Matematik B F2021 Forelæsning 5 (uge 10)

FMEA: 1.1-1.4

Lineær uafhængighed, rang af matricer, lineære ligningssystemer

I dag:

Den nye bog!

Nye og vigtige begreber indenfor lineær algebra og anvendelser på lineære ligningssystemer:

- Lineær uafhængighed af vektorer (1.2)
- Rang af matricer (1.3)
- Generelle resultater om lineære ligningssystemer (1.4)

Bemærk, at afsnit 1.1 kortfattet repeterer mange definitioner, resultater mv. fra de første uger af semestret

Lineær uafhængighed (1.2)

Lad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ være vektorer i $\mathbb{R}^m$

Definition (s.7):

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er *lineært uafhængige* hvis:

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

(for reelle tal $c_1, c_2, \ldots, c_n$)

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er *lineært afhængige* hvis:

Der findes reelle tal $c_1, c_2, \ldots, c_n$ med $c_i \neq 0$ for mindst et i så

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

Linearkombinationer af vektorer:

En linearkombination af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ $\in \mathbb{R}^m$ er en vektor på formen

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_n\mathbf{a}_n,$$

hvor $t_1, \ldots, t_n$ er reelle tal

Nyttigt resultat:

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er lineært afhængige

$$\Leftrightarrow$$

Der findes (mindst) et i, så $\mathbf{a}_i$ kan skrives som en linearkombination af de øvrige vektorer

"$\Rightarrow$" Antag $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ er lineært afh., dvs.

$c_1\underline{a}_1 + \ldots + c_n\underline{a}_n = \underline{0}$ for $c_1, \ldots, c_n$ med $c_i \neq 0$ for et i

Heraf: $c_i\underline{a}_i = -c_1\underline{a}_1 - \ldots - c_{i-1}\underline{a}_{i-1} - c_{i+1}\underline{a}_{i+1} - \ldots - c_n\underline{a}_n$

Dividér med $c_i \neq 0$: $\underline{a}_i = \underbrace{-\frac{c_1}{c_i}}_{t_1}\underline{a}_1 - \ldots \underbrace{-\frac{c_{i-1}}{c_i}}_{t_{i-1}}\underline{a}_{i-1} \underbrace{-\frac{c_{i+1}}{c_i}}_{t_{i+1}}\underline{a}_{i+1} - \ldots \underbrace{-\frac{c_n}{c_i}}_{t_n}\underline{a}_n$

Dvs $\underline{a}_i$ er skrevet som linear komb. af de øvrige!

Eksempel i $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}_1, \underline{a}_2$ er lineært uafhængige

$\underline{a}_1$ kan ikke skrives som linearkomb. af $\underline{a}_2$ (og omvendt)

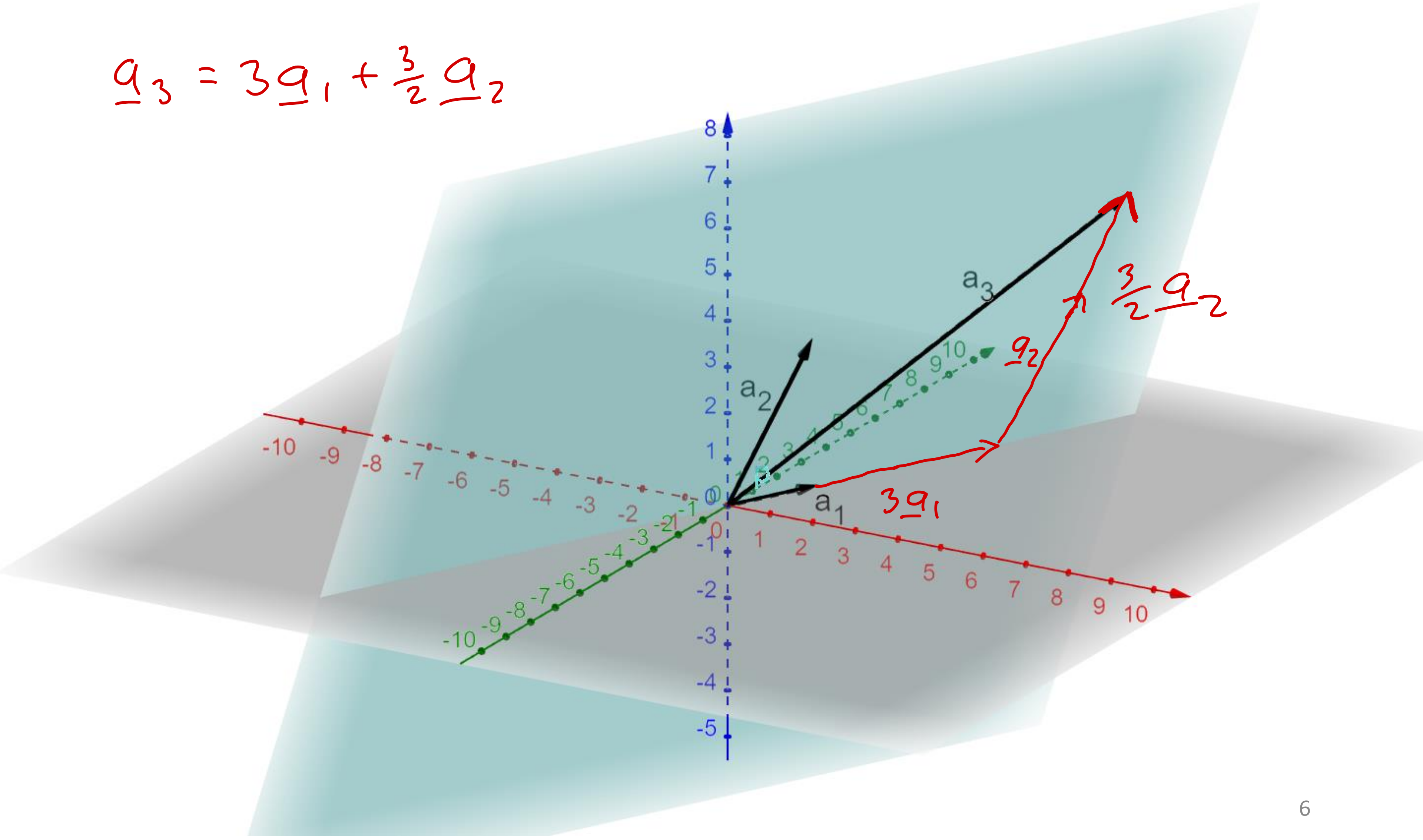
$[\underline{a}_1 \neq c\,\underline{a}_2]$

