$$Y_t = K_t^{\alpha}\left(A_t L_t\right)^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1 \tag{1}$$

$$K_{t+1} - K_t = sY_t - \delta K_t, \quad 0<s<1, \quad 0<\delta<1 \tag{2}$$

$$L_{t+1} = (1+n)\,L_t, \quad n>0 \tag{3}$$

$$A_{t+1} = (1+g)\,A_t, \quad g>0 \tag{4}$$

2.1

Opstiller virksomhedens maksimeringsproblem.
Først findes r_t

$$\pi = K_t^{\alpha} A^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha} - w_t L_t - r_t K_t$$
$$\frac{d\pi}{dK_t} = \alpha K_t^{\alpha-1} A_t^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha} = r_t$$

Dividerer med den omvendte potens:

$$\alpha\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1} = r_t$$
$$r_t = \alpha \widetilde{k_t^{\alpha-1}}$$

Herefter findes w_t

$$\pi = K_t^{\alpha} A^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha} - w_t L_t - r_t K_t$$
$$\frac{d\pi}{dL} = (1-\alpha) K_t^{\alpha} K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} L_t^{-\alpha} = w_t$$
$$(1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} A_t = w_t$$
$$(1-\alpha)\widetilde{k_t^{\alpha}} A_t = w_t$$

Indkomstandelene gives ved:

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1-\alpha) K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha}}{K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha}} = (1-\alpha)$$
$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \frac{(\alpha K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha})}{K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha}} = \alpha$$

En mulig værdi for α er $\frac{1}{3}$, da det generelt er antaget, at $\frac{2}{3}$ af indkomsten går til arbejderne.

2.2

$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$$
$$\frac{(K_{t+1})}{L_{t+1}A_{t+1}} = \frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{A_t(1+g)L_t(1+n)}$$
$$\widetilde{k_{t+1}} = \frac{s\widetilde{y_t} + (1-\delta)\widetilde{k_t}}{(1+n)(1+g)}$$

Vi ved at $\widetilde{y_t} = \widetilde{k_t}$, fordi $\frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{\left(K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}\right)}{A_t L_t}$

$$\widetilde{y_t} = \left(\frac{K_t}{L_t A_t}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{A_t L_t}{A_t L_t}\right)^{1-\alpha}$$
$$\widetilde{y_t} = \widetilde{k_t^{\alpha}} \cdot 1$$
$$\widetilde{y_t} = \widetilde{k_t^{\alpha}}$$

Dette indsættes i transitionsligningen:

$$\widetilde{k_{t+1}} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\widetilde{k_t^\alpha} + (1-\delta)\widetilde{k_t}\right)$$

Ved at trække $\widetilde{k_t}$ fra på begge sider fås.

$$\widetilde{k_{t+1}} - \widetilde{k_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\widetilde{k_t^\alpha} + (1-\delta)\widetilde{k_t}\right) - \frac{(1+n)(1+g)}{(1+n)(1+g)}\widetilde{k_t}$$

$$\widetilde{k_{t+1}} - \widetilde{k_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\widetilde{k_t^\alpha} + (1-\delta)\widetilde{k_t} - (1+n)(1+g)\tilde{k}_t\right)$$

$$\widetilde{k_{t+1}} - \widetilde{k_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\widetilde{k_t^\alpha} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t\right)$$

2.3

Ud fra Solow-ligningen kan man udlede konvergens, hvis $k = 0$, det bekræfter de 4 INNADA betingelser.

Udleder SS-værdierne og isolerer k, y, og z.

Sætter alle værdier af k lig hinanden. (*Alle variabler er tilde*)

$$k - k = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(sk^\alpha - (n+g+\delta+ng)k)$$

$$(k-k)\frac{1}{(1+n)(1+g)} = (sk^\alpha - (n+g+\delta+ng)k) =$$

$$0 \cdot \frac{1}{(1+n)(1+g)} = sk^\alpha - (n+g+\delta+ng)k$$

$$k(n+g+\delta+ng) = sk^\alpha$$

$$k^{1-\alpha} = \frac{s}{(n+g+\delta+ng)}$$

$$k^{stjerne} = \left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Udleder y.

Det vides at

$$\tilde{y}_t = \widetilde{k_t^\alpha}$$

Derfor:

$$y^{stjerne} = \left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Ved at differentiere kan konvergens påvises.

$$\frac{d^2k_{t+1}}{dk_t} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\widetilde{k_t^\alpha} + (1-\delta)\widetilde{k_t}\right)\right)''$$

$$\frac{d^2k_{t+1}}{dk_t} = (\frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(\alpha s k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)\right)' > 0$$

$$\frac{d^2k_{t+1}}{dk_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(\alpha(\alpha-1)sk_t^{\alpha-2}) < 0$$

Når $\frac{d^2k_{t+1}}{dk_t} < 0$, er funktionen konkav og derfor konvergerer den mod et enkelt punkt. Da k indgår i både y og z er disse også konkave og konvergerer derfor.

