Nutidsværdi af betalingsrækker

Jakup Frisgaard Reynheim
Økonomisk Institut

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Sidste kapitel (kapitel 5)

- Vi introducerede simple redskaber til for en given betaling at beregne
  - En betaling på tidspunkt 0 med ækvivalent værdi → nutidsværdi
  - En betaling på tidspunkt t med ækvivalent værdi → fremtidsværdi

- Vi udledte den basale nutidsværdiligning:

$$PV = \frac{FV_t}{(1+r)^t}$$

- Vi kan altså "flytte" en given betaling frem og tilbage i tid:

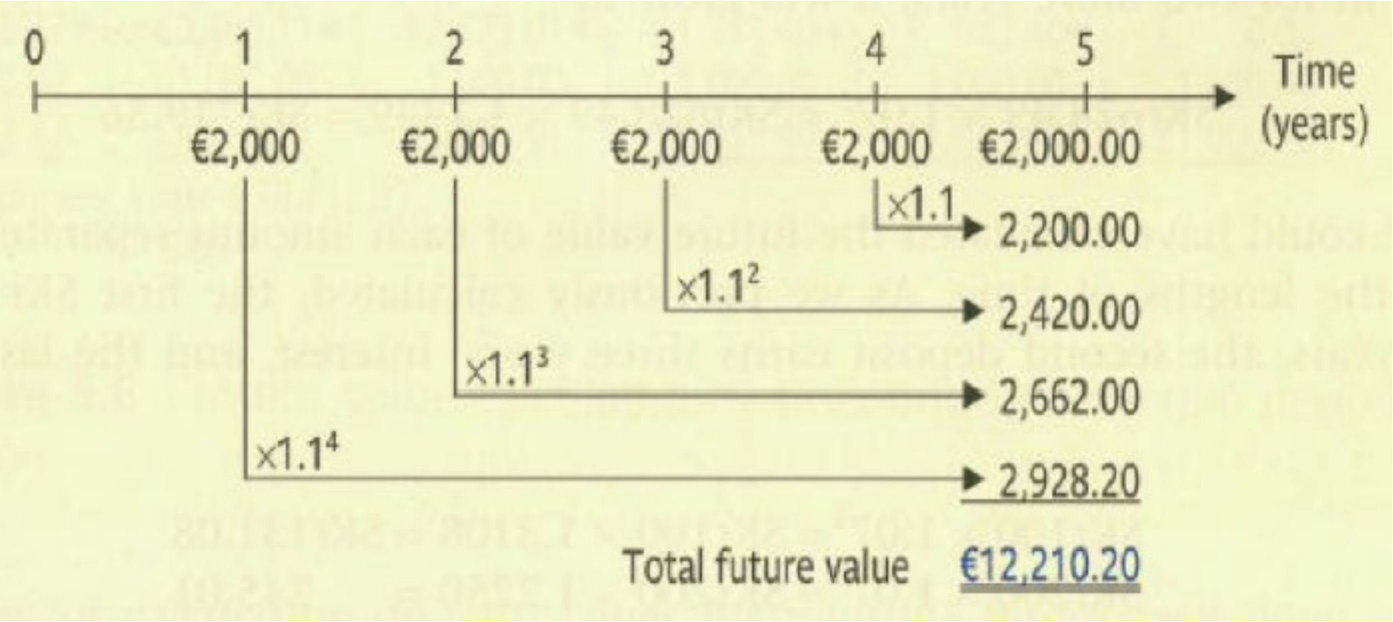
$$\begin{aligned} &X\ kr.\ i\ 2015 \\ &= X \cdot (1+r)^3\ kr.\ i\ 2018 \\ &= \frac{X}{(1+r)^2}\ kr.\ i\ 2013 \end{aligned}$$

Introduktion

- Kapitel 6 i lærebogen: "Discounted Cash Flows and Valuation"
- Anvend de udledte formler på betalingsrækker → fx hvad er nutidsværdien af tre betalinger der falder på forskellige tidspunkter?
- Finde særlige regneregler for betalingsrækker der er konstante over tid, fx:
  - Hvad er nutidsværdien af en betaling på 1.000 kr per måned i al fremtid ("*perpetuity*")
  - Hvad er den årlige ydelse på et fastforrentet lån på 1 million kroner der skal betales ned over ti år ("*annuitet*")?
- Finde særlige regneregler for betalingsrækker der har en konstant vækstrate, fx.
  - Hvad er nutidsværdien af en uendelig betalingsrække der starter på 1.000 kr. næste år og derefter vokser med 5% om året i al fremtid?

