Matematik B F2021
Forelæsning 2 (uge 7)

EMEA: 15.6-9

Lineære lign.systemer og Gauss elimination

Vektorer og vektorregning

I dag:

- **Lineære ligningssystemer**
  - Helt generelt: m ligninger, n ubekendte
  - Definition/notation og matrix-form (fra sidste uge)
  - Løsning vha Gauss elimination (15.6)

- **Vektorer og vektorregning** (i $\mathbb{R}^n$)
  - Grundlæggende vektorregning, herunder indre produkt, længde/norm, og ortogonalitet (15.7-8)
  - Linjer og (hyper-)planer (15.9)

Lineære lign.systemer og matricer
(fra forelæsning 1 – dele af 15.1-3)

2 ligninger med 2 ubekendte:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}}$$

- Ubekendte: x_1, x_2
- Koefficienter: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$
- Konstanter: b_1, b_2

Eksempel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 15 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

" Anna og Bo er tilsammen 15 år.
Bo er halvt så gammel som Anna.
Hvor gamle er de hver især? "

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}}$$

Koefficientmatrix for ligningssystemet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ligningssystemet på matrixform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Eller:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$$

hvor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Generelt: m ligninger, n ubekendte:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}}$$

Koefficientmatrix:

$$\underset{m \times n}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ligningssystemet på matrixform: $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$

$$\underset{m \times 1}{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

hvor $\underset{n \times 1}{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ og $\underset{m \times 1}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$

Gauss elimination (15.6)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- Gauss elimination (Gauss-Jordan) er en generel løsningsmetode for lineære ligningssystemer

- Nogle centrale begreber:
  - Udvidet koefficientmatrix (augmented coeff. matrix)
  - Rækkeoperationer (elementary row operations)
  - Frie variable/frihedsgrader (degrees of freedom)
  - Reduceret (række-)echelon form/Echelonmatrix

Eksempel: 3 lign. med 3 ubek.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \quad -2 \quad 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ \rightarrow \quad 2x_2 + 2x_3 &= -2 \quad \times \tfrac{1}{2} \\ 4x_2 + x_3 &= -7 \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= -1 \quad -4 \\ 4x_2 + x_3 &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ \rightarrow \quad x_2 + x_3 &= -1 \\ -3x_3 &= -3 \quad \times\left(-\tfrac{1}{3}\right) \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Heraf findes løsning:

$$x_1 = -1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_2 = -1 - x_3 = -2$$

$$x_3 = 1$$

Endnu et eksempel…

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

… $\xrightarrow{\text{omformninger}}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

x_3 er en fri variabel: $\underline{x_3 = t}$ $(t \in \mathbb{R})$

$\underline{x_2 = -1 + x_3 = t - 1}$

$x_1 = 6 - x_2 + 6x_3$
$= 6 - (t-1) + 6t$
$\underline{= 5t + 7}$

Vendelig mange løsn!

$(x_1, x_2, x_3) = (5t + 7, t - 1, t)$, hvor $t \in \mathbb{R}$

Den udvidede koefficientmatrix
(augmented coefficient matrix)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc:c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

$M \times (n+1)$

Rækkeoperationer

(elementary row operations)

"Omformninger" af ligningssystem svarer til **Rækkeoperationer** på den udv. koeff. matrix

Eksempel: Addition af c gange ligning i til ligning j

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ c \\ \downarrow \\ \hookleftarrow \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{j1} + ca_{i1} & a_{j2} + ca_{i2} & \cdots & a_{jn} + ca_{in} & b_j + cb_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

De 3 typer af rækkeoperationer:

1. Byt om på 2 rækker
2. Multiplicér en række med et tal c≠0
3. Addér et multiplum af en række til en anden række

Tilbage til første eksempel:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -6 \end{aligned}}$$

Udvidet koeff. matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

$$
\begin{array}{c c}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} -2 \quad 1 \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
\sim
\begin{array}{c c}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -7 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \times \frac{1}{2} \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

$$
\sim
\begin{array}{c c}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -7 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ -4 \\ \\ \end{array}
\end{array}
\sim
\begin{array}{c c}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \times\left(-\frac{1}{3}\right) \end{array}
\end{array}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[\text{lign. syst}]{\text{oversæt til}}
\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}}
$$

Heraf kan løsn. findes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} & \\ & \\ 2 & -1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{overset}} \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{array}}$$

