Matematik A E2020
Uge 37, Forelæsning 2

Afsnit 4.1-4.5, 5.1-5.3 og 5.6

Funktioner – grundlæggende begreber

I dag (onsdag): Hold 2, 3, 7, 9, 10, 11

I morgen : Hold 1, 4, 5, 6, 8

Dagens stof - overblik

- Reelle funktioner af én reel variabel
  - 4.1-4.3: Intro og grundlæggende begreber
  - 4.4-4.5: Lineære funktioner og nogle simple anvendelser
  - 5.1-5.3: "Nye funktioner ud fra gamle", bl.a. sammensatte funktioner og invers funktion
- Det generelle funktionsbegreb
  - 5.6: Intro til generelle fkt og grundlæggende begreber

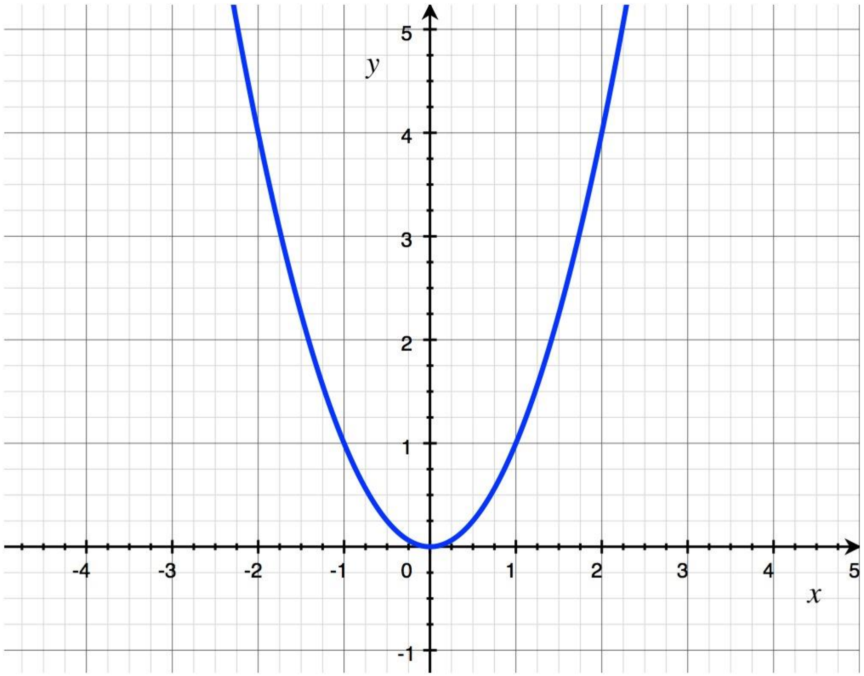
Forelæsningen:

1. Det generelle funktionsbegreb
2. Reelle funktioner af én reel variabel

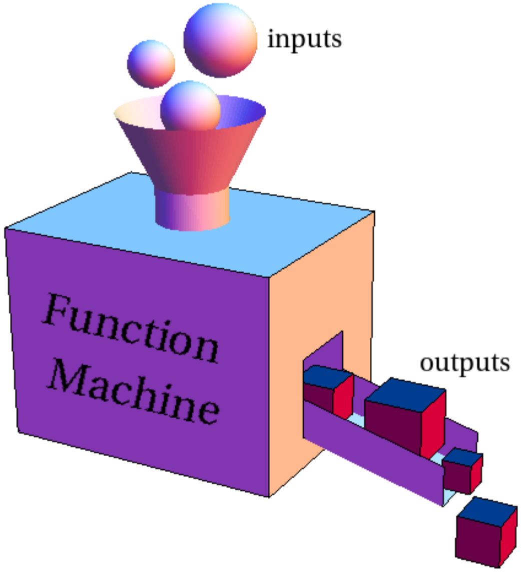
Bemærk: Genopfrisk selv stof om lineære fkt (4.4) og læs selv de små eksempler (4.5, bl.a. den simple ligevægtsmodel i 4.5.3+4). Det er - som altid - vigtigt at læse hele pensum!

