Matematik B F2021
Forelæsning 7 (uge 12)

FMEA: 1.7+2.2

Kvadratiske former

Konvekse mængder

I dag

- Kvadratiske former (1.7)
  - 2 variable: Definition, tilhørende symmetrisk matrix, "definithed"
  - Flere variable (især 3)
    - Nyt begreb ifm "definithed": "Hovedunderdeterminanter"
    - Egenværdier for symm. matricer dukker op igen
  - Kort om relation til Hessematricen og anden-ordens test for lokale ekstremumspkt

- Konvekse mængder (2.2)
  - Fra Mat A: "Grafisk" definition af konvekse mgd i planen
  - Nu: Formel definition af konvekse mængder i $\mathbb{R}^n$

Kvadratiske former, 2 variable (1.7)

- Kvadratisk form af 2 variable:

$$\boxed{\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 \\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2\,, \end{aligned}}$$

hvor $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ er konstanter.

- Opskrivning som matrixprodukt:

$$\boxed{Q(x_1, x_2) = \overset{1\times 2}{(x_1\ ,\ x_2)} \underbrace{\overset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \overset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}}}$$

Lad os checke!

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

$$= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \ \checkmark$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q(x_1,x_2) &= a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1\,,\,x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

Matricen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ er ikke nødvendigvis symmetrisk

fx $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$

Men den kan altid vælges symmetrisk
uden at ændre på den kvadratiske form:

Erstat a_{12} og a_{21} med $\frac{1}{2}(a_{12}+a_{21})$

I eksemplet $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4\end{pmatrix}$

Den symmetriske matrix $\mathbf{A}$, der opfylder

$$Q(x_1,x_2) = (x_1\,,\,x_2)\,\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$

kaldes *den symmetriske matrix hørende til den kvadr. form Q*

NB: Den er entydig!

Eksempel: $\boxed{Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2}$

$a_{11} = 4$ $\quad a_{12} + a_{21} = -4$ $\quad a_{22} = 1$

Symmetri: $a_{12} = a_{21}$, dvs. $a_{12} = a_{21} = -2$

Den symm. matrix hørende til Q er altså

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

fx $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Bemærk: Mange matricer opfylder $Q(x_1, x_2) = (x_1\ ,\ x_2)\,\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

men kun én af disse er symmetrisk!

Definition: "Definithed" af kvadr. former/matricer

En kvadr. form $Q(x_1, x_2)$ og den tilh. symm. matrix $\mathbf{A}$ siges at være:

positiv definit $\Leftrightarrow Q(x_1, x_2) > 0$ for alle $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

positiv semidefinit $\Leftrightarrow Q(x_1, x_2) \geq 0$ for alle (x_1, x_2)

negativ definit $\Leftrightarrow Q(x_1, x_2) < 0$ for alle $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

negativ semidefinit $\Leftrightarrow Q(x_1, x_2) \leq 0$ for alle (x_1, x_2)

indefinit $\Leftrightarrow Q$ antager både værdier > 0 og værdier < 0

Simpelt eksempel: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$

$\longrightarrow$ POS. SEMIDEFINIT.

Ikke pos. definit da $Q(1, -1) = 0$.

Resultater om "Definithed" (2 variable)

Idet a_{11}, a_{22}, a_{12} er elementerne i den symmetriske matrix hørende til den kvadr. form Q gælder:

Q er **positiv semidefinit** $\Leftrightarrow\ a_{11}, a_{22} \geq 0$ og $\overbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}^{|A|} \geq 0$

Q er **negativ semidefinit** $\Leftrightarrow\ a_{11}, a_{22} \leq 0$ og $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$

Q er **positiv definit** $\Leftrightarrow\ a_{11} > 0$ og $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

Q er **negativ definit** $\Leftrightarrow\ a_{11} < 0$ og $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

Hvorfor ingen betingelser $a_{22} \gtrless 0$ i de nederste resultater?