Herefter kan z udledes.

$$z = \frac{\left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$z = \left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}$$

$$z^{stjerne} = \frac{s}{n+g+\delta+ng}$$

Indsætter man realistiske værdier for parametrene, kan der gives et bud på z.
$s = 0{,}2$, $\delta = 0{,}05, n = 0{,}015, g = 0{,}01$ som vi har arbejdet med tidligere, og passer overens med en økonomi ligende den danske.

$$\frac{0{,}2}{0{,}015 + 0{,}01 + 0.05 + 0{,}01 \cdot 0{,}025} = \frac{0{,}2}{0{,}07525} \approx 2{,}657807$$

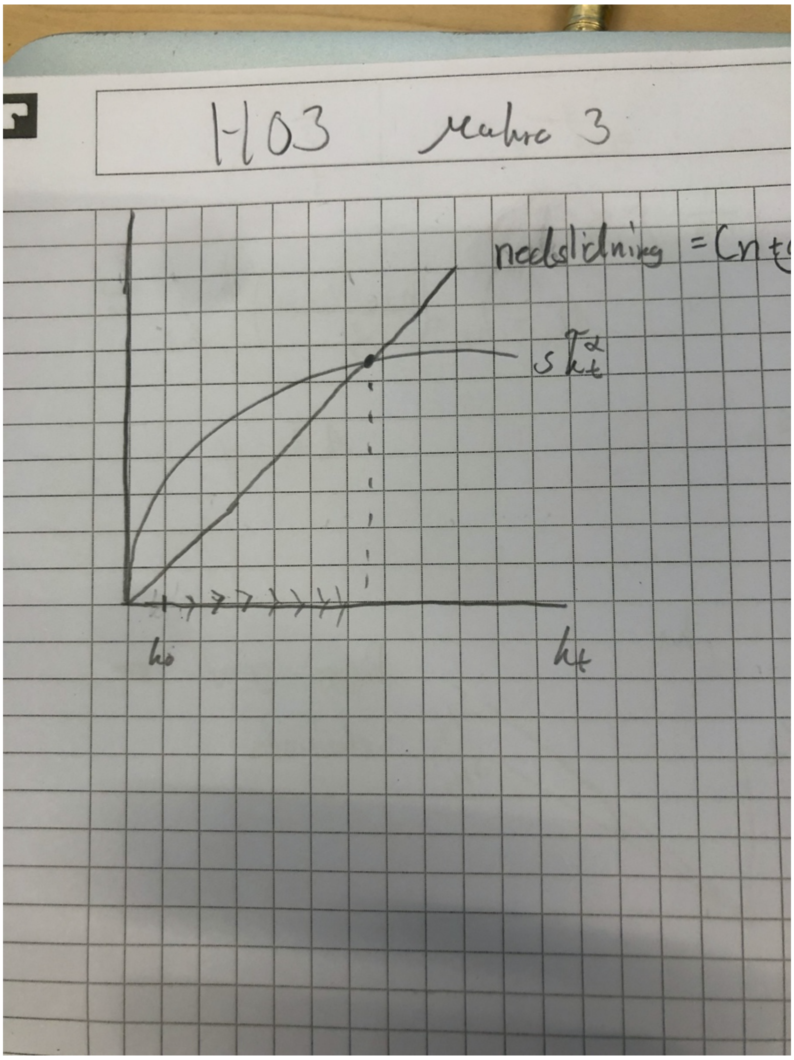
Dette giver et kapital/output-forhold på ca. 2.7

2.4

$$z_t = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$$

Vi ved fra tidligere, at $\tilde{y}_t = \widetilde{k_t^{\alpha}}$ samt at $z_t = \frac{\widetilde{k_t}}{\widetilde{y_t}}$

$$z_t = \frac{\widetilde{k_t}}{\widetilde{y_t}} = \frac{\widetilde{k_t}}{\tilde{k}_t^{\alpha}} = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$$



Det kan ses, at $\widetilde{k_t}$ konverger opad mod $\tilde{k}^{stjerne}$. Derfor må kapital per effektiv arbejder stige gennem hele perioden.
Ud fra $(1-\alpha)\widetilde{k_t^{\alpha}}A_t = w_t$ ud fra ligningen kan man se at reallønnen vokser, da både A_t og $\widetilde{k_t}$. Dette er givet pga. $k_t = A_t\widetilde{k_t}$.
Det vides fra 2.1, at indkomstandelene gennem hele perioden er stabile på α og $(1-\alpha)$. Ud fra dette kan det konkluderes at reallejesatsen er faldende, pga. $r_t = \frac{\frac{1}{3}\tilde{k}_t^{\alpha}}{\widetilde{k_t}}$. Hvilket bliver mindre, når k vokser.