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er lineært afhængige

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}_3 = 3\underline{a}_1 + \frac{3}{2}\underline{a}_2$$



Lin. uafhængighed og lin. ligningssyst.

m ligninger med n ubekendte:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Matrixform : $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

På vektorform:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

eller

NB!

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b},$$

hvor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er søjlevektorerne i koefficientmatricen $\mathbf{A}$

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Sætning (s.9, nederst):

> Hvis søjlevektorerne $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er lineært uafhængige, så har ligningssystemet højst én løsning

Antag $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ er lin uaf og lad $u_1, \ldots, u_n$ og $v_1, \ldots, v_n$ være 2 løsninger, dvs $u_1\underline{a}_1 + \ldots + u_n\underline{a}_n = \underline{b}$ og $v_1\underline{a}_1 + \ldots + v_n\underline{a}_n = \underline{b}$

Heraf: $(u_1 - v_1)\underline{a}_1 + \ldots + (u_n - v_n)\underline{a}_n = \underline{0}$

Dvs: $u_1 - v_1 = 0, \ldots, u_n - v_n = 0$ (brug def af lin. uafhængighed)

Altså: $u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$, de to løsn er altså samme løsning. □

Hvis $m = n$ gælder (Theorem 1.2.1, s. 10):

> Søjlevektorerne $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er lineært uafhængige
>
> $\Longleftrightarrow$ Brug def på lin. uafh.
>
> Ligningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning
>
> $\Longleftrightarrow$ Fra sidst
>
> $|\mathbf{A}| \neq 0$

Øvelse:

1) Vis, at flg. vektorer er lin. afhængige: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

2) Skriv den sidste vektor som en linearkombination af de to første

pingo.coactum.de (131061): Stem på koeff. t_1 og t_2

1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ søjlevekt. er lineært afh.

2) $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l}3=t_1+2t_2\\4=2t_1+3t_2\\5=3t_1+4t_2\end{array}\right\}$ løsn: $\underline{t_1=-1,\ t_2=2}$

Ekstra:
Hvis $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\in\mathbb{R}^m$ er lin. afhængige, kan man så altid skrive en vilkårlig af disse vektorer som en linearkombination af de øvrige?

Ekstra:

Hvis $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lin. afhængige, kan man så altid skrive en vilkårlig af disse vektorer som en linearkombination af de øvrige?

NEJ!

Eksempel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ er lineært afh.

(da $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

Men $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kan <u>ikke</u> skrives som linearkomb. af $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rang af matricer (1.3)

Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix

Definition (s.11):

$\boxed{\text{\textit{Rangen} af matricen } \mathbf{A}\text{, som skrives } r(\mathbf{A})\text{, er det maksimale antal af lineært uafhængige søjlevektorer i } \mathbf{A}}$

(for nulmatricen: $r(\mathbf{0}) = 0$)

Eksempel:

Fra slide 5:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er lin. afh $\Rightarrow r(A) < 3$

$\underline{a}_1, \underline{a}_2$ er lin uafh $\Rightarrow \underline{r(A) = 2}$

Observation om kvadr. matricer (Example 1, s.11):

$\boxed{\text{Hvis } \mathbf{A} \text{ er en } n \times n \text{ matrix, så er } r(\mathbf{A}) = n \text{ hvis og kun hvis } |\mathbf{A}| \neq 0}$

Underdeterminanter ("minors")

$\mathbf{A}$ er igen en $m \times n$ matrix

En *underdeterminant* (*minor*) af orden k for $\mathbf{A}$ fås ved at slette søjler/rækker, så der fremkommer en $k \times k$ matrix, som man så udregner determinanten af

Eksempel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3 underdeterminanter af orden 2:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

6 underdeterminanter af orden 1:

Alle de 6 elementer i A.