Når vi har resultaterne om positiv semidefinit/definit,
så følger resultaterne om negativ semidefinit/definit nemt af:

Q negativ definit/semidefinit $\Leftrightarrow$ $-Q$ positiv definit/semidefinit

Øvelse: $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$ $a_{11} = 4$, $a_{22} = 1$, $a_{12} = -2$

Er Q positiv definit? negativ definit? positiv semidefinit? negativ semidefinit? indefinit? pingo.coactum.de (131061)

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 4 \cdot 1 - (-2)^2 = 0$

Q er pos. semidefinit, men ikke pos. definit ("eller andet")

Alternativt: $Q(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2)^2 \geq 0$

$\rightarrow$ <u>Pos. semidef.</u>

$Q(1,2) = 0 \rightarrow$ <u>ikke pos. def</u>

Kvadratiske former, flere variable

- Kvadratisk form af 3 variable:

$$\boxed{\begin{aligned} Q(x_1,x_2,x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 \\ &+ a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 \end{aligned}}$$

  - n variable: se bogens ligning (6), s.30

- Som matrixprodukt:

1 × 3 3 × 3 3 × 1

$$\boxed{Q(x_1,x_2,x_3) = (x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}$$

  - Som med 2 variable:

    Matricen $\mathbf{A}$ kan vælges symmetrisk!

    Den (entydige) symmetriske matrix hørende til Q

Eksempel:

$$Q(x_1,x_2,x_3) = \overset{a_{11}}{2}x_1^2 + \overset{a_{22}}{1}x_2^2 \overset{a_{33}}{-3}x_3^2 + \overset{a_{12}+a_{21}}{6}x_1x_2 + \overset{a_{23}+a_{32}}{2}x_2x_3$$

$a_{13} + a_{31} = 0$

Symmetri: $a_{12} = a_{21} = 3$
$a_{13} = a_{31} = 0$
$a_{23} = a_{32} = 1$

Den symm. matrix hørende til Q bliver:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q(x_1,x_2,x_3) \;=\;& a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 \\ +\;& a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 \\ +\;& a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2^2 + a_3x_3^2 \end{aligned}}$$

“Definithed”, flere variable

Definitionerne af de forskellige former for ”definithed” af en kvadratisk form og den tilhørende symm. matrix kan umiddelbart udvides fra 2 til 3 (og n) variable

Fx:

Q **er positiv definit** $\Leftrightarrow$ $Q(x_1, x_2, x_3) > 0$ for alle $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$

(og tilsvarende for positiv semidefinit etc.)

Men resultaterne om definithed for $Q(x_1, x_2)$ er *ikke* lige så oplagte at generalisere til flere variable!!

Vi skal have fat i nogle nye begreber:

Hovedunderdeterminanter (principal minors)

Ledende hovedunderdeterminanter (leading principal minors)

Husk: Vi har tidl. hørt om underdeterminanter (minors) ifm. rang af matrix, forelæsning 5

Hovedunderdeterminanter

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix

En *hovedunderdeterminant af orden* r fås ved at slette *de samme* $n-r$ rækker og $n-r$ søjler og så udregne determinanten af den tilbageværende $r \times r$ matrix.

Eks:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{og søjle 1}]{\text{Slet række 1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

er en hovedunderdeterminant af orden r=2 (NB: der er to andre)

Den *ledende hovedunderdeterminant af orden* r fås ved at slette *de sidste* $n-r$ rækker og $n-r$ søjler og så udregne determinanten af den tilbageværende $r \times r$ matrix.

Eks:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{og søjle 3}]{\text{Slet række 3}} D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

er den ledende hovedunder-determinant af orden r=2

Definithed og hovedunderdeterminanter

Theorem 1.7.1 (s.32)

Lad $Q(x_1, \ldots, x_n) = Q(\mathbf{x})$ være en kvadratisk form
og $\mathbf{A}$ den tilhørende symmetriske $n \times n$ matrix (dvs. $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$)

Idet D_k betegner den ledende hovedunderdet. af orden k for $\mathbf{A}$
og Δ_k en vilkårlig hovedunderdet. af orden k for $\mathbf{A}$, så gælder:

(a) Q er **positiv definit** $\Leftrightarrow$ $D_k > 0$ for alle $k = 1, \ldots, n$

(b) Q er **positiv semidefinit** $\Leftrightarrow$ $\Delta_k \geq 0$ for alle hovedunderdet. af orden $k = 1, \ldots, n$

(c) Q er **negativ definit** $\Leftrightarrow$ $(-1)^k D_k > 0$ for alle $k = 1, \ldots, n$

(b) Q er **negativ semidefinit** $\Leftrightarrow$ $(-1)^k \Delta_k \geq 0$ for alle hovedunderdet. af orden $k = 1, \ldots, n$

Øvelse: $Q(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

Opskriv den symmetriske matrix $\mathbf{A}$ hørende til Q

Er Q (og $\mathbf{A}$) positiv definit? negativ definit? positiv semidefinit? negativ semidefinit? indefinit? pingo.coactum.de (131061)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Hovedunderdet. af orden 1: $D_1 = -4, \quad -1, \quad -3$

Hovedunderdet. af orden 2:

$$D_2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 11, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

Hovedunderdet. af orden 3: $D_3 = |A| = -8$

Konklusion: Q er neg. definit (og dermed neg. semidef.)

