Matematik A E2020
Uge 38, Forelæsning 1

Afsnit 4.6-4.10

Polynomier, potensfunktioner, eksponentialfunktioner, logaritmefunktioner

Overblik

- Dagens stof
  - 4.6: Andensgradspolynomier – læs selv!
  - 4.7: Generelle polynomier, herunder “polynomiers division”
  - 4.8: Potensfunktioner (kort)
  - 4.9: Eksponentialfunktioner, herunder den naturlige eksponentialfkt
  - 4.10: Logaritmefunktioner, især den naturlige logaritmefkt

  Til allersidst kommer et par små øvelser

Næste gang (onsdag): Grænseværdi og Kontinuitet

Polynomier (4.7)

- Et polynomium af grad $n \geq 0$ er en funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ af formen

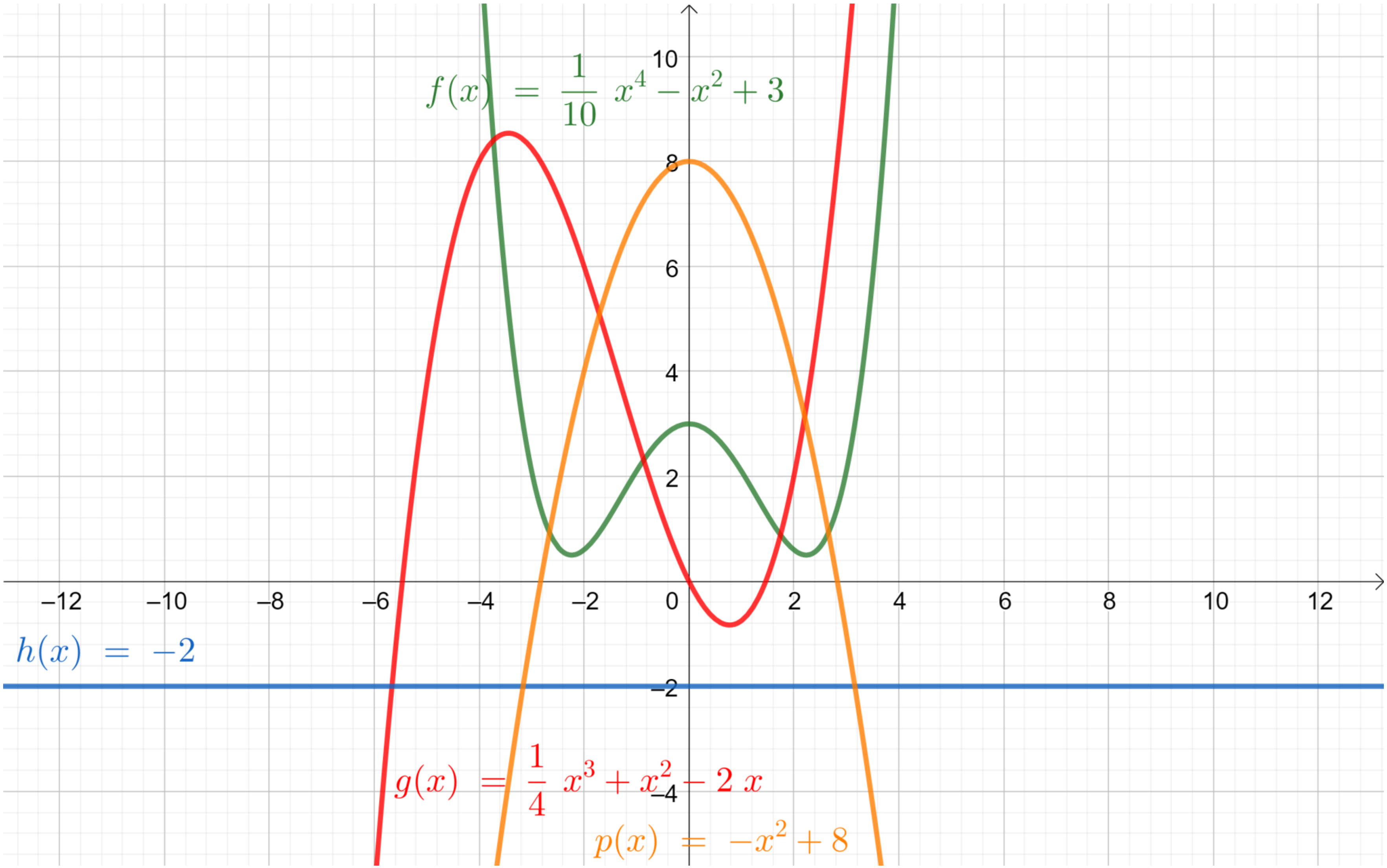
$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

  hvor $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ og $a_n \neq 0$.