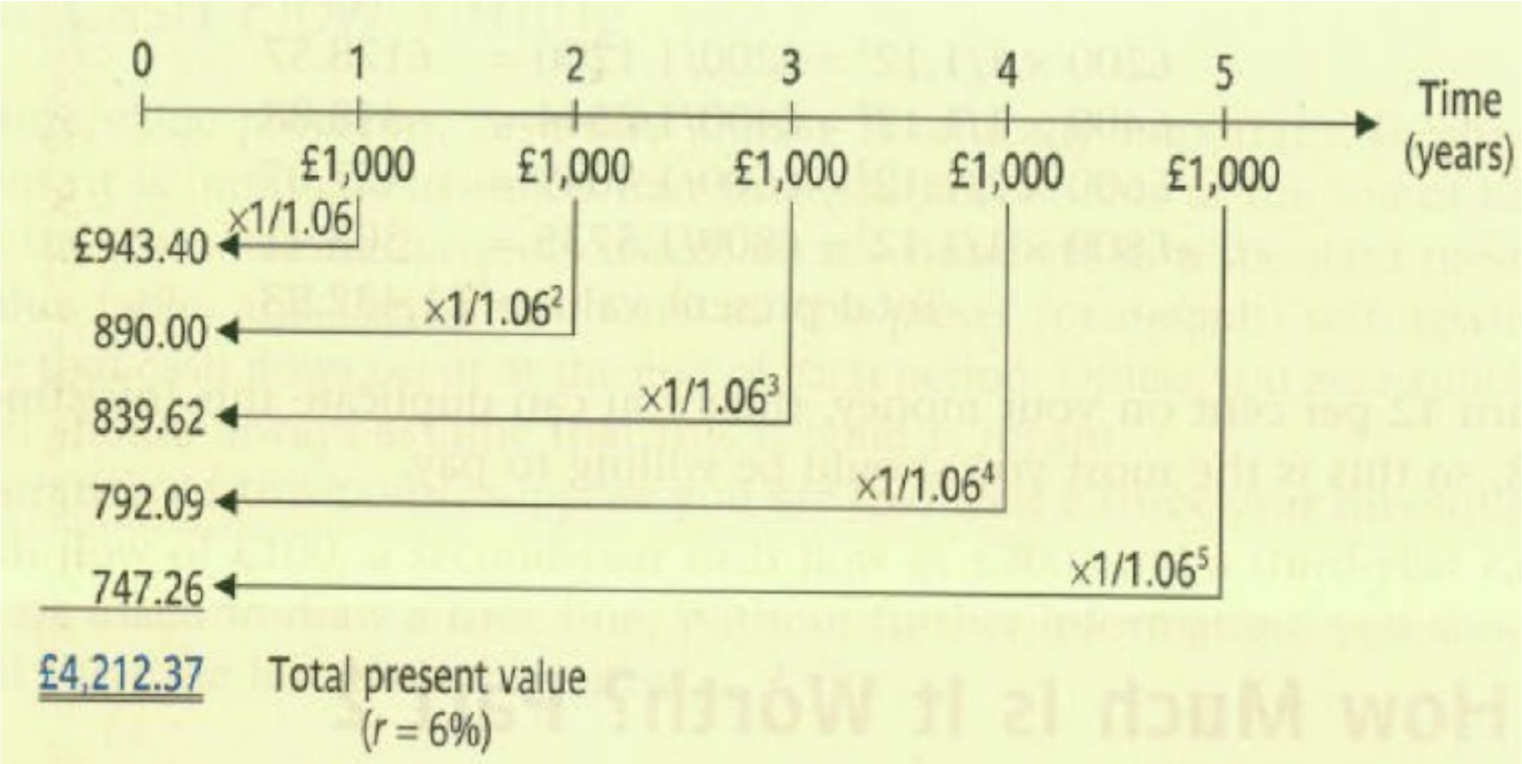
Fremtidsværdi af en betalingsrække

- Fremtidsværdien af en betalingsrække kan findes som summen af fremtidsværdierne af hver enkelt betaling



Nutidsværdi af en betalingsrække

- Nutidsværdien af en betalingsrække kan findes som summen af nutidsværdierne af hver enkelt betaling



Betalingsrækker

- Beregn nutidsværdi eller fremtidsværdi af en betalingsrække i "two easy steps"

1. Flyt alle betalingerne til samme tidspunkt ved hjælp af den basale nutidsværdiligning
   - Tidspunkt 0 $\rightarrow$ nutidsværdi
   - Tidspunkt $t > 0 \rightarrow$ fremtidsværdi

2. Summer beløbene

Perpetuitet

- En perpetuitet er en uendelig række af lige store betalinger → her kan nutidsværdien ikke findes som summen af nutidsværdierne af hver enkelt betaling

- Fx *preferred shares* er en særlig slags værdipapirer som er en mellemting ("*hybrid*") mellem gæld og egenkapital
  - Fast dividende (ligesom gæld / i modsætning til egenkapital)
  - Ingen udløbstid (ligesom egenkapital / i modsætning til gæld)

Perpetuitet

- Hvad er nutidsværdien af en uendelig række af årlige betalinger på 1.000 kr. ved en rente på 5%?

- **Intuition**: nutidsværdien er det beløb X som jeg skulle have stående i banken fast for at få en årlig rentebetaling på 1.000 kr.

$$X \cdot 0{,}05 = 1.000 \Rightarrow X = \frac{1.000}{0{,}05} = 20.000$$

- Generel formel: nutidsværdien af en uendelig række af betalinger på C ved renten r er givet ved følgende formel:

$$PV = \frac{C}{r}$$

Perpetuitetsformel

- Betrag en uendelig række af betalinger på C
- Ved diskonteringsrenten r er nutidsværdien givet ved

$$PV = \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots \qquad (1)$$

- Multiplicer begge sider med $(1+r)$

$$(1+r) \cdot PV = C + \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots \qquad (2)$$

- Ved at trække (1) fra (2) fås

$$r \cdot PV = C \Leftrightarrow PV = \frac{C}{r}$$

Summespørgsmål (2 min.)

- Hvad er nutidsværdien af en preferred share med en pålydende værdi på 100 kroner og en fast dividende på 3% hvis renten er 5%?
- Giver det mening at nutidsværdien er forskellig fra den pålydende værdi?

Svar

- Aktien giver en uendelig række af betalinger på 3 kr.

- Nutidsværdien af denne række er givet ved

$$PV = \frac{3}{0{,}05} = 60\ kr.$$

- Aktiens markedspris bør være 60 kroner (kurs 60)

$\rightarrow$ Ved denne pris svarer det årlige afkast på 3 kroner præcis til diskonteringsrenten på 5%.

- Meget mere om dette i fagets finansieringsdel

Annuitet

- En annuitet er en række af lige store årlige betalinger over en endelig tidsperiode
- Fx et huslån har typisk form som et annuitetslån, som tilbagebetales med faste årlige ydelser over fx 30 år
- Med lange rækker er det upraktisk at finde nutidsværdien som summen af nutidsværdierne af hver enkelt betaling
- Generel formel: nutidsværdien af en række af t årlige betalinger på C ved renten r er givet ved følgende formel:

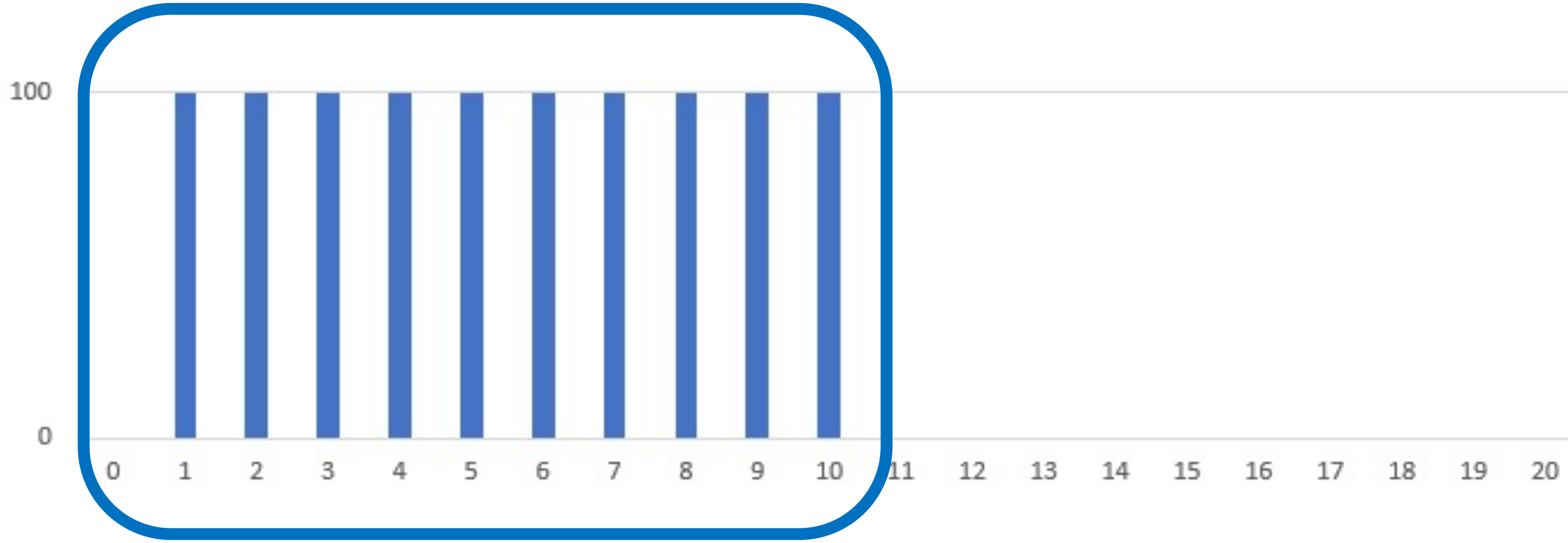
$$PV = \frac{C}{r} - \frac{C}{r \cdot (1+r)^t}$$

- Eksempel: nutidsværdien af en årlig betaling på 100 kr. over 10 år ved renten 3% er:

$$PV = \frac{100}{0{,}03} - \frac{100}{0{,}03 \cdot (1+0{,}03)^{10}} \approx 853\ kr.$$

Hvordan skal vi forstå annuitetsformlen?