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

Definithed og egenværdier

Theorem 1.7.2 (s.33)

Lad $Q(x_1, \ldots, x_n) = Q(\mathbf{x})$ være en kvadratisk form
og $\mathbf{A}$ den tilhørende symmetriske $n \times n$ matrix (dvs. $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$)

Lad $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ være egenværdierne for $\mathbf{A}$. Da gælder:

(a) Q er **positiv definit** $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$

(b) Q er **positiv semidefinit** $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$

(c) Q er **negativ definit** $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0$

(d) Q er **negativ semidefinit** $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 0$

(e) Q er **indefinit** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ har både negative og positive egenværdier

Bemærk: Bevis bruger ”diagonalisering” af $\mathbf{A}$!

Eksempel/opgave (lille del af eks.opg fra juni 2014)

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi den symmetriske 3×3 matrix

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og specielt skal vi se på matricen

$$A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hvor $s = 3$.

(2) Bestem egenværdierne ~~og egenrummene~~ for matricen $A(3)$.

(4) Opskriv en forskrift for den kvadratiske form $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, der er givet ved den symmetriske matrix $A(3)$, og godtgør, at Q er indefinit.

(2) $$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big((1-\lambda)(1-\lambda) - 9\Big) = (1-\lambda)\underbrace{(\lambda^2 - 2\lambda - 8)}_{\text{rodder: } -2 \text{ og } 4}$$

Egenværdier:

$\underline{\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4}$

(4)

$$A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3$$

Da $A(3)$ både har neg. og pos. egenværdier er Q (og $A(3)$) indefinit (Thm 1.7.2 (e))

Husk tilbage: Hessematricen og anden-ordens test for lokale ekstr.pkt!

$$\boxed{f''(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x,y) & f''_{12}(x,y) \\ f''_{21}(x,y) & f''_{22}(x,y) \end{pmatrix}}$$

$A = f''_{11}(x_0,y_0)$, $B = f''_{12}(x_0,y_0) = f''_{21}(x_0,y_0)$ og $C = f''_{22}(x_0,y_0)$

- Hvis $\boxed{A < 0 \text{ og } AC - B^2 > 0}$, så er kritisk pkt (x_0,y_0) et (strengt) lokalt maksimumspunkt
- Hvis $\boxed{A > 0 \text{ og } AC - B^2 > 0}$, så er kritisk pkt (x_0,y_0) et (strengt) lokalt minimumspunkt

$A < 0$ og $AC - B^2 > 0$ er præcis betingelsen for, at $f''(x_0,y_0)$ er negativ definit

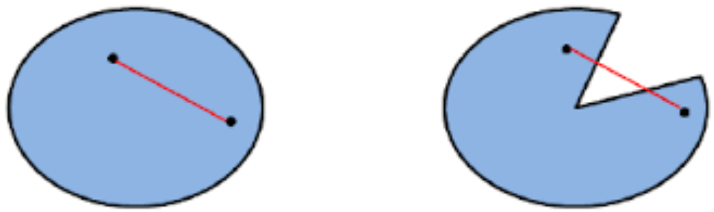
$A > 0$ og $AC - B^2 > 0$ er præcis betingelsen for, at $f''(x_0,y_0)$ er positiv definit

Denne sammenhæng mellem definithed af Hessematricen og om kritisk pkt er lokalt min/max-pkt gælder også for funktioner af $n > 2$ variable

$\rightarrow$ Kommer senere i kurset!

