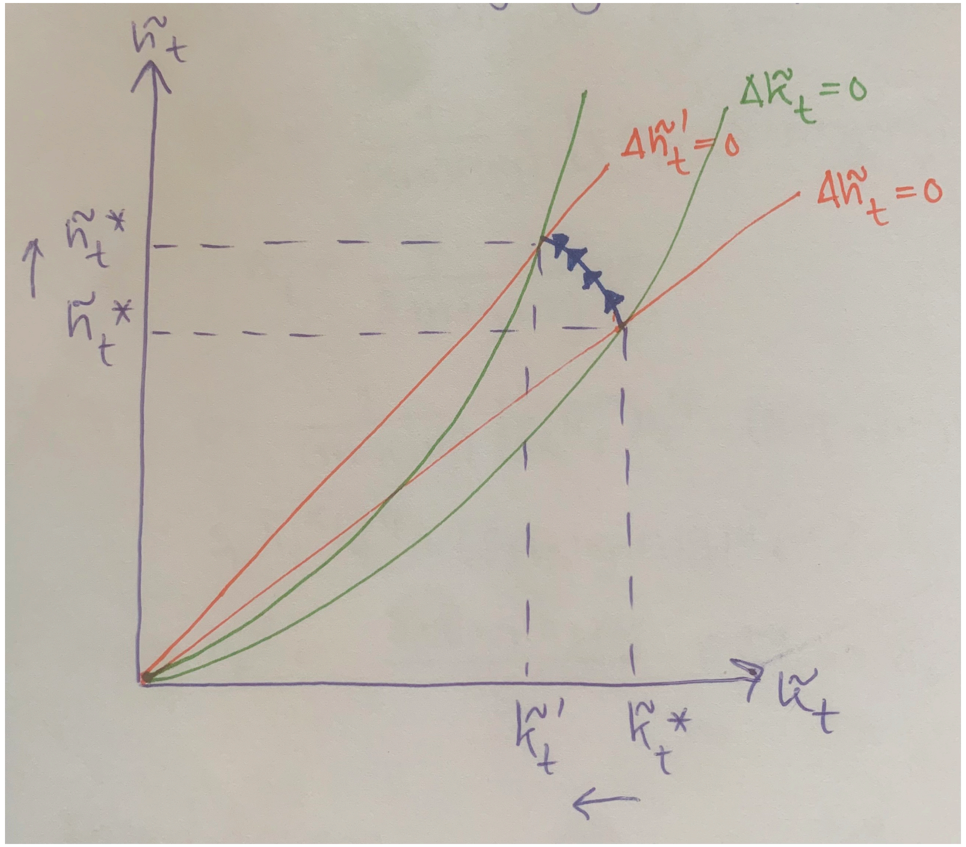
- Mange gode fasediagrammer!
- Udled nullclines før I tegner fasediagram, og brug dem som argumentation for at I tegner som I gør
- Husk pile, akser, angivelser af hvad de forskellige kurver viser, anmærkning af SS-værdier og hvordan de rykker. Vi får følgende nullclines

$$\text{For } \Delta k_t = 0: \quad \tilde{h}_t = \left(\frac{\delta + \tau + n + g + ng}{s_K}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha}{\varphi}}$$

$$\text{For } \Delta h_t = 0: \quad \tilde{h}_t = \frac{\tau}{\delta + n + g + ng}\tilde{k}_t$$

Gennemgang af hjemmeopgave 5

2.d) Illustrér i fasediagrammet hvad sker der hvis τ øges, herunder også hvordan økonomien konvergerer mod den nye steady state. Forklar intuitionen.



Mine kommentarer

- Tegn begge kurver i samme diagram og illustrer på hhv. x og y-aksen hvordan st. st. ændrer sig for både k og h.
- Ud fra den grafiske analyse, vil de vi umiddelbart se, at **h stiger og k falder**

Intuition:

- En stigning i τ påvirker begge null-clines. $[\Delta\tilde{k}_t = 0]$-kurven bliver skubbet op-/indad, fordi investeringerne i det fysiske kapitalapparat falder
- Samtidigt skubbes $[\Delta\tilde{h}_t = 0]$-kurven også op, fordi de direkte investeringer i uddannelse nu stiger.
- Imidlertid er der også nogle krydseffekter: efterhånden som humankapital begynder at blive akkumuleret, begynder $\tilde{k}_t$ at stige igen, fordi stigningen i $\tilde{h}_t$ øger $\tilde{y}_t$ og dermed også investeringerne i kapitalapparatet.

Gennemgang af hjemmeopgave 5

2.e) Vis at steady state for $\tilde{y}$ er givet ved:

$$\tilde{y}_t^* = \left(\frac{\tau}{\delta + n + g + ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_K}{\delta + \tau + n + g + ng}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

Mine kommentarer:

- Jeres null clines giver til sammen to ligninger med to ubekendte, som I løser og finder st. st. for hhv. k tilde og h tilde, hvorefter I indsætter i formlen for y (som I fandt da I udledte Solowligninger) og forkorter ud.
- Denne del har I generelt super godt styr på, fedt!

2.f) Udregn golden rule værdierne for s_K og τ ved at maksimere $\tilde{c}^*$ mht. de to parametre (hint: det giver samme resultat at maksimere $\ln \tilde{c}^*$ som at maksimere $\tilde{c}^*$, og udregningerne er nemmere). Udregn herefter det teknologijusterede golden rule forbrugsniveau $\tilde{c}^*$ som funktion af modellens parametre $(\alpha, \varphi, \delta, n, g)$

Mine kommentarer:

- Det går super godt med de to parametre – men meget få kommer helt i mål med jeres golden rule. Vi tager den lige på tavlen

2.g) Sammenlign med de udtryk du finder i forrige spørgsmål med s_K^{gr}, s_H^{gr} og $\tilde{c}^{*gr}$ fra pensumbogen vist ovenfor. Kan man på baggrund af dine resultater sige noget om hvorvidt en formueskat er en bedre måde at finanisere uddannelsessystemet på end en indkomstskat?

Mine kommentarer og intuition:

- **s_k svarer nu til både s_k og s_H fra den tidligere model**. Vi får den samme golden rule som vi gjorde i bogen – inden for modellens rammer er det altså ligegyldigt, hvorvidt uddannelses- systemet finansieres gennem en formueskat eller indkomstskat!

INTRODUKTION TIL KAPITEL 4

Kapitel 4 – Lille åben økonomi

- Fra **lukket** til **åben** økonomi: Før var økonomien i vores model et lukket kredsløb. Vi antog, at S=I, dvs. at al opsparing blev investeret inden for vores lukkede kredsløb. Ikke længere.
- I en åben økonomi kan et land enten finansiere sine investeringer ved kapital fra indlandet eller kapital fra udlandet, ligesom investorerne kan investere både i indlandet og udlandet

Spørgsmål vi kigger på:

- Hvordan påvirker det økonomien at lade kapitalen flyde frit?
- Giver frie kapitalbevægelser højere indkomst? Hvad kan man gøre for at hæve indkomsten i en åben økonomi?

Er solowmodellen for en lille, åben økonomi en god approksimation for Danmark?

- International kapitalmobilitet er en vigtig faktor i en globaliseret verden
- Dog er en antagelse om, at kapitalmarkedet er perfekt integreret på verdensmarkedet ikke helt tilfældet i virkeligheden (fx homeland bias)
- Danmark er nok et sted midt i mellem åben og lukket solow

Lille åben økonomi – antagelser og egenskaber

Det er den simple, kapitel 3 model (den basale solow) vi har modificeret, dvs.

- Konstant skalaafkast
- Profitmaksimerende virksomheder
- Ingen teknologisk vækst, B er givet eksogent
- Ingen humankapital

Standard kapitel 3 antagelser

- Reallejesatsen er ikke længere givet som marginalproduktet på kapital, men bestemmes nu af verdensmarkedsrenten:

Renten er lavere end verdensmarkedsrente → Investorer låner penge i indlandet og investerer i udlandet → Kapital flyder ud af landet → Øger efterspørgslen efter kapital → renten stiger indtil den er lig verdensmarkedsrenten og investorerne vil være indifferente i hvorvidt de sætter deres kapital i udlandet eller indlandet

Renten er højere end verdensmarkedsrente → Investorer låner penge i udlandet og investerer i landet → Kapital flyder ind i landet → "For meget" kapital, efterspørgslen på kapital falder → renten falder indtil den er lig verdensmarkedsrenten og der ikke længere er en arbitragemulighed

Lille åben økonomi – definitioner og antagelser

Åben økonomi: Varer kan handles og kapital kan flyde frit over den betragtede økonomis landegrænser, dvs. til og fra resten af verden. Bemærk ingen bevægelighed for personer.

Lille økonomi: Indlandet påvirker kun negligerbart verdensøkonomien. Særligt vigtigt ift. realrenten.

Perfekt kapitalmobilitet: Absolut ingen hindringer for kapitalbevægelser => afkast på kapital placeret i indland er præcis det samme som afkast på kapital placeret i udlandet, fordi realrenten er givet ved verdensmarkedsrenten → ingen arbitrage i st. st.

Perfekt varemobilitet: Ingen hindringer for eksport og import – men det antages, at indland og udland producerer samme vare. Varebevægelser reflekterer derfor blot kapitalbevægelser.

Arbitrage: Når man (investorer) drager fordel af en prisforskel mellem to markeder, fx en forskel i realrente som følge af en øget efterspørgsel efter kapital.

Tilpasning: Hvis der kommer et stød til økonomien, vil tilpasningen grundet de åbne kapitalmarkeder ske med det samme – modsat den lukkede økonomi, hvor et stød førte til højere BNP gennem akkumulation af kapital og dermed tog længere tid.

Formue i stedet for kapital og nye ligninger

Ingen akkumulation af kapital, dvs. ingen transitionsligning i k_t. I stedet akkumulation af formue og ny transitionsligning (akkumulation af formue pr. arbejder)

Formue: Hvor meget kapital landets indbyggere ejer i udland og indland

Kapital: Kapital investeret i landet

Nettofordringer: Netto udenlandske aktiver. Hvor meget landet har til gode i udlandet. Hvis denne er negativ, skylder landet penge (debitor). Er nettofordringerne positive, skylder udlandet penge til landet (kreditor)

$$\underbrace{V_t}_{formue} = \underbrace{K_t}_{Kapital} + \underbrace{F_t}_{Nettofordringer}$$

- Formueakkumulation er givet ved $V_{t+1} = S_t + (1 - \delta)V_t$
- Nationalindkomst, BNP + renteindkomst $Y_t^n = Y_t + \bar{r}F_t$
- Reallejesats $r_t = \bar{r}$

Den samlede model

THE COMPLETE SOLOW MODEL OF THE SMALL OPEN ECONOMY

$$V_t \equiv K_t + F_t, \tag{7}$$

$$V_{t+1} - V_t = S_t - \delta V_t, \qquad V_0 \text{ given} \tag{8}$$

$$Y_t^n \equiv Y_t + \bar{r} F_t, \tag{9}$$

$$S_t = s Y_t^n, \tag{10}$$

$$Y_t = B K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \tag{11}$$

$$L_{t+1} = (1+n) L_t, \qquad L_0 \text{ given} \tag{12}$$

$$\bar{r} = \alpha B \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\alpha - 1}, \tag{13}$$

$$w_t = (1-\alpha) B \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\alpha}. \tag{14}$$

Parameters: α, B, s, n, δ and $\bar{r}$. Endogenous variables: V_t, L_t, K_t, F_t, Y_t, w_t, Y_t^n and S_t.

Transitions- og solowligning

Transitionsligning

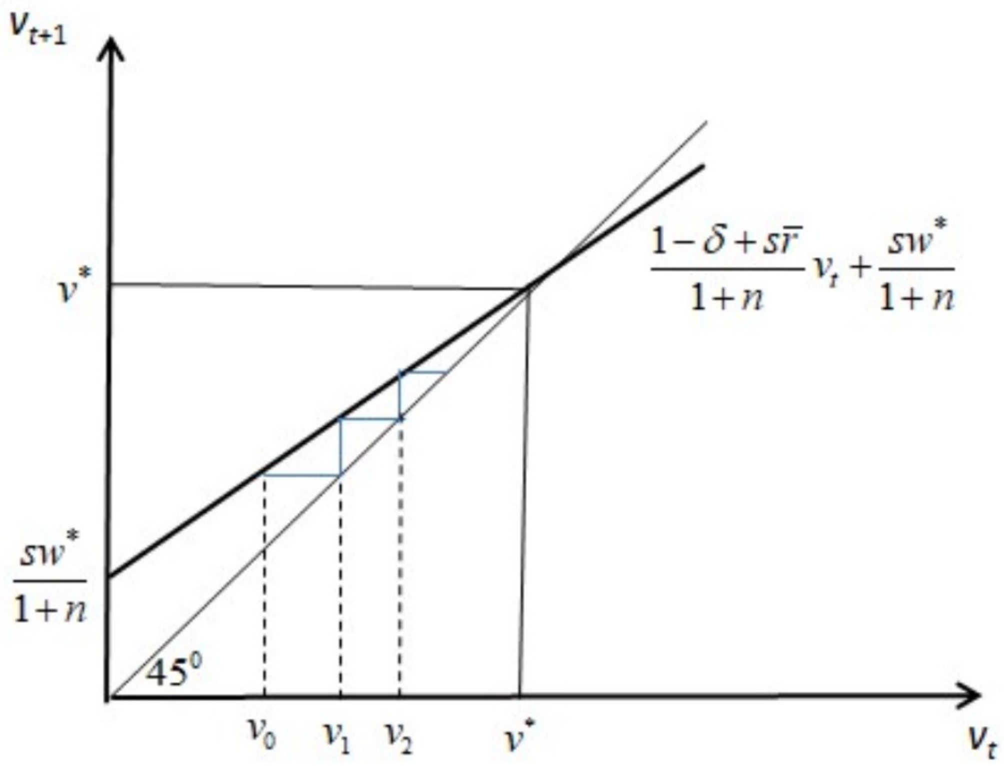
$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[s(w^* + \bar{r}v_t) + (1-\delta)v_t\right],$$

Solowligning

$$v_{t+1} - v_t = \frac{1}{1+n}\left[s(w^* + \bar{r}v_t) - (n+\delta)v_t\right],$$

Steady-state

$$v = v^* \equiv \frac{s}{n+\delta-s\bar{r}}w^* = \frac{\frac{s}{n+\delta}}{1-\frac{s}{n+\delta}\bar{r}}w^*,$$



OPGAVER

Exc. 4.1: Elasticiteten af y^{n*} mht. s

Vi skal undersøge elasticiteten af y^{n*} mht. s for hhv. en åben og en lukket økonomi.

0) Hvad siger elasticiteten af y^{n*} mht. s noget om? Hvis vi skal gætte, hvilke faktorer kunne vi forestille os var medvirkende til, at den måske er anderledes end i den lukkede økonomi?

Exc. 4.1: Elasticiteten af y^{n*} mht. s

Vi skal undersøge elasticiteten af y^{n*} mht. s for hhv. en åben og en lukket økonomi.

0) Hvad siger elasticiteten af y^{n*} mht. s noget om?

Intuition:

- Elasticiteten af y^{n*} mht. s siger noget om, hvor meget en ændring i opsparingsraten påvirker y^{n*} , dvs. nationalindkomst pr. indbygger
- Realrenten er afgørende for afkastet på investeringerne i fysisk kapital (husk, vi har ikke human kapital længere, så alle investeringer går til fysisk kapital). Dermed er realrenten også afgørende for, hvor stor en effekt en stigning i s har på y^{n*}
- Hvis $\bar{r} = r_c^*$, dvs. hvis realrenten i åben og lukket økonomi er den samme, vil elasticiteten også være den samme. Det viser vi senere!

Exc. 4.1: Elasticiteten af y^{n*} mht. s

1) Vis med udgangspunkt i ligning (27), at elasticiteten af y^{n*} mht. s er givet ved $\varepsilon_{open} = \frac{\frac{s}{n+\delta}\bar{r}}{1-\frac{s}{n+\delta}\bar{r}}$

Hints:

- Ligning (27) er givet ved $y^{n*} = (1-\alpha)B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{1}{1-\frac{s}{n+\delta}\bar{r}}\right)$
- Tag ln og brug $\varepsilon = \frac{\partial ln y_t^n}{\partial s} * s$

2) Vis, at ε_{open} kan skrives som $\varepsilon_{open} = \frac{\alpha\tilde{r}}{1-\alpha\tilde{r}}$, hvor $\tilde{r} = \bar{r}/r_c^*$ og at hvis $\bar{r} = r_c^*$, kan dette omskrives til indkomstelasticiteten for den lukkede økonomi $\varepsilon_{closed} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

Hint: Brug $r_c^* = \alpha\frac{n+\delta}{s} \Rightarrow \frac{s}{n+\delta} = \alpha/r_c^*$ og husk hvad det implicerer for $\tilde{r}$, hvis $\bar{r} = r_c^*$

Exc. 4.1: Elasticiteten af y^{n*} mht. s

3) Vis, at hvis et lands opsparingstilbøjelighed målt ved $\frac{s}{n+\delta}$ er større end den var i tilfældet, hvor $\bar{r} = r_c^*$, vil elasticiteten af y^{n*} mht. s være større i den åbne økonomi end i den lukkede økonomi, dvs.

$$\varepsilon_{open} = \frac{\alpha\tilde{r}}{1-\alpha\tilde{r}} > \varepsilon_{closed}$$

Hint: Tag udgangspunkt i hhv. $\bar{r}$ og r_c^*. Hvordan påvirkes de hver især af en ændring i opsparingstilbøjeligheden?

4) Forklar intuitivt, hvorfor elasticiteterne i hhv. åben og lukket økonomi påvirkes forskelligt af en stigning i opsparingstilbøjeligheden

Exc. 4.1: Elasticiteten af y^{n*} mht. s

4) Forklar intuitivt, hvorfor elasticiteterne i hhv. åben og lukket økonomi påvirkes forskelligt af en stigning i opsparingstilbøjeligheden

Intuition:

- I en lukket økonomi medfører en relativt høj opsparingstilbøjelighed en høj kapitalintensitet, hvilket resulterer i et lavt marginalprodukt til kapital. Det fører til $r_c^* < \bar{r}$
- I en åben økonomi vil gevinsten ved en stigning i opsparingstilbøjeligheden i SS være større, fordi den opsparing (kan) investeres på det internationale kapitalmarked til $\bar{r}$ og dermed med en højere realrente end i den lukkede økonomi.

Exc. 4.4: Permanent stigning i opsparingsraten s

Vi skal undersøge effekten af en permanent stigning i opsparingsraten s i en lille, åben økonomi. Betragt en situation, hvor s stiger permanent til et nyt, højere niveau s'. Stigningen er tilpas lille til, at vores stabilitetsbetingelse $s\bar{r} < \delta + n$ stadig er opfyldt, ligesom landets status som nettoeksportør- eller importør af kapital ikke ændres.

1) Forklar effekten af stigningen med udgangspunkt i transitionsligningen og vis hvordan ændringen påvirker transitionsdiagrammet. Forklar hvad der sker.

Hint: Husk at transitionsligningen er givet ved

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}[s(w^* + \bar{r}v_t) + (1-\delta)v_t] = \frac{sw^*}{1+n} + \frac{s\bar{r} + 1 - \delta}{1+n}v_t$$

hvor $\frac{sw^*}{1+n}$ er skæringen med y-aksen

Exc. 4.4: Permanent stigning i opsparingsraten *s*

1) Forklar med udgangspunkt i transitionsligningen og vis hvordan ændringen påvirker transitionsdiagrammet. Forklar hvad der sker.

Hint: Husk at transitionsligningen er givet ved

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}[s(w^* + \bar{r}v_t) + (1-\delta)v_t] = \frac{sw^*}{1+n} + \frac{s\bar{r} + 1 - \delta}{1+n}v_t$$

Intuition:

- Stigningen i s påvirker vores opsparing pr. capita, som er givet direkte i transitionsligningen ved $sy_t^n = s(w^* + \bar{r}v_t)$ og indgår direkte og kan opdeles i opsparing fra løn (sw^*) og opsparing fra kapitalindkomst $s\bar{r}v_t$.
- Stigning i sw^* påvirker transitionsdiagrammet gennem første led, dvs. skæringen med y-aksen. Den stiger, fordi vi kan investere mere – vi starter fra et højere niveau.
- Opsparingen fra kapitalindkomst stiger også: vi geninvesterer mere af vores kapital, og akkumulerer endnu mere kapital. Hældningen bliver derfor stejlere i transitionsdiagrammet

Exc. 4.4: Permanent stigning i opsparingsraten s

2) Antag at økonomien er i SS når stødet til opsparingsraten sker. Forklar hvordan økonomien påvirkes af stødet:

- Hvad er effekten af stigningen i s on impact?
- Hvad er effekten af stigningen i s på lang sigt?
- Kommentér på $k_t, y_t, w_t, y_t^n, c_t og\ s_t$
- Tag udgangspunkt i ligningerne i højre side

3) Sammenlign den nye og gamle SS for hhv. y_t, y_t^n, c_t og f_t med udgangspunkt i ligningerne fra før og $f^* = v^* - k^*$.

$$k^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$w^* = (1-\alpha) B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$y_t^n = w^* + \bar{r} v_t^* = w^* + \bar{r} \frac{sw^*}{n + \delta - s\bar{r}}$$

$$c_t = (1-s) y_t^n$$

$$s_t = s y_t^n$$

$$v_{t+1} = \frac{sw^*}{1+n} + \frac{1 - \delta + s\bar{r}}{1+n} v_t$$

Exc. 4.4: Permanent stigning i opsparingsraten *s*

2) Intuition:

- Det ses af de første 3 ligninger, at k*, y* og w* ikke påvirkes af stigningen af s. Til gengæld påvirkes både forbrug og opsparing:
  - **On impact** ser vi derimod et fald i forbrug, c_t, og stigning i opsparing pr. capita, s_t
  - **På langt sigt** investeres s_t på udenlandske kapitalmarkeder og flyder dermed ud af landet. Dette er grunden til, at k^*, y^* og w^* er uændrede og ikke påvirkes af stigningen af s.
- Kigger vi på nationalindkomsten, y^n, vil den stige, som følge af de ekstra investeringer i udlandet, der begynder at give afkast. On impact påvirkes nationalindkomsten således ikke, idet afkastet fra de ekstra investeringer først kommer i perioden efter.

