Matematik A E2020
Uge 45, Forelæsning 1

Afsnit 9.6-7

Integralregning:

Integration ved substitution, uegentlige integraler

Integration ved substitution (9.6)

Betragt det ubestemte integral

$$\int 3x^2(5+x^3)^7\,dx$$

Lad $g(x) = 5 + x^3$, så er $g'(x) = 3x^2$, så integralet kan skrives...

$$\int g'(x)(g(x))^7 dx = \int g'(x) f(g(x)) dx,$$ hvor $f(u) = u^7$

$$= F(g(x)) + C,$$ hvor $F(u)$ er stam-fkt til $f(u)$

$$= \frac{1}{8}(g(x))^8 + C$$

$$= \frac{1}{8}(5+x^3)^8 + C$$

Integration ved substitution, ubestemte integraler ((9.6.1), s. 348)

Lad $g(x)$ være differentiabel med kontinuert $g'(x)$ og lad $f(u)$ være kontinuert med stamfunktion $F(u)$. Så gælder:

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \underset{\text{sæt } u = g(x)}{=} F(u) + C = \int f(u)\,du}$$

Integration ved substitution, bestemte integraler ((9.6.2), s. 348)

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du}$$

I praksis bruges oftest metoden beskrevet på s. 349!
Kortfattet:

$$\int G(x)\,dx \xrightarrow[]{\substack{u = g(x) \text{ [''en del af } G(x)\text{'']} \\ du = g'(x)dx}} \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Lad os bruge den i nogle eksempler...

Forholdsvis simpelt:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(u) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

$\left(\frac{1}{2}du = x\,dx\right)$

Sværere (se også ex 9.6.5, s.350 - samme integral, alternativ substitution):

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}x^2\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int (u-1)\sqrt{u}\,du$$

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{3/2} - u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}u^{5/2} - \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

Øvelser

pingo.coactum.de (185415)

1) Bestem $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ og $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = 2e^2 - 2e^1$

$= \int_{u=1}^{u=2} 2e^u\,du = \ldots = \;= 2e(e-1)$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$\left(2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx\right)$

$\int 2e^u\,du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$

2) Bestem $\int x\ln(1+x^2)\,dx$ (og evt $\int_0^2 x\ln(1+x^2)\,dx$) $= \frac{5}{2}\ln(5) - 2$

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

fra sidst (part. int.)

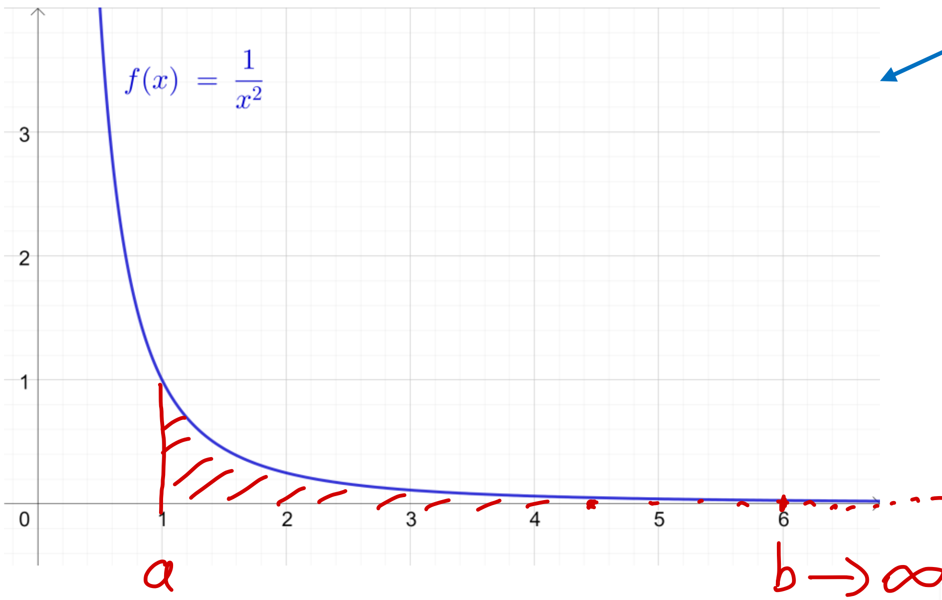
$\int \frac{1}{2}\ln(u)\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left(u\ln(u) - u\right) + C$

