Matematik A E2020
Uge 38, Forelæsning 2

Afsnit 6.5 og 7.8-7.10 (kun til og med ex 7.10.1)

Grænseværdi og kontinuitet

Overblik

- Dagens stof
  - 6.5: Grænseværdi – lidt uformel definition, regneregler
  - 7.8: Kontinuitet
  - 7.9: Mere om grænseværdi, bl.a. helt formel definition
  - 7.10(første side): “Sætning om mellemliggende værdier”

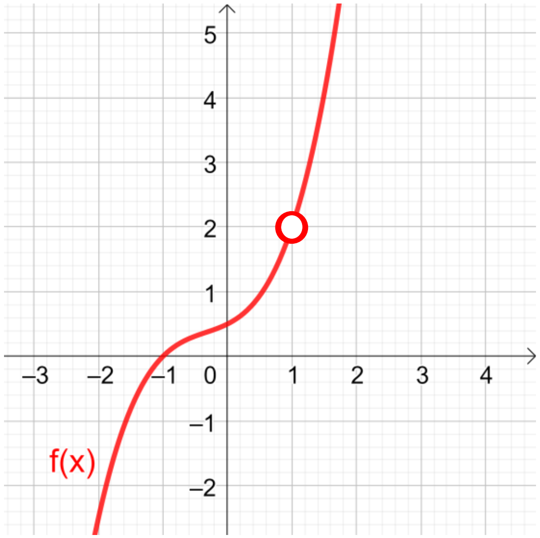
  Grænseværdi og kontinuitet er helt centrale begreber i matematisk analyse!

- Næste uge: Differentialregning!

Grænseværdi (6.5)

Betragt funktionen

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{2(x-1)} \qquad (\text{hvor } x \neq 1)$$



Ved at se på grafen og/eller indsætte x-værdier <u>synes</u> det umiddelbart klart, at

$$f(x) \to 2 \quad \text{når} \quad x \to 1$$

Det skrives også

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Grænseværdi – uformel def (6.5.1)

Lad $a \in \mathbb{R}$ og lad f være funktion, der er defineret for alle x "omkring" a (men ikke nødvendigvis i $x = a$)

Vi siger at

$$f(x) \to A \quad \text{når} \quad x \to a$$

eller

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

hvis vi kan gøre $|f(x) - A|$ så lille vi ønsker for alle x, der er tilstrækkeligt tæt på (men ikke lig med) a.

Eksempel igen

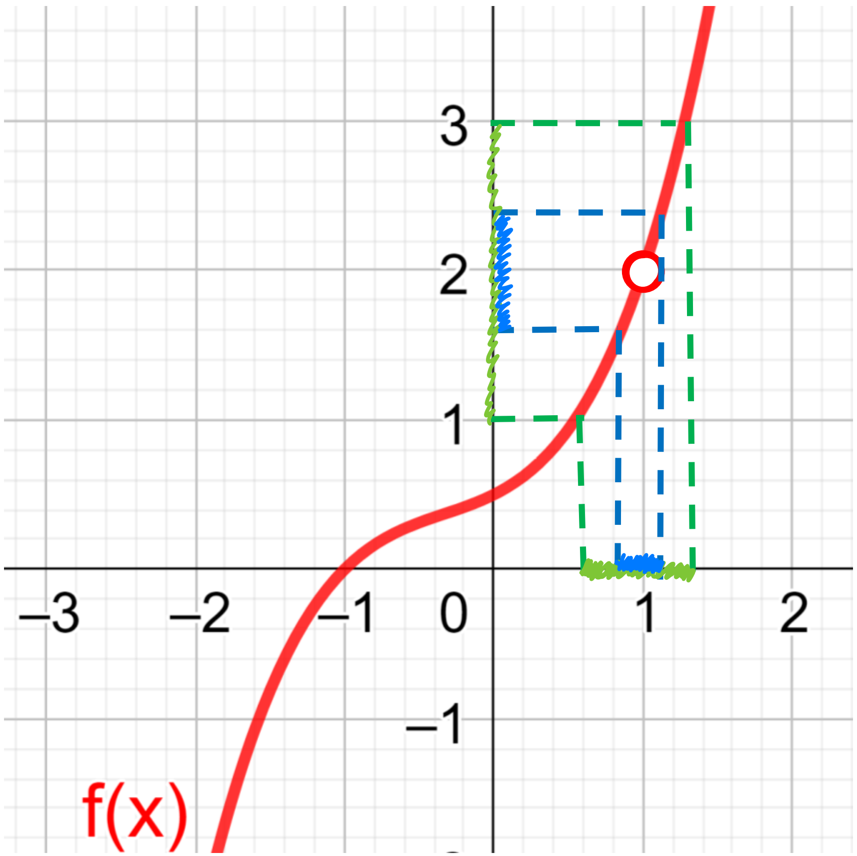
$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{2(x-1)} \qquad (\text{hvor } x \neq 1)$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$|f(x) - 2| < 1$ ✓