Reduceret (række-)echelon form

En matrix er på reduceret echelon form, hvis:

1. Alle rækker, der ikke er nulrækker, har et *initialettal ("leading 1")*
2. Over og under initialettaller står kun nuller
3. Hvis to rækker ikke er nulrækker, står rækken med "det første" initialettal (laveste søjleindex) øverst
4. Nulrækker står nederst i matricen

Hvilke af disse matricer er på reduceret echelon form?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ 4 \\ 7 \\ \times \frac{1}{4} \end{array} \end{array}$$

Gauss elimination

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

1. **Opskriv den udvidede koefficientmatrix**
2. **Omform til reduceret echelon form vha rækkeoperationer**
   (Husk: rækkeop. ændrer ikke løsningsmgd.)
3. **Aflæs løsningsmængde** (opskriv evt ligningssystemet givet ved matricen fra punkt 2)
   - Tre muligheder: Ingen løsninger, netop én løsning eller uendeligt mange løsninger (en eller flere frie variable/frihedsgrader)

Aflæsning af løsninger fra reduceret echelon form:

- Hvis sidste søjle (længst til højre) indeholder initialettal

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0\\ x_3 &= 0\\ x_4 &= 0\\ 0 &= 1\end{aligned}$$

Ingen løsninger!

- Hvis alle søjler bortset fra sidste indeholder initialettal

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2\\ x_2 &= -2\\ x_3 &= 1\end{aligned}$$

Netop én løsning!

- Hvis sidste søjle samt mindst en søjle mere ikke indeholder et initialettal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= 7 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 5t+7 \\ x_2 &= t-1 \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

Uendelig mange løsninger: $(x_1, x_2, x_3) = (5t+7, t-1, t),$

(en eller flere frie variable/frihedsgrader)

hvor $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

2 lign., 4 ubek.

2 frie var: $\underline{x_2 = s}$, $\underline{x_4 = t}$ $(s, t \in \mathbb{R})$

$\underline{x_3 = -1 - 2x_4 = -2t - 1}$

$\underline{x_1 = 1 + 3x_2 - 2x_4 = 3s - 2t + 1}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3s - 2t + 1, s, -2t - 1, t)$, hvor $s, t \in \mathbb{R}$

Øvelse: Løs vha Gauss elimination

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

3 lign., 4 ubek.

pingo.coactum.de (131061): Stem på antal frihedsgrader

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \times\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

reduceret echelon form

[NB: Ekstra øvelse til de hurtige på slide 21]

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + x_4 &= 1 \\ x_2 - 4x_4 &= -4 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

x_4 som fri variabel:

(altså én frihedsgrad!)

$$x_4 = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$x_1 = 1 - x_4 = -t + 1$$

$$x_2 = -4 + 4x_4 = 4t - 4$$

$$x_3 = 1 - x_4 = -t + 1$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-t+1,\ 4t-4,\ -t+1,\ t), \text{ hvor } t \in \mathbb{R}$$

Ekstra øvelse til de hurtige

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 4 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= a \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= a \end{aligned}$$

3 lign, 4 ubek.

$a=2$

Bestem alle værdier af a, så ligningssystemet har mindst en løsning

Bestem i det/de tilfælde alle løsninger til ligningssystemet

Udv. koeff. matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 2 & 2 & a \end{pmatrix} \cdots \underset{\text{rækkeop.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 4-2a \\ 0 & 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-4 \end{pmatrix}$$

reduceret echelon form

sidste ligning: $0 = 2a-4$

Altså kun løsn. hvis $a=2$.

Red. echelon form når $a=2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_3 og x_4 frie variable: $\underline{x_3 = s}$, $\underline{x_4 = t}$ $(s,t \in \mathbb{R})$

$\underline{x_1 = -x_3 = -s}$

$x_2 = 2 - x_3 - 2x_4$
$\underline{= -s - 2t + 2}$

Løsn. på "vektor-form":

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-s, -s-2t+2, s, t)$, hvor $s,t \in \mathbb{R}$

Vektorer og vektorregning (15.7-8)

- Vektorer er (for os) elementer i

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

  - En vektor er altså en ordnet liste/"tuppel" af reelle tal
  - $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er vektorens komponenter/koordinater