Funktioner - intro

$f(x) = x^2$



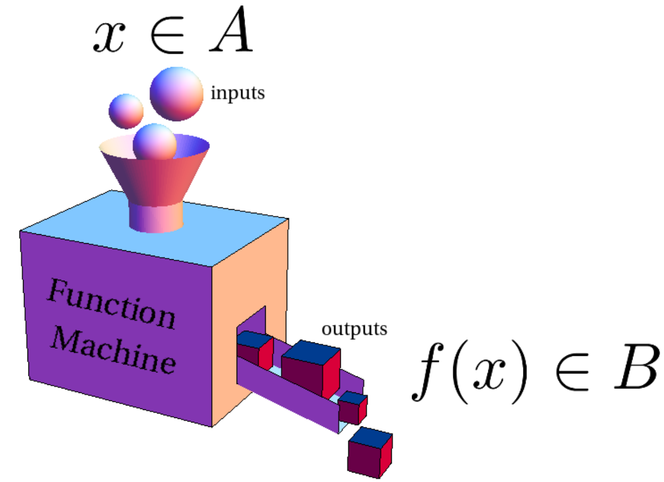
$x \in \mathbb{R}$



$f(x) \in \mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Generelle funktioner
(5.6 og lidt fra 5.2-3)



- Generelt funktionsbegreb:

- Mere formelt:

  Lad A og B være (ikke-tomme) mængder.
  En funktion fra A over i B er en forskrift f, der til ethvert $x \in A$ knytter et og kun et $y \in B$ (som betegnes $f(x)$).
  Notation:

$$\boxed{f : A \to B}$$

A: Definitionsmængde (domain) for f
B: Sekundærmængde (target set/codomain) for f

Værdimængde (range) for f:

$$R_f = \{f(x) \; : \; x \in A\} \subseteq B$$

- Eksempel 1
  - A: De studerende på dette semesters Mat A
  - B: De mulige holdnumre, $B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$
  - Lad f være den funktion, der til enhver studerende knytter vedkommendes holdnummer. Hvis Jens Jensen er på hold 4, skriver vi altså: $f(\text{Jens Jensen}) = 4$

- Eksempel 2
  - $A = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$
  - $B = \mathbb{R}$

    $g(x,y)$

  - Lad g være funktionen givet ved: $g((x, y)) = x + y$

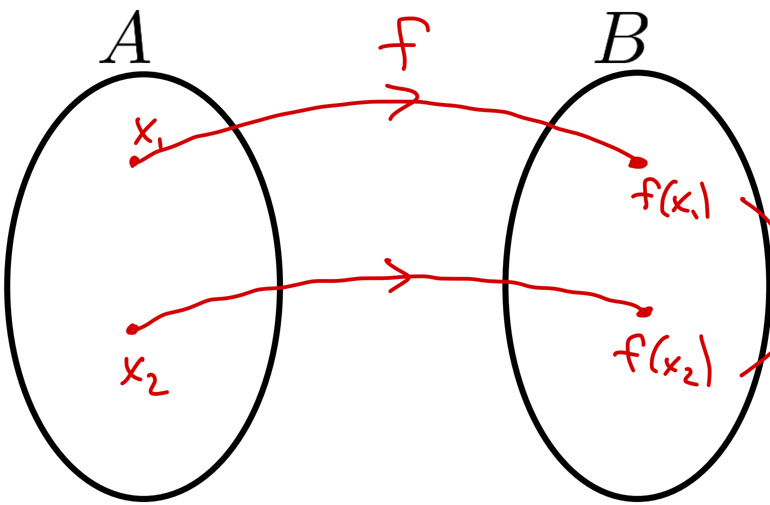
- Eksempel 3
  - $A = B = \mathbb{R}$
  - Lad h være funktionen givet ved: $h(x) = x^3$

Injektive (one-to-one) funktioner

Lad $f : A \to B$ være en fkt.

- f er **injektiv** (one-to-one), hvis der for alle $x_1, x_2 \in A$ gælder:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



Disse to elem. i B skal være forsk.

PINGO! (pingo.coactum.de, 185415)

- Betragt eksemplerne 1-3 fra tidligere
- Stem på den/de funktioner, I mener er injektive

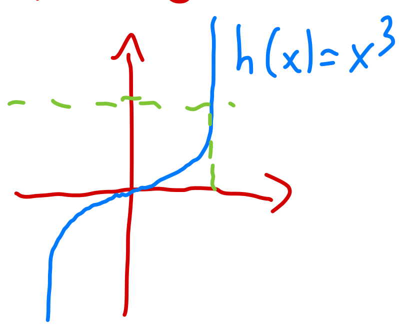
  - ” $f(\text{stud.}) = \text{stud.'s holdnummer}$ ”

    Alle stud. på samme hold har samme holdnr.