3) Intuition

- y_t forbliver uændret i SS, y^nnationalindkomst, vil konvergere mod en ny højere SS, som følge af stødet.
- c_t og s_t er højere i den nye SS, som følge af stigningen i y^n og stigningen i s_t
- Fortegnet på f, dvs. landets status som nettoimportør eller –eksportør af kapital påvirkes ikke, fordi ændringen er så tilpas lille, at stabilitetsbetingelsen stadig er opfyldt $s\bar{r} < \delta + n$

Tak for i dag!

INGEN HJEMMEOPGAVE I NÆSTE UGE! ENJOY

8. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

Dagens program

- Gennemgang af hjemmeopgave
- Exercise 7.1
- Exercise 7.2
- Exercise 7.3

- **HUSK AT AFLEVERE HJEMMEOPGAVE 6 I NÆSTE UGE**

Hjemmeopgave 4

2.1 Tænk på, hvilke mennesker det er, der har en høj kapitalindkomst og hvorfor det netop er dem, der har en høj kapitalindkomst

2.2 Pilediagram – super godt de fleste steder!

2.3 Husk at kommentere på forekomsten af ren profit. Følger af ligningen for profit

$$\pi = Y - rk - wL = Y^r + Y^w - rK - wL = 0$$

2.4 Vis forskellige udtryk, generelt super godt!

2.5 Flere af jer overgør det – hold det helt simpelt! Transitionsligningen: Kapital i næste periode er givet ved det tilbageværende kapital i denne periode (efter nedslidning) plus investeringer.

2.6 Her er der flere der snubler. Husk at redegøre for de antagelser vi gør os, om modellens dynamik, hvorfor vi har konvergens. Vi gennemgik det sidste gang – se slides.

Skriv meget gerne betingelserne op før i viser at de gælder. **Husk:** Den gode opgave skitserer, hvordan konvergensen ser ud i et transitionsdiagram, når antagelserne er opfyldt

Hjemmeopgave 4

2.7 Første del spiller for jer alle samen, udledning af st. st. værdier. Men – husk mellemregninger. Hvis man kun angiver et resultat giver det 0 point (også selvom der står angiv i opgaven).

Anden del er der flere der har lidt problemer i: Hvilke værdier af c^r maksimerer hhv C^w og C^r. Tag udgangspunkt i de st. st. udtryk I har fundet. Man kan argumentere sig til det første (c^r skal være så lille som muligt), men grundet modsatrettede effekter kan man ikke se det direkte af den næste. Det nemmeste: tag ln og differentier mht. c^r

2.8 Gør jer selv den tjeneste at gøre jer umage her! Det er i afleveringerne I har mulighed for at øve jeres intuition, som er der I henter point til eksamen. 3 linjer er ikke uddybende.

Derudover – tag udgangspunkt i jeres pilediagram, nu hvor I alligevel har det og sørg for for at komme omkring alle variable ☺

Link til rettevejledning: http://web.econ.ku.dk/polit/studerende/eksamen/opgrv/filer/rv%20Makro%20a-rex%20aug%2014-rv.pdf

Kapitel 7 – Solow med udtømmelige ressourcer (i dag: land)

- I får kun en kort introduktion til den her i faget – vi skal kun arbejde med den i dag. Modellen tager udgangspunkt i Malthusmodellen, som er den model faget økonomisk historie primært beskæftiger sig med (obligatorisk fag senere på BA)
- Introduktion af land: Logikken er, at land fungerer som en input faktor i produktionen (tænk landbrugssamfund), men at der er aftagende marginalprodukt til land, fordi mængden af land er konstant.
- Dette vil på lang sigt betyde faldende produktion pr. arbejder, indtil vi når subsistensminimum (mindste indkomst der skal til, for at vi kan overleve).
  - Hvis vi er rigere end subsitensminimum => flere fødsler => befolkningsvækst => konvergens mod lavere velstand pr. capita
  - Hvis vi er under subsistensminimum => Sultedød => konvergens mod højere velstand pr. capita

- Måske ikke så relevant for Danmark i dag, men måske stadig for nogle u-lande?
- Desuden: I vores Solow-model har vi inkluderet teknologisk vækst, hvilket gør den modelverden vi betragter markant mindre deprimerende, fordi det betyder, at vi godt kan have økonomisk vækst, hvis den teknologiske vækst er høj nok relativt til befolkningsvæksten (kigger vi på senere)

Introduktion til kapitel 7 – Solow med land

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^\beta X^\kappa, \qquad \alpha + \beta + \kappa = 1$$

Rent matematisk:

- Konstant skalaafkast til K_t, L_t og X (til sammen), men nu aftagende skalaafkast til K_t og L_t. Replikationsargumentet gælder ikke længere!

Økonomisk:

- Kapitel 3 og 5: I SS vil fordobling af L_t vil føre til fordobling af K_t og Y_t
- Kapitel 7: Fordobling af L_t vil føre til fordobling af K_t i SS, men Y_t vil ikke fordobles! Befolkningsvækst fører altså til fald i y^* (Malthus-tankegang

Hvorfor inkludere land?

- Virker vel egentlig meget rimeligt at inkludere land eller andre former for naturressourcer, der tager højde for at vi ikke kan øge produktionen for evigt uden teknologiske fremskrift
- Inklusionen af land medfører langsommere vækst ift. den oprindelige Solow-model, hvor den som vi tidligere har snakket om var for høj ift. Hvad vi observerer rent empirisk

Introduktion til kapitel 7 – Solow med land

Transitionsligning :

$$z_{t+1} = \frac{1}{[(1+g)(1+n)]^{\beta}} \left(s + z_t(1-\delta)\right)^{1-\alpha} z_t^{\alpha}$$

Steady state :

$$z^* = \frac{s}{[(1+g)(1+n)]^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} - (1-\delta)}$$

Introduktion til kapitel 7 – Solow med land

Vækstrate i y^* er i SS givet ved

$$g^y \approx \frac{\beta g}{1-\alpha} - \frac{\kappa n}{1-\alpha}$$

Bemærk

- **To modsatrettede effekter!** Positiv effekt fra teknologisk vækst (g), negativt bidrag fra befolkningsvækst
- Den teknologiske vækstrate skal være højere end befolkningsvæksten, for at der kan være positiv vækst i BNP pr. arbejder
- Fortolkningen af κ: Vigtigheden af land i produktionen. Lande, der er meget afhængige af land har et stort $\kappa \Rightarrow$ stort *growth drag*

- I forhold til tidligere, har den teknologiske vækst mindre effekt på vækstraten i BNP pr. arbejder og befolkningsvækst har en direkte negativ effekt på vækstraten

Exc. 7.1 – Eksakte vækstrater og balanceret vækst i SS

1) Vis, at den eksakte vækstrate i Solowmodellen med land er givet ved $g^{ye} = (1+g)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}}\left(\frac{1}{1+n}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} - 1$

Hints:

- **Step 1**: Opskriv y_t for periode t og $t-1$. Divider dem med hinanden.
- **Step 2**: Divider dem med hinanden (y_t/y_{t-1}) og forkort.
- Husk, at $g^A = g$ og at $x_t = XL_t$, dvs. X er en konstant. Vi har derfor $\frac{X}{L_t}/\frac{X}{L_{t-1}} = \frac{X}{L_t}\cdot\frac{L_{t+1}}{X} = \frac{L_{t+1}}{L_t} = \left(\frac{L_t}{L_{t+1}}\right)^{-1} = (1+n)^{-1}$ Brug, at vækstraten i k_t og y_t må være den samme i SS, fordi z_t er konstant i SS.
- Husk desuden at $\alpha+\beta+\kappa = 1 \Leftrightarrow 1-\alpha = \kappa+\beta$ og at vækstraten er defineret som $g^{ye} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1$

2) Vis, at den approksimative vækstrate er givet ved $g^y \approx \frac{\beta}{\beta+\kappa}g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa}n$

Hint: Tag udgangspunkt i g^{ye} og brug, at $a-1 \cong \ln(a)$

Exc. 7.1 – Eksakte vækstrater og balanceret vækst i SS

3) Vis, at modellen udviser balanceret vækst, ved at vise at 1) w_t vokser med samme vækstrate som både y_t og k_t, 2) r_t er konstant og 3) v_t, afkastet/reallejesatsen på land vokser med samme vækstrate som Y_t og at når $n > 0$, vokser v_t med en højere vækstrate end w_t

Hints

- Tag udgangspunkt i indkomstandelene $\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{w_t}{y_t} = \beta$ og $\frac{r_t K_t}{Y_t} = r_t z_t = \alpha$, og husk hvad der gælder om y_t og z_t i SS
- Indkomstandelen for land er givet ved $\frac{v_t X}{Y_t} = \kappa$. Overvej, hvad vi ved om κ, X og Y_t

4) Antag, at $n > 0$ men at $g \approx 0$. Forklar, hvordan r_t, w_t og v_t udvikler sig over tid (det relative størrelsesforhold). Hvis antallet af jordejere er mere eller mindre konstant, hvordan vil deres levestandard udvikle sig i forhold til de almindelige arbejdere? Relatér til Piketty's teser

Hint: Opskriv vækstraterne fra før og sammenlign dem med de nye parameterværdier.

Exc. 7.1 – Eksakte vækstrater og balanceret vækst i SS

4) Antag, at $n > 0$ men at $g \approx 0$. Forklar, hvordan r_t, w_t og v_t udvikler sig over tid (det relative størrelsesforhold). Hvis antallet af jordejere er mere eller mindre konstant, hvordan vil deres levestandard udvikle sig i forhold til de almindelige arbejdere? Relatér til Piketty's teser

Hint: Opskriv vækstraterne fra før og sammenlign dem med de nye parameterværdier.

Intuition:

- **Indkomsten, Xv_t for kapitalejerne vil stige og gradvist give højere og højere afkast**
- **Lønnen for arbejderne vil falde, så de vil blive fattigere og fattigere, indtil de når subsistensminimum**
- **Vi vil ende i en nedern ligevægt, hvor nogen er så fattige at de lever på subsistensminimum og andre er virkelig rige $\Rightarrow$ stor ulighed!**
- **Tænk på Piketty: Han argumenterer lige præcis for, at det er en situation som den her, der har gjort, at vi har så stor ulighed i dag, hvor et lille antal mennesker ejer en meget stor andel af den samlede velstand!**

Exc. 7.3 – Golden rule

1) Find den opsparings-/investeringsrate, s, der maksimerer forbruget pr. arbejder, y_t, i SS. Sammenlign bagefter med den golden rule vi fandt sidste gang ($s_K = \alpha$).

Hints:

- Tag udgangspunkt i ligning (17), og brug den til at bestemme $c_t^* = (1-s)y_t^*$. Det er en god idé også at bruge SS værdien for z_t^* til noget ;-)
- Find herefter $\ln c_t^*$ og maksimer mht. til s ved at differentiere mht. s
- Husk logeritmeregnereglerne fra sidst
- Husk, at α i dette kapitel kalibreres til ≈ 0.2

Ligning (17) angiver vækstbanen for $y_t^* = (z_t^*)^{\frac{\alpha}{\beta+\kappa}} \gamma$, hvor $\gamma = A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} (1+g)^{-\frac{\kappa}{(\beta+\kappa)t}}$ og

$$z_t^* = \frac{s}{[(1+n)(1+g)]^{\beta/(\beta+\kappa)} - (1-\delta)}$$

Exc. 7.2 – Solow med land i kontinuert tid

1) Vis, at y og z er givet ved hhv.

$$\boldsymbol{y = k^{\alpha} A^{\beta} x^{\kappa}} \text{ og } \boldsymbol{z = k^{1-\alpha} A^{-\beta} x^{-\kappa}}$$

Hint: Følger umiddelbart, hvis I anvender de gængse definitioner af y og z.

2) Vis, at *law of motion* for z er givet ved $\dot{z} = (\beta + \kappa)s - \lambda z$, hvor $\lambda \equiv (\beta + k)\delta + \beta(n + g)$ og dermed er lineær i z

Hint:

- Start med udtrykket for z, som vi fandt før
- Tag ln og differentier mht. tid (t)
- Brug definitionerne i boksen og definitionen af λ

Solow med land i kontinuert tid

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{\beta} X^{\kappa}, \quad \alpha, \beta, \kappa > 0, \quad \alpha + \beta + \kappa = 1,$$

$$\dot{K} = sY - \delta K, \quad 0 < s, \delta < 1,$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \quad n \geq 0$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = g, \quad g \geq 0.$$

Nyttige definitioner

$$k \equiv \frac{K}{L} \Rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - n$$

$$x = \frac{X}{L} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = -n \text{ og } \frac{\dot{A}}{A} = g$$

Exc. 7.2 – Solow med land i kontinuert tid

3) Vis, at SS værdien for kapital-output ratioen er givet ved

$$z^* = \frac{s}{\frac{\beta}{\beta+\kappa}(n+g)+\delta}$$

og illustrer konvergens mod z^* i et transitionsdiagram

Hint:

- Udnyt, at $\dot{z} = 0$ i SS (se forrige slide) og isolér z
- Transitionsdiagrammet bliver tegnet med z på x-aksen og $\dot{z}$ op ad y-aksen. Kig godt på transitionsligningen – hvad sker der?

4) Vis, at vækstraten i y i SS er præcis $\frac{\beta g - \kappa n}{\beta+\kappa}$ og sammenlign med den vækstrate vi fandt tidligere

Hint: Vi gjorde præcis det samme i exc. 7.1 – bare i diskret tid

Solow med land i kontinuert tid

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{\beta}X^{\kappa}, \quad \alpha,\beta,\kappa > 0, \quad \alpha+\beta+\kappa = 1,$$

$$\dot{K} = sY - \delta K, \quad 0 < s, \delta < 1,$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \quad n \geq 0$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = g, \quad g \geq 0.$$

Nyttige definitioner

$$k \equiv \frac{K}{L} \Rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - n$$

$$x = \frac{X}{L} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = -n \text{ og } \frac{\dot{A}}{A} = g$$

Tak for i dag!

HUSK AFLEVERING AF HJEMMEOPGAVE 6 I NÆSTE UGE

7. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Dagens program

- Gennemgang af hjemmeopgave
- Exercise 6.4
- Exercise 6.6
- Exercise 6.7

- **HUSK AT AFLEVERE HJEMMEOPGAVE 4**

Hjemmeopgave 3

- **Opgave 2.3**: I fik alle sammen udledt SS-værdierne, men mange af jer når ikke helt i mål
  - Husk, at I også skal vise, at modellen indebærer konvergens. Tag udgangspunkt i transitionsligningen, og vis at INADA-betingelserne er opfyldt.
  - Desuden, skal I give en vurdering af ***z*.*** Nogle af jer springer den over – husk til eksamen, at det er bedre at give et bud end bare at springe den over!
  - Normalt siger man, at $n + g + \delta + ng \approx 0{,}075$, så det er kun opsparingsraten I skal tage stilling til ☺

- **Opgave 2.8**: Mange af jer springer den over ☹ Husk, at alle opgaver er relevante, når det er en eksamensopgave!

Exc. 6.4: Golden rule

Golden rule er den opsparingsrate der maksimerer privatforbruget pr. arbejder i SS. Vi skal vise, at de optimale værdier for s_K og s_H er hhv. α og φ.

$$c_t^* = A_0(1+g)^t(1-s_K-s_H)\left(\frac{s_K}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{s_H}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

Hint

- Tag ln og differentier mht. hhv. s_K og s_H. Husk, at $\frac{d}{dx}(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x}$
- Sæt lig 0 og isolér s_K og s_H i hver deres ligning. Herefter kan man indsætte det ene udtryk i det andet og forkorte yderligere.

Exc. 6.4: Golden rule LØSNING

Vi regnede opgaven indtil den sidste del på tavlen. For lige at komme med et recap, tog vi ln og differentierede mht. s_H og s_K, hvorefter vi isolerede hhv. s_H og s_K, så vi havde to ligninger med to ubekendte. I dette step, indsætter vi vores udtryk for s_K i ligningen for s_H.

$$s_H = \frac{1-s_K}{1-\alpha} * \varphi \Leftrightarrow s_H = \frac{1-\left(\frac{(1-S_H)}{1-\varphi} * \alpha\right)}{1-\alpha} * \varphi \Leftrightarrow (1-\alpha)s_H = \varphi - \alpha\varphi\frac{(1-S_H)}{1-\varphi} \Leftrightarrow (1-\alpha)s_H + \alpha\varphi\frac{(1-S_H)}{1-\varphi} = \varphi$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)(1-\varphi)s_H + \alpha\varphi(1-s_H) = \varphi(1-\varphi) \Leftrightarrow s_H + \alpha\varphi s_H - \alpha s_H - \varphi s_H + \alpha\varphi - \alpha\varphi s_H = \varphi(1-\varphi)$$

$$\Leftrightarrow s_H - \alpha s_H - \varphi s_H + \alpha\varphi = \varphi(1-\varphi) \Leftrightarrow s_H(1-\alpha-\varphi) = \varphi(1-\alpha-\varphi) \Leftrightarrow \boldsymbol{s_H = \varphi}$$

Herefter kan vi finde s_K ved at indsætte vores løsning for s_H i vores udtryk for s_K.

Exc. 6.6: Simulation

- Vi skal simulere og analysere effekten af parameterændringer i Solowmodellen med humankapital ift. et baseline scenarie med følgende parameterværdier

$$\alpha = \phi = \frac{1}{3}, \qquad s_K = 0{,}12, \qquad s_H = 0{,}2, \qquad \delta = 0{,}055$$
$$n = 0, \qquad g = 0{,}02, \qquad A_0 = 1$$

- Økonomien udvikler sig som i SS i vores baseline scenarie i periode 0-9
- I periode 10 kommer der et permanent stød til en eller flere af vores parametre (husk at tjekke for prædeterminerede variable!). De øvrige parametre er uændrede).

Exc. 6.6 – pt. 1

- Antag, at vi er i SS. Betragt følgende 3 scenarier, og illustrer dem i et fasediagram
  - Stigning i $s_K \rightarrow s_K' = 0{,}24$
  - Stigning i $s_H \rightarrow s_H' = 0{,}25$
  - Stigning i $s_K \rightarrow s_K' = 0{,}24$ og fald i $s_H \rightarrow s_H' = 0{,}15$

- Brug 5 minutter, på at diskutere hvad der sker for hvert af de 3 scenarier
- Hint: Kig på ligning (24) og (25) i bogen, for at se hvordan parameterændringer påvirker graferne i vores fasediagram.

Exc. 6.6 – pt. 2

- Vi skal nu simulere de 3 scenarier.
- For hvert scenarie skal I lave 4 diagrammer:
- **Diagram 1:** Udviklingen af $\ln y_t$ som funktion af tid, $t = 0,1,2,\dots,200$.
  - Skal vise 3 grafer: gammel SS, ny SS og hvordan $\ln y_t$ udvikler sig i det alternative scenarie

- **Diagram 2**: Samme som diagram 1, blot med $\ln c_t$
- **Diagram 3**: Samme som diagram 1, blot med udviklingen i vækstraten $g_t^y = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$
- **Diagram 4**: Samme som diagram 1, blot med udviklingen i K_t/Y_t og H_t/Y_t

Exc. 6.6 – nyttige ligninger

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right)$$

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right)$$

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s_K^{1-\varphi} s_H^{\varphi}}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{h}^* = \left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha}}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi}$$

$$y_t = A_0(1+g)^t \tilde{y}_t$$

$$c_t = (1-s_K-s_H)y_t$$

$$g_t^y = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$$

$$\frac{K_t}{Y_t} = \frac{\tilde{k}_t}{\tilde{y}_t} \quad \frac{H_t}{Y_t} = \frac{\tilde{h}_t}{\tilde{y}_t}$$

Exc. 6.6 – scenarie 1

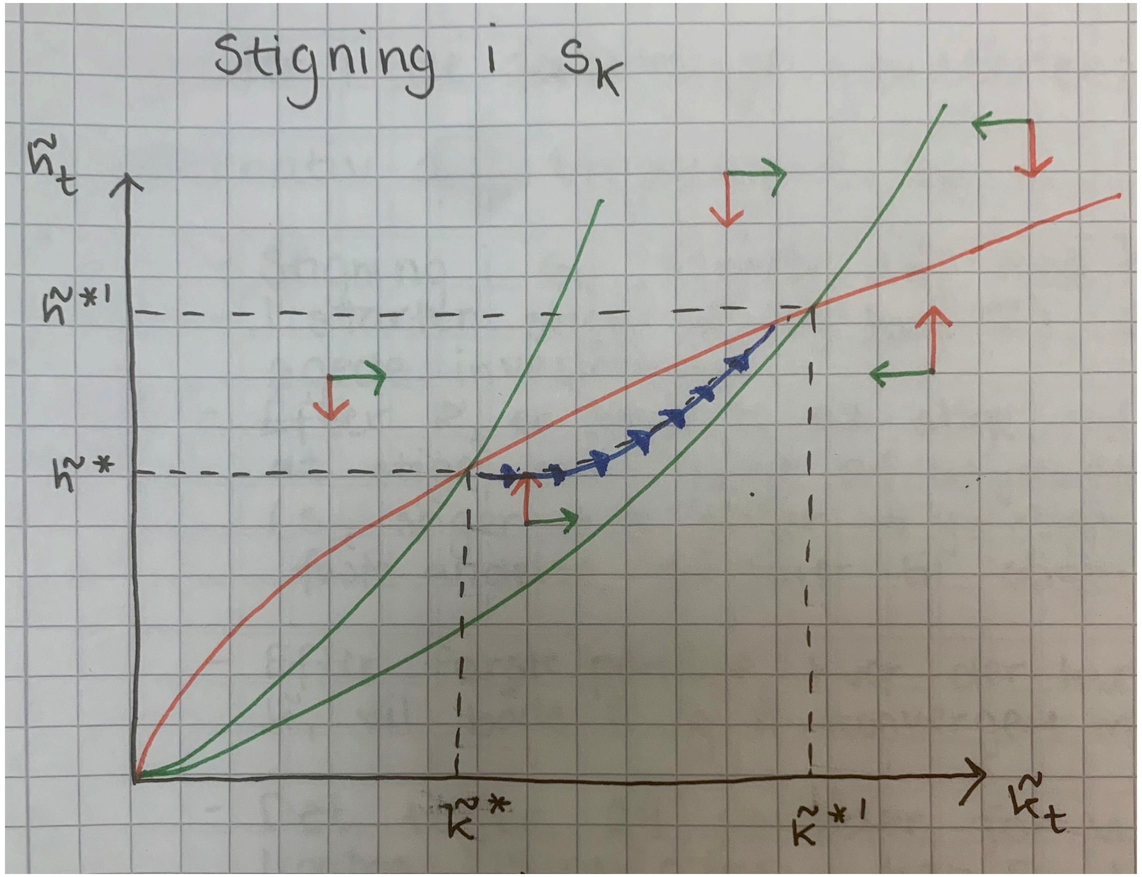
- Stigning i $s_K \rightarrow s_K' = 0{,}24$

- Hvilken effekt har denne ændring på økonomien jf. diagrammerne?
- Hvordan påvirker det halveringstiden, dvs. antal perioder før halvdelen af afstanden til den nye st. st. er tilbagelagt, for $\tilde{y}_t$? Sammenlign med halveringstiden fra kap. 5.
- Forklar transitionen til den nye SS.