$|f(x) - 2| < \frac{2}{5}$

⋮



Grænseværdi – regneregler (6.5.2-5)

Lad $a \in \mathbb{R}$ og lad f, g være funktioner, der er defineret for alle x "omkring" a (men ikke nødv. i $x = a$)

Hvis $\lim_{x\to a} f(x) = A$ og $\lim_{x\to a} g(x) = B$ så gælder:

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

$\leftarrow |f(x) + g(x) - (A+B)|$

$= |f(x) - A + g(x) - B|$

$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$

"lille" "lille"

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad \text{hvis } B \neq 0$$

$$\lim_{x\to a} (f(x))^r = A^r \quad \text{når } A^r \text{ er defineret}$$

Trekantsuligheden: $|x+y| \leq |x| + |y|$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$

Simple eksempler

(NB: Oplagt at $\lim_{x \to a} c = c$ og $\lim_{x \to a} x = a$)

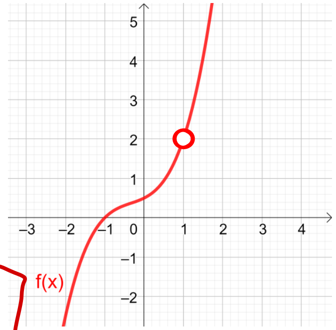
$$\lim_{x \to 2} x^2 - 3x + 5 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = \underline{3}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^{\frac{5}{3}} + 2}{x^2 + 1} = \frac{(-1)^{5/3} + 2}{(-1)^2 + 1} = \frac{-1 + 2}{1 + 1} = \underline{\frac{1}{2}}$$

Vigtigt resultat (6.5.6)

Lad $a \in \mathbb{R}$ og lad f, g være funktioner, så $f(x) = g(x)$ for alle x "omkring" a (men ikke nødv. i $x = a$).

Da gælder: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$



Brug dette til at vise: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{2(x-1)} = 2$

(Se evt example 6.5.4)