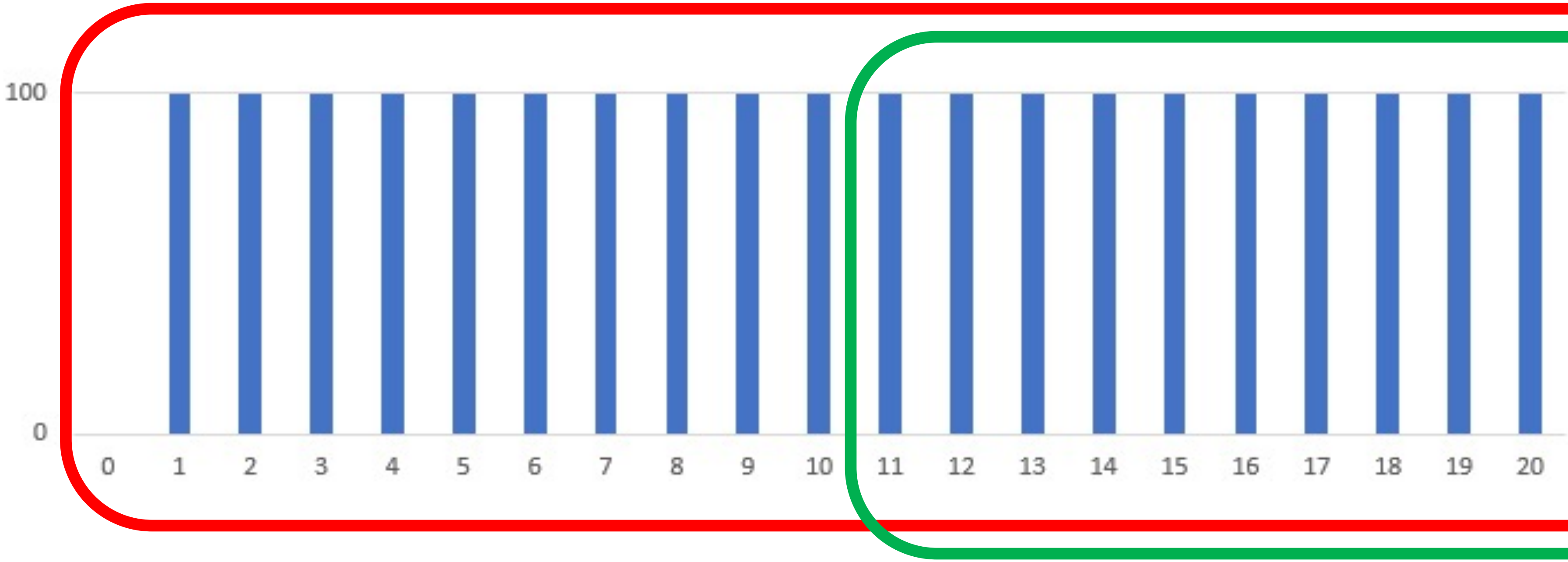
PV1



Hvordan skal vi forstå annuitetsformlen?

$$\frac{C}{r} \qquad\qquad \frac{C}{r}\cdot\frac{1}{(1+r)^t}$$

PV1 = PV2 — PV3



Hvordan skal vi forstå annuitetsformlen?

- **PV2:** Simpel anvendelse af formlen for en perpetuitet giver

$$PV2 = \frac{100}{0{,}03} \approx 3.333$$

- **PV3:** Betalingerne fra år 11 og fremefter kan opfattes som en perpetuitet der starter i år 10

- Fremtidsværdien i år 10 af denne række er dermed blot givet ved $\frac{100}{0{,}03}$

- Nutidsværdien fås ved anvendelse af den basale nutidsværdiligning

$$PV3 = \frac{100}{0{,}03} \cdot \frac{1}{(1+0{,}03)^{10}} \approx 2.480$$

- Alt i alt fås altså:

$$PV1 = PV2 - PV3 = \frac{100}{0{,}03} - \frac{100}{0{,}03} \cdot \frac{1}{(1+0{,}03)^{10}} \approx 853\ kr.$$

Summespørgsmål (2 min.)

- En fraskilt far betaler et årligt børnebidrag på 25.000 kr. Barnet er lige fyldt 3 år så der resterer 15 årlige betalinger. Faren betaler en rente i banken på 8%.
- Moren tilbyder at de slår en streg over de årlige børnebidrag mod at faren i stedet betaler hende et engangsbeløb på kr. 250.000.
- Hvad bør faren svare?
- Forudsæt at han udelukkende er interesseret i at slippe så billigt som muligt