$= \frac{1}{2}\left((1+x^2)\ln(1+x^2) - (1+x^2)\right) + C$

$= \frac{1}{2}(1+x^2)\left(\ln(1+x^2) - 1\right) + C$

Uegentlige integraler (9.7)

"Improper integrals"

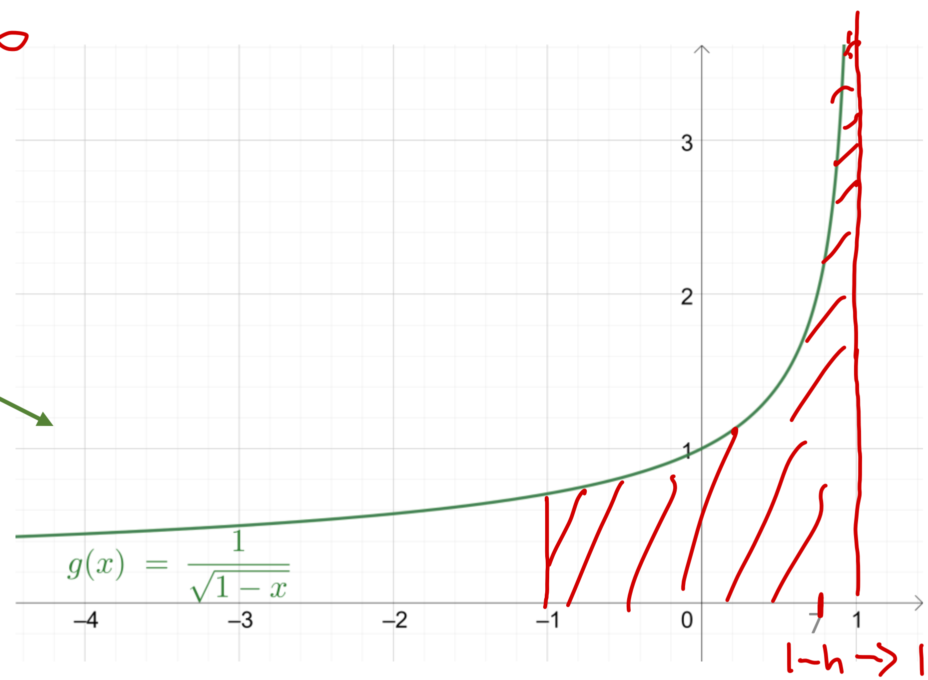


$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Hvis grænseværdien eksisterer,
siges integralet at *konvergere*!
Ellers siges integralet at *divergere*

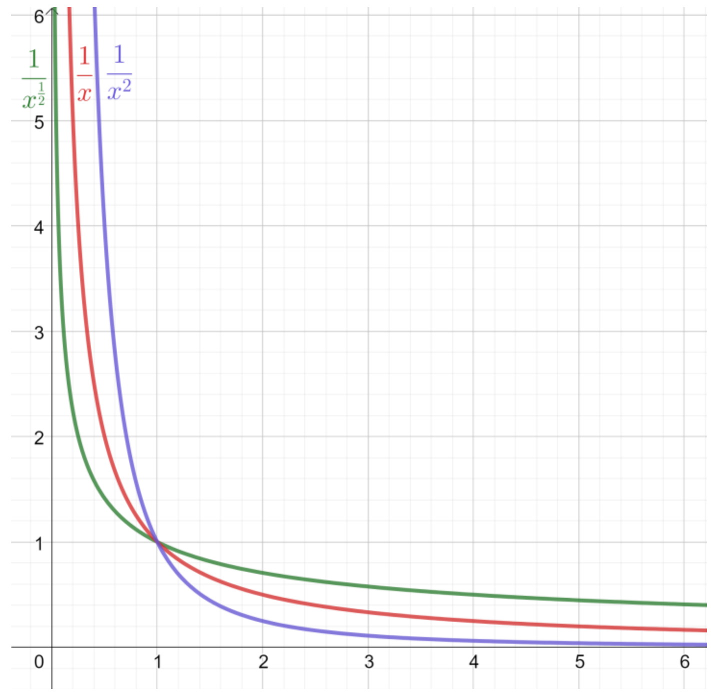
$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1-h} g(x)\,dx$$

Igen: Konvergent hvis grænseværdien
eksisterer! Ellers divergent.