Exc. 6.6 – scenarie 1 INTUITION

Stigning i s_K

- En stigning i s_K vil rent grafisk flytte $\Delta\tilde{k}_t$ mod højre i fasediagrammet.
- Stigningen fører i starten til en stigning i $\tilde{k}_t$ - og kun $\tilde{k}_t$(!), som følge af de øgede direkte investeringer
- I takt med, at $\tilde{k}_t$ begynder at stige, vil $\tilde{h}_t$ også stige som følge af krydseffekterne (s_K stiger → k stiger → y stiger og betyder, at der i kroner og ører vil blive investeret mere også i $\tilde{h}_t$, fordi s_H er en fast andel.
- To perioder efter stødet, vil det derfor også slå igennem i $\tilde{h}_t$, og både $\tilde{h}_t$ og $\tilde{k}_t$ vil konvergere mod en ny, højere SS.



Exc. 6.6 – scenarie 2

- Stigning i $s_H \rightarrow s'_H = 0{,}25$

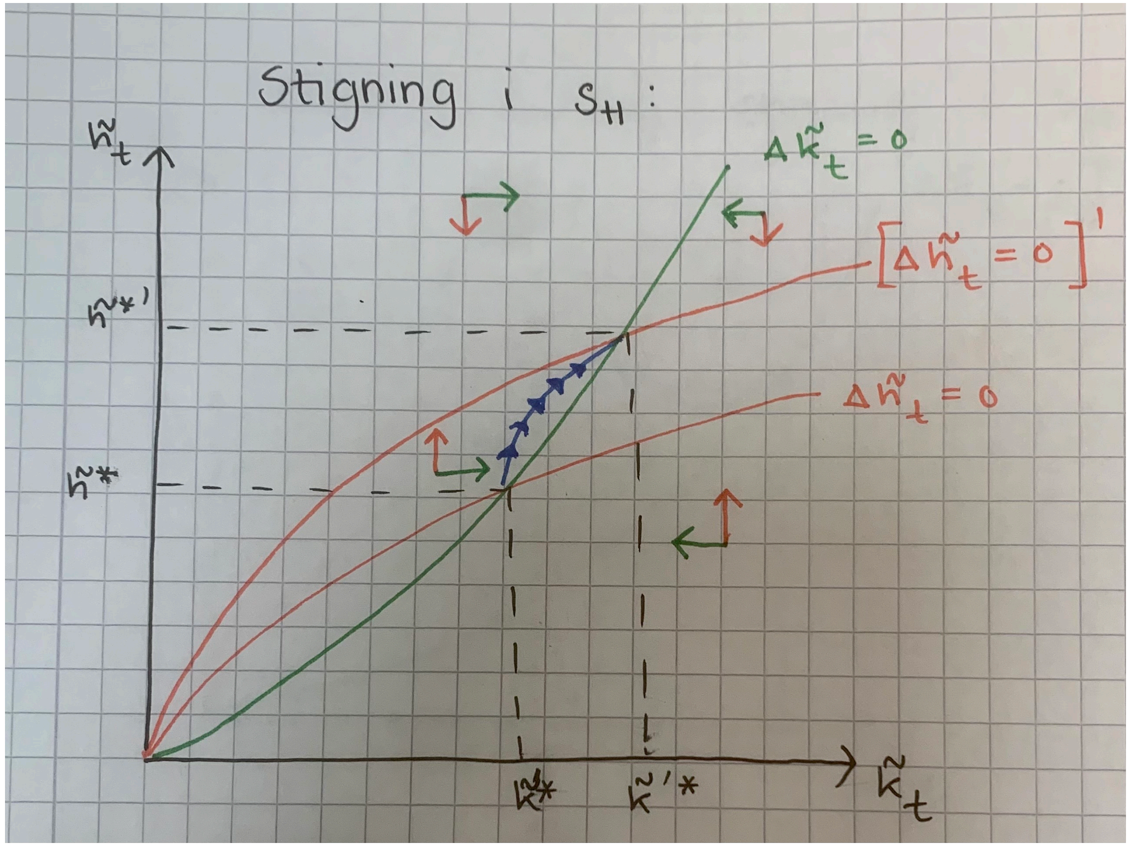
- Hvilken effekt har denne ændring på økonomien jf. diagrammerne?
- Hvordan påvirker det halveringstiden, dvs. antal perioder før halvdelen af afstanden til den nye st. st. er tilbagelagt, for $\tilde{y}_t$? Sammenlign med halveringstiden fra kap. 5.
- Forklar transitionen til den nye SS.

Exc. 6.6 – scenarie 2 INTUITION

Stigning i s_H

- Samme intuition som i forrige spørgsmål (bare omvendt).

- For begge scenarier gælder, at man må ofre noget forbrug i starten, for at kunne opnå højere forbrug på sigt. Det tager hhv. 12 og 15 år, før man er tilbage på det niveau man havde før parameterændringen.
- Det kan være grund til, at de fattige lande ikke har samme muligheder for at øge deres (forholdsvis lave) investeringsrater, selvom det ville være gavnligt for deres økonomi på længere sigt.



Exc. 6.6 – scenarie 3

- Stigning i $s_K \rightarrow s_K' = 0{,}24$ og fald i $s_H \rightarrow s_H' = 0{,}15$

- Hvilken effekt har denne ændring på økonomien jf. diagrammerne?
- Forklar transitionen til den nye SS

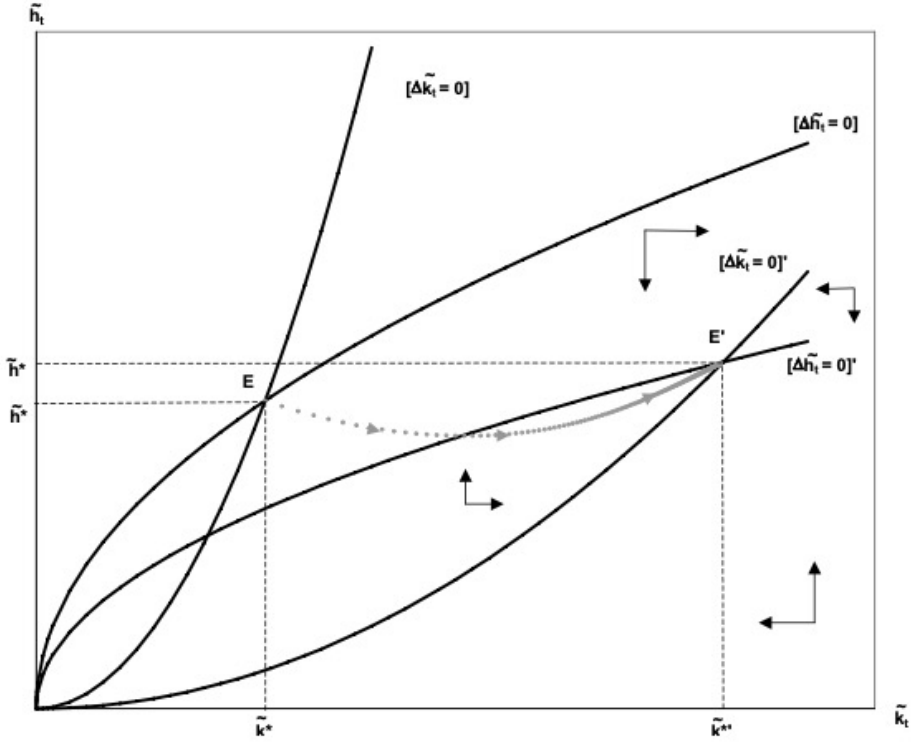
- Responderer økonomien altid på parameterændringer med et "growth-jump"?

Exc. 6.6 – scenarie 3 INTUITION

Stigning i s_K og fald i s_H

- Rent grafisk: $\Delta\tilde{h}_t$ rykker ned og $\Delta\tilde{k}_t$ flytter op i fasediagrammet.
- Begge ændringer træder igennem umiddelbart efter parameterændringen (perioden efter)
- Imidlertid vil den positive effekt fra stigningen i kapital den dertilhørende øgede kapitalakkumulation på et tidspunkt (i dette tilfælde) blive så stærk, at udviklingen $\tilde{h}_t$ vendes, og bliver til en positiv udvikling.
- Det skyldes, at ændringen i s_K er større end ændringen s_H.

- Om vækstraten gælder der for alle 3 scenarier, at den "hopper" som følge af stødet, men efterfølgende konvergerer tilbage mod det gamle niveau.



Exc. 6.7 – Udledning af værdier for φ og α

Vi skal finde en måde at estimere α og φ ud fra den information der er givet i ligning (39), (40) og (41) og efterfølgende sammenligne med den teoretiske værdi vi plejer at bruge (dvs. 1/3)

$$(39):\ \frac{\ln y_T - \ln y_0}{T} \approx g + \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}\ln A_0 - \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}\ln y_0 + \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}\,\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}\left[\ln s_K - \ln(\cancel{s_K}\, n+g+\delta+ng)\right]$$

$$+\ \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}\,\frac{\cancel{\alpha}\varphi}{1-\alpha-\varphi}\left[\ln s_H - \ln(n+g+\delta+ng)\right]$$

$$(40)\quad g^i_{T,0} = \beta_0 - \beta_1(\ln y^i_0) + \beta_2\left[\ln s^i_K - \ln(n^i+0.075)\right] + \beta_3\left[\ln s^i_H - \ln(n^i+0.075)\right]$$

Exc. 6.7 – Udledning af værdier for φ og α

- Ud fra ligning (39) og (40) kan vi opskrive følgende udtryk for β_1, β_2 og β_3.

$$\beta_1 = \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}$$

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi} \quad \text{og} \quad \beta_3 = \beta_1 \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}$$

Hint: Løs β_2 og β_3 som to ligninger med to ubekendte (α og φ), og løs så de til sidst er udtrykt kun ved parametre. Det er en god idé, at starte med at dividere dem med hinanden.

Brug til sidst parameterestimaterne fra (41) til at bestemme empiriske estimater for α og φ.

$$\begin{aligned} g^i_{2017,1960} &= 0.103 - \underset{(se=0.002)}{0.011} \ln y^i_0 + \underset{(se=0.003)}{0.017} [\ln s^i_K - \ln(n^i + 0.075] \\ &+ \underset{(se=0.003)}{0.012} [\ln s^i_H - \ln(n^i + 0.075)], \qquad \text{adj. } R^2 = 0.48. \end{aligned} \tag{41}$$

Exc. 6.7 – Udledning af værdier for φ og α LØSNING

Step 1: Ved at sammenligne ligning (39) og (40) kan vi finde følgende udtryk for betaværdierne

$$\beta_1 = \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}, \qquad \beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}, \qquad \beta_3 = \beta_1 \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}$$

Step 2: Husk hvad vi leder efter. Det vi skal finde er et udtryk for α og et for φ. Hvis vi kan få dem udtrykt ved β'er, kan vi find et estimat for dem - fordi vi fra ligning (41) har nogle parameterestimater for de forskellige β'er, som vi kan indsætte. Hvis vi kigger på β'erne, er det oplagt at starte fra β_2 og β_3, fordi det kun er dem der indeholder φ og α.

$\frac{\beta_2}{\beta_3} = \frac{\beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}{\beta_1 \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} = \frac{\alpha}{\varphi} \Rightarrow \quad \alpha = \varphi \frac{\beta_2}{\beta_3}$, hvilket kan indsættes i den i den oprindelige ligning for β_3

$$\beta_3 = \beta_1 \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi} = \beta_1 \frac{\varphi}{1-\varphi\frac{\beta_2}{\beta_3}-\varphi} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_3}\varphi - \varphi\right)\beta_3 = \beta_1\varphi \Leftrightarrow \beta_3 - \beta_2\varphi - \beta_3\varphi = \beta_1\varphi \Leftrightarrow$$

$$\beta_3 = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\varphi \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{\beta_3}}{\boldsymbol{\beta_1+\beta_2+\beta_3}}$$

Exc. 6.7 – Udledning af værdier for φ og α LØSNING

Step 3: Indsæt det fundne udtryk for φ i det udtryk vi fandt for α

$$\alpha = \varphi \frac{\beta_2}{\beta_3} = \frac{\beta_3}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \frac{\beta_2}{\beta_3} = \frac{\boldsymbol{\beta_2}}{\boldsymbol{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}}$$

Nu har vi fundet et udtryk for både α og φ, som vi vha. ligning (41) kan finde et parameterestimat for. Jf. ligning (41) har vi $\boldsymbol{\beta_1 = 0,011}$, $\boldsymbol{\beta_2 = 0,017}$ og $\boldsymbol{\beta_3 = 0,012}$, hvilket vi kan indsætte i vores udtryk for $\boldsymbol{\alpha}$ og $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = \frac{0,017}{0,011 + 0,017 + 0,012} = 0,425}$$

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{\beta_3}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = \frac{0,012}{0,011 + 0,017 + 0,012} = 0,3}$$

Konklusion: De estimerede værdier må siges at være forholdsvis tæt på de værdier vi anvender teoretisk ($\frac{1}{3}$). Læs evt. mere på s. 28-30 i kapitel 06.

Tak for i dag!

HUSK AFLEVERING AF HJEMMEOPGAVE 5 I NÆSTE UGE

6. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Dagens program

- Introduktion til kapitel 6 – hvorfor introducere humankapital?
- Exercise 6.1
- Excerise 6.2
- Exercise 6.3
- Excercise 6.4

- **HUSK AT AFLEVERE HJEMMEOPGAVE 3**

Kapitel 6 – Den generelle Solow med Humankapital

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} (A_t L_t)^{1-\alpha-\varphi} \tag{1}$$

$$r_t = \alpha \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{H_t}{A_t L_t}\right)^{\varphi} \tag{2}$$

$$w_t = (1-\alpha) \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{H_t}{A_t L_t}\right)^{\varphi} A_t \tag{3}$$

$$K_{t+1} - K_t = s_K Y_t - \delta K_t, \quad K_0 \text{ givet} \tag{4}$$

$$H_{t+1} - H_t = s_H Y_t - \delta H_t, \quad H_0 \text{ givet} \tag{5}$$

$$L_{t+1} = (1+n) L_t, \quad L_0 \text{ givet} \tag{6}$$

$$A_{t+1} = (1+g) A_t, \quad A_0 \text{ givet} \tag{7}$$

For $0 < \alpha < 1$, $0 < \varphi < 1$, $\alpha + \phi < 1$, $g > -1$ og $n > -1$.

For $\varphi = 0$ $\rightarrow$ kap 5 model, $\varphi = 0$ og $g = 0$ $\rightarrow$ kap 3 model

Introduktion og intuition

- Humankapital er knyttet til den enkelte arbejder, men **akkumuleres** på samme på som kapital jf. forrige slide ⇒ Nu investeres opsparing enten i kapital, s_K eller humankapital, s_H. $s = s_K + s_H$
- Inklusion af humankapital i modellen ændrer dynamikken; idet vi nu oplever nogle selvforstærkende krydseffekter, som vi ikke har i den generelle Solowmodel.

- **Hvorfor inkludere humankapital?** Vi havde et problem med, at vi overvurderede konvergenshastigheden. Ved at inkluderer humankapital falder konvergenshastigheden ⇒ modellen er stadig ikke perfekt; derfor vi fortsat modificerer den resten af semesteret.

Analysetilgang og dynamik (1/3)

Metode: Vi analyserer modellen i tildevariable og ligesom i kap. 5 er de konstante i SS. I SS har vi:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s_K^{1-\varphi} s_H^{\varphi}}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}$$

$$\tilde{h}_t^* = \left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha}}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}$$

$$\tilde{y}_t = \left(\frac{s_K}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s\_H}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

Analysetilgang og dynamik (2/3)

Vi har nu to transitionsligninger og to solowligninger. En for $\tilde{k}_t$ og $\tilde{h}_t$

Transitionsligninger

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right)$$

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t \varphi \ + (1-\delta)\tilde{h}_t\right)$$

Solowligninger

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t\right)$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+\delta+ng)\tilde{h}_t\right)$$

Grafisk analyse: Fasediagram!

Analysetilgang og dynamik (3/3)

Krydseffekter: Der sker en interaktion mellem fysisk kapital og humankapital i modellen, fordi de påvirker y_t og s_H og s_K er konstante andele af den disponible indkomst:

$$s_H \uparrow \Rightarrow \tilde{k}_t \uparrow \Rightarrow \tilde{y}_t \uparrow \Rightarrow \begin{cases} s_H \tilde{y}_t \uparrow & \Rightarrow \tilde{h}_t \uparrow \quad \searrow \\ s_K \tilde{y}_t \uparrow & \Rightarrow \tilde{k}_t \uparrow \quad \nearrow \end{cases} \tilde{y}_t \uparrow \Rightarrow \begin{cases} s_H \tilde{y}_t \uparrow \\ s_K \tilde{y}_t \uparrow \end{cases}$$

Selvforstærkende effekt: Effekten af et stød til s er større, når modellen indeholder humankapital, fordi krydseffekterne virker selvforstærkende.

- Vi har stadig aftagende marginalprodukt, så processen er aftagende og fortsætter ikke evigt. Effekten på BNP/capita af et stød er større, men der går længere tid før vi når SS grundet den lavere konvergenshastighed.

Exc. 6.1: Empirisk check af modellen

En af udfordringerne med Solowmodellen fra kapitel 5 var, at vores SS undervurderede betydningen af opsparing og befolkningsvækst på BNP pr. capita. Hvis vi sætter $\varphi = 0$ og antager $ng \approx 0$ kan vores SS skrives som

$$\ln y_t^* = \ln A_t + \frac{\alpha}{1-\alpha}[\ln s_K - \ln(n+g+\delta)]$$

hvilket svarer til SS i vores model fra kap 5.

Vis vha. dette udtryk, at elasticiteten af y^* mht. s_K og $(n+g+\delta)$ er den samme, og er givet ved $\frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Ved at sætte $\alpha = 1/3$ får vi $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0{,}5$. **Hvordan passer det med empirien?**

Exc. 6.1: Empirisk check af modellen

For at tjekke modellen empirisk skal vi i excel

- Download **Table A, exc. 6.1** fra Absalon (mappen Diverse under Hold 10)

Vi skal plotte to figurer, hvor vi undersøger elasticiteten empirisk

- Beregn logaritmen til $y_{17}, \mathrm{s_k}$ og $n + 0.075$.

HUSK BNP er opgivet relativt til USA, og skal derfor ganges med USA's BNP i 2017 (celle E100) før I tager log

- Plot $\ln y_{17}$ mod hhv. $\ln s_K$ og $\ln(n + 0{,}075)$ i et XY-diagram (så vi har y op ad på y-aksen)
- Tilføj en lineær tendenslinje og aflæs hældningsværdierne (=elasticiteterne)

Hvad kan vi sige ud fra graferne? Er estimaterne i overensstemmelse med modellens teoretiske prædiktering?

Exc. 6.2: Kan modellen rumme inklusion af offentlig sektor?

I denne opgave skal vi modificere modellen til at inkludere en offentlig sektor. Det kræver at vi gøre os en række antagelser:

- Skat på indkomst: konstant rate τ
- For hver periode bruger staten en konstant andel s_H^g af skatteprovenuet på uddannelse. Den resterende andel, $1 - s_H^g$, går til offentligt forbrug.
- Statens investeringer i uddannelse akkumuleres som humankapital hos husholdningerne
- Husholdningerne investerer en konstant andel s_K^p af deres disponible indkomst i kapital og en konstant andel s_H^p i uddannelse/human kapital.

Exc. 6.2: Kan modellen rumme inklusion af offentlig sektor?

Vis, at Solowmodellen med humankapital kan fortolkes til at inkludere en offentlig sektor under disse antagelser **og,** hvis parametrene s_K og s_H er givet ved

$$s_K = (1-\tau)s_K^P \text{ og } s_H = \tau s_H^g + (1-\tau)s_H^p$$

Hints:

- Opskriv tax revenue, privat disponibel indkomst og herefter investeringer i hhv. fysisk kapital og humankapital.
- Sammenlign de nye udtryk for investeringer med de oprindelige udtryk der er givet i modellen: $I_t^K = s_K Y_t$ og $I_t^H = s_H Y_t$

Exc. 6.3: Balanceret vækst i Solow med humankapital

- Diskuter og vis hvorvidt betingelserne for balanceret vækst er opfyldt i Solowmodellen med humankapital.