Svar

- Børnebidragene udgør en annuitet hvis nutidsværdi kan beregnes som

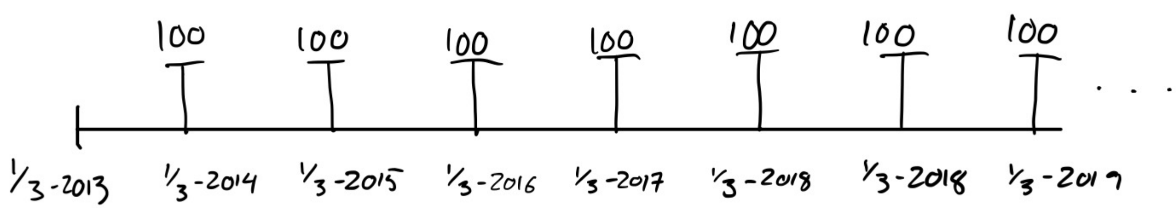
$$PV = \frac{C}{r} - \frac{C}{r \cdot (1+r)^t}$$
$$= \frac{25.000}{0,08} - \frac{25.000}{0,08 \cdot (1+0,08)^{15}}$$
$$= 321.500 - 98.513$$
$$= 213.987$$

- De løbende børnebidrag har en lavere nutidsværdi end engangsbetalingen - faren bør sige nej til forslaget

Timing

- Formlerne for annuitet og perpetuitet antager at betalingsrækken starter én periode ude i fremtiden

- Fx første betaling falder 1/3-2014 → formlerne giver nutidsværdien per 1/3-2013



- Hvis betalingsrækken udover de fremtidige betalinger omfatter en straksbetaling kan denne umiddelbart lægges til nutidsværdien af de fremtidige betalinger

Summespørgsmål (2 min.)

- Et værdipapir giver en betaling på 10 kroner d. 1/6-2018 og en betaling på 10 kroner d. 1/6 i alle efterfølgende år. Den 1/6-2018 er nutidsværdien af den uendelige betalingsrække 210 kroner, hvis diskonteringsrenten er 5%.

Svar

- Udsagnet er korrekt.
- Nutidsværdien af den uendelige betalingsrække, der starter d. 1/6 2019, er ifølge perpetuitetsformlen lig 200 kr.
- Nutidsværdien af den uendelige betalingsrække, hvor første betaling falder straks, er dermed 210 kroner.

Summespørgsmål (2 min.)

- Hvad er nutidsværdien af en række af 25 årlige betalinger på hver 1.000 kroner hvor første betaling falder om 3 år?
- Renten er 5%

Svar

- Ved simpel anvendelse af annuitetsformlen får vi fremtidsværdien om 2 år:

$$FV_{t=2} = \frac{1.000}{0{,}05} - \frac{1.000}{0{,}05 \cdot (1 + 0{,}05)^{25}} \approx 14.093\ kr.$$

- For at få nutidsværdien må beløbet tilbagediskonteres to perioder:

$$PV = \frac{FV_{t=2}}{(1 + 0{,}05)^{2}} \approx 12.784\ kr.$$

Find antal betalinger

- Ligesom den basale nutidsværdiligning har annuitetsformlen fire variable → givet viden om tre kan den fjerde findes

- Fx: Hvor mange år tager det at afdrage et lån på 100.000 kr. hvis ydelsen er 10.000 kr. om året og renten er 7%?

$$PV = \frac{C}{r} - \frac{C}{r \cdot (1+r)^t}$$

$$100.000 = \frac{10.000}{0{,}07} - \frac{10.000}{0{,}07 \cdot (1+0{,}07)^t}$$

$$(1{,}07)^t = 3.333$$

- Kan løses algebraisk (ved at tage log på begge sider) eller med "goal seek" i Excel → $t \approx 18$ år

Summespørgsmål (2 min.)

- Hvor meget er den implicitte rente hvis et lån på 100.000 kr. afrages med en årlig ydelse på 10.000 kr. om året over 14 år?