  - $g(x, y) = x + y$

    $g(1,6) = 1+6 = 7 = 3+4 = g(3,4)$

  - $h(x) = x^3$



For ethvert $y \in \mathbb{R}$ findes kun et $x \in \mathbb{R}$ med $y = x^3$ (nemlig $x = y^{\frac{1}{3}}$)

n ulige : h injektiv

Ekstra: For hvilke $n \in \mathbb{N}$ er $h(x) = x^n$ injektiv?

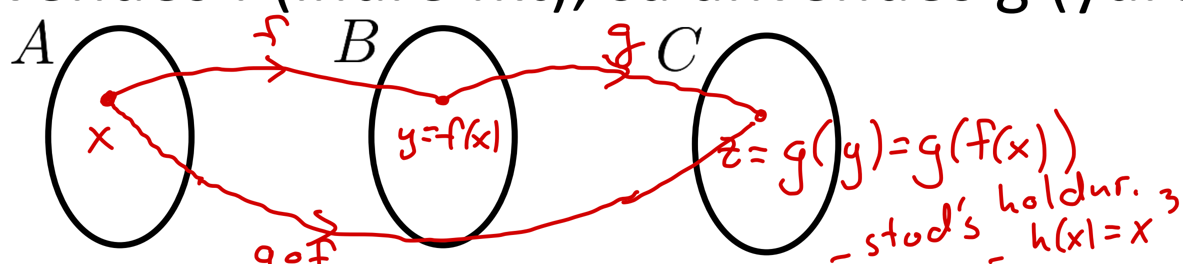
[Hvis n lige : $h(-1) = h(1)$] n lige : h ikke injektiv

Sammensat funktion (composite fct)

- Lad $f : A \to B$ og $g : B \to C$
- Den **sammensatte funktion** $g \circ f : A \to C$ er defineret ved

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ for alle } x \in A$$

- ”Først anvendes f (indre fkt), så anvendes g (ydre fkt)”



- Hurtig øvelse: Betragt eksemplerne 1 og 3 fra tidligere. Beskriv den sammensatte funktion $h \circ f$

“ $(h \circ f)(\text{stud.}) = (\text{stud's holdur.})^3$ ”

Invers funktion

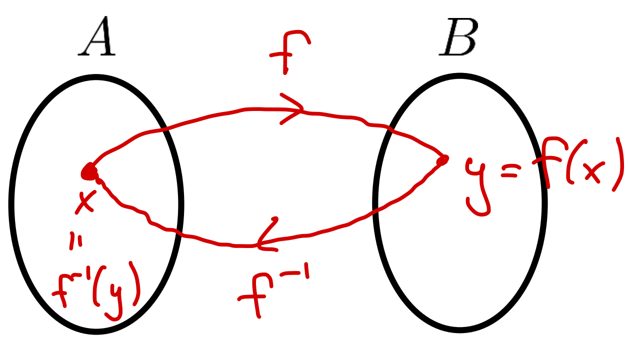
f injektiv + surjektiv = f bijektiv

f surjektiv (onto)

- Lad $f : A \to B$ være en **injektiv** funktion med $\overbrace{R_f = B}$
- Den **inverse funktion til f** er den fkt $f^{-1} : B \to A$, der til ethvert $y \in B$ knytter det element $x \in A$ som opfylder $f(x) = y$.

  Altså:

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y}$$



- Bemærk:

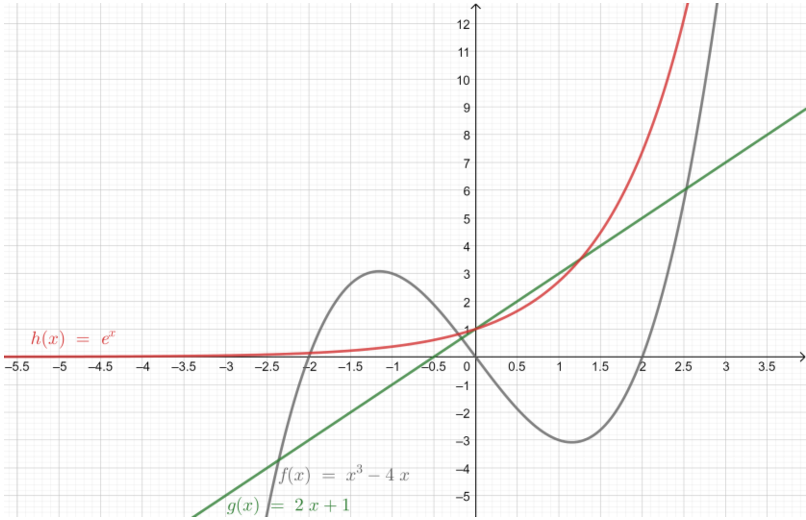
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Reelle fkt af én reel variabel