Husk betingelserne for balanceret vækst

- BNP pr. arbejder y, kapitalintensitet pr. arbejder k og realløn w vokser alle med samme konstante vækstrate g i SS
- Befolkningen (=arbejdskraften) L vokser med konstant vækstrate n
- BNP Y, forbrug C og fysisk kapital K vokser alle med samme konstante vækstrate $n + g$
- K/Y-forholdet og afkastet på kapital, r, er konstant i SS

Exc. 6.3: Balanceret vækst i Solow med humankapital

BNP pr. arbejder y, kapitalintensitet pr. arbejder k og realløn w vokser alle med samme konstante vækstrate g i SS

Hints

- I den her type opgaver, skal man ofte gå slavisk til værks, og bare starte fra en ende af.
- Hvordan ved vi, at y_t vokser med raten g i SS? Tænk i tildevariable og på det vi snakkede om sidst – hvad driver væksten i SS?

Forbrug pr. arbejder:

$C_t = (1-s)Y_t$

Realløn:

$w_t = (1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t{}^{\varphi}A_t$

Kapital-intensitet:

$k^* = A_t\tilde{k}^*$

$$= A_t\left(\frac{s_K^{(1-\varphi)}s_H^{\varphi}}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}$$

Exc. 6.3: Balanceret vækst i Solow med humankapital

Befolkningen (=arbejdskraften) L vokser med konstant vækstrate n

BNP Y, forbrug C og fysisk kapital K vokser alle med samme konstante vækstrate $n + g$

Hint

- Befolkning: Neeeemt
- Kig på log BNP: Kan vi ud fra den aflæse vækstraten?

Befolkning:

$L_{t+1} = (1+n)L_t$

BNP:

$Y^* = \tilde{y}^* A_t L_t \Rightarrow$

$\ln Y^* = \ln \tilde{y}^* + \ln A_t + \ln L_t$

Forbrug:

$C^* = \tilde{c}^* A_t L_t$

Kapital:

$K^* = \tilde{k}_{\boldsymbol{t}}^* A_t L_t$

Exc. 6.3: Balanceret vækst i Solow med humankapital

K/Y-forholdet og afkastet på kapital, r, er konstant i SS

Hint

- Hvad gælder der om vores tildevariable?

Reallejesats:

$r_t = \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} \tilde{h}_t^{\varphi}$

Exc. 6.3: Balanceret vækst i Solow med humankapital

Vis, at realrenten fra Solow-modellen med humankapital er uafhængig af s_H og sammenlign med realrenten fra den generelle Solow-model.

Solow med humankapital: $r^* = \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} \tilde{h}_t^{\varphi}$

Den generelle solowmodel: $r^* = \alpha \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng} \right)^{-1}$

Hint

- Indsæt SS-værdierne for $\tilde{k}$ og $\tilde{h}$ i regn igennem for at vise, at r^* er afhængig af s_H.
- Diskutér hvorfor realrenten ikke afhænger af investeringer i humankapital

Exc. 6.4: Golden rule

Golden rule er den opsparingsrate der maksimerer privatforbruget pr. arbejder i SS. Vi skal vise, at de optimale værdier for s_K og s_H er hhv. α og φ.

$$c_t^* = A_0(1+g)^t(1-s_K-s_H)\left(\frac{s_K}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{s_H}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

Hint

- Tag ln og differentier mht. hhv. s_K og s_H. Husk, at $\frac{d}{dx}(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x}$
- Sæt lig 0 og isolér s_K og s_H i hver deres ligning. Herefter kan man indsætte det ene udtryk i det andet og forkorte yderligere.

Tak for i dag!

HUSK AFLEVERING AF HJEMMEOPGAVE 4 I NÆSTE UGE

5. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Dagens program

- Opsamling fra evalueringen
- Gennemgang af hjemmeopgave
- Exercise 5.5
- Excerise 5.7
- Exercise 5.8
- Excercise 5.9

- **HUSK AFLEVERING AF HJEMMEOPGAVE 3 I NÆSTE UGE**

Evalueringer

Hjemmeopgave 2

Generelle kommentarer

- Overordnet gode opgaver igen!
- I fik alle sammen udledt transitionsligningen, fandt de rigtige SS-værdier og de fleste af jer fik lavet nogle rigtig flotte diagrammer. Super godt!
- Vær konsistente i hvor mange decimaler i bruger. Brug lige mange alle steder!
- I stimuleringsopgaver, skal I altid bruge cellereferencer og ikke kun 2-3 decimaler. Hvis man kun bruger 2-3 decimaler, bliver resultaterne upræcise når man regner videre med dem.
- I forhold til modellen: I udgangspunktet sker stød altid fra SS! Mange af jer starter stødet inden SS.

Generelle kommentarer

Exc. 3 intuition: Ændringerne sker samtidigt og forstærker de hinanden, dvs. de er krydsafledte: når vi blot lægger procenterne sammen, antager vi at de krydsafledte er 0 – og det er de ikke!

Exc. 5:

- Elasticiteterne af y^* mht. s og n er hhv. $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ og $-\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{n}{n+\delta}\right)$. Det er en god idé at regne dem, når der hintet eksplicit til det!
- Elasticiteterne viser altså, at y^* bliver mere følsom overfor ændringer i s og n, desto større α
- Tænk på α som en indikation af, hvor vigtig kapital er i produktionen: Både s og n påvirker y^* gennem k^* $\Rightarrow$ stort α, større betydning af parametrene

Dagens egentlige program: Vækstregnskab og opgaver

Vækstregnskab

- I den generelle Solowmodel er BNP givet ved $Y_t = B_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$, hvor $A_t \equiv B_t^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- Det kan vi opskrive for en senere periode, $T > t$: $Y_T = B_T K_T^{\alpha} L_T^{1-\alpha}$
- Vi kan finde den (approksimative) gennemsnitslige årlige vækstrate at tage ln og trække periode t fra periode T og bagefter dividere med $T - t$:

$$\frac{\ln Y_T - \ln Y_t}{T - t} = \frac{\ln B_T - \ln B_t}{T - t} + \alpha \frac{\ln K_T - \ln K_t}{T - t} + (1 - \alpha) \frac{\ln L_T - \ln L_t}{T - t}$$

$$\rightarrow g^Y \approx g^B + \alpha g^K + (1 - \alpha) n$$

Vækstregnskab i pr. capita termer

- Hvis vi omskriver Solowmodellen til per capita termer har vi $y_t = B_t k_t^{\alpha}$. Herefter kan vi gøre helt som før, og finde den gennemsnitslige årlige vækstrate pr. capita

$$\frac{\ln y_T - \ln y_t}{T-t} = \frac{\ln B_T - \ln B_t}{T-t} + \alpha \frac{\ln k_T - \ln l_t}{T-t} \Leftrightarrow g^y \approx g^B + \alpha g^k$$

- Eller hvis vi indsætter vores omskrivning for $B_t = A_t^{1-\alpha}$, så $y_t = A_t^{1-\alpha} k_t^{\alpha}$

$$\frac{\ln y_T - \ln y_t}{T-t} = (1-\alpha) \frac{\ln A_T - \ln A_t}{T-t} + \alpha \frac{\ln k_T - \ln l_t}{T-t} \Leftrightarrow g^y \approx (1-\alpha) g^A + \alpha g^k$$

Exercise 5.5: Effekten af en stigning i den teknologiske vækstrate

- Antag, at økonomien initialt befinder sig i SS
- Herfra stiger den teknologiske vækstrate g pludseligt til et nyt, og højere niveau g', $g' > g > 0$
- n, g, g' er relativt små, så $\frac{1}{(1+n)(1+g')} \approx 1$ og $ng' \approx 0$

Exercise 5.5: Effekten af en stigning i den teknologiske vækstrate

- Antag, at økonomien initialt befinder sig i SS
- Herfra stiger den teknologiske vækstrate g pludseligt til et nyt, og højere niveau g', $g' > g > 0$
- n, g, g' er relativt små, så $\frac{1}{(1+n)(1+g')} \approx 1$ og $ng' \approx 0$

1) Forklar, hvordan Solow-diagrammet og det modificerede Solow-diagram bliver påvirket af ændringen

Hint: Husk, at Solow-ligningen er givet ved $\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\tilde{k}_t^\alpha - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t\right) \approx \left(s\tilde{k}_t^\alpha - (n+g+\delta)\tilde{k}_t\right)$ og at vi i det modificerede Solowdiagram dividerer med $\tilde{k}_t$

Exercise 5.5: Effekten af en stigning i den teknologiske vækstrate

Intuition:

- Husk, at $\tilde{y}_t$ og $\tilde{k}_t$ er kunstige variable: BNP og kapital pr. *effektiv arbejder*, dvs. teknologijusteret
- g indgår negativt et udtyndende led i vores Solow-ligning. Samme dynamik som som en stigning i befolkningen – vi spreder bare BNP/kapital ud på "robotter" (teknologi-enheder) i stedet.
- Vækst i g fortolkes som teknologiske fremskridt. Det er godt!
- Denne opgave viser, hvorfor det ikke giver mening at fortolke på tilde-variable; det vi i stedet er vi interesserede i $y_t = A_t \tilde{y}_t$

Exercise 5.5: Effekten af en stigning i den teknologiske vækstrate

2) Illustrer i to diagrammer med t ud af den horisontale akse, hvordan $\tilde{k}_t$ og vækstraten i $g_t^{\tilde{k}}$ udvikler sig og konvergerer over tid. Vis, endvidere, at $g_t^{\tilde{k}}$ falder til approksimativt $-(g' - g)$

3) Vis, at der om vækstraten i k_t gælder, at $g_t^k = g$ i perioden lige efter ændringen og illustrer i et diagram

4) Vis, at den approksimative vækstrate i y_t, g_t^y, lige efter ændringen hopper fra g til $\alpha g + (1 - \alpha)g'$ og derefter konvergerer monotont mod g'

Exercise 5.7: Vækstregnskab

- Tabel 5.1 viser BNP pr. arbejder y_t og kapital pr. arbejder k_t for bestemte lande i en række år
- Vi skal bruge dem til at dekomponere BNP pr. arbejder, så vi kan se hvor stor en del af den samlede vækst der stammer fra vækst i k_t og hvor meget der kommer fra teknologisk vækst

- **Hint:** Brug de formler der er givet i arket til finde de gennemsnitslige vækstrater.

Exercise 5.8: Mere vækstregnskab

- I denne opgave skal vi se på, hvorvidt nogle af de asiatiske lande, der har oplevet meget høje vækstrater i BNP også har oplevet meget store teknologiske fremskridt / høje vækstrater i TFP.
- I kapitlet argumenteres der for, at vi for at lave vækstregnskab for disse lande, bliver nødt til at tage højde for at de har oplevet relativt store fremskridt i uddannelse
- Hvis ikke vi havde taget eksplicit højde for uddannelse, ville det trække TPF op, idet TFP bestemmes residualt og vi ville potentielt overvurdere TFP-væksten i de asiatiske lande
- Vi bruger derfor en produktionsfunktion, der eksplicit tager højde for human kapital: $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t h_t L_t)^{1-\alpha}$

Exercise 5.8: Mere vækstregnskab

1) Udled med udgangspunkt i $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t h_t L_t)^{1-\alpha}$ en vækstregnskabsformel, der kan anvendes til at dekomponere vækstraten i y_t, så vi kan sige hvad der kommer fra hhv. A_t, k_t og h_t

Hint 1: y_t er givet ved $y_t = k_t^{\alpha}(A_t h_t)^{1-\alpha} = k_t^{\alpha}(A_t \exp(\psi u_t))^{1-\alpha}$, hvor $h_t = h(u_t) = \psi u_t$

Hint 2: Følg fremgangsmåden som vi gennemgik i de generelle slides om vækstregnskab

Exercise 5.8: Mere vækstregnskab

2) Brug den formel du nu har udledt til først at bestemme de gennemsnitslige vækstrater for BNP pr. capita og herefter at dekomponere væksten, så vi kan sammenligne de respektive bidrag

Hint: Brug excelarket. Det er ligesom før ;-)

3) Diskutér ud fra dine resultater, hvorvidt det ser ud til, at at de asiatiske vækstlande har oplevet overnormal teknologisk fremgang. Er der ting, vi stadig mangler at tage højde for eller kan vi med rimelighed konkludere noget på baggrund af vores resultater?

Exercise 5.9: Hvor kommer vækst fra jf. Solowmodellen og vækstregnskaber?

- Antag, at økonomien opfører sig fuldstændigt som i den generelle Solow-model fra dette kapitel, hvor vi har antaget at TFP vokser med en konstant vækstrate, $g^A = g$

- Ud fra hvad vi har lært i dag; hvad vil den gennemsnitslige vækstrate i y_t, k_t og A_t være over en periode fra t til T? Hvordan ville du opstille et vækstregnskab?
- Hvor stor en del af væksten i g^y kommer fra hhv. k_t og A_t? Hvad skaber og driver vækst i BNP pr. arbejder i SS? Er en af faktorerne vigtigere end de øvrige?

Hint: Kig på de første slides. Hvis $g^A = g = 0,$ hvordan påvirker det så de andre vækstrater i SS?

Tak for i dag!

HUSK AFLEVERING AF HJEMMEOPGAVE 3 I NÆSTE UGE

4. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

Dagens program

- Hurtig introduktion til Kapitel 5
- Exercise 5.3
- Excerise 5.2
- Exercise 5.1

- Aflevering af hjemmeopgave

Introduktion til kapitel 5

Indtil nu

- Indtil nu har vi kigget på den basale solow model (kap. 3), K og L er vores input faktorer – B, den teknologiske vækst er en eksogen konstant
- Vi så sidste gang, hvor vi regnede vi på SS-vækstraterne i y_t og Y_t at vækstraten i $y^* = 0$ og at den eneste kilde til vækst i BNP er befolkningsvækst, qua $Y^* = n$
- Altså, ingen langsigtet realøkonomisk vækst
- Det var problematisk, fordi det ikke passer på empirien → I gennemsnit har vi oplevet en vækst i BNP/capita på 1,5-2 pct. om året (husk de stylized facts)
- Det er den udfordring, vi prøver at løse i kapitel 5

THE COMPLETE BASIC SOLOW MODEL

$$Y_t = BK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha},$$

$$r_t = \alpha B \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\alpha - 1},$$

$$w_t = (1-\alpha) B \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\alpha},$$

$$S_t = sY_t,$$

$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t, \qquad K_0 \text{ given}$$

$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ given}$$

Kapitel 5: Modellen

THE COMPLETE SOLOW MODEL WITH TECHNOLOGICAL PROGRESS

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{7}$$

$$r_t = \alpha \left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)^{\alpha - 1}, \tag{8}$$

$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)^{\alpha} A_t, \tag{9}$$

$$S_t = sY_t, \quad 0 < s < 1 \tag{10}$$

$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t, \quad 0 < \delta < 1, \quad K_0 > 0 \text{ given} \tag{11}$$

$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \quad n > -1, \quad L_0 > 0 \text{ given} \tag{12}$$

$$A_{t+1} = (1+g)A_t, \quad g > -1, \quad A_0 > 0 \text{ given} \tag{13}$$

Parameters: α, s, δ, n and g. Endogenous variables: Y_t, K_t, L_t, r_t, w_t, S_t and A_t.

Analyse af modellen

- Indtil nu har vi analyseret modellen i pr. capita termer og kigget på hhv. BNP og kapital pr. arbejder
- Fra nu af korrigerer vi ikke kun for befolkning, men også for teknologi – dvs. vi analyserer ikke kun modellen i små bogstaver, men i tilde-variable:

$$\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t} \text{ og } \tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$$

- $\tilde{k}_t$ og $\tilde{y}_t$ fortolkes som hhv. kapital og BNP pr. *effektiv arbejder*
- Tilde-variable er model-variable. Vi introducerer dem, fordi det er hensigtsmæssigt ift. at løse og fortolke modellen – i den virkelige verden har de ikke en egentlig mening

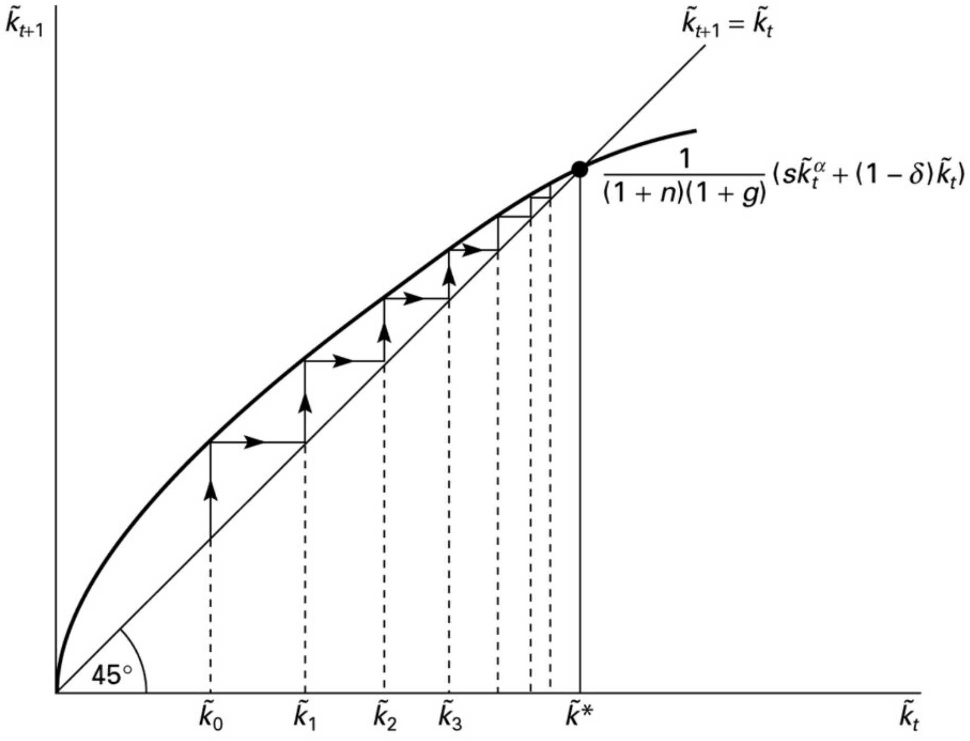
Transitionsligning, Solowligning og diagrammer

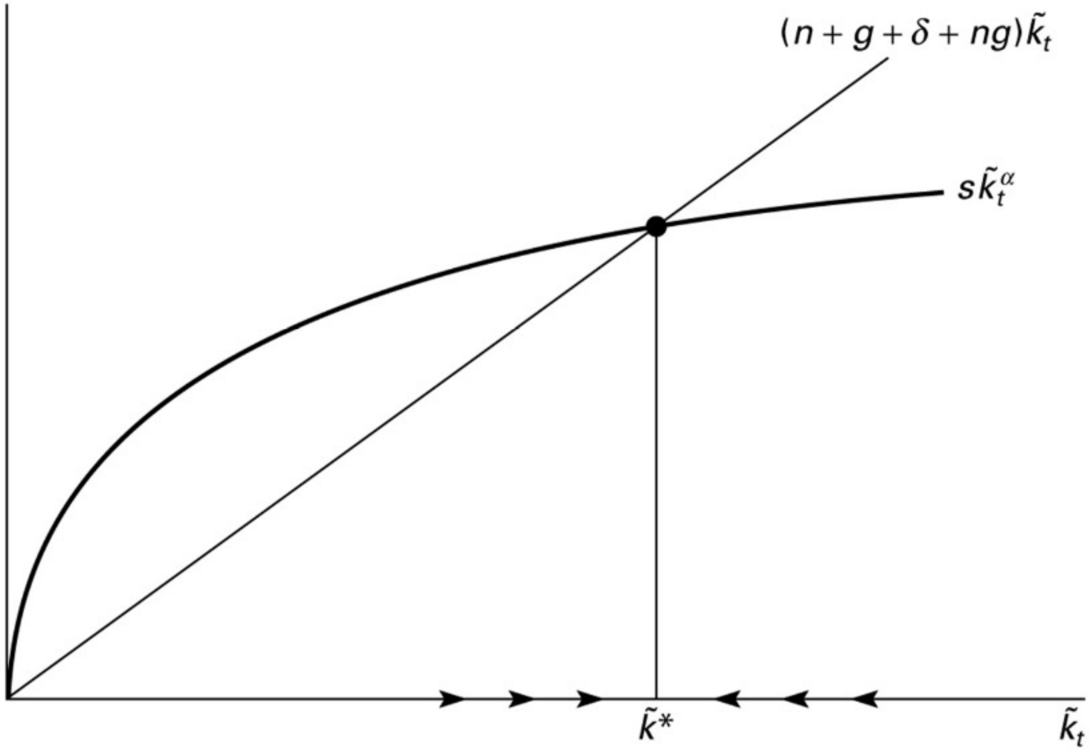
Transitionsligning:

$$\tilde{\boldsymbol{k}}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t)$$

Solowligning:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s\tilde{k}_t^{\alpha} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t)$$





Kapitel 5: Sammenligning med kap 3

Kapitel 3	Kapitel 5
$y_t = Bk_t^{\alpha}$	$y_t = k_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}$
$g_t^y = \alpha g_t^k$	$g_t^y = \alpha g_t^k + (1-\alpha) g_t^A$
$r_t = \alpha B k_t^{\alpha-1}$	$r_t = \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1}$
$w_t = (1-\alpha) B k_t^{\alpha}$	$w_t = (1-\alpha) A_t \tilde{k}_t^{\alpha}$
$k^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$	$k^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A_t$
$y^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$	$y^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t$
$z^* = \frac{s}{n+\delta}$	$z^* = \frac{s}{n+g+\delta+ng}$

Og nu til dagens opgaver

Exercise 5.3: Halveringstid

Exercise 3. Time to halve

In Section 5.4 we arrived at the dynamic equation, $\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda(\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t)$, which is (34) with the rate of convergence λ inserted for $1 - G'(\tilde{k}^*)$, and equivalent to (36). Show that it follows from this dynamic equation that the number of years, h, before half of an initial relative gap in year zero, $\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_0$ has been covered is $h = -\ln 2/\ln(1 - \lambda)$, and this is independent of how large the initial gap is. (Hint: Use the solution (37) to our difference equation). For realistic parameter values and the expression (35) for λ, what size is h? How large is h for our direct estimates of λ?