Theorem 1.3.1 (s.12):

(dvs. højest orden!)

$\boxed{\text{Rangen af } \mathbf{A} \text{ er lig ordenen af den største underdeterminant for } \mathbf{A}\text{, der er forskellig fra 0}}$

Eksempel fra før: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Dvs $r(A) = 2$

pingo.coactum.de
(131061)

Øvelse: Find $r(\mathbf{B})$ vha underdeterminanter

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Extra: Hvor mange underdeterminanter af orden 2 har en 3×6 matrix?

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(regn selv efter!)

Alle 4 underdeterminanter af orden 3 er lig 0.

$\Rightarrow r(B) < 3$

Underdet af orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow \underline{r(B) = 2}$

Extra: Hvor mange underdeterminanter af orden 2 har en 3×6 matrix?

måder at vælge 2 søjler på

$$3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = \underline{45}$$

måder at vælge 2 rækker på

Rang og transponering

Theorem 1.3.2 (s.13):

For enhver matrix $\mathbf{A}$ gælder: $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}')$

Af Thm 1.3.2 fås ny måde at bestemme $r(\mathbf{A})$ på:

$r(\mathbf{A})$ er lig med det maksimale antal af lineært uafhængige *rækkevektorer* i $\mathbf{A}$

Rang og rækkeoperationer (s. 13)

Ofte nyttigt ved udregning af rang af matrix:

Rangen af en matrix ændres ikke ved rækkeoperationer!

Eksempel (fra øvelse):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I alle underdeterm. af orden 3 indgår en nulrække, så de vil være lig 0.

$\Rightarrow r(B) < 3$

Under det af orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$\Rightarrow r(B) = 2$

Ækvivalent definition af rang af matrix (ikke i bogen):

Rangen af en matrix $\mathbf{A}$ er antallet af initial-ettaller ("leading 1's") i den reducerede (række-)echelon form af $\mathbf{A}$

Eksempel igen-igen:

fra før

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

reduceret echelon form.

2 initial-ettaller : $r(B) = 2$

Lin. lign.syst.: Generelle resultater (1.4)

m ligninger med n ubekendte:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}}$$

(Matrixform: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$)

NB!

Udvidet koefficientmatrix ("augmented matrix"):

$$\mathbf{A_b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Bemærk:

$$\boxed{r(\mathbf{A}) \leq r(\mathbf{A_b}) \leq r(\mathbf{A}) + 1}$$

Theorem 1.4.1 (eksistens af løsning, s.15):

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ har en løsning} \quad \Leftrightarrow \quad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b})}$$

NB: Et ligningssystem kaldes *konsistent*,
hvis det har (mindst) en løsning

Eksempel:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vha øvelse på slide 9: $r(\mathbf{A}) = 2$

Lad os udregne $r(\mathbf{A_b})$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow r(A_b) = 3$$

Ingen løsninger til lign. syst!

Theorem 1.4.2 (s.15):

Antag $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = k$

Hvis $k < m$ (antal ligninger), så er $m - k$ ligninger overflødige ("superfluous") på den måde, at ligningssystemet givet ved k lineært uafhængige rækker i $\mathbf{A_b}$ har samme løsninger som det oprindelige system

Hvis $k < n$ (antal ubekendte), så er der $n - k$ frie variable, og de resterende k variable er entydigt bestemt ud fra værdierne af de frie variable

$r(\mathbf{A})$ og $r(\mathbf{A_b})$ fortæller os altså ganske meget om løsningsmængden til ligningssystemet!

Eksempel (Example 1, s. 16-17, men løsning vha rækkeop.):

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \end{aligned}}$$

$$\mathbf{A_b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & -10 & -3 & -9 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

Ved at se på søjlevektorer: $r(\mathbf{A_b}) \leq 3$ (og husk $r(\mathbf{A}) \leq r(\mathbf{A_b})$)

Da (fx) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$ er $\boxed{r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = 3}$

2 frie variable!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & -10 & -3 & -9 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \quad -3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & -18 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times -\frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & -18 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \quad -2 \quad 1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times -\frac{1}{6} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 6 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

reduced echelon form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aflæsning af løsninger:

Frie var:

$x_3 = s$

$x_5 = t$ $\quad (s, t \in \mathbb{R})$

$x_1 = 1$

$x_2 - 2x_3 = 0$

$x_4 + 3x_5 = 0$

$0 = 0$

Løsning:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2s \\ x_3 &= s \\ x_4 &= -3t \\ x_5 &= t \end{aligned}}$$

hvor $s, t \in \mathbb{R}$

Med vektornotation:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2s \\ s \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$