(Især 4.2-3 og 5.1-3)

"Den type funktioner I kender"

$$f : D \to \mathbb{R}, \text{ hvor } D \subseteq \mathbb{R}$$



Begreber indført for generelle fkt kan umiddelbart bruges:

- Defintionsmængde og værdimængde
- Injektiv funktion
- Sammensat funktion
- Invers funktion

Men også nogle ekstra begreber/definitioner

Voksende /aftagende fkt

$f : D \to \mathbb{R}$, hvor $D \subseteq \mathbb{R}$

f er voksende hvis:

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

f er strengt voksende hvis:

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Aftagende og strengt aftagende funktioner er defineret tilsvarende

vis: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Strengt voksende/aftagende fkt er injektive (overvej!)

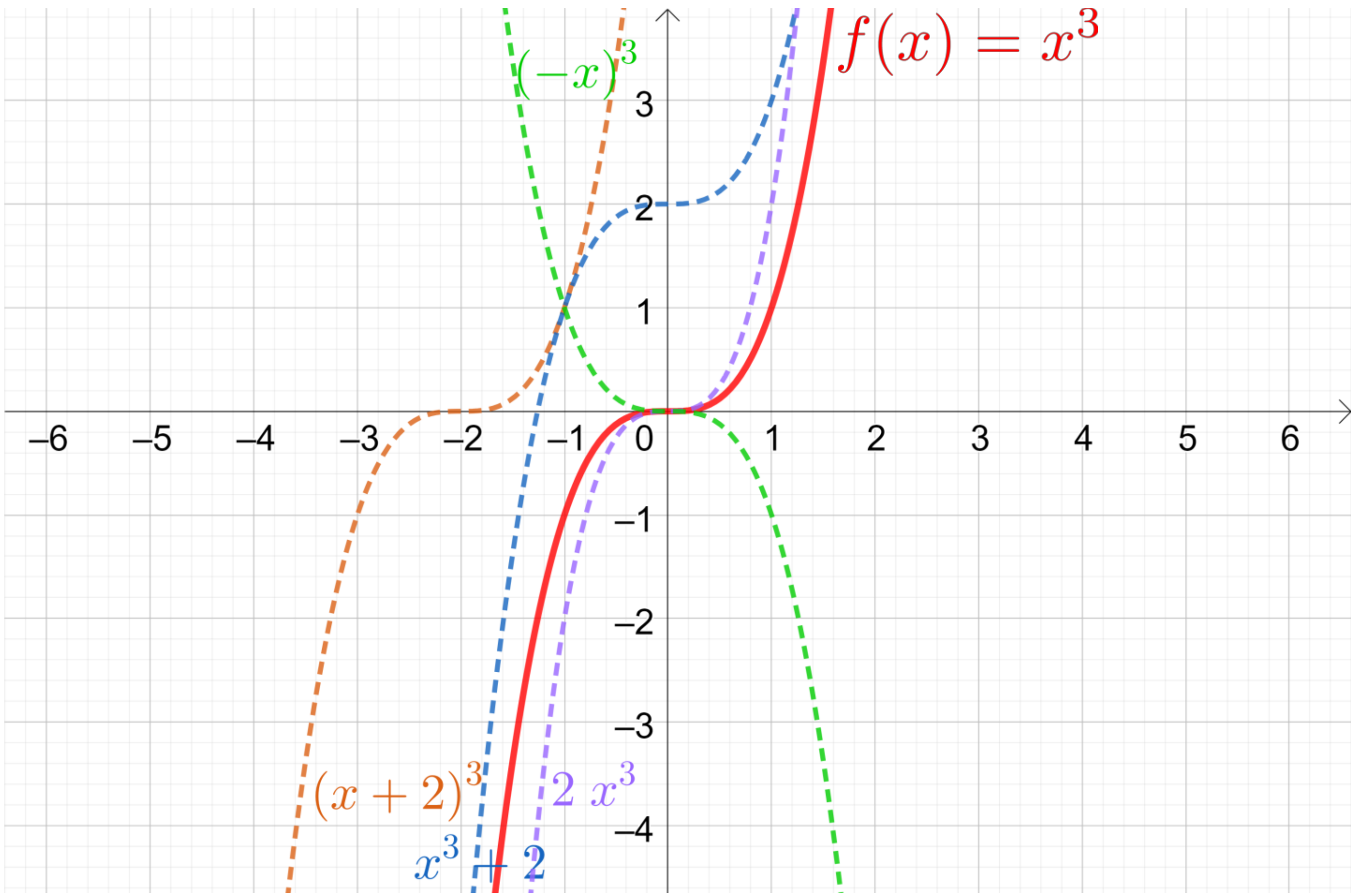
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$ eller $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ eller $f(x_2) > f(x_1)$