Exercise 5.3: Halveringstid

- Den er lidt anderledes ift. de opgaver vi hidtil har regnet, så vi tager den i fællesskab på tavlen.
- Genkald ligning (37) fra kapitlet: $\ln \tilde{y}_T - \ln \tilde{y}_0 = \lambda(\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_0)$, hvor λ er konvergenshastighed.
- Vi skal vise, at det følger af denne ligning, at halveringstiden, dvs. det tidspunkt, hvor halvdelen af afstanden mod SS er tilbagelagt ift. t = 0 (uanset størrelsen af den initiale forskel) er givet ved $\boldsymbol{h = -\ln(2)/\ln(1-\lambda)}$

- Når det er vist, skal vi indsætte forskellige værdier af λ, for at undersøge, hvor følsom modellen er for vores parameterestimater.
- **Indsæt λ=0,05 og λ=0,01. Er modellens konklusioner meget følsomme ift. størrelsen af vores parameterestimater?**

Exercise 5.2: Analyse af modellen gennem z_t

- z_t er vores kapital-output ratio og er defineret
  $z_t \equiv K_t / Y_t$

1) Vis, at $z_t = \frac{k_t}{y_t} = \frac{\tilde{k}_t}{\tilde{y}_t} = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$ og at z_t i SS er givet ved $z^* = \frac{s}{n+g+\delta+ng}$

Hint 1: *Tag udgangspunkt i definitionen af z_t og husk definitionerne af vores tilde-variable $\tilde{k}_t = K_t / A_t L_t$, $y_t = Y_t / A_t L_t$ og $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$*

Hint 2: $\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1$$

$$r_t = \alpha\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1},$$

$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} A_t,$$

$$S_t = sY_t, \quad 0<s<1$$

$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t, \quad 0<\delta<1, \quad K_0 > 0 \text{ given}$$

$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \quad n>-1, \quad L_0>0 \text{ given}$$

$$A_{t+1} = (1+g)A_t, \quad g>-1, \quad A_0>0 \text{ given}$$

Exercise 5.2: Analyse af modellen gennem z_t

2.1) Vis, at $z_t = \left(\frac{k_t}{A_t}\right)^{1-\alpha}$ og at når vi skriver denne ligning en periode frem, er z_{t+1} givet ved

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{1-\alpha} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{A_t}\right)^{1-\alpha}$$

Hint 1: *Tag udgangspunkt i definitionen af* $z_t \equiv k_t / y_t$ *og brug definitionen* $y_t = k_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}$

Hint 2: *Skriv* z_{t+1} *op ved at indsætte udtryk for* k_{t+1} *og* A_{t+1}

Hint 3: *Gang med* L_{t+1} *i både tæller og nævner, så vi får* K_{t+1} *og* $A_{t+1}L_{t+1}$. *Kan vi omskrive dette vha. de definitioner der er angivet i modellen?*

2.2) Vis, at vi kan omskrive udtrykket for z_{t+1} til $z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{1-\alpha} z_t^{\alpha}(s + (1-\delta)z_t)^{1-\alpha}$

Hint: *Gang med* $\left(\frac{k_t}{k_t}\right)^{1-\alpha}$ *og senere* $\left(\frac{z_t}{z_t}\right)^{1-\alpha}$

Exercise 5.2: Analyse af modellen gennem z_t

3.1) Udled SS-værdien z^* fra den transitionsligning vi lige har udledt og tegn transitionsdiagrammet og argumenter for, hvorfor du tegner det som du gør.

Hint: *INADA-betingelserne er en god måde at argumentere for transitionskurvens udseende på.*

3.2) Vis, at i SS må k_t og y_t vokse med den samme vækstrate g.

Hint: *Overvej, hvorfor det her må gælde.*

Hint: *Brug ln til at regne den approksimative vækstrate med udgangspunkt i* $y_t = k_t^{\alpha}(A_t)^{1-\alpha}$

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1$$

$$r_t = \alpha\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1},$$

$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} A_t,$$

$$S_t = sY_t, \quad 0<s<1$$

$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t, \quad 0<\delta<1, \quad K_0>0 \text{ given}$$

$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \quad n>-1, \quad L_0>0 \text{ given}$$

$$A_{t+1} = (1+g)A_t, \quad g>-1, \quad A_0>0 \text{ given}$$

Exercise 5.2: Løsning til vækstrate spørgsmål

Ift. y_t og k_t har vi, at $z_{t_0} = k_t / y_t$ er konstant i st. st, hvilket implicerer, at de må vokse med samme hastighed.

Vi kan vise dette ved at tage log til vores pr. capita productionsfunktion, og trække periode t-1 fra; så vi kan finde den approksimative vækstrate.

$$y_t = k_t^\alpha (A_t)^{1-\alpha} \Rightarrow \ln y_t - \ln y_{t-1} = \alpha(\ln k_t - \ln k_{t-1}) + (1-\alpha)\underbrace{(\ln A_t - \ln A_{t-1})}_{\text{Approksimativ vækstrate}}$$

Ved at bruge definitionen for approximative vækstrater får vi altså

$$g_t^y = \alpha g_t^k + (1-\alpha) g \Rightarrow$$ (vi ved, at vækstraten i $A_t = g$ fra modellen)

$$g_t^y \simeq y_t^k \Rightarrow (1-\alpha) g_t^{yk} = (1-\alpha) g \Leftrightarrow \underline{\underline{g_t^{yk} = g}}$$

Exercise 5.1: Kontinuert tid

1) Vis, at Solowligningen er givet ved $\dot{\tilde{k}} = s\tilde{k}^{\alpha} - (n+g+\delta)\tilde{k}$ *og sammenlign med Solowligningen fra diskret tid*

Hint: *Husk fra sidst:* $\frac{dK(t)}{dt} = \dot{K}(t)$ *og* $\frac{d\ln(K)}{dt} = \frac{d\ln(K)}{dK} \cdot \frac{dK}{dt} = \frac{\dot{K}}{K}$

Hint: *Start fra definitionen af* $\tilde{k} = \frac{K}{AL}$*, tag ln, differentier mht. t og brug regnereglen og de kendte definitioner.*

2) Illustrer Solow-ligningen i et Solow-diagram, og vis at der vil være konvergens mod en entydig SS fra et $\tilde{k} > k^*$

Hint: *Her menes bare grafisk og med ord – INADA-betingelserne hører kun til transitionsdiagrammet*

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$r = \alpha\left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha-1},$$

$$w = (1-\alpha)\left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha} A,$$

$$S = sY, \quad 0 < s < 1,$$

$$\dot{K} = sY - \delta K, \quad 0 < \delta < 1,$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n,$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = g.$$

Exercise 5.1: Kontinuert tid

3) Bestem SS værdier for hhv. $\tilde{k}^*$ og $\tilde{y}^*$ og efterfølgende for r^* og w^*

Hint: *Tag udgangspunkt i Solowligningen og sæt $\dot{\tilde{k}}=0$. Husk, at $\tilde{y}^* = (\tilde{k}^*)^\alpha$*

4) Vis, at vækstraten i $\tilde{k}$ er givet ved $\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = s\tilde{k}^{\alpha-1} - (n+g+\delta)$ og vis i et modificeret Solow-diagram. Forklar transitionen til SS med ord. Hvordan udvikler r og w sig i takt med transitionen mod SS?

Vis også, at vækstraten i $\tilde{y}$ er givet ved $\frac{\dot{y}}{y} = \alpha g^k + g$.

Hint: *For vækstraten i $\tilde{k}$*: Start fra Solow-ligningen og divider med $\tilde{k}$

Hint: *For vækstraten i $\tilde{y}$*: Start fra $y = \tilde{k}^\alpha \mathrm{A}$, tag ln og differentier mht. t

$$Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1,$$

$$r = \alpha\left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha-1},$$

$$w = (1-\alpha)\left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha} A,$$

$$S = sY, \quad 0<s<1,$$

$$\dot{K} = sY - \delta K, \quad 0<\delta<1,$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n,$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = g.$$

Exercise 5.1: Kontinuert tid

5.1) Definer $z \equiv \tilde{k}^{1-\alpha}$ og vis, at z er lig kapital-output ratioen $\frac{k}{y}$.

Hint 1: *Tag udgangspunkt i definitionen af z og omskriv det. Brug, at* $\tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$

5.2) Vis derefter, at $\dot{z} = (1-\alpha)s - \lambda z$ og at SS for z er givet ved $z^* = \frac{(1-\alpha)s}{\lambda} = \frac{s}{n+g+\delta}$

Hint 2: *For* $\dot{z}$, start igen fra definitionen, tag ln og differentier.

Husk, at $\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L} = s\frac{y}{k} - (n + \delta + g)$, og at $z = \frac{k}{y}$.

Hint 3: *I skal selv definere* λ

Hint 4: *For SS værdien gør vi som vi plejer; dvs. sætter* $\dot{z} = 0$

Exercise 5.1: Kontinuert tid

Bemærk, at $\dot{z} + \lambda z = (1-\alpha)s$ er en differentialligning af formen $\dot{x}(t) + ax(t) = b$, hvor initialbetingelsen er $x(0) = x_0$ og løsningen er $x(t) = (x_0 - x^*)e^{-at} + x^*$, hvor $x^* = b/a$

6) Vis, at løsningen til differentialligningen er givet ved $z = \frac{(1-\alpha)s}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + z_0 e^{-\lambda t} = \frac{s}{n+g+\delta}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + z_0 e^{-\lambda t}$ og fortolk.

7) Vis, at løsningerne for hhv. $\tilde{k}$ og $\tilde{y}$ er givet ved $\tilde{k} = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + \tilde{k}_0^{1-\alpha} e^{-\lambda t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ og $\tilde{y} = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + \tilde{y}_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-\lambda t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Hint: Brug at $z = \tilde{k}^{1-\alpha}$ og $\tilde{k} = \tilde{y}^{\frac{1}{\alpha}}$

Tak for i dag!

Og husk efterårsferie i næste uge!

3. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

Dagens program

- Gennemgang af hjemmeopgave 1
- Hovedpointer fra sidst
- Exercise 3.6
- Excerise 3.2

Gennemgang af 1. hjemmeopgave

Generel feedback

Overordnet super gode afleveringer! Et par generelle kommentarer

- Generelt flotte transitionsdiagrammer – men husk at tjekke, at transitionsligningen opfylder stabilitetsbetingelserne. Vi kan ikke bruge figuren til at argumentere for, at transitionsligningen skærer 45-graders linjen uden først at have vist matematisk, at det er tilfældet.
- Skriv den nye transitionsligning op når vi sætter $\alpha = 1$ og tjek hældningen igen. Mange af jer opdager ikke, at der er to scenarier.
- Det er vigtigt, at I kommer helt i mål med jeres udregninger, når I bliver bedt om at vise et udtryk eller udregne noget.
- Derudover: intuition, intuition, intuition.

Spørgsmål 2

Når I har udledt transitionsligningen, skal I huske at tjekke hældningen og at den faktisk går gennem (0,0).

Tag udgangspunkt i transitionsligningen $k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sB\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t)$ og gør følgende

- Sæt $k_t = 0$: I vil hurtigt se, at det medfører $k_{t+1} = 0$, hvorfor den må gå igennem (0,0).
- Nu til hældningen: differentier mht. k_t og lad $k_t \to 0$ og $k_t \to \infty$:

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{1}{1+n}(\alpha sB\lambda^{1-\alpha}k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta))$$

Hvad sker der, med den afledte, når $k_t \to 0$? Og når $k_t \to \infty$?

Spørgsmål 3

I spørgsmål 3 sætter vi $\alpha = 1$, dermed får vi følgende transitionsligning:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sB\lambda^{1-1}k_t^1 + (1-\delta)k_t) = \frac{(sB+1-\delta)}{1+n}k_t$$

Tjek lige som før

- Sæt $k_t = 0$: Igen vil I hurtigt se, at den går igennem (0,0).
- Nu til hældningen: differentier mht. k_t, får vi $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{sB+1-\delta}{1+n}$. Kan være hhv. større og mindre end 1, afhængigt af parametrenes størrelse
- Med $\alpha = 1$ har vi aldrig konvergens mod et entydig positiv SS, fordi vi har fjernet antagelsen om aftagende marginalprodukt, som var det der gav konvergens i første omgang.

Spørgsmål 6+7: elasticiteter

Vi genopfrisker lige hvordan man gør, når man regner elasticiteter:

Tag udgangspunkt i vores SS: $y^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

1) Tag ln
2) Differentier mht. ln λ

$$\ln(y^*) = \ln\left(B^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\ln B + \ln\lambda + \frac{\alpha}{1-\alpha}(\ln s - \ln(n+\delta))$$

$$\frac{\partial \ln y^*}{\partial \ln\lambda} = 1$$

Spørgsmål 6+7: elasticiteter

Vi genopfrisker lige hvordan man gør, når man regner elasticiteter:

Tag udgangspunkt i udtrykket for BNP/capita fra opg. 1: $y_t = Bk_t^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}$

1) Tag ln
2) Differentier mht. $\ln \lambda$

$$\ln(y_t) = \ln(B) + \alpha \ln k_t + (1-\alpha)\ln \lambda \quad \Rightarrow \frac{\partial \ln y_t}{\partial \ln \lambda} = 1 - \alpha$$

Spørgsmål 6+7: Intuition

$(1-\alpha) < 1 \Rightarrow$ **det kan vi se rent matematisk. Hvorfor forholder det sig mon sådan?**

- Læg mærke til, at det er hhv. y^* og y_t vi kigger på $\Rightarrow$ to forskellige tidspunkter og scenarier i økonomien.
- $(1-\alpha)$ er den kortsigtede elasticitet, hvor 1 er den langsigtede
- I takt med at kapital akkumuleres i økonomien, sker der en stigning i k_t, hvilket forøger produktiviteten.
- Det gør, at det i SS er lettere at substituere mellem kapital og arbejdskraft end det er på kort sigt, fordi niveauet af kapital på arbejder er højere i SS.

Recap + dagens opgaver

Hvad var det nu vi lavede sidst

- Vi viste, at $MRS = \frac{F_K(K,L)}{F_L(K,L)} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{L}{K} = \frac{r}{w}$ i vores Cobb-Douglas produktionsfunktion
- Substitutionselasticiteten er et mål for, hvor meget forholdet mellem vores produktive input $\frac{K}{L}$ ændrer sig, når $\frac{r}{w}$ (det relative prisforhold) ændrer sig.
- **Fortolkning**: Hvor nemt er det for virksomhederne at ændre inputfaktorer (dvs. substituere mellem K og L), uden at blive mindre produktive?
- **Konklusion**:
  - CB har substitutionselasticitet på 1
  - CES har substitutionselasticitet på σ
  - For $\sigma \to 1$, har de to funktioner den samme substitutionselasticitet
- **Substitutionselasticitet $\boldsymbol{\sigma > 1}$:** Et fald i prisen på kapital skaber en substitution mod kapital, der er mere end proportional (fald på 1% skaber stigning større end 1%)
- **Substitutionselasticitet $\boldsymbol{\sigma < 1}$:** Et fald i prisen på kapital skaber en substitution mod kapital, der er mindre end proportional (fald på 1% skaber stigning mindre end 1%)

Exc. 3.6 – Stigning i befolkningen

Antag at økonomien starter i steady state, men rammes af et positivt, midlertidigt stød til L_t. **Hvordan påvirker det vores økonomi?**

1) Udled Solowligningen for den basale Solowmodel og tegn Solowdiagrammet.

- Tag udgangspunkt i ligning (5)
- Husk Solowligningen er givet ved

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(sBk^{\alpha} - (\mathrm{n} + \delta)k_t)$$

2) Diskuter 2 og 2: Hvordan skal vi fortolke hhv. højre og venstre side af Solow-ligningen?
3) Forklar med udgangspunkt i Solowligningen og –diagrammet, hvad der sker, når L_t rammes af et stød (og de øvrige strukturelle parametre forbliver uændrede).

THE COMPLETE BASIC SOLOW MODEL

$$Y_t = BK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha},$$

$$r_t = \alpha B \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1},$$

$$w_t = (1-\alpha) B \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha},$$

$$S_t = sY_t,$$

$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t, \qquad K_0 \text{ given}$$

$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ given}$$

Exc. 3.6 – Stigning i befolkningen

Hvordan skal vi fortolke hhv. højre og venstre side af Solow-ligningen?

- Solowligningen: $k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(sBk^{\alpha} - (\mathrm{n} + \delta)k_t)$
- VS: Ændring i kapital pr. arbejder mellem periode t og t+1
- HS: Vi ser, hvilke elementer der påvirker kapitalakkumulationen i modellen. Opsparingsrate og teknologiske fremskridt påvirker positivt, befolkningsvækst og nedslidning (depreciering) har en negativ effekt

Hvad er effekten af en engangsstigning i L_t, når vi befinder os i SS?

- L_t indgår indirekte gennem $k_t = \frac{K_t}{L_t}$
- En stigning i L_t har derfor en udtyndende effekt $\Rightarrow$ fald i k_t
- Økonomien bliver skubbet ud af ligevægt, og konvergerer tilbage mod SS
- Tilsvarende effekt for en engangsdestruktion af kapital

Exc. 3.2 – Solowmodellen i kontinuert tid

Introduktion til kontinuert tid

- Indtil nu: Diskret tid ⇒ Vi har antaget, at tiden løb i perioder, dvs. periode t=1,2,3… og ændringer i vores variable beregnede vi som $\Delta K = K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$
- Kontinuert tid ⇒ Tiden er "smooth" og ikke opdelt i perioder.
- Det betyder, at alle vores variable implicit bliver funktioner af tid, fx $K(t)$, der fortolkes som den totale kapitalbeholdning i tidspunktet t.
- Ændringer i vores variable bliver nu udledt som tidsafledte: $\Delta K = \dot{K}(t) = \frac{dK(t)}{dt} = I(t) - \delta K(t)$
- Bemærk: Ofte udelades den eksplicitte reference til tid (t) i notationen; idet prikken over vores variabel alligevel indikerer en ændring over tid, dvs. $\dot{K}(t) = \dot{K}$

Exc. 3.2 – Solowmodellen i kontinuert tid

1) Vis, at det fra udtrykket $k = \frac{K}{L}$ følger, at $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$

Hint 1: *Tag ln til begge sider af udtrykket og differentier mht. tid t*

Hint 2: *Brug regnereglen:*

$$\frac{d\ ln(K)}{dK} = \frac{1}{K} \Rightarrow \frac{d\ ln(K)}{dt} = \frac{d\ ln(K)}{dK} \cdot \frac{dK}{dt} = \frac{\dot{K}}{K}$$

2) Vis, at Solowligningen i den basale Solow model i kontinuert tid er givet ved: $\dot{k} = sBk^{\alpha} - (n + \delta)k$

Hint 1*: Tag udgangspunkt i det udtryk vi lige har vist, og indsæt definitionerne for $\dot{K}$ og $\dot{L}/L$*

Hint 2: *Gang med "1"*

THE SOLOW MODEL IN CONTINUOUS TIME

$$Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

$$r = \alpha B\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1},$$

$$w = (1-\alpha)B\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha},$$

$$S = sY,$$

$$\dot{K} = sY - \delta K, \qquad K_0 \text{ given}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \qquad L_0 \text{ given}$$

Exc. 3.2 – Solowmodellen i kontinuert tid

3) Sammenlign Solow-ligningen i kontinuert tid med Solow-ligningen for den basale Solow model i diskret tid

Hint: *Husk, at Solow-ligningen i diskret tid er givet ved*

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(sBk_t^{\alpha} - (n+\delta)k_t$$

4) Tegn Solow-ligningen i kontinuert tid i et Solowdiagram og vis, at fra hvilken som helst initial værdi af $k_0 > 0$, vil kapitalintensiteten k konvergere mod en entydig SS

Hint: *Solow-diagrammet i kontinuert tid ser ud ligesom i diskret tid*

THE SOLOW MODEL IN CONTINUOUS TIME

$$Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

$$r = \alpha B\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1},$$

$$w = (1-\alpha)B\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha},$$

$$S = sY,$$

$$\dot{K} = sY - \delta K, \qquad K_0 \text{ given}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \qquad L_0 \text{ given}$$

Exc. 3.2 – Solowmodellen i kontinuert tid

5) Bestem SS-værdierne k^*, y^* og c^*, og sammenlign med SS-værdierne i diskret tid

Hint: *Tag udgangspunkt i vores udtryk for Solow-ligningen, og sæt* $\dot{k} = 0$ *og isoler for k*

Hint*: Brug udtrykket fra* k^* *til at udlede de to øvrige udtryk.*

6) Find SS-værdier for r^* og w^* og sammenlign med diskret tid. Hvordan påvirkes r^* og w^* af en stigning i s?

Hint: *Tag udgangspunkt i definitionerne fra modellen og indsæt* k^**.*

THE SOLOW MODEL IN CONTINUOUS TIME

$$Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

$$r = \alpha B\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1},$$

$$w = (1-\alpha)B\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha},$$

$$S = sY,$$

$$\dot{K} = sY - \delta K, \qquad K_0 \text{ given}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \qquad L_0 \text{ given}$$

Exc. 3.2 – Solowmodellen i kontinuert tid

6) Find SS-værdier for r^* og w^* og sammenlign med diskret tid. Hvordan påvirkes r^* og w^* af en stigning i s? **LØSNING pt. 1**

Vi ved, at

$$r = \alpha B k^{\alpha-1} \quad \text{og} \quad w = (1-\alpha) B k^{\alpha}$$

$$r^* = \alpha B (k^*)^{\alpha-1} = \alpha B \left(B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{\alpha-1} =$$

$$\alpha \left(B^{\frac{1-\alpha+(\alpha-1)}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} \right) = \alpha \left(\frac{s}{n+\delta} \right)^{-1}$$

$$w^* = (1-\alpha) B (k^*)^{\alpha} = (1-\alpha) B \left(B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{\alpha}$$

$$(1-\alpha) B^{\frac{1-\alpha+\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-\alpha) B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Igen: Identiske til diskret tid.