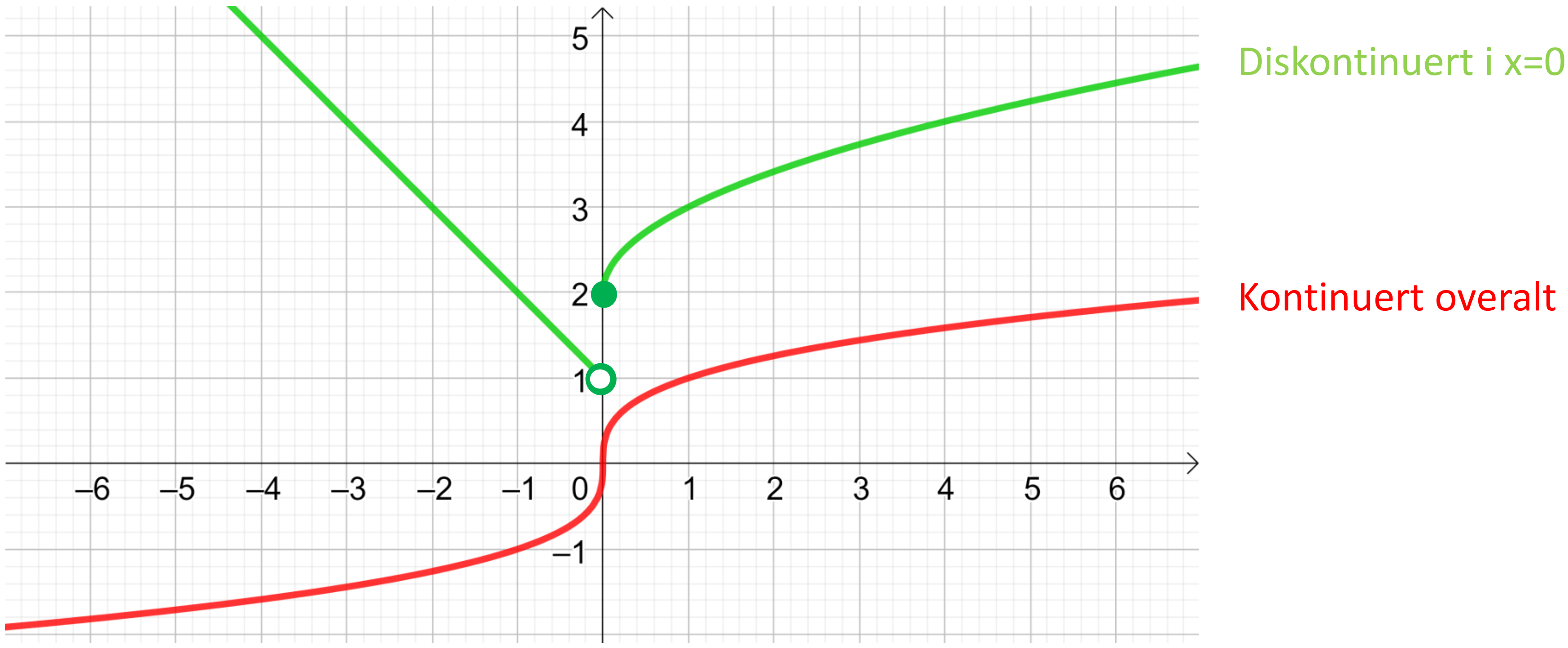
$$\left[x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1) \right]$$

For $x \neq 1$: $\dfrac{x^4-1}{2(x-1)} = \dfrac{(x^2+1)(x+1)}{2}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)(x+1)}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = \underline{2}$$

Kontinuitet (7.8)

"Små ændringer i x giver små ændringer i $f(x)$"



Funktion f er kontinuert i $x = a$ hvis:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

"Lokal" egenskab!

Bevaring af kontinuitet

Lad f, g være kontinuerte i $x = a$.
Da er følgende fkt også kont. i $x = a$ (når defineret):

$$f + g,\ f - g,\ f \cdot g \text{ og } \frac{f}{g}$$

$$h \text{ givet ved } h(x) = \big(f(x)\big)^r$$

Følger af regneregler for grænseværdi:

$f+g$:

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

$$= (f+g)(a)$$

Altså: $f+g$ er kont i $x=a$!

Sammensat og invers funktion

Lad g være kont. i a og f kont. i $g(a)$.
Da er $f \circ g$ kontinuert i a

Lad f være fkt på interval I med invers f^{-1}.
Hvis f er kontinuert på I,
så er f^{-1} kontinuert på $f(I) = \{f(x) \,|\, x \in I\}$.

Eksempler

Funktionerne $f(x) = c$ og $g(x) = x$ er kontinuerte overalt da

$$\lim_{x \to a} c = c \quad \text{og} \quad \lim_{x \to a} x = a$$

Af dette samt resultaterne om bevaring af kontinuitet følger umiddelbart at mange funktioner er kontinuerte, fx:

$$h(x) = x^2 \qquad\qquad k(x) = \sqrt{x} \overset{= x^{\frac{1}{2}}}{} \text{ (hvor } x \geq 0)$$