Konvekse mængder (2.2)

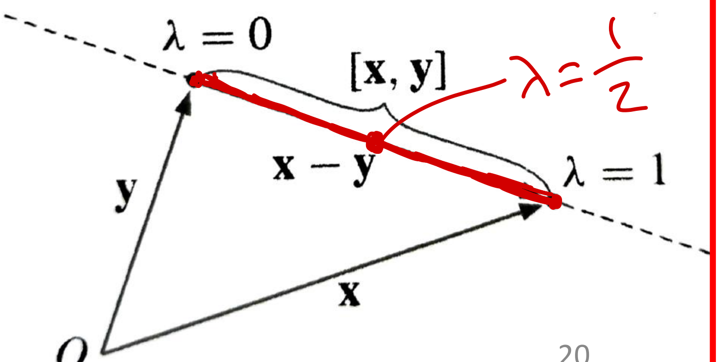
Fra Mat A (EMEA 13.2, uge 47 forelæsning 2):
Definition af konvekse mængder i $\mathbb{R}^2$



Nu: Mere formel definition af konvekse mængder i $\mathbb{R}^n$
Først:

Lad $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Det afsluttede liniestykke mellem $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ betegnes $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ og består af punkterne

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}, \quad \text{hvor } \lambda \in [0, 1]$$



Definition af konveks mængde (s.50):

En mængde $S \subseteq \mathbb{R}^n$ er konveks, hvis det for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ gælder, at $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq S$. Dvs hvis

$$\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S \quad \text{for alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \text{ og alle } \lambda \in [0,1]$$

Vigtig definition!!