Svar

- Brug annuitetsformlen:

$$PV = \frac{C}{r} - \frac{C}{r \cdot (1+r)^t}$$

$$100.000 = \frac{10.000}{r} - \frac{10.000}{r \cdot (1+r)^{14}}$$

$$10 = \frac{1}{r} - \frac{1}{r \cdot (1+r)^{14}}$$

- Kan ikke løses algebraisk → "goal seek" i Excel giver løsningen $r \approx 4{,}8\%$

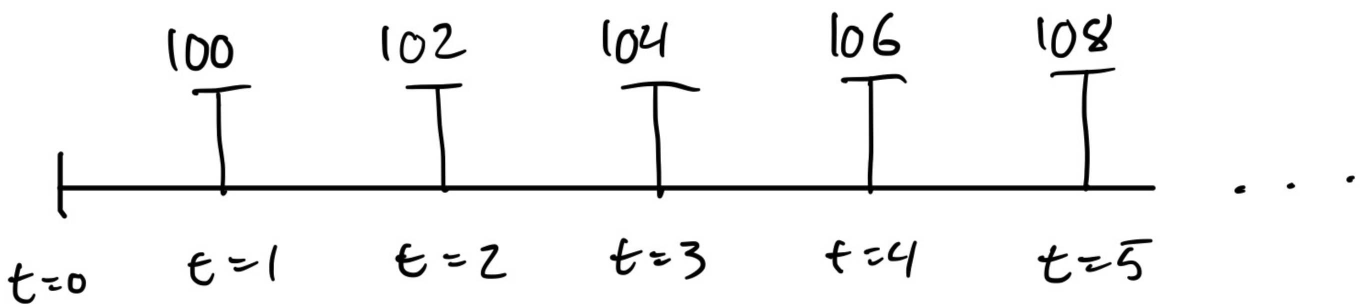
Konstant voksende perpetuitet

- I nogle tilfælde har betalingerne i en række en (tilnærmelsesvist) konstant vækstrate
- Fx dividenderne udbetalt af en virksomhed vokser over tid som følge af virksomhedens ekspansion (og inflation)
- Nutidsværdien af en uendelig række af betalinger startende på C og derved voksende med vækstraten g ved renten r er givet ved følgende formel:

$$PV = \frac{C}{r - g}$$

Konstant voksende perpetuitet

- **Eksempel**
  - Betaling i første periode : $C = 100$
  - Rente : $r = 5\%$
  - Vækst i betaling : $g = 2\%$



$$PV = \frac{100}{0,05 - 0,02} = \frac{100}{0,03} \approx 3.333$$

Perpetuitetsformel med vækst

- Betrag en uendelig række af betalinger startende på C og voksende med raten g:

- Ved diskonteringsrenten r er nutidsværdien givet ved

$$PV = \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C \cdot (1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C \cdot (1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdots \qquad (1)$$

- Multiplicer begge sider med $\frac{1+r}{1+g}$

$$\frac{1+r}{1+g} \cdot PV = \frac{C}{(1+g)} + \frac{C}{(1+r)} + \frac{C \cdot (1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C \cdot (1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdots \qquad (2)$$

- Ved at trække (1) fra (2) fås

$$\frac{1+r}{1+g} \cdot PV - PV = \frac{C}{1+g}$$

- ...hvilket efter lidt omskrivninger giver os formlen

Summespørgsmål (2 min.)

- En virksomhed annoncerer at den det følgende år vil udbetale en dividende på 5 kr. per aktie og det forventes at virksomhedens dividender i al fremtid vil vokse med 7 pct. om året
- Hvad er nutidsværdien af rækken af dividender hvis diskonteringsrenten er 5 pct.?

Svar

- Formlen er kun defineret for $r > g$. Hvis betalingerne i en uendelig række vokser hurtigere end diskonteringsrenten, er dens nutidsværdi uendelig stor

Opsummering

- Nutidsværdier af betalingsrækker
- Særlige regneregler for betalingsrækker der er konstante over tid:
  - Perpetuiteter → uendelige betalingsrækker
  - Annuiteter → endelige betalingsrækker
- Særlige regneregler for betalingsrækker med konstant vækstrate
- Bemærk: Vi har sprunget noget af materialet omkring finansieringsproblemer (effektiv rente) over → det kommer vi tilbage til når vi har gjort anlægsinvesteringerne færdig