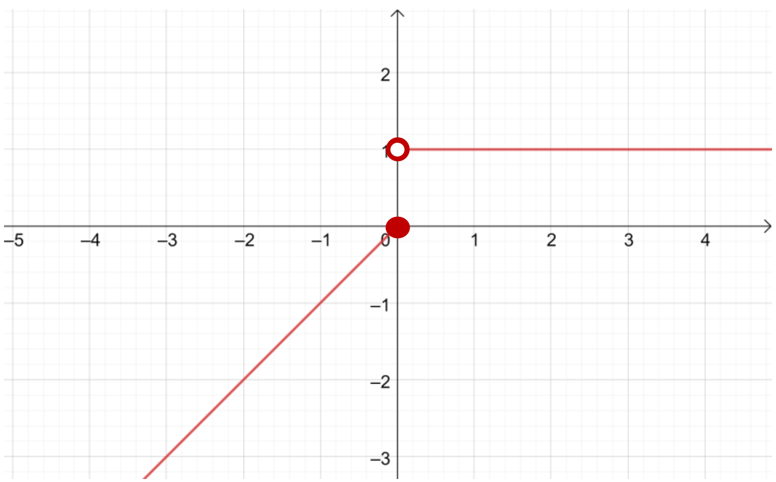
$$P(x) \quad = \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

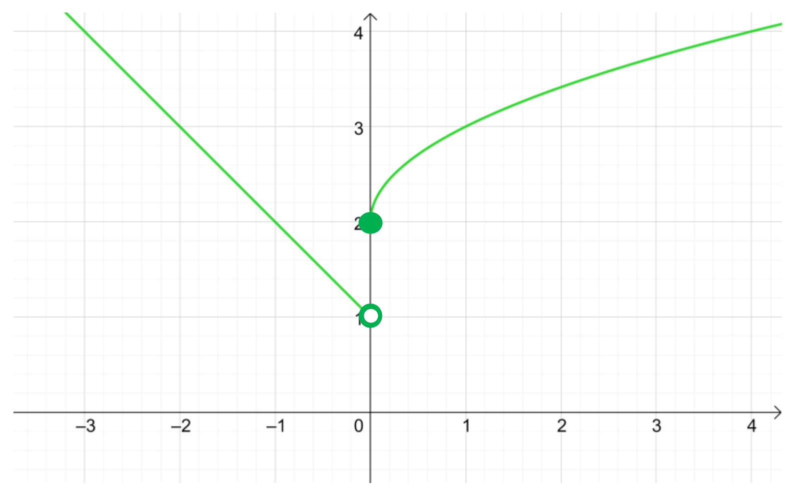
$$r(x) = \frac{x^{\frac{5}{3}} + 2}{x^2 + 1}$$

Eksempler: Diskontinuerte fkt

Standard-eksempler på diskontinuerte fkt er funktioner, der er defineret "stykkevis", fx:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x > 0 \\ x & \text{hvis } x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x + 1 & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$





Se også økonomisk eksempel om stempelafgift ved huskøb i UK (ex 7.8.2)

Grænseværdi – formel def (7.9, s.263-4)

Vi siger at

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

hvis:

For alle $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så (for alle x)

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

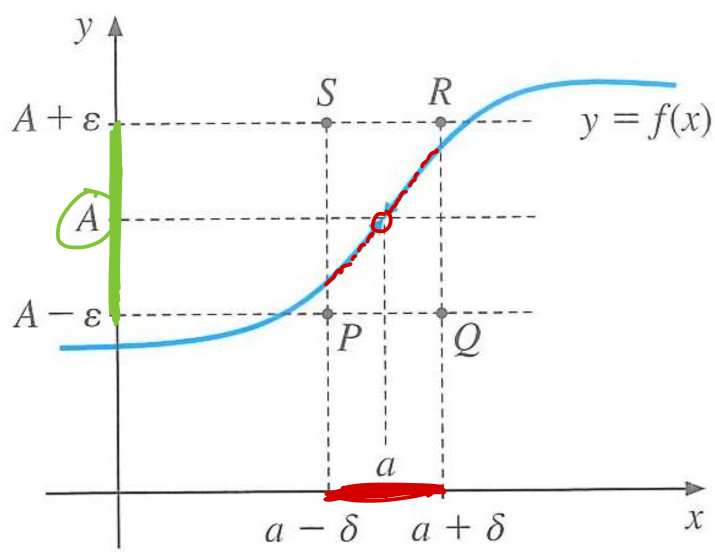