- Vi vil både bruge række og søjlenotation
  - Fx kan

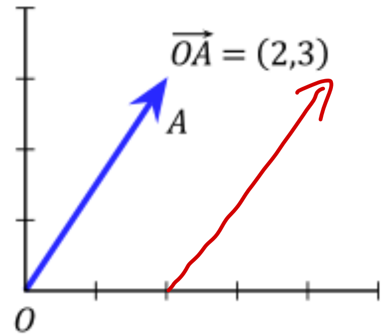
$$(7, -1, 0, 13) \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$$

opfattes som samme vektor i $\mathbb{R}^4$

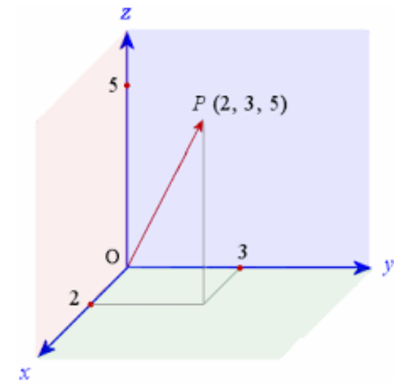
  - Hvis/når det er vigtigt, vil vi specificere om en given vektor er en række- eller søjlevektor (fx i forb. med matrixprodukt)

- For n=2,3: vektorer i hhv planen og rummet

$\mathbb{R}^2$:



$\mathbb{R}^3$:



- For n=4,5,… kan vi ikke tegne vektorer
  - Men stadig anvendelige i konkrete sammenhænge, koordinater $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kan fx angive værdier af forskellige økon. variable
    - “Varebundt”: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ angiver mængder af n forskellige varer
    - “Prisvektor”: $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ angiver priser på n forskellige varer

Regning med vektorer

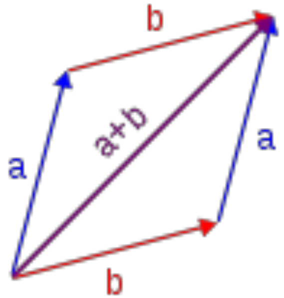
- Addition af vektorer:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)}$$

  - Koordinatvis addition!

$\mathbb{R}^2$:

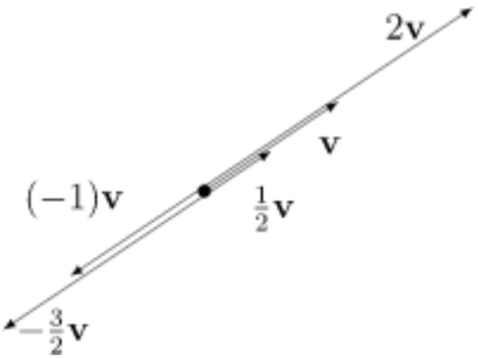


- Skalarmultiplikation (”multiplikation med tal”)

$$\alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)}$$

  - ”gang ind på hver koordinat”



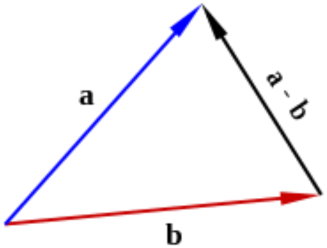
- Nulvektor: $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

- Modsat (invers) vektor til $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$-\mathbf{x} \text{ defineret ved } \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

  - Det ses let at:

$$-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = (-1)\mathbf{x}$$



- Vektorsubtraktion:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$$

- Linearkombination af $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$:

$$t\mathbf{x} + s\mathbf{y} = (tx_1 + sy_1, tx_2 + sy_2, \ldots, tx_n + sy_n),$$

$$\text{hvor } t, s \in \mathbb{R}$$

Vigtigt begreb!

Indre produkt (skalarprodukt)

- Definition af skalarprodukt for vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i}$$

  - Kaldes også prikprodukt

- Regneregler ($\alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$):

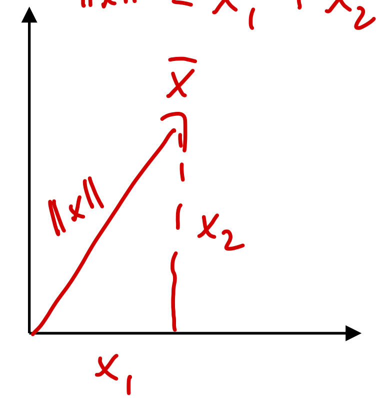
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} & = & \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) & = & \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \\ (\alpha \mathbf{x}) \cdot y & = & \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} & \geq & 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} & > & 0 \quad \text{hvis og kun hvis} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \end{array}$$