Exc. 3.2 – Solowmodellen i kontinuert tid

6) Find SS-værdier for r^* og w^* og sammenlign med diskret tid. Hvordan påvirkes r^* og w^* af en stigning i s? **LØSNING pt. 2**

$$r^* = \alpha\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{-1} = \alpha\,\frac{n+\delta}{s} \quad : \quad s\uparrow \;\rightarrow\; r\downarrow$$

$$w^* = (1-\alpha)\,B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right) \quad : \quad s\uparrow \;\rightarrow\; w\uparrow$$

Intuition: Stigning i s resulterer i højere k^*, hvilket alt andet lige sænker den marginale produktivitet af kapital, og hæver marginalproduktet til arbejdskraft.
Husk, at vi er i st. st., så vi har allerede det optimale niveau af kapital givet mængden af arbejdskraft

Exc. 3.2 – Solowmodellen i kontinuert tid

7) Hvad er vækstraten i for hhv. y og Y i SS?

Hint: *Tag udgangspunkt i nedestående definitioner af y og Y, tag ln og differentier mht. t:*

$$y = Bk^{\alpha} \text{ og } Y = yL$$

Hint: *Husk, at* $\dot{k}/k = 0$ *i SS.*

8) (Sidste opgave for i dag!) Vis, at vækstraten i k er $\frac{\dot{k}}{k} = sBk^{\alpha-1} - (n+\delta)$. Illustrer i et modificeret Solow-diagram og forklar transitionen mod SS.

Hint: *Tag udgangspunkt i Solow-ligningen, og divider med k på begge sider*

THE SOLOW MODEL IN CONTINUOUS TIME

$$Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

$$r = \alpha B\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1},$$

$$w = (1-\alpha)B\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha},$$

$$S = sY,$$

$$\dot{K} = sY - \delta K, \qquad K_0 \text{ given}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \qquad L_0 \text{ given}$$

Tak for i dag!

(og husk aflevering 2 i næste uge)

2. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Dagens program

- Hvad lærte vi sidst?
- Kapitel 3
- Exercise 3.1
- Excerise 2.1
- Exercise 2.5

- Aflevering af hjemmeopgave

Sidste gang: Kapitel 2 og stylized facts

- Hvad er velstand? Hvordan sammenligner vi velstand? Hvad er en god model?

Stylized facts: empirisk observationer, som vores model gerne skal kunne opfylde

- Nogle lande er rige, andre lande er fattige // Vækstrater varierer mellem lande //Vækst kan opstå og aftale pludseligt // Tilsyneladende negativ sammenhæng mellem initialt niveau af BNP og gennemsnitslig vækstrate (betinget konvergens) // **Gns. vækstrater i BNP pr. capita (Y/L) på 1,5-2,2 om året i de vestlige lande** // BNP pr. arbejder har været konstant; arbejdskraftens andel har været konstant // **Relativt konstant K/Y-forhold**

Balanceret vækst, hvis y_t, c_t, w og K/L-forholdet vokser med samme vækstrate $\boldsymbol{g}$**,** hvis Y_t, I_t og K_t alle vokser med $\boldsymbol{g} + \boldsymbol{n}$ (hvor n er vækst i arbejdsstyrken) og hvis K/Y-forholdet og realrenten (afkastet på kapital) begge er konstante.

NAVNERUNDE

Kapitel 3

THE COMPLETE BASIC SOLOW MODEL

$$Y_t = BK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \tag{14}$$

$$r_t = \alpha B \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\alpha - 1}, \tag{15}$$

$$w_t = (1-\alpha) B \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\alpha}, \tag{16}$$

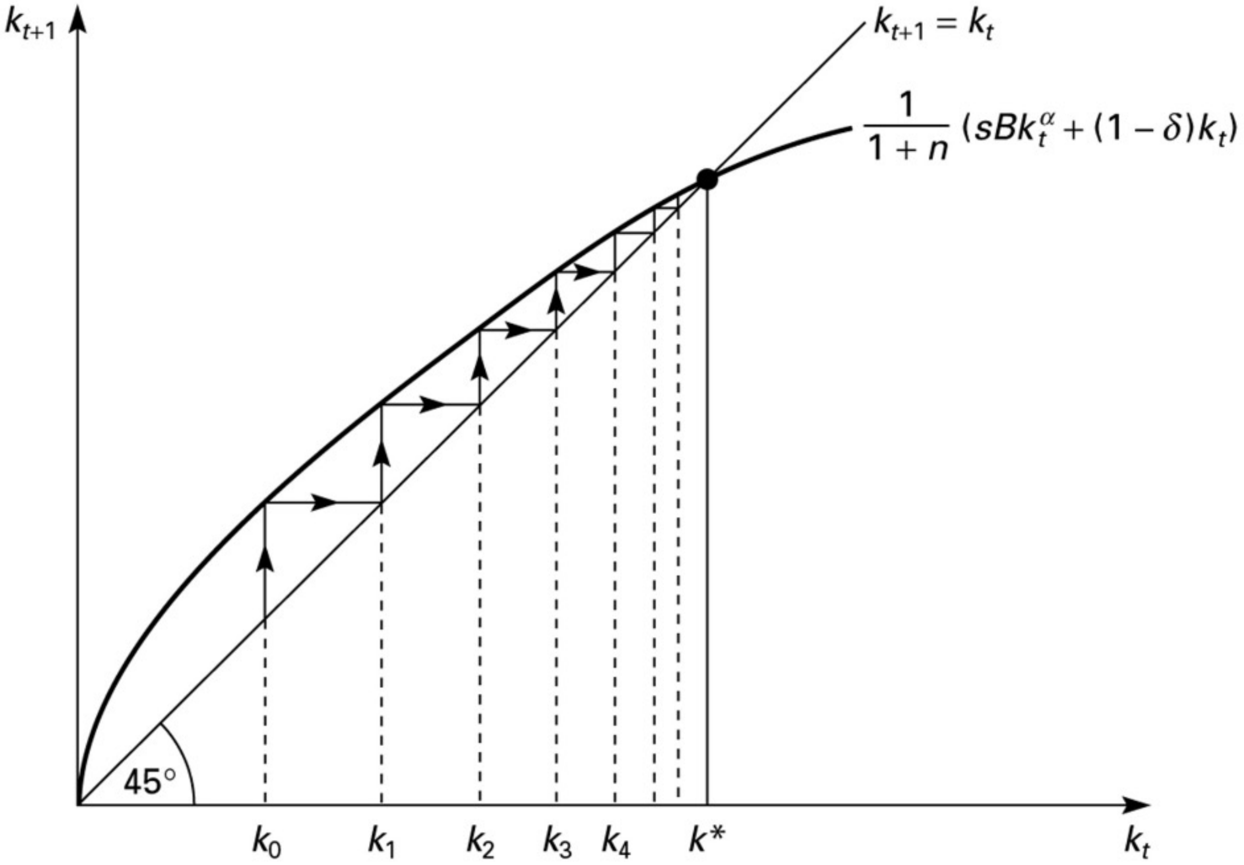
$$S_t = sY_t, \tag{17}$$

$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t, \qquad K_0 \text{ given} \tag{18}$$

$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ given} \tag{19}$$

Parameters: α, B, s, n and δ. Endogenous variables: Y_t, K_t, L_t, r_t, w_t, and S_t.

Kapitel 3



EXERCISE 3.1

Exercise 3.1

Exercise 1. The elasticity of substitution between capital and labour and the income distribution

The Cobb–Douglas production function, $Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ (omitting time subscripts and superscripts *d* for 'demand') implies a certain degree of substitution between the inputs. As a measure of this degree economists use the so-called elasticity of substitution. This is defined as the elasticity (defined to be positive) in the composition, K/L, of input demands with respect to the ratio, r/w, between the rental rates, when the firm maximizes profits (minimizes costs) given r and w, that is, the percentage *increase* in K/L for a one per cent *decrease* in r/w. (When the firm maximizes profits for given r and w, it chooses inputs so that the marginal rate of substitution, MRS, between capital and labour equals the factor price ratio r/w, so one may as well say that the elasticity of substitution is defined as the elasticity of K/L with respect to the MRS).

Exercise 3.1

Delopgave 1

1) Find MRS for kapital og arbejdskraft for Cobb-Douglas produktionsfunktionen.

2) Vis, at når vi profitmaksimerer, er r/w lig MRS.

Hint 1: *Husk, at MRS er givet ved* $MRS = \frac{F_K(K,L)}{F_L(K,L)}$

Hint 2: *Udregn et udtryk for hhv. r og* w . *Opstil en funktion for profit, differentier mht.* K *og* L, *sæt udtrykkene lig 0 og isoler hhv.* r *og* w

Profit kan skrive som $\pi = BK^{\alpha}L^{1-\alpha} - wL - rK$

Husk, at Cobb-Douglas produktionsfunktionen fra kapitel 3 er givet ved $\boldsymbol{Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha}}$

Exercise 3.1

Delopgave 1, fortsat

3) Udregn substitutionselasticiteten. Vis, at den er lig 1, og at den er uafhængig af både r og w

Hint 1: *Substitutionselasticiteten er givet ved* $|\sigma| = \frac{\partial \ln \frac{K}{L}}{\partial \ln \frac{r}{w}}$

Hint 2: *Omskriv udtryk fra delopgave 1.2 til at være en funktion af K/L (dvs. isoler K/L), tag ln og differentier mht. ln* (r/w). *Husk, at elasticiteten er numerisk!*

4) Diskutér: Hvordan skal vi fortolke det marginale substitutionsforhold (MRS) og substitutionselasticiteten i denne kontekst?

Exercise 3.1

Delopgave 1 (fortsat)

3) Udregn substitutionselasticiteten. Vis, at den er lig 1, og at den er uafhængig af både r og w

Hint 1: *Substitutionselasticiteten er givet ved* $|\sigma| = \dfrac{\partial \ln \frac{K}{L}}{\partial \ln \frac{r}{w}}$

Hint 2: *Omskriv udtryk fra delopgave 1.2 til at være en funktion af K/L (dvs. isoler K/L), tag ln og differentier mht. ln* (r/w). *Husk, at elasticiteten er numerisk!*

4) Diskutér: Hvordan skal vi fortolke det marginale substitutionsforhold (MRS) og substitutionselasticiteten i denne kontekst?

Svar: MRS siger noget om det relative prisforhold mellem vores inputfaktorer, dvs. prisen på kapital (=r) og arbejdskraft (=w).

Vi kan se af udtrykket, at når renten stiger, vil vi substituere væk fra kapital og over mod arbejdskraft i produktionen, fordi kapital bliver relativt dyrere end arbejdskraft og omvendt. Størrelsen af elasticiteten siger noget om, hvor kraftigt vi reagerer på ændringer i det relative prisforhold. $\sigma > 1 \rightarrow$ nemt at substituere mellem input (gode substitutter), $\sigma < 1 \rightarrow$ sværere at substituere mellem input (komplementer)

Exercise 3.1

Delopgave 2

Vi betragter nu en såkaldt CES-funktion (constant elasticity of substitution), der er givet ved

$$Y = \left(\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \text{ hvor } 0 < \alpha < 1 \text{ og } \sigma > 0, \neq 1$$

1) Udregn substitutionselasticiteten for CES-produktionsfunktionen.
2) Vis, at substitutionselasticiteten er lig σ, og at den er uafhængig af r og w

Hint 1: *Det er præcis det samme som det vi gjorde før*
Hint 2: *Omskriv det fundne udtryk for r/w, så det bliver en K/L-funktion af r/w, og tag ln til dette udtryk.*

3) Vis, at grænseværdien for MRS_{CES} svarer til $MRS_{Cobb-Douglas}$ for $\sigma \to 1$, og at Cobb-Douglas produktionsfunktionen dermed er et specialtilfælde af CES-produktionsfunktionen

Hint 3: *Sæt* $\sigma = 1$

Exercise 3.1

Delopgave 3

1) Vis, at indkomstandelene i CES-produktionsfunktionen for kapital og arbejdskraft under kompetitiv markedsclearing (fuldkommen konkurrence) er hhv.

$$\frac{rK}{Y} = \frac{\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+(1-\alpha)} \text{ og } \frac{wL}{Y} = \frac{1-\alpha}{\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+(1-\alpha)}$$

Hint 1: *Tag udgangspunkt i udtrykket på venstre side af lighedstegnet*

Hint 2*Husk, at der under fuldkommen konkurrence gælder* $w = F_L'(K,L)$ *og* $r = F_K'(K,L)$

Hint 3: *Husk, at vi udregnede w og r for CES-funktionen i sidste delopgave. Dem kan vi tage udgangspunkt i nu. Husk, at vi også kender et udtryk for Y (det er bare CES-produktionsfunktionen)*

Exercise 3.1

Delopgave 3 - LØSNING

$$wL = F_L'(K, L) =$$

$$\left[\frac{\sigma}{\sigma-1}\left(\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma}(1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1}\right] \cdot L$$

$$= \left(\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1}(1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \Leftrightarrow$$

$$(1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \frac{\left(\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \Leftrightarrow$$

$$(1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \frac{Y}{\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{wL}{Y} = \frac{(1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{wL}{Y} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)}$$

Exercise 3.1

Delopgave 4

1) Vis, for $\sigma \to 1$ går indkomstandelene mod hhv. α og $1-\alpha$.
2) Udregn grænseværdierne for $\left(\frac{K}{L}\right) \to \infty$, for hhv. $\sigma > 1$ og $\sigma < 1$.

Hint 1: *Tag udgangspunkt i udtrykkene fra delopgave 3. Hvad sker der med* $(\sigma-1)/\sigma$ *, hvis vi sætter* $\sigma = 1$*? Og hvordan påvirker det (K/L)?*

Hint 2: *Hvad sker der med* $(\sigma-1)/\sigma$ *, for hhv.* $\sigma > 1$ og $\sigma < 1$*? Hvordan påvirker det noget, at være opløftet i en negativ potens? Hvad sker der, når (K/L) bliver meget stor?*

3) Piketty mener, at $\sigma > 1$ er mest plausibelt. Diskutér og forklar intuitivt fortolkningen af de forskellige værdier af σ og forklar, hvorfor K/Y-forholdet (kapitalens indkomstandel) er voksende, hvis Piketty har ret (dvs. hvis $\sigma > 1$) og hvilke implikationer det har.

Hint 3: *Prøv at opstille K/L-forholdet som* $\frac{K}{L} = \frac{K}{Y}\frac{Y}{L}$*. Hvad ved fra vores stylized facts, at der skal gælde om de forskellige komponenter? Under hvilke omstændigheder passer dette?*

Exercise 3.1

Delopgave 4 - LØSNING

4) Vis at grænseværdierne for indkomstandelene når $\sigma \to 1$ (=1) er lig indkomstandelene for Cobb-Douglas produktionsfunktionen.

$$\lim_{\sigma \to 1} \left(\frac{rK}{Y} \right) = \alpha \quad \text{og} \quad \lim_{\sigma \to 1} \left(\frac{wL}{Y} \right) = (1-\alpha)$$

Tager udgangspunkt i vores indkomstandele, sætter $\sigma = 1$

$$\lim_{\left(\frac{K}{L}\right) \to \infty} \frac{wL}{Y} = \lim \frac{(1-\alpha)}{\alpha \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} \to \frac{(1-\alpha)}{\alpha + (1-\alpha)} = (1-\alpha)$$

$$\lim_{\left(\frac{K}{L}\right) \to \infty} \frac{rK}{Y} = \lim \frac{\alpha \left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\alpha \left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} \to \frac{\alpha}{\alpha + (1-\alpha)} = \alpha$$

Exercise 3.1

Delopgave 4 - LØSNING

2) Udregn grænseværdierne for indkomstandelene for $\frac{K}{L} \to \infty$ når $\sigma < 1$ og $\sigma > 1$.

$\sigma < 1$

$$\lim_{\frac{K}{L}\to\infty} \frac{wL}{Y} \to 1,$$ fordi $\frac{\sigma-1}{\sigma} < 0$ og dermed $\left(\frac{K}{L}\right) \to 0$

(Hvis vi ligger på udtrykket $\frac{(1-\alpha)}{\alpha \cdot 0 + (1-\alpha)} = 1$)

$\sigma > 1$

$$\lim_{\frac{K}{L}\to\infty} \frac{wL}{Y} \to 0,$$ fordi $\frac{\sigma-1}{\sigma} > 0$ og der med $\left(\frac{K}{L}\right) \to \infty$

(Hvis vi ligger på udtrykket $\frac{(1-\alpha)}{\alpha \cdot \infty + (1-\alpha)} \to 0$)

$\sigma < 1$

$$\lim_{\frac{K}{L}\to\infty} \frac{rK}{Y} \to 0$$ fordi $\frac{\sigma-1}{\sigma} < 0$ og dermed $\left(\frac{K}{L}\right) \to 0$

(Hvis vi ligger på udtrykket $\frac{\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} = \frac{0}{0+(1-\alpha)}$)

$\sigma > 1$

$$\lim_{\left(\frac{K}{L}\right)\to\infty} \frac{rK}{Y} \to 1$$ fordi $\frac{\sigma-1}{\sigma} > 0$ og dermed $\left(\frac{K}{L}\right) \to \infty$

(Hvis vi ligger på udtrykket $\frac{\alpha\infty}{\alpha\infty + (1-\alpha)} \to 1$)

Exercise 3.1

Delopgave 4 (fortsat)

3) Piketty mener, at $\sigma > 1$ er mest plausibelt. Diskutér og forklar intuitivt fortolkningen af hhv. $\sigma < 1$ og $\sigma > 1$.

Svar:
Substitutionselasticiteten, σ, er et udtryk for hvor meget K/L ændrer sig, når det relative prisforhold mellem vores input, r/w, ændrer sig. Siger dermed også noget om, hvor nemt det er at substituere mellem inputs i produktionen.

For $\boldsymbol{\sigma > 1}$: Kapitalens indkomstandel, $\frac{rK}{Y}$, vil gå mod 1 og arbejdskraftens indkomstandel vil gå mod 0. Maskiner vil udgøre en gradvist større andel. Piketty argumenterer for, at dette forklarer den stigende ulighed mellem kapitalejere og lønmodtagere.

For $\boldsymbol{\sigma < 1}$: Arbejdskraftens indkomstandel, $\frac{wL}{Y}$, vil gå mod 1, og kapitalens indkomstandel vil gå mod 0.

Vores empiri med konstante indkomstandele (som vi kender fra vores stylized facts), er kun konsistente for $\boldsymbol{\sigma = 1}$, dvs. vores Cobb-Douglas produktionsfunktion, hvor de var hhv. α og $1 - \alpha$

EXERCISE 2.1

Exercise 2.1

Exercise 1. GDP per capita versus GDP per worker

Give some arguments why it could be better to use GDP per worker than GDP per capita for a comparison of standards of living between countries.

Exercise 2.1

Exercise 1. GDP per capita versus GDP per worker

Give some arguments why it could be better to use GDP per worker than GDP per capita for a comparison of standards of living between countries.

Svar: BNP pr. arbejder er mere retvisende

Argument 1: Forskelle i størrelsen på den uformelle sektor

Argument 2: Forskelle i erhvevsfrekvensen

Argument 3: Værdien af fritid.

- Et højt BNP pr. capita kan opnås på flere måder: Høj deltagelse på arbejdsmarkedet eller høj produktivitet. Ikke muligt at differentiere mellem de to, når man bruger BNP pr. capita

Argument 4: Tættere relation til produktivitet

- **Diskussion:** Hvorfor er BNP pr. arbejder/arbejdstime ikke mere udbredt?

EXERCISE 2.5

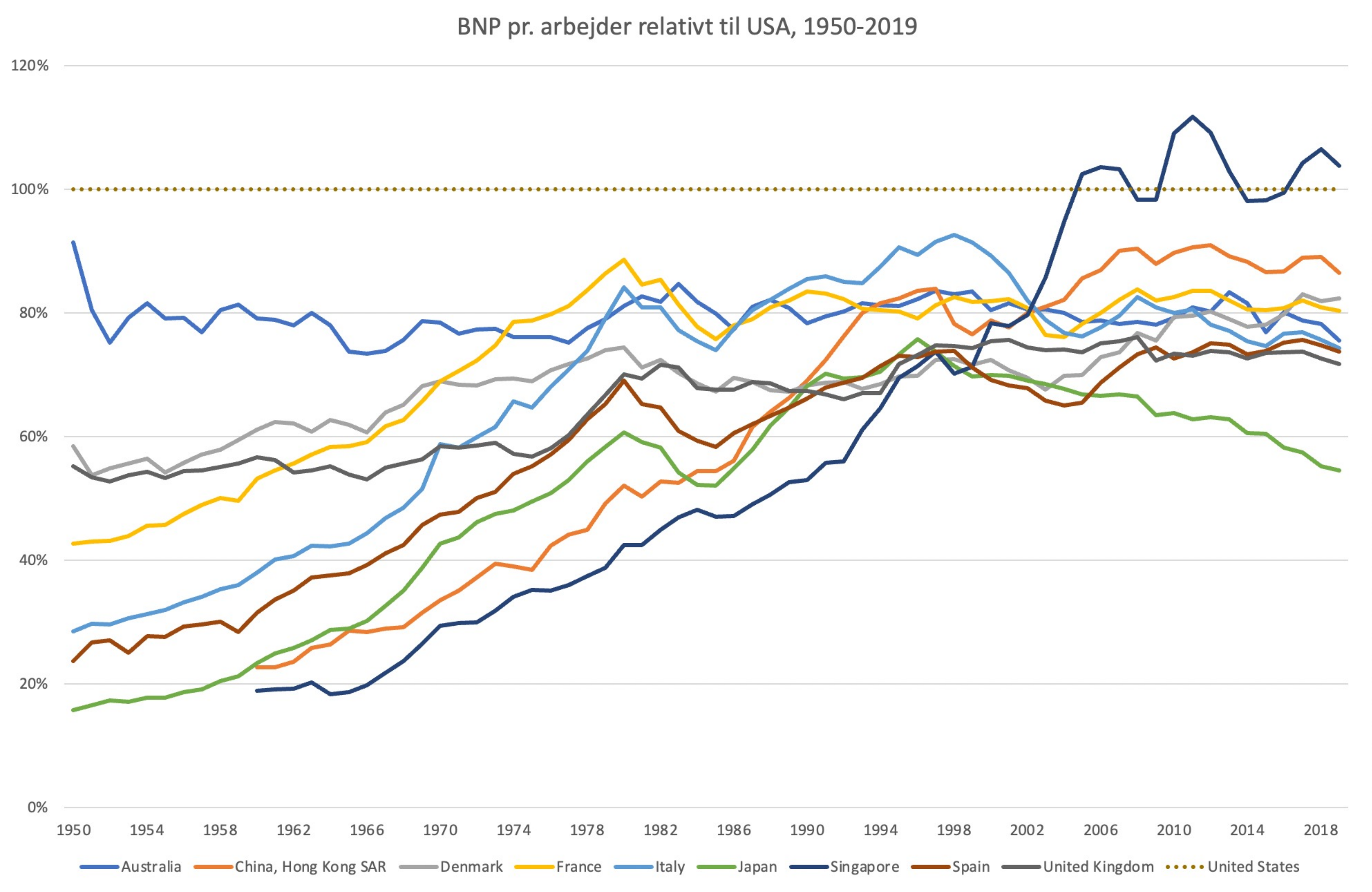
Exercise 2.5

Exercise 5. Level convergence among the rich?