- Nulpolynomiet: $N(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

- Rødder: $a \in \mathbb{R}$ er rod i P hvis $P(a) = 0$

Eksempler



$f(x) = \frac{1}{10} x^4 - x^2 + 3$
$g(x) = \frac{1}{4} x^3 + x^2 - 2x$
$h(x) = -2$
$p(x) = -x^2 + 8$
–12
–10
–8
–6
–4
–2
0
2
4
6
8
10
12

Faktorisering af polynomier

Sætning (nederst s. 117):

Lad P og Q være polynomier, så graden af P er større end eller lig graden af Q.
Da findes entydige polynomier q og r så

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x) \qquad \text{for alle } x$$

og graden af r er mindre end graden af Q

Hvis restpolynomiet r er nulpolynomiet ($r(x) = 0$ for alle x), siger vi at "Q går op i P" eller at "Q er en faktor i P"

Hvis $Q(x) = x - a$:

$$P(x) = q(x)(x-a) + r \qquad \text{for alle } x$$

Sætning (4.7.5, s. 118):

a er rod i polynomiet P (dvs $P(a) = 0$)

$$\Leftrightarrow$$

Polynomiet $Q(x) = x - a$ går op i P (dvs $P(x) = q(x)(x-a)$)

"⇒" Sætn: $P(x) = q(x)(x-a) + r$

Da $P(a) = 0$: $P(a) = q(a)(a-a) + r = r = 0$

Dvs: $P(x) = q(x)(x-a)$

"⇐" Antagelse: $P(x) = q(x)(x-a)$

$\underline{P(a)} = q(a)(a-a) = \underline{0}$ $\square$

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$$

Polynomiers division

Givet P og Q findes metode til at finde q og r

Lad os prøve med: $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2$ og $Q(x) = x^2 + 2$

$$2x^4 + 4x^3 - 2 : x^2 + 2 = \underbrace{2x^2 + 4x - 4}_{q(x)}$$

$$-(2x^4 + 4x^2)$$

$$4x^3 - 4x^2 - 2$$

$$-(4x^3 + 8x)$$

$$-4x^2 - 8x - 2$$

$$-(-4x^2 - 8)$$

$$\underbrace{-8x + 6}_{r(x)}$$

$$P(x) - q(x)Q(x) = r(x)$$

Altså:

$$2x^4 + 4x^3 - 2 = (2x^2 + 4x - 4)(x^2 + 2) - 8x + 6$$

Eks. på anvendelse af pol. div.

$\boxed{\text{Find alle rødderne i } P(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2}$

"Gæt en rod": $P(1) = 0$ [Se evt Sætning 4.7.6]

Polynomiers division:

$$x^3 + 5x^2 - 4x - 2 = (x^2 + 6x + 2)(x - 1)$$

Rødder i $q(x) = x^2 + 6x + 2$: $x = -3 \pm \sqrt{7}$

Altså har vi alle rødder i P:

$$x = -3 - \sqrt{7}, \quad x = -3 + \sqrt{7} \quad \text{og} \quad x = 1$$

Antal rødder i n'te-grads polynomium

Sætning (s. 118 midt):

Et polynomium af grad n har højst n forskellige rødder

MODSTRIDSBEVIS:

Lad P være n'te grads pol. med mindst $n+1$ forsk. rødder:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}$$

Så må $(x-r_1), (x-r_2), \ldots, (x-r_{n+1})$ være faktorer i P.

Dvs:

$$P(x) = q(x)(x-r_1)(x-r_2)\cdot \ldots \cdot (x-r_{n+1})$$

Altså er P pol. af grad $\geq n+1$. MODSTRID!