Vigtige eksempler (ex 9.7.2, s. 354)

$$f(x) = \frac{1}{x^a} = x^{-a} \text{ for } a > 0$$



$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \text{divergent} & \text{hvis } a \leq 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{hvis } a > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{hvis } a < 1 \\ \text{divergent} & \text{hvis } a \geq 1 \end{cases}$$

Brug at en stamfunktion til $f(x) = x^{-a}$ er:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{-a+1} x^{-a+1} & \text{hvis } a \neq 1 \\ \ln(x) & \text{hvis } a = 1 \end{cases}$$

For $a \neq 1$:

$$\int_1^b \frac{1}{x^a}\,dx = \int_1^b x^{-a}\,dx = \left[\frac{1}{-a+1}x^{-a+1}\right]_1^b = \frac{1}{-a+1}b^{-a+1} - \frac{1}{-a+1}\cdot 1$$

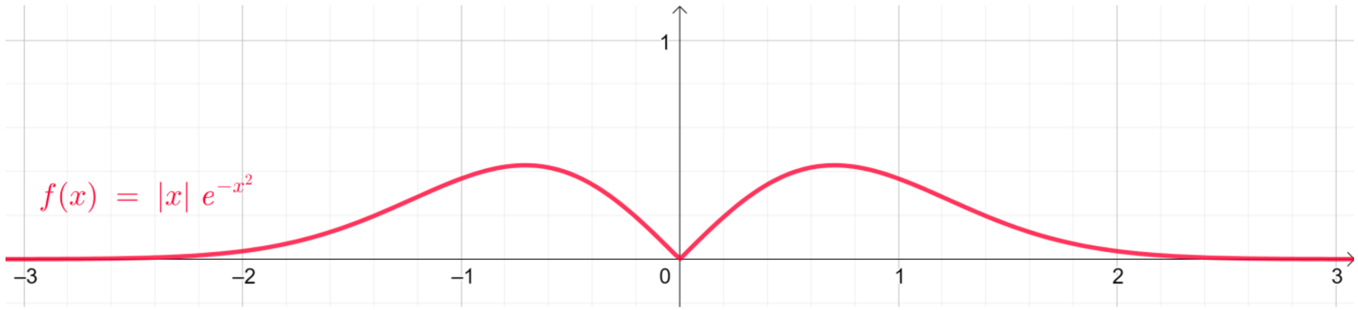
Når $b \to \infty$ vil $b^{-a+1} \to \begin{cases} 0 & \text{når } a > 1 \\ \infty & \text{— } a < 1 \end{cases}$

Derfor:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{-a+1} = \dfrac{1}{a-1} & \text{når } a > 1 \\ \text{Divergent} & \text{når } a < 1 \end{cases}$$

Uegentlige integraler – "to grænser"

$$f(x) = |x|e^{-x^2}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

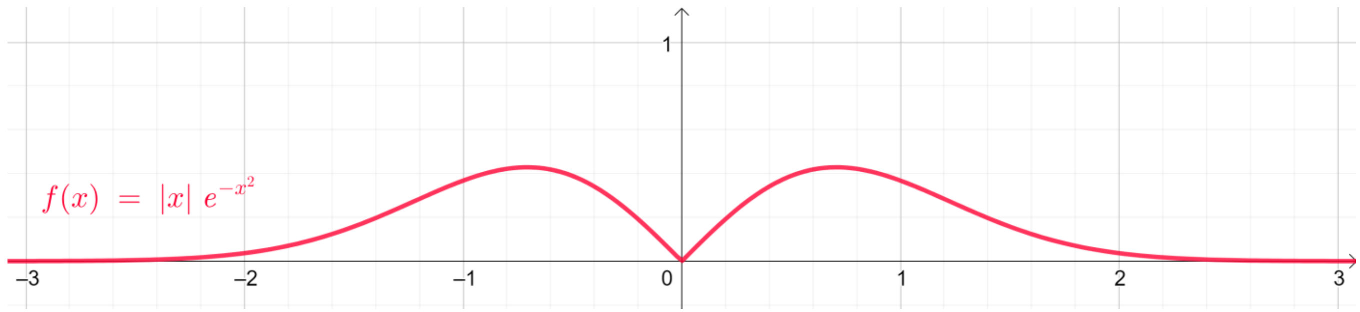
Integralet konvergerer, hvis begge disse integraler konvergerer!