Commenting on Figure 2.3 in Section 2.3, we said that it showed a tendency towards convergence to a common growth path with constant growth for the countries involved. Perhaps we were too hasty. The following figure will make level differences more visible if they are there. For the same countries and years as in Figure 2.3, compute GDP per worker relative to GDP per worker in the USA over the period and illustrate in a figure with *relative* GDP per capita against years. The US will appear as a horizontal line. Comment on the issue if all countries other than the US seem to be approaching the US horizontal line. To find the data for this exercise, you will have to go to the PWT yourself (at https://www.rug.nl/ggdc/productivity/pwt/) and find appropriate data for real GDP and the number of people engages in production.

Exercise 2.5 – step by step

- Find det excelark jeg har uploadet til jer i absalon (*pwt100_handout)*
- Udregn **indkomst pr. arbejder**
    - USA, Spanien, Italien, Singapore, Australien, Frankrig, Japan, Danmark, UK og Hong Kong.
    - Brug variablene *emp* og *rdgpe*
- Udregn **indkomst pr. arbejder relativt til USA**
- Lav graf, der viser udviklingen i de respektive landes BNP pr. arbejder relativt til USA's BNP pr. arbejder


BNP pr. arbejder relativt til USA, 1950-2019
120%
100%
80%
60%
40%
20%
0%
1950
1954
1958
1962
1966
1970
1974
1978
1982
1986
1990
1994
1998
2002
2006
2010
2014
2018
Australia
China, Hong Kong SAR
Denmark
France
Italy
Japan
Singapore
Spain
United Kingdom
United States

Tak for i dag!

1. holdundervisning

Hold 10

Anna Ølgaard
dlf928@econ.ku.dk

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Dagens program

- Navnerunde
- Praktisk info, forventningsafstemning og kort om mig

- Kapitel 2: Stylized facts, balanceret vækst og konvergenshypoteser
- Gennemgang af logaritmeregneregler (på tavlen), appendix om regression (slides)

Praktisk info og formalia

- Hver **mandag kl. 10-13** i lokale **2-2-12**
- Undervisningen vil i høj grad bære præg af aktiv deltagelse og primært bestå af opgaveregning.

Hvem er jeg – og mine forventninger til jer

- Kandidatstuderende på 11. semester, skriver i øjeblikket speciale – underviste også i makro 1 sidste efterår. Har tidligere været praktikant på den danske ambassade i Lissabon og arbejdet i Erhvervsministeriet. Og så har jeg været tutor, FU og formand for fredagsbaren ;-)

- Jeg forventer, at I selv gør en indsats når I er her til timerne; man må spørge om hjælp, lave fejl og der er ikke noget der hedder dumme spørgsmål – men det er vigtigt for jeres udbytte, at I selv gider at gøre en indsats. **Husk, at det er frivilligt at være her** ☺

Afleveringer

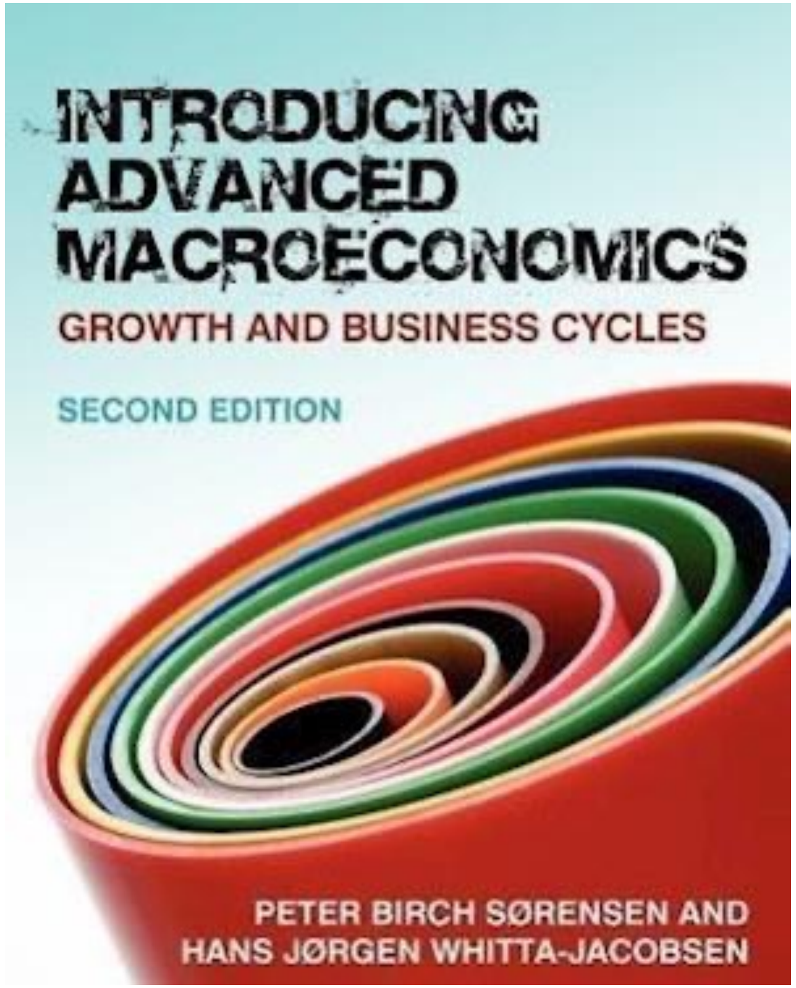
- 8 hjemmeopgaver, 6 skal godkendes for at kunne blive indstillet til eksamen.
- Afleveres udprintet til holdtimerne eller uploades på Absalon under "assignments". Afleveringer må afleveres sammen i grupper af **max 2.** I løbet af semesteret

Husk

- Mellemregninger, så jeg kan se hvordan I er kommet frem til resultatet
- Øv jer i at skriv intuitionen i et kort og forståeligt sprog

- I makroafleveringerne er der forholdsvis meget tekst (intuition), men også mange mellemregninger – overvej derfor at bruge en LaTex-editor (fx Overleaf) til jeres afleveringer.

Makro I



Pensum: Introducing Advanced Macroeconomics

- Lang sigt (Makro I) vs. kort sigt (Makro II)
- Udgangspunkt i en klassisk Solow-model, som vi løbende modificerer
- Hovedspørgsmål: Hvordan opnår vi langsigtet økonomisk vækst og dermed et højere niveau af velstand?
- Hvad skaber vækst?

Kapitel 2

Søger at opstille en model, der kan forklare forskelle i niveauer af velstand mellem lande.

↓

Hvordan måles velstand?

Hvad er en god model til at forklare forskelle i velstand?

KAPITEL 2

Hvordan måles velstand? Hvordan sammenligner vi velstand mellem lande? Hvad er en god model?

BNP

- Måler den "officielle", markedsrelaterede produktion. Udfordring, når man fx sammenligner industrialiserede lande med udviklingslande.
- Justeres ift. antal indbyggere, valuta (kan svinge meget, hvis de ikke er fixed) og købekraftsparitet (PPP), for at kunne bruges til sammenligning

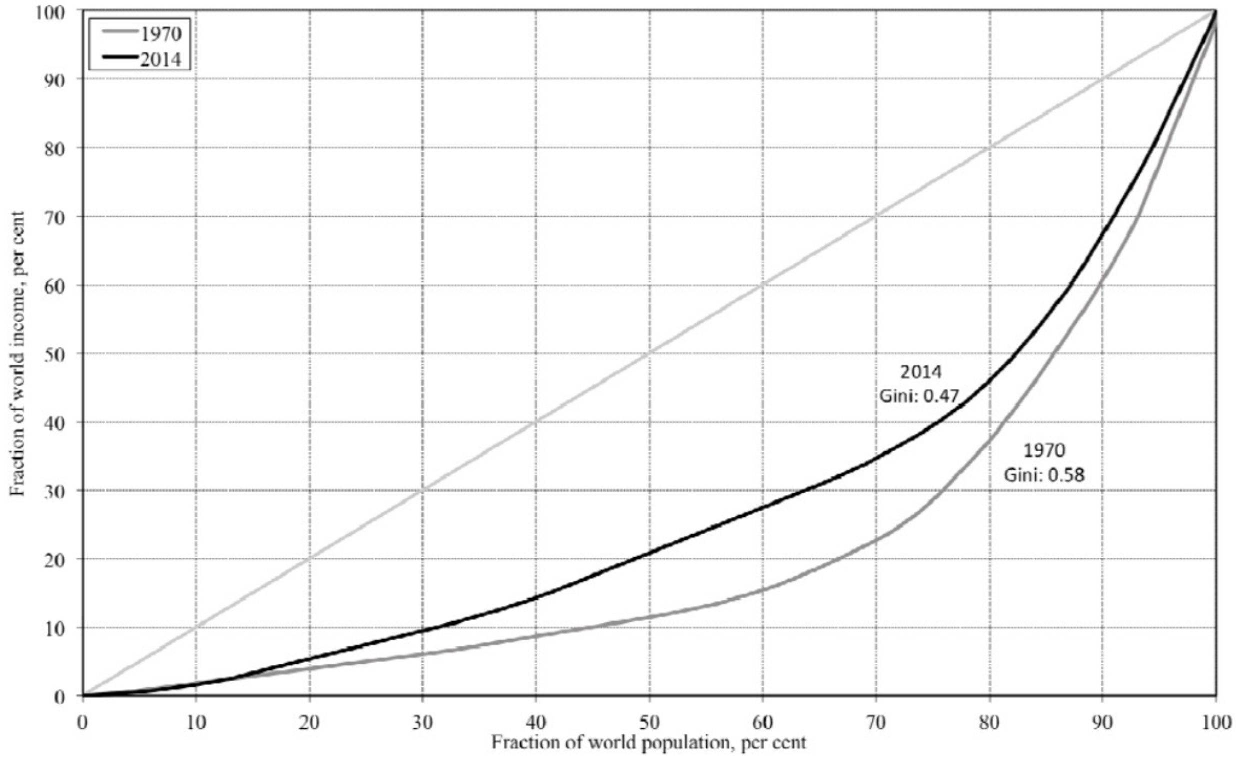
Stylized facts

- Empiriske observationer, som vores model gerne skal kunne opfylde
- En del af dem giver sig selv, men de er gode at kunne – fx til eksamen

Stylized facts #1

- Nogle lande er rige og nogle lande er fattige. Forskellene er enorme, og det har i relative termer været sådan over en lang tidshorisont.
- Kigger vi på udviklingen i løbet af de sidste 40-50 år, ser vi imidlertid en tendens til at indkomstfordelingen i verden er blevet mere lige – dog er ikke for de fattigste.

Figure 2.2 Lorenz curves for the world, 1970 and 2014, 103 countries



Source: Own calculations based on Penn World Table 9.0.

Stylized facts #2

- Vækstrater varierer meget mellem lande. Via en hurtigt voksende eller en hurtigt aftagende vækstproces, kan et land gå fra at være relativt fattigt til at være relativt rigt og omvendt.

Gennemsnitslige årlige vækstrater i BNP pr. arbejder, 1960-2017

Langsomst voksende	
Congo	-2,0
Zimbabwe	-0,8
Niger	-0,8
Senegal	-0,5

Hurtigst voksende	
Rumænien	6,1
Sydkorea	5,1
Egypten	4,7
Taiwan	4,5

Stylized facts #3

- Vækst kan både opstå og aftage pludseligt. Det vil sige, at lande kan gå fra at have en høj vækstrate til en lav vækstrate eller omvendt, på relativt kort tid.

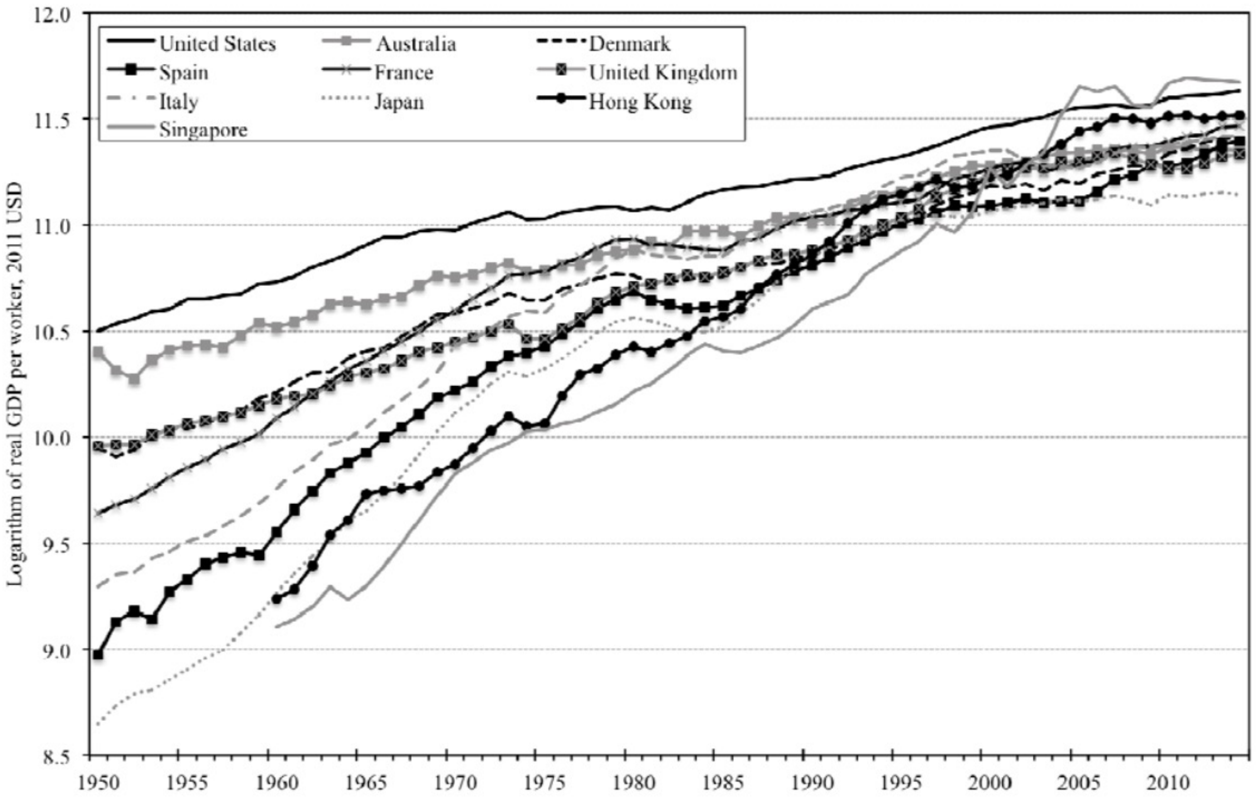
3 hypoteser om konvergens

1) **Absolut konvergens**: På lang sigt vil BNP pr. arbejder konvergere mod den samme *vækstbane*, således at alle lande konvergerer mod samme niveau af BNP pr. arbejder.
2) **Betinget konvergens**: Et lands BNP pr. arbejder konvergerer mod en langsigtet, lande-specifik vækstbane, der er givet som følge af landenes strukturelle karakteristika. Lande der ligner hinanden, vil altså konvergere mod samme vækstbane.
3) **Klubkonvergens**: Et lands BNP pr. arbejder konvergerer mod en langsigtet vækstbane, der er givet som følge af landenes strukturelle karakteristika *og* hvorvidt landets initiale niveau af BNP pr. arbejder ligger over eller under et specifikt tærskelniveau. Lande der ligner hinanden, vil altså konvergere mod samme vækstbane, betinget af at de også er på samme side af tærsklen.

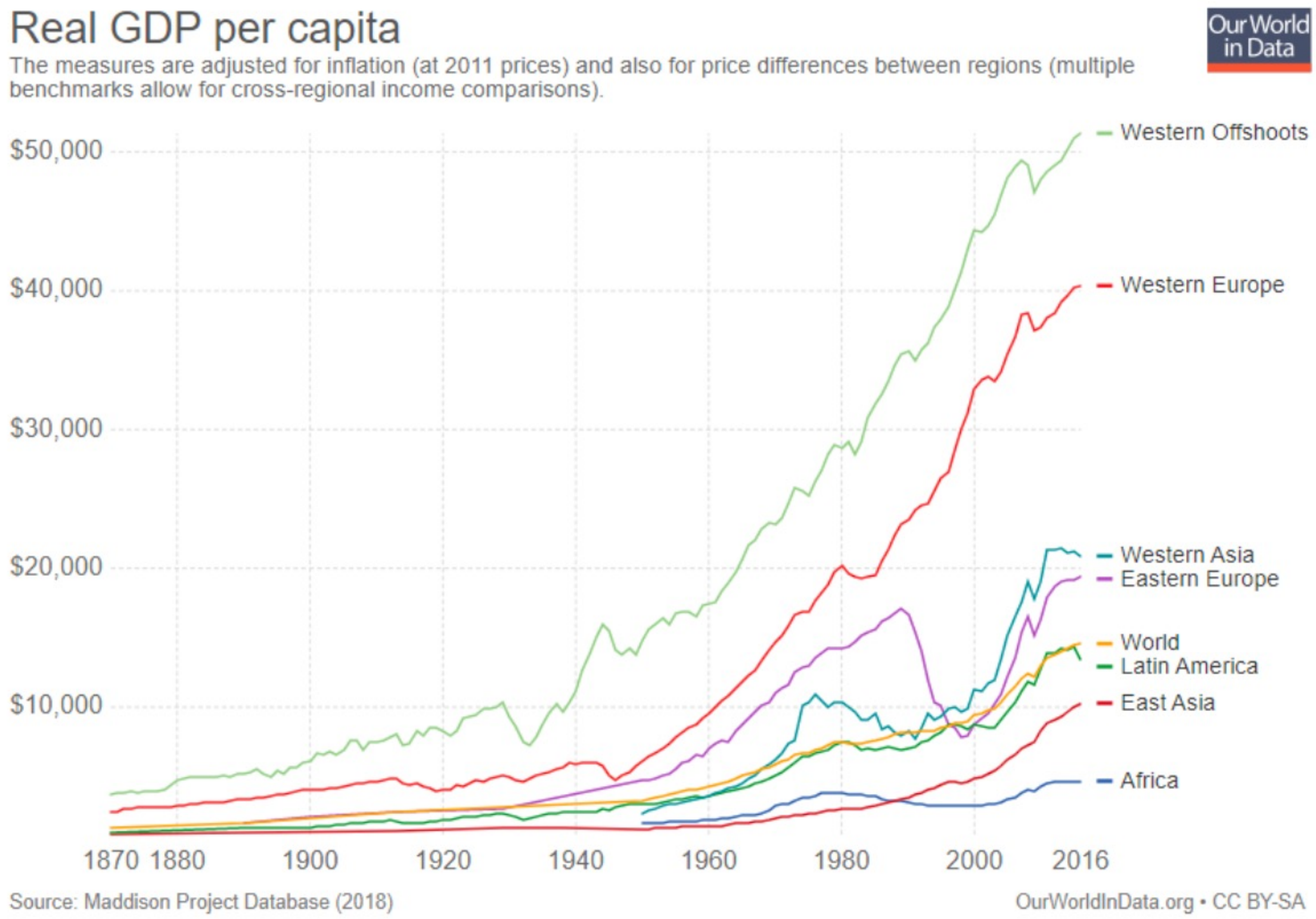
Alle tre hypoteser tilsiger endvidere, at desto længere under den langsigtede vækstbane et land starter, desto hurtigere vækst (alt andet lige) → implicerer en negativ sammenhæng mellem BNP pr. arbejder i år 0 og gns. vækstrate.

Hvad kan vi sige om konvergens ud fra denne figur?

Figure 2.3 Convergence of GDP per worker among selected countries, 1950 – 2014



Note: About GDP/worker, see note for Figure 2.1.
Source: Penn World Table 9.0.


Real GDP per capita
The measures are adjusted for inflation (at 2011 prices) and also for price differences between regions (multiple benchmarks allow for cross-regional income comparisons).
Our World in Data
$50,000
$40,000
$30,000
$20,000
$10,000
1870 1880
1900
1920
1940
1960
1980
2000
2016
Western Offshoots
Western Europe
Western Asia
Eastern Europe
World
Latin America
East Asia
Africa
Source: Maddison Project Database (2018)
OurWorldInData.org • CC BY-SA

Sammenhæng mellem BNP i år t=0 og gennemsnitlig vækstrate?