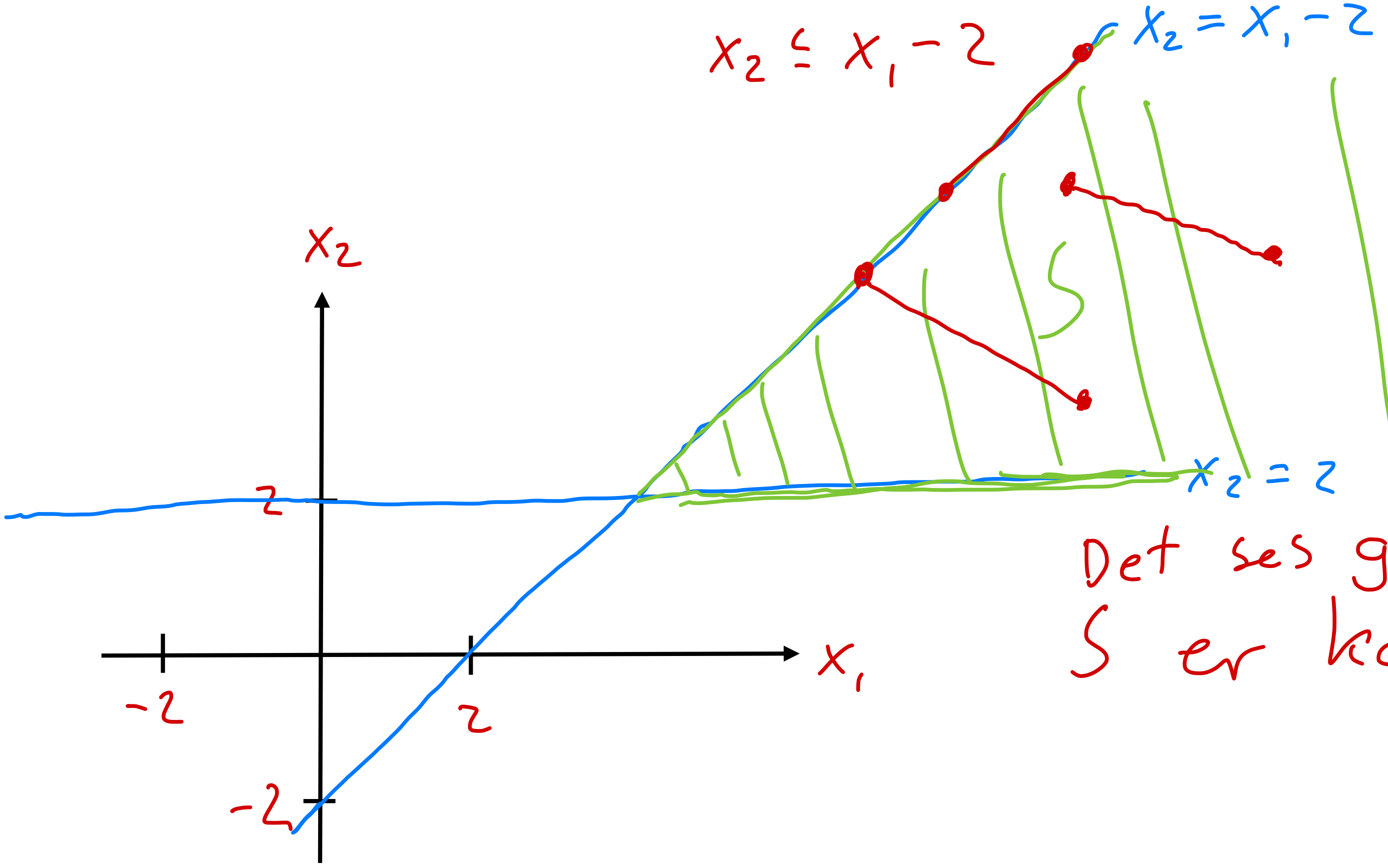
Øvelse/eksempel

Betragt følgende mængde i planen:

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 - x_2 \geq 2 \text{ og } x_2 \geq 2\}.$$

1. Tegn mængden S.
2. Argumentér ud fra tegningen for, at S er konveks.
3. Vis formelt, at S er konveks.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x_1 - x_2 \geq 2}_{x_2 \leq x_1 - 2} \text{ og } x_2 \geq 2\}\,.$$



Det ses grafisk, at S er konveks!

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 \geq 2 \text{ og } x_2 \geq 2\}.$$

Lad $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S$. Så har vi: $x_1 - x_2 \geq 2$ og $x_2 \geq 2$

$y_1 - y_2 \geq 2$ og $y_2 \geq 2$

Lad $\lambda \in [0, 1]$. Så skal vi vise:

$$\lambda(x_1, x_2) + (1-\lambda)(y_1, y_2) = (\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2}_{z_2}) \in S$$

Altså skal vi vise: $z_1 - z_2 \geq 2$ ✓ og $z_2 \geq 2$ ✓

$$z_1 - z_2 = \lambda\underbrace{(x_1 - x_2)}_{\geq 2} + (1-\lambda)\underbrace{(y_1 - y_2)}_{\geq 2} \geq 2\lambda + 2(1-\lambda) = 2$$

$$z_2 = \lambda \underset{\substack{\vee| \\ 2}}{x_2} + (1-\lambda)\underset{\substack{\vee| \\ 2}}{y_2} \geq 2\lambda + 2(1-\lambda) = 2$$

Altså er S konveks! (nu vist formelt)

Et sidste resultat... (s.51)

Fællesmængden af konvekse mængder er konveks

Foreningsmængden af konvekse mængder er *ikke* nødvendigvis konveks

Grafisk illustration (fra bogen):

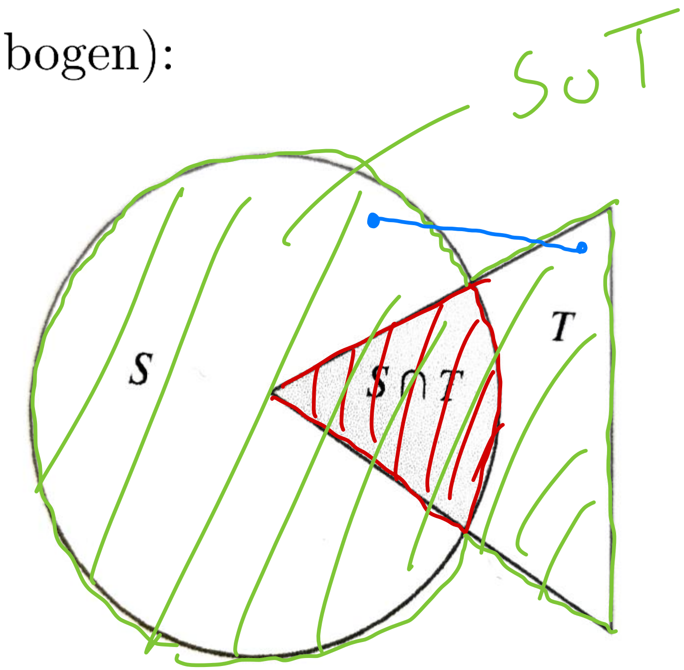


Figure 4 $S \cap T$ is convex, but $S \cup T$ is not.