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

Bemærk: Valget af c er uden betydning (vælg fx c=0)

Eksempel/øvelse:

Vis, at det uegentlige integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx$ konvergerer, og bestem værdien



$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} |x| e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx$$

Symmetri omkr. $x=0$

$$= 2\int_{0}^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{\infty} 2x\, e^{-x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} 2x\, e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b^2} e^{-u}\,du$$

$u = x^2$

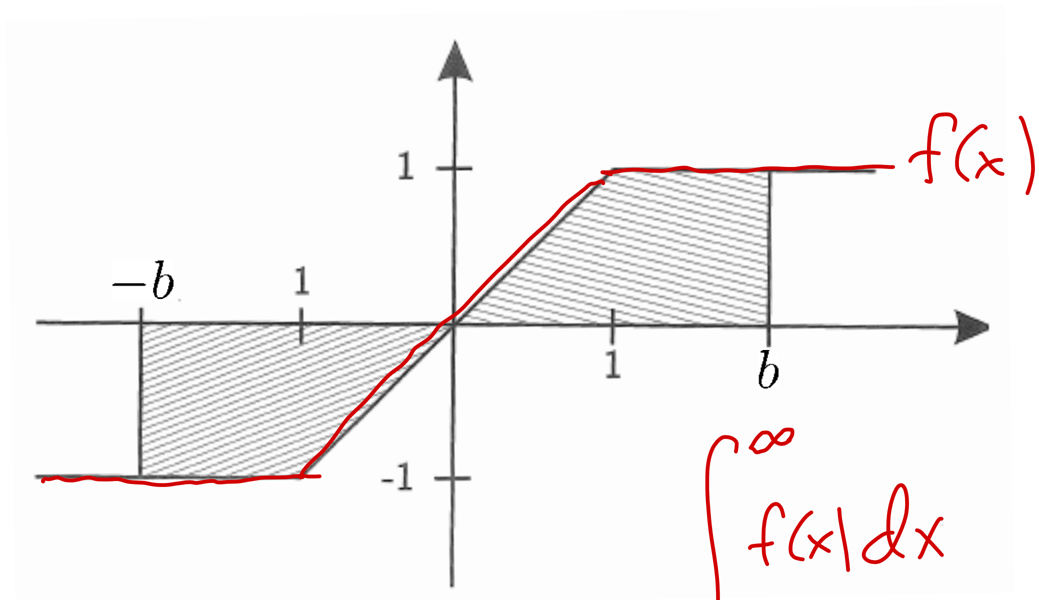
$du = 2x\,dx$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-u}\right]_0^{b^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b^2} + e^{0}\right) = 0+1 = \underline{1}$$

Uegentlige integraler – ”to grænser”

Hvorfor er det vigtigt at ”dele op i to integraler”?

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx
\end{aligned}
$$



$$\cancel{\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ er divergent!

En konvergens-test (Thm 9.7.1, s. 356)

Antag:

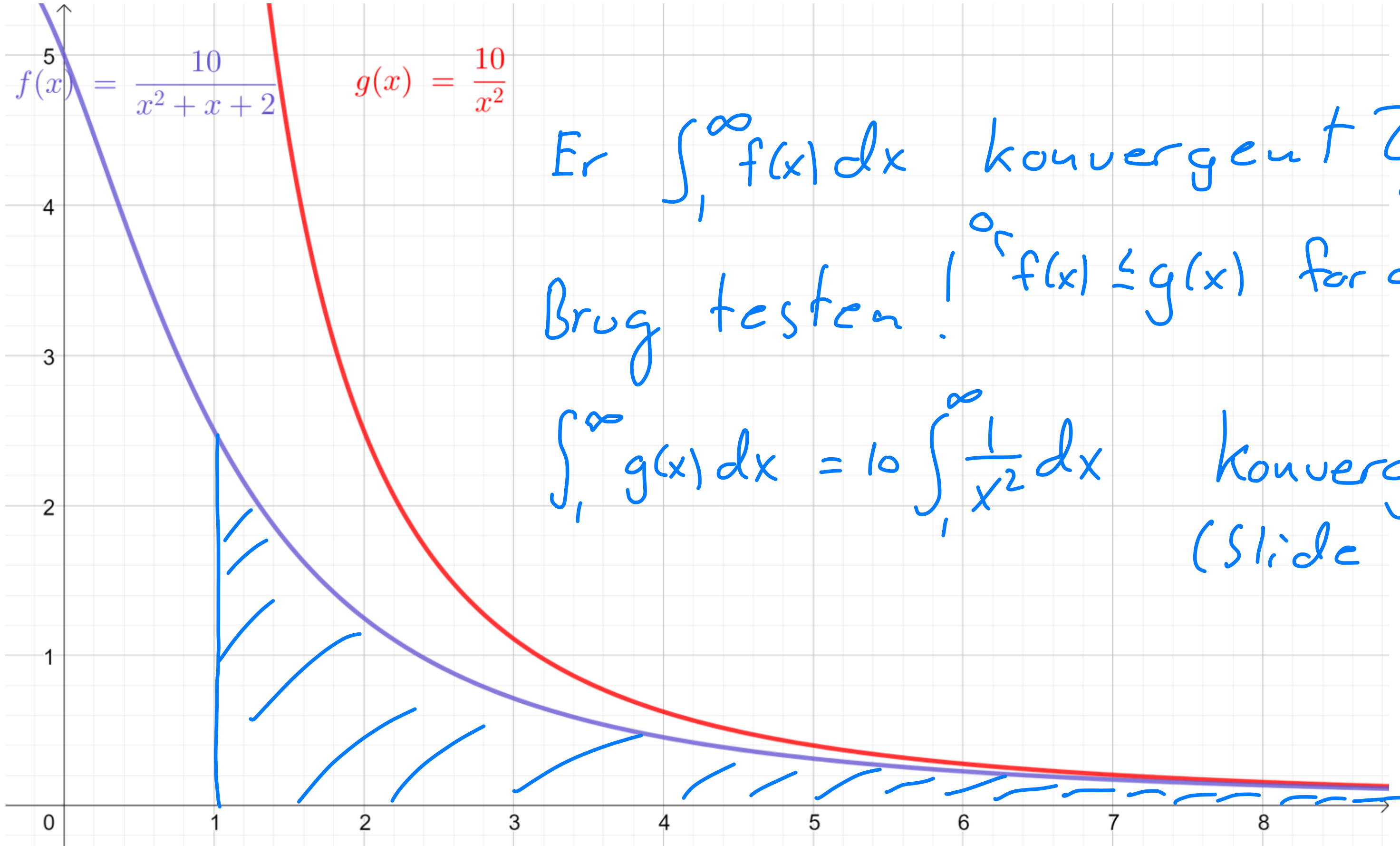
- $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte på $[a, \infty)$
- $|f(x)| \leq g(x)$ for alle $x \geq a$
- Integralet $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergerer

Så konvergerer integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$ og

$$\left| \int_a^\infty f(x)\,dx \right| \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$$

NB: Kan (i nogle tilfælde) hjælpe os med at afgøre om et uegentligt integral konvergerer, men ikke med at finde værdien (vi får kun en øvre grænse).

Eksempel: $f(x) = \frac{10}{x^2+x+2}$ og $g(x) = \frac{10}{x^2}$ på $[1, \infty)$



Er $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent?

Brug testen! $0 \le f(x) \le g(x)$ for alle $x \ge 1$

$\int_1^\infty g(x)\,dx = 10 \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergent! (Slide 8)

Vi får: Integralet $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergerer og

slide 8 (a=2)

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \le \int_1^\infty \frac{10}{x^2}\,dx = 10 \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 10 \frac{1}{2-1} = 10$$

Opgave 2, prøveeksamen E2019

Opgave 2

(a) Udregn det ubestemte integral

$$\int (1+x)e^{2x}\,dx\,.$$

(b) Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion defineret på intervallet $[0,\infty)$.
Gør rede for definitionen af, at det uegentlige integral (*improper integral*)

$$\int_0^\infty f(x)\,dx\,.$$

konvergerer.

(c) Vis, at det uegentlige integral

$$\int_0^\infty e^{-(x+1)}\,dx\,.$$

konvergerer, og bestem dets værdi.
Vis dernæst, at

$$\int_0^\infty e^{-(x+1)^2}\,dx\,.$$

også konvergerer.