f str. voks.

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ✓

“Forskydning af grafer”

Givet fkt f og konstant $c \neq 0$ kan dannes nye funktioner ved $f(x)+c$, $f(x+c)$, $cf(x)$, $f(-x)$



Flere "nye funktioner fra gamle"

Betragt funktioner $f, g : D \to \mathbb{R}$.
Da er funktionerne $f+g$, $f-g$, fg og $\frac{f}{g}$ givet ved:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (hvor } g(x) \neq 0)$$

Defineret "punktvis"

Øvelse: Sammensat og invers fkt for reelle fkt af én reel var.

Betragt funktionerne $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved:

$$f(x) = (x-1)^3$$

$$g(x) = 2x + 1$$

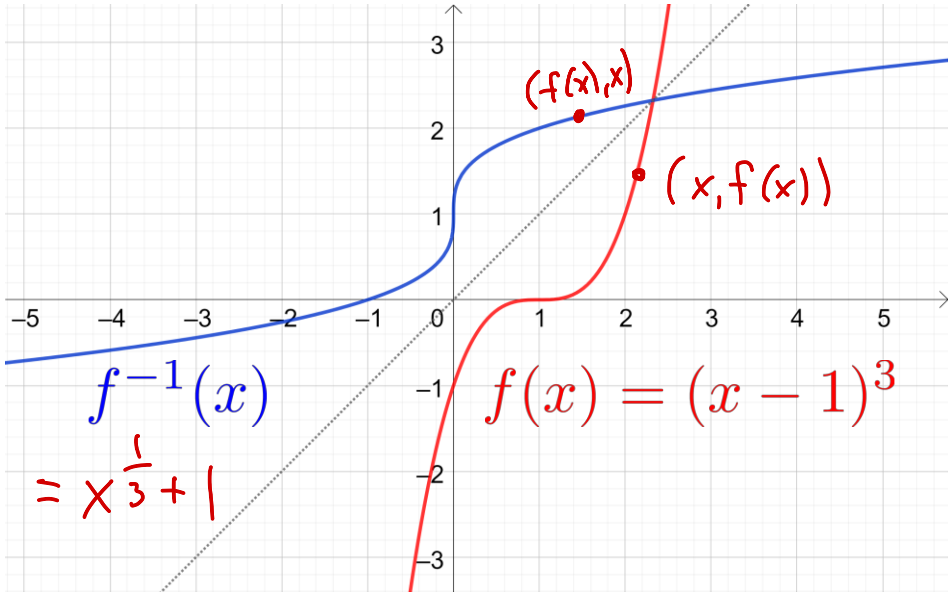
Bestem funktionerne $f \circ g$, $g \circ f$ og f^{-1}

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = ((2x+1)-1)^3 = (2x)^3 = \underline{8x^3}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((x-1)^3) = \underline{2(x-1)^3 + 1}$

f^{-1}: $\quad y = (x-1)^3 \iff y^{\frac{1}{3}} = x - 1 \iff y^{\frac{1}{3}} + 1 = x$

$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}} + 1$



Et pkt på grafen for f: $(x, f(x))$

Da $f^{-1}(f(x)) = x$ vil $(f(x), x)$ ligge på grafen for f^{-1}.