Længde/norm og afstand

- Længden/normen af en vektor defineres ved:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$

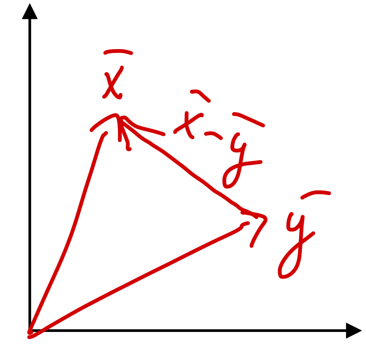


  - Det sædvanlige længdebegreb i planen:

- Afstanden mellem to vektorer defineres ved:

$$dist(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_y)^2}$$

Den sædv. afstand mellem vektorer i planen:



- Cauchy-Schwarz' ulighed:

  For alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er

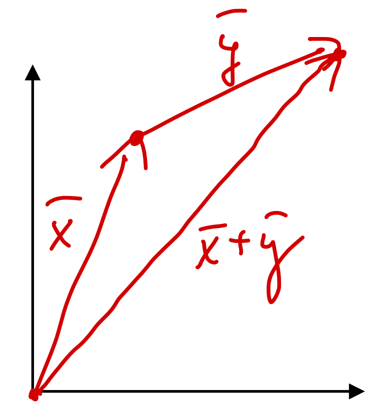
$$\boxed{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

  - Vigtigt og ofte nyttigt resultat, kan bl.a. bruges til at vise…

- Trekantsuligheden (se exercise 15.8.8): $\underline{n=1}$: $|x+y| \leq |x| + |y|$

  For alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er

$$\boxed{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|}$$



Bevis:

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = (\bar{x}+\bar{y})\cdot\bar{x} + (\bar{x}+\bar{y})\cdot y$$

$$= \bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{y}\cdot\bar{x} + x\cdot y + y\cdot y = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x\cdot y)$$

$$\overset{C\text{-}S}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Tag så kvadratroden!

Vinkel mellem vektorer

- Generel definition af vinkel mellem vektorer:

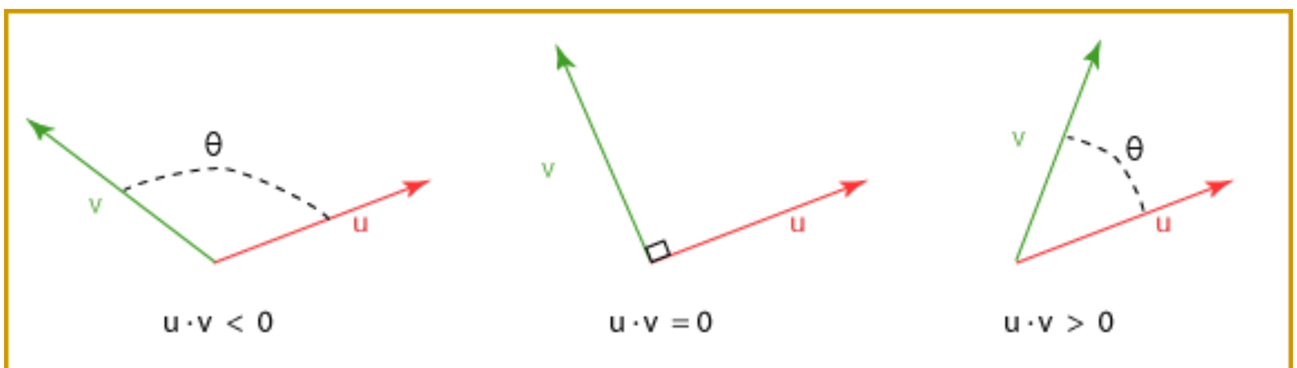
$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}}$$

Hvis $\theta = \frac{\pi}{2}$ $(\cos(\theta) = 0)$ siges $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ at være ortogonale:

$= 90°$

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$$

Bemærk, at $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ netop hvis $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$



Linjer og (hyper-)planer (15.9)