$\square$

Rationale funktioner

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{(hvor } Q(x) \neq 0\text{)}$$

Polynomier

Hvis graden af P er mindre end graden af Q kaldes den rationale funktion *ægte (proper)*, ellers kaldes den *uægte (improper)*.

En uægte rational funktion kan omskrives til sum af et polynomium og en ægte rational funktion vha polynomiers division.

Eks:

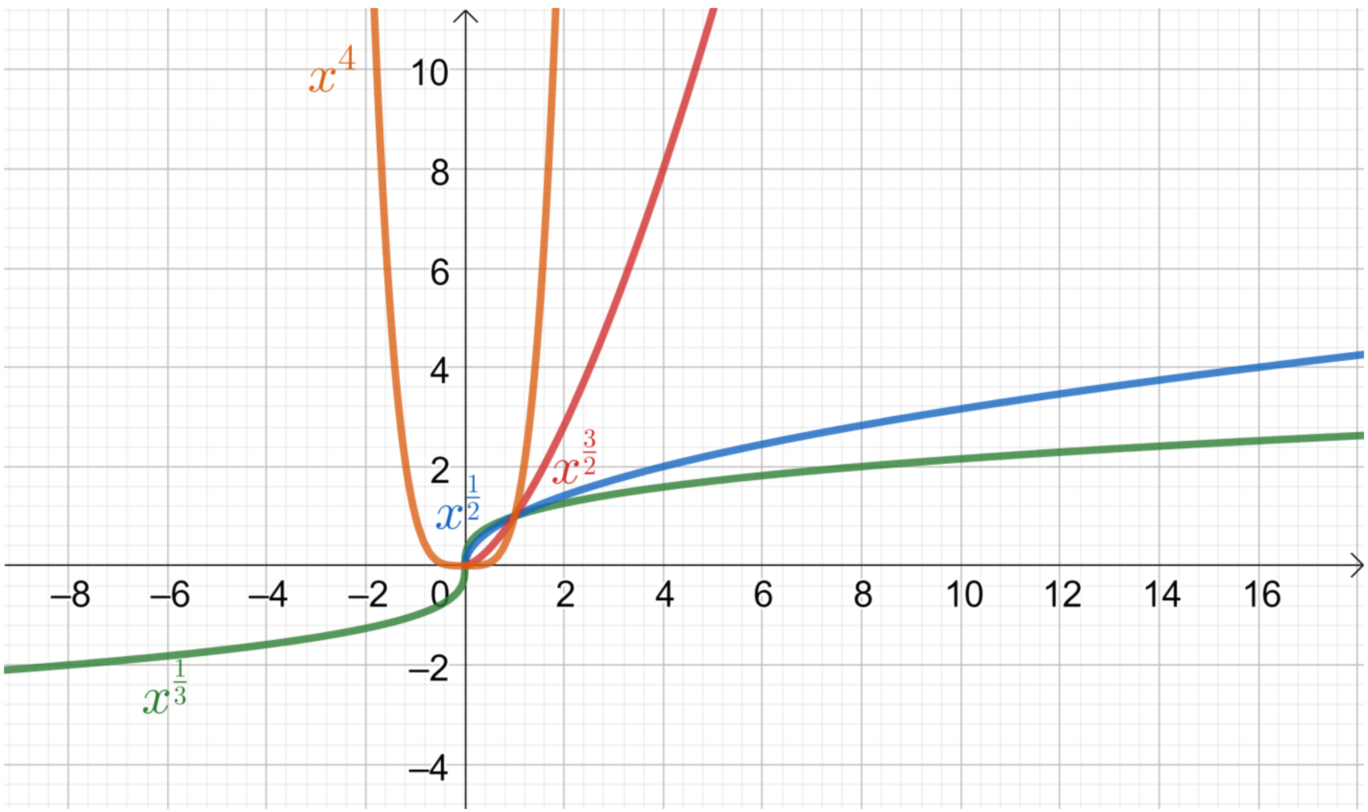
$$\frac{x^2-x-1}{x+1} = \underbrace{x - 2}_{q(x)} + \frac{\overset{r(x)}{1}}{x+1}$$

P(x)

Q(x)

Potensfunktioner (4.8)

$$\boxed{f(x) = Ax^r, \quad \text{hvor } A, r \in \mathbb{R} \text{ er konstanter og } x > 0}$$