Piketty mener, at over et længere tidstræk vil lønandelen være faldende. Dette modstrider Solow-modellen. I 2.1 udeledtes lønandelen til at være faste gennem hele perioden. Dog beskriver Piketty en ændring i kapital/output-forholdet, z, ved ændrede parametre værdier. Dette stemmer overens med udledningen i 2.3, som kan ændres ved andre værdier.

2.5
Indsætter man ovenstående værdier i Solow-modellens konvergensrate $(1-\alpha)(n+g+\delta)$

$$Konvergensrate = \left(1-\frac{1}{3}\right)(0{,}015 + 0.01 + 0.05)$$

$$Konvergensrate = \frac{2}{3} \cdot 0{,}075 \approx 0{,}05$$

Dette betyder, hvor mange % af afstanden fra k_t til $k^{stjerne}$, der tilbagelægges hver periode, fx 1 år. Ganges dette med ti. $5 procent \cdot 10 = 50\%$. Derfor kan der sagtens gå over et årti før at SS rammes. En konvergensrate på 5 per år, er dog meget højt sat, og den vil oftest svinge mellem 1-2% alt efter stød til økonomien. Derfor tager det derfor flere årtier at nå steady state.
Dette stemmer overens med Pikettys teser angående stigende z efter anden verdenskrig, da man kan se dette som konvergens mod et nyt steady state for vesten.

2.6
Bruttoinvesteringer, s, ændres til nettoinvesteringerne, s'.

$$K_{t+1} - K_t = s'Y_t - \delta K_t$$

Dette ændrer dog ikke modellen på nogen mærkbar måde.
Solow-ligningen bliver:

$$\widetilde{k_{t+1}} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s'\tilde{k}_t^{\alpha} - (n+g+ng)\tilde{k}_t\right)$$

Og steady state-værdierne bliver

$$k^{stjerne} = \left(\frac{s'}{(n+g+ng)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^{stjerne} = \left(\frac{s'}{(n+g+ng)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$z^{stjerne} = \frac{s'}{n+g+ng}$$

Vi ved fra antagelserne, at selvom bruttoinvesteringerne ændres til nettoinvesteringerne, vil ovenstående skitse vise sammenhængen for både s og s'. For selvom investeringerne ændres, så er $(n+g+ng) > 0$. Hvilket betyder, at selv med s' vil vi ende i SS, som er udledt i starten af spg. 2.6.
Yderligere kan det siges, hvis $n + g$ bliver lavere, vil tælleren blive mindre, og derfor både $z^{stjerne}$ og $z^{stjerne\prime}$ blive større. Dette kan blandt andet ses, at hvis nævneren går mod nul, så vil $z^{stjerne}$ og $z^{stjerne\prime}$ gå mod uendelig.
Piketty nævner blandt andet to verdenskrige, hvilket både har haltet den teknologiske udvikling og befolkningstilvæksten. Altså kommer vi længere fra steady state-værdierne, der går mod uendelig. Modsat efter krigen lukkes gappet til SS-værdierne i og med teknologisk vækst og befolkningstilvæksten tager til, som gør SS-værdierne mindre. Dette kan hentyde til parametre ændringerne, Piketty henviser til.

2.7

$$Y_t = \left(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left(A_t L_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad 0<\alpha<1,\ \sigma>0, \neq 1 \qquad (1')$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} \qquad \text{(CES1)}$$

$$z_t = \left(\alpha + (1-\alpha)\tilde{k}_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \qquad \text{(CES2)}$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\left[\alpha\tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (n+g+\delta+ng)\,\tilde{k}_t\right)$$

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{(1-\alpha)\,s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \qquad \text{(CES4)}$$

$$z^* = \frac{s}{n+g+\delta+ng} \qquad \text{(CES5)}$$

Det vides, CES modellen udviser monoton konvergens af $\widetilde{k_t}$ mod $k_t^{\widetilde{stjerne}}$
Hvis $\sigma < 1$, er begge eksponenter positive, og derfor vil z vokse, fordi k gør det.
Hvis $\sigma > 1$, er begge eksponenter negative, hvilket betyder, en voksende værdi af k, også vil lade z vokse. Derfor må konklusionen være, at en forøgelse af k giver større ødelæggelse af kapital jf. Solow-ligningen, og derfor øges kapital-outputforholdet.

Lønandelen findes ved at sætte udtrykket for k ind i $\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha\widetilde{k_t}^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}+(1-\alpha)}$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha\left(\left(\frac{(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{1-\alpha}{\frac{\alpha(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left((n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1-\alpha)\left((n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)}{(1-\alpha)\left((n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = 1 - \alpha\left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = 1 - \alpha\left(z^{stjerne}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$