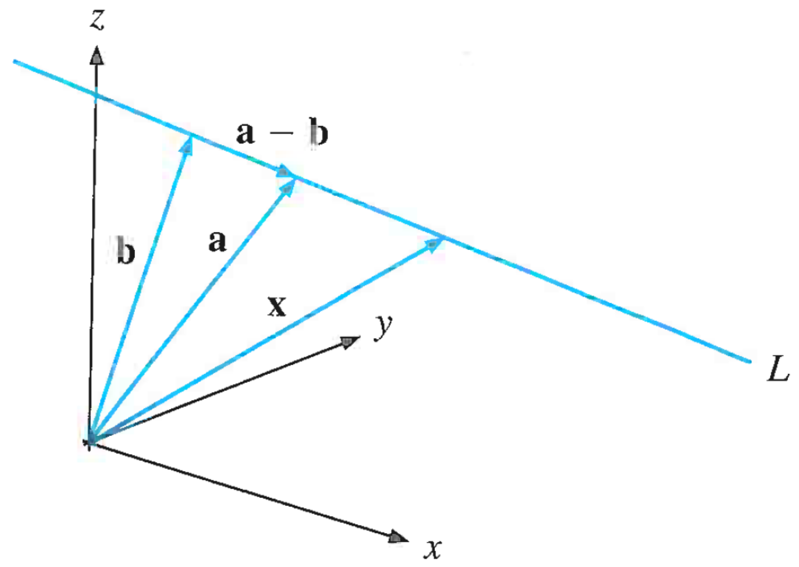


Figure 15.9.1 Line L goes through $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$

Linjen L gennem $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ består af punkterne

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = t\mathbf{a} + (1 - t)\mathbf{b}, \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R}$$

(linjen gennem $\mathbf{b}$ med retning $\mathbf{a} - \mathbf{b}$)

Generel definition af linjer i $\mathbb{R}^n$!

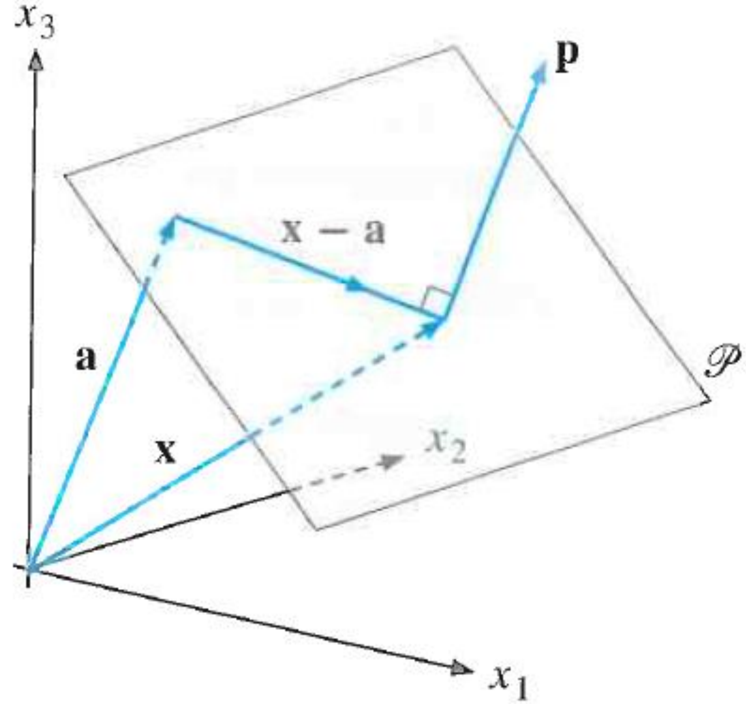


Figure 15.9.3 A hyperplane in $\mathbb{R}^3$

(Hyper-)planen $\mathcal{P}$ gennem $\mathbf{a}$ med normal $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ består af punkterne $\mathbf{x}$ der opfylder

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a})$$

Ligning for hyperplan i $\mathbb{R}^n$:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = c$$

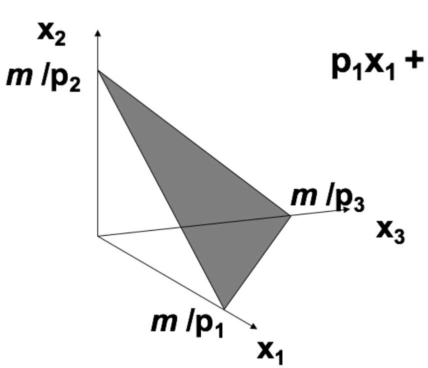
I økonomi (se example 15.9.3):

I forbrugssituation med n varer, indkomst m og priser $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ vil de varebundter $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ forbrugeren netop har råd til ligge på *budget-hyperplanen*:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = m$$

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = m)$$

3 varer:



$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = m$