Figure 2.4 Average annual growth rate of GDP per worker against initial level of GDP per worker, 25 OECD countries

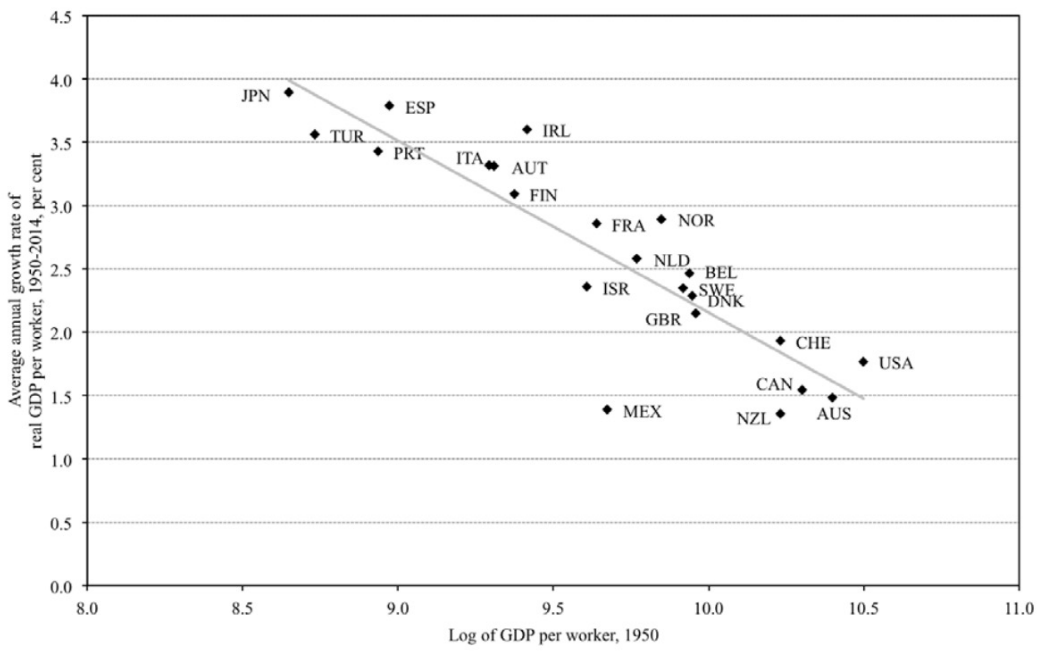
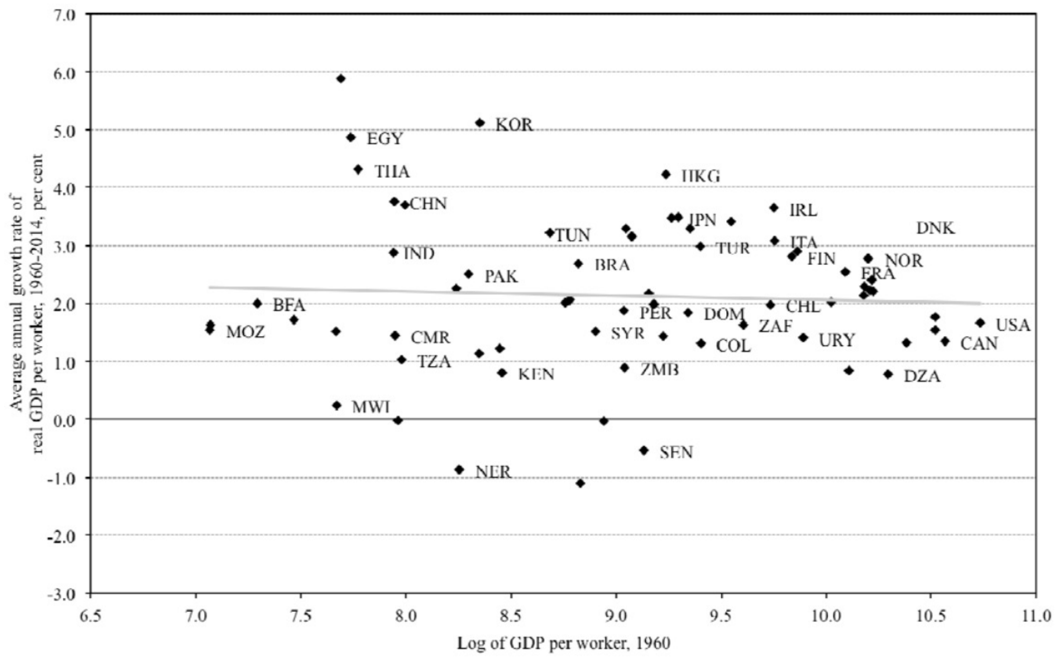


Figure 2.5 Average annual growth rate of GDP per worker against initial level of GDP per worker, 67 countries

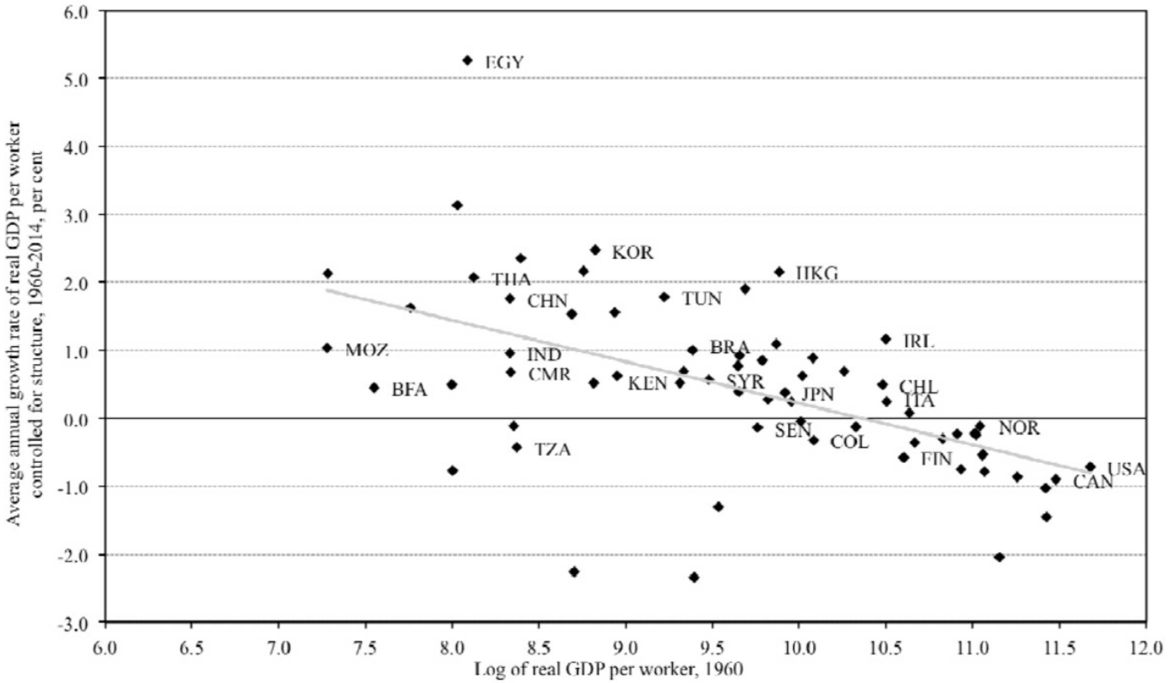


Hvad kan vi sige om konvergens ud fra disse figurer?

Stylized facts #4

- Hvis man kontrollerer for strukturelle forskelle, ser der ud til empirisk at være en negativ sammenhæng mellem det initale niveau af BNP og gennemsnitlig vækstrate.
- Dette er i overensstemmelse med hypotesen om betinget konvergens, og potentielt også hypotesen om klubkonvergens.

Figure 2.6 Average annual growth rate of GDP per worker adjusted for structural characteristics against the initial level of GDP per worker, 67 countries

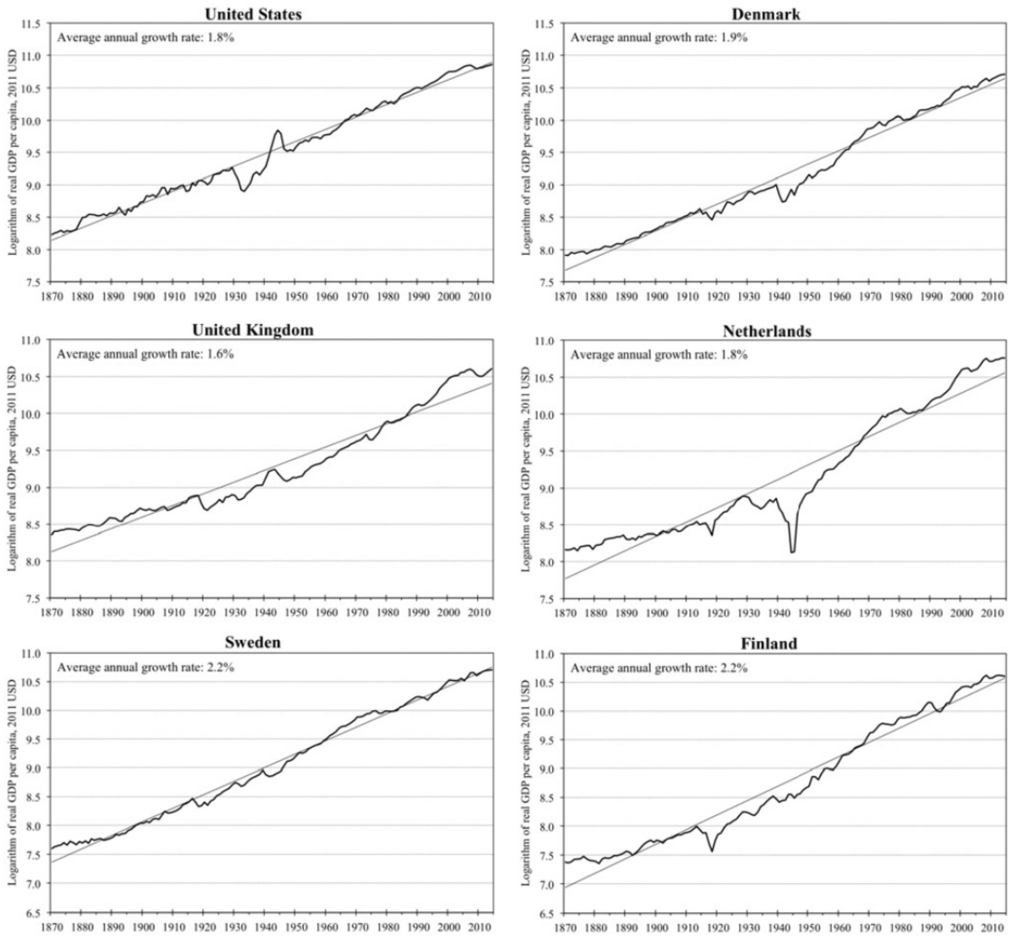


Note: About GDP/worker, see note for Figure 2.1. The indicated line is $g^i = 7.16 - 0.75 \cdot \ln y^i$, $R^2 = 0.31$ and $t = -5.43$.

Source: Penn World Table 9.0.

Stylized facts #5

Figure 2.7 GDP per capita, some Western countries, 1870 – 2014



- Over de sidste 150 år (og sandsynligvis 200 år eller mere), har en række lande i det vestlige Europa og Nordamerika oplevet relativ konstant årlig vækst i BNP pr. capita på mellem 1,5 - 2 pct. om året.
- Gennemsnitlige vækstrater mellem 1,6 og 2,2 pct. i perioden 1870-2014 i de viste lande i figuren

Stylized facts #6

- Over lange perioder med relativt konstante vækstrater i BNP pr. arbejder i de vestlige økonomier, ser vi på langt sigt en tendens til, at arbejdskraftens andel af BNP har været relativt kontant, og (derfor) også, at den gennemsnitlige realløn approksimativt er steget med samme rate som BNP pr. arbejder.

Figure 2.8 Labour's share, USA and Denmark, 1970 – 2017

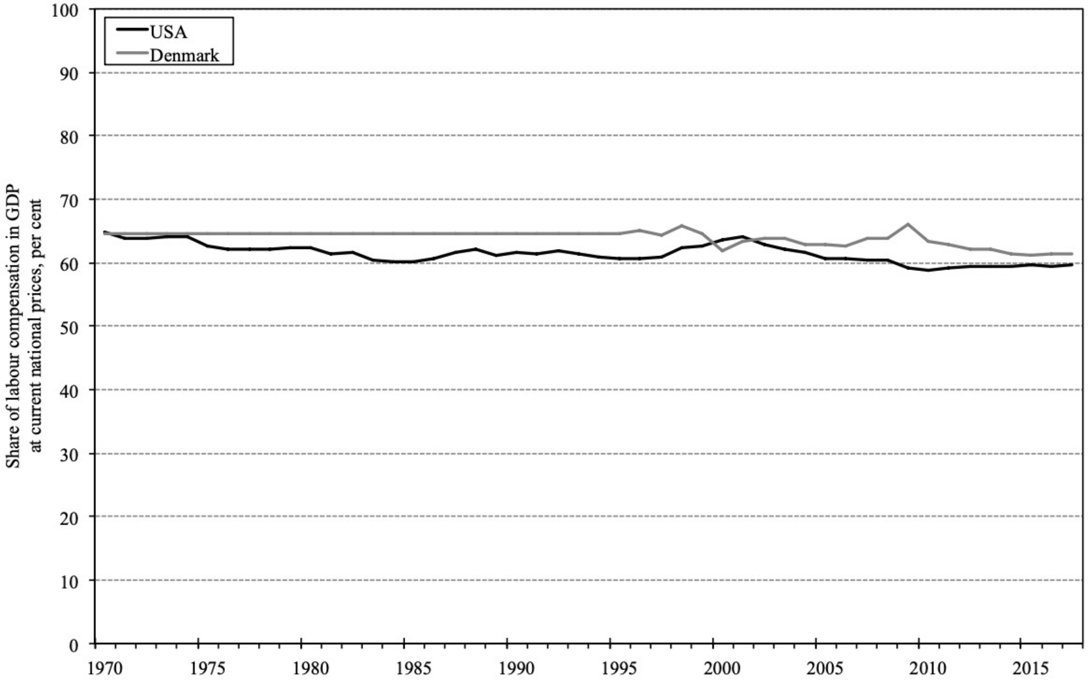


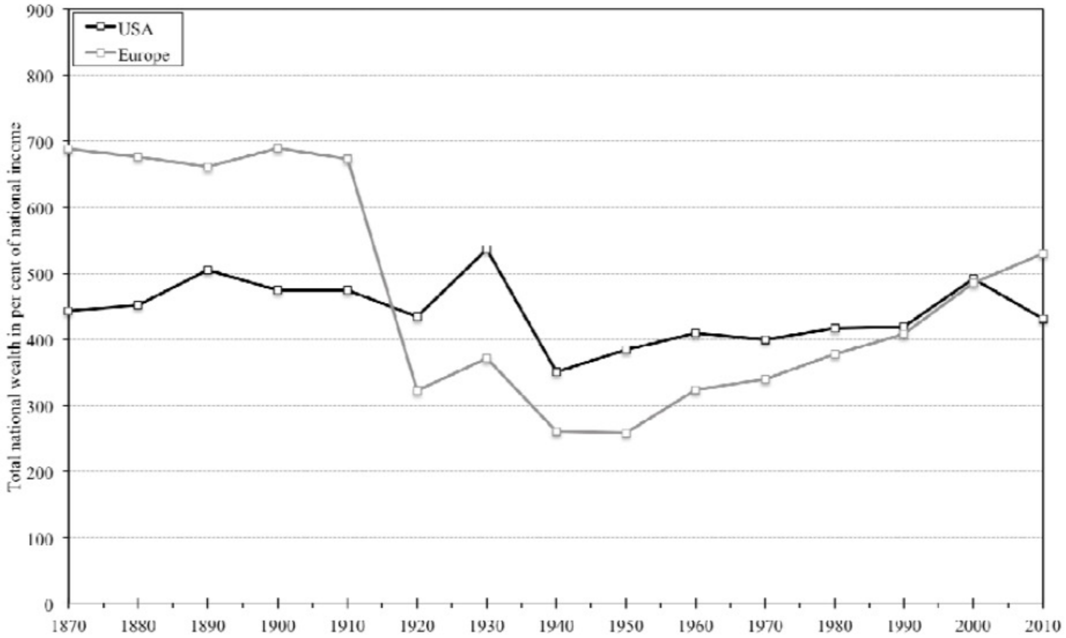
Figure 2.9 Labour's share, USA and Europe, 1870 – 2010

Stylized facts #7

- Over lange perioder med relativt konstante vækstrater i BNP pr. arbejder i de vestlige økonomier, ser vi på langt sigt en tendens til, at kapitalens indkomstandel har været relativt konstant og at ratioen mellem kapital og output (K/Y-forholdet) har været relativt konstant.

- På baggrund af ovenstående ser vi derfor en langsigtet tendens til, at afkastet på kapital har været relativt konstant, og at kapitalintensiteten (K/L-forholdet) er vokset med approksimativt samme vækstrate som indkomst pr. arbejder.

Figure 2.10 Wealth- income ratios, USA and Europe, 1870 – 2010



Balanceret vækst

- En balanceret vækstproces er opfyldt, hvis
  1) BNP pr. arbejder, forbrug- og investeringer pr. arbejder, reallønnen og K/L-forholdet alle vokser med samme vækstrate ***g***
  2) BNP, forbrug, investeringer og kapital vokser med en konstant vækstrate ***g+n***, hvor ***n*** er vækst i arbejdsstyrken
  3) K/Y-forholdet samt afkastet på kapital (=realrenten) begge er konstante

- Dvs., balanceret vækst, når stylized facts #5, #6 og #7 er opfyldt.

LOGARITMEREGNEREGLER

REGRESSIONSANALYSE

Regressionsanalyse

- Vi vil gerne undersøge, hvordan (om) en variabel x påvirker variabel y
  - Vi kalder det at "undersøge kausal sammenhæng" (årsagssammenhæng)
  - Vi kan fx undersøge, hvordan antal timer på læsesal (x) påvirker eksamenskarakter (y), ved at opstille følgende regression

$$\boxed{\boldsymbol{y = \beta_0 + \beta_1 x + u \Rightarrow Eksamenskarakter = \beta_0 + \beta_1 timer\ på\ læsesal + u}}$$

- Hvor β_1 er en hældningsparameter, der beskriver, hvor meget en ekstra time på læsesal påvirker din eksamenskarakter. β_0 er en konstant, som I kan se bort fra.
- $\boldsymbol{u}$ er et fejlled, og indeholder alle de faktorer, som også kan påvirke eksamenskarakter, fx medfødt intelligens, men som vi ikke kontrollerer for. $\boldsymbol{u}$ skal i gennemsnit være = 0, så den i gennemsnit ikke påvirker y overhovedet.

Regressionsanalyse

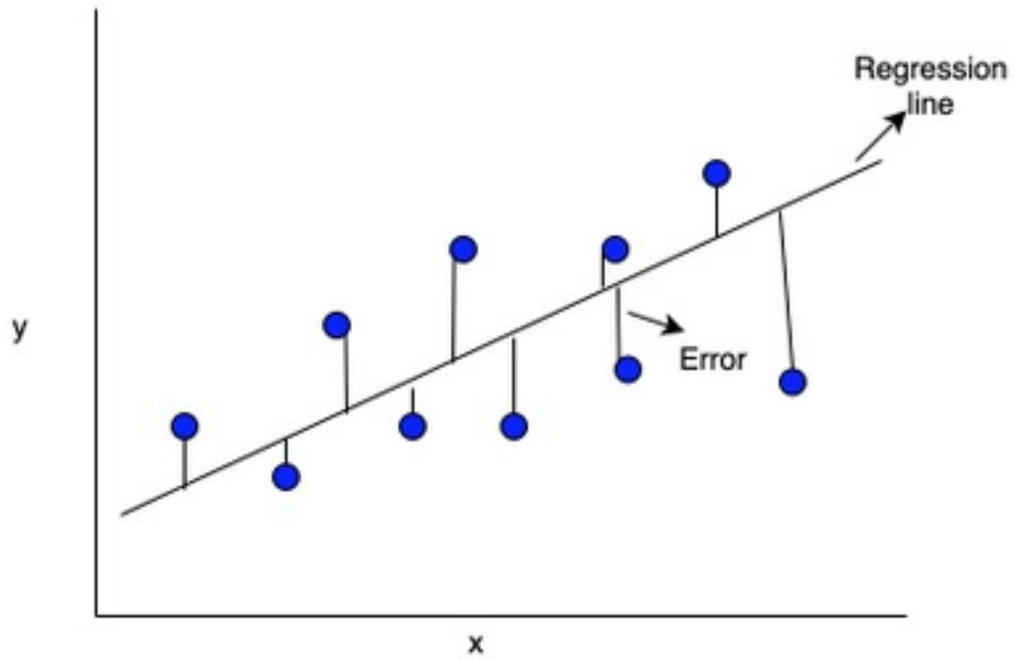
$$\boxed{y = \beta_0 + \beta_1 x + u \;\Rightarrow Eksamenskarakter = \beta_0 + \beta_1 timer\ \text{på}\ læsesal + u}$$

- Vigtigt, at sammenhængen er ***kausal***, og at være bevidst om, hvilken vej kausaliteten går
  - Er kriminaliteten høj, fordi der er mange politibetjente i byen eller er der mange politibetjente fordi kriminaliteten er høj?

- Snak med sidemanden om 2 forskellige mulige kausale sammenhænge (én ikke-økonomisk og én økonomisk). Herunder diskutér:
  - Kan sammenhængen kan fortolkes ”den anden vej rundt”?
  - Hvilket fortegn forventer i parameterværdien har?
  - Kunne der være andet som kan beskrive hvordan x påvirker y?
  - Hvor stor en forklaringsgrad tror I, at jeres kausale sammenhænge har?

Regressionsanalyse

- Man estimerer ved en metode kaldet "Ordinary Least Squares" (OLS)
- Helt kort minimerer man den kvadrerede afstand mellem observationerne og den bedste rette linje
- Når man estimerer en regression, vil man også få en forklaringsgrad, $\boldsymbol{R^2}$. Grundlæggende siger $\boldsymbol{R^2}$, hvor stor en del af variationen i $\boldsymbol{y}$, som $\boldsymbol{x}$ er i stand til at forklare, men det er en parameter, vi tolker varsomt inden for økonomi!



Tak for i dag!

- Spørgsmål? Ellers tak for i dag ☺

HUSK FØRSTE HJEMMEOPGAVE NÆSTE MANDAG