Eksponentialfunktioner (4.9)

$$f(x) = Aa^x,$$

hvor A og $a > 0$ er konstanter og $x \in \mathbb{R}$

grundtal/base

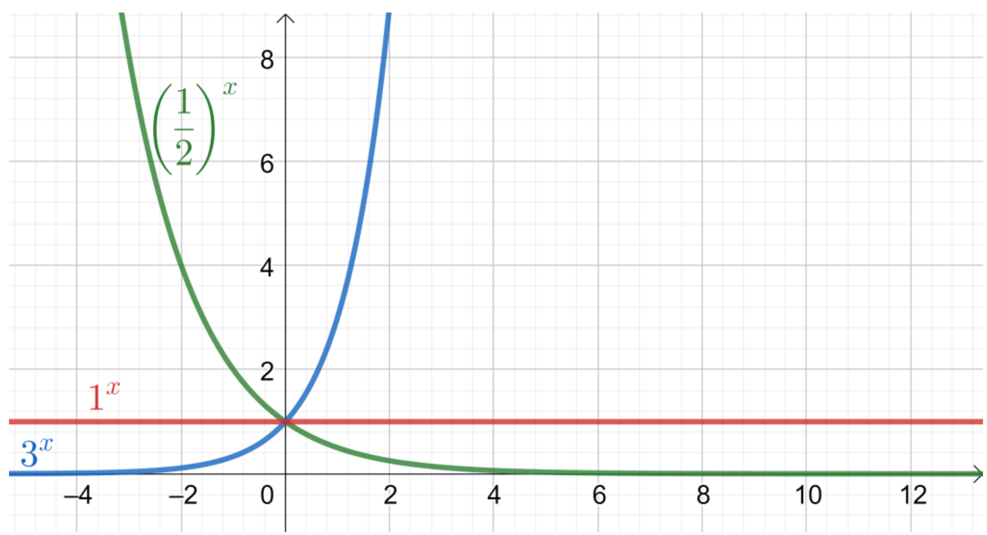
Husk:

$$f(x+1) = Aa^{x+1}$$

$$= Aa^x \cdot a^1$$

$$= a(Aa^x)$$

$$= a\,f(x)$$



Den naturlige eksponentialfkt e^x

$(\exp(x))$

Tallet $e \in \mathbb{R}$:

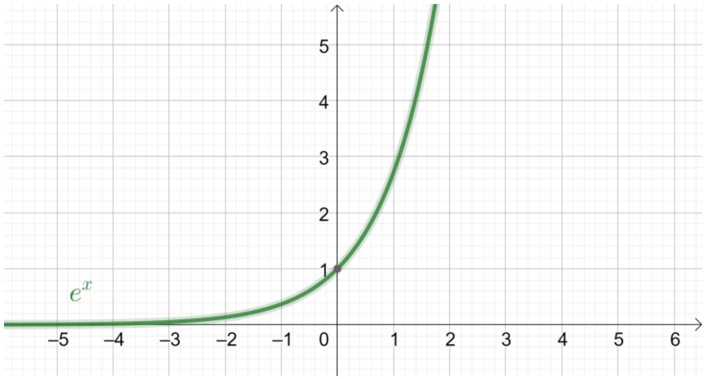
$k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \qquad e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \qquad \ln(e) = 1$$

$$e \approx 2,71828\ldots$$

Den naturlige eksponentialfunktion er eksp.funktionen med grundtal/base e:

$$f(x) = e^x$$

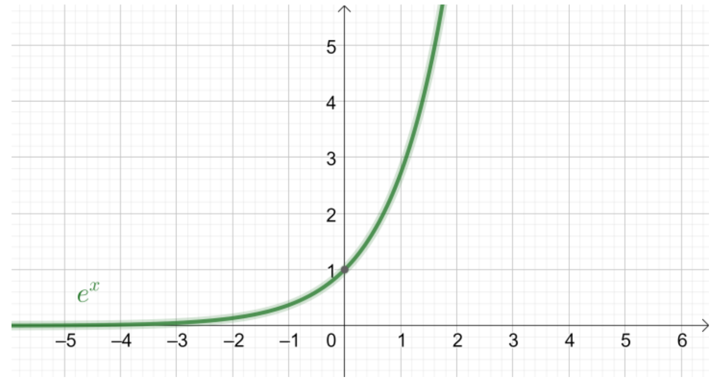


Husk potensregnereglerne:

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad \text{etc...}$$

Den naturlige logaritmefkt $\ln$ (4.10)

$f(x) = e^x$ er strengt voksende og derfor injektiv

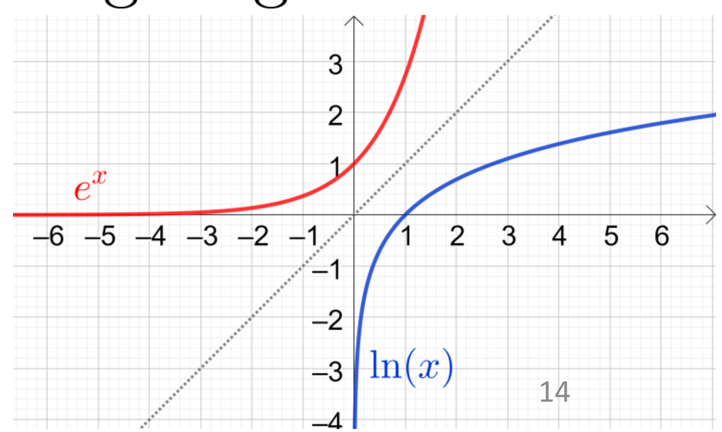


Værdimængde: $R_f = (0, \infty)$

Betragtet som fkt $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$
har $f(x) = e^x$ derfor invers $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

Det er vores definition af den naturlige log-fkt ln

Altså: $\ln(y)$ er det tal x så $e^x = y$



Dvs:

$$\boxed{e^{\ln(y)} = y \text{ for alle } y \in (0, \infty)}$$

Regneregler for $\ln$

For $x, y > 0$, $p \in \mathbb{R}$:

1) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

2) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

3) $\ln(x^p) = p\ln(x)$

4) $\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$

1) $\ln(xy)$ er def. ved $e^{\ln(xy)} = xy$

vis: $e^{\ln(x)+\ln(y)} = xy$

$$\underline{e^{\ln(x)+\ln(y)}} = e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)} \underline{= x \cdot y} \quad \checkmark$$

Andre logaritme-funktioner

Logaritmefkt med grundtal/base $a > 1$ ($\log_a$):

Den inverse funktion til $f(x) = a^x$, altså

$$\boxed{a^{\log_a(y)} = y \text{ for alle } y \in (0, \infty)}$$

Sammenhæng med den naturlige log-fkt:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$a^{\log_a(x)} = x \Rightarrow \ln(a^{\log_a(x)}) = \ln(x) \Rightarrow \underline{\log_a(x) \cdot \ln(a) = \ln(x)}$

Heraf følger nemt regneregler for $\log_a$:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \text{etc... (se s. 135)}$$

To små øvelser

Lad $a, K > 0$ være konstanter.

1) Løs ligningen: $\frac{e^{ax}}{K} = 7$ $\Leftrightarrow$ $e^{ax} = 7K$ $\Leftrightarrow$ $ax = \ln(7K)$

(mht. x)

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(7K)}{a} = \frac{\ln(7) + \ln(K)}{a}$$

2) Er nedenstående formel korrekt? **pingo.coactum.de (185415)**

$$\ln(a\sqrt{K}) = \frac{\ln(K)+2\ln(a)}{2} \quad \checkmark \quad \text{JA!}$$

$$\ln(a\sqrt{K}) = \ln(a) + \ln(K^{\frac{1}{2}}) = \ln(a) + \frac{1}{2}\ln(K)$$

$$= \frac{2\ln(a) + \ln(K)}{2}$$

Ekstra øvelse!

Vis: $\frac{1}{2}\ln(x) - \frac{3}{2}\ln(\frac{1}{x}) - \ln(x+1) = \ln(\frac{x^2}{x+1})$

Hvad er restriktionen på x?

$$= \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{3}{2}\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}\right) - \ln(x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{3}{2}\ln(x) - \ln(x+1)$$

$$= 2\ln(x) - \ln(x+1) = \ln(x^2) - \ln(x+1)$$

$$= \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$$

Da både venstre- og højreside skal give mening, er restriktionen $\underline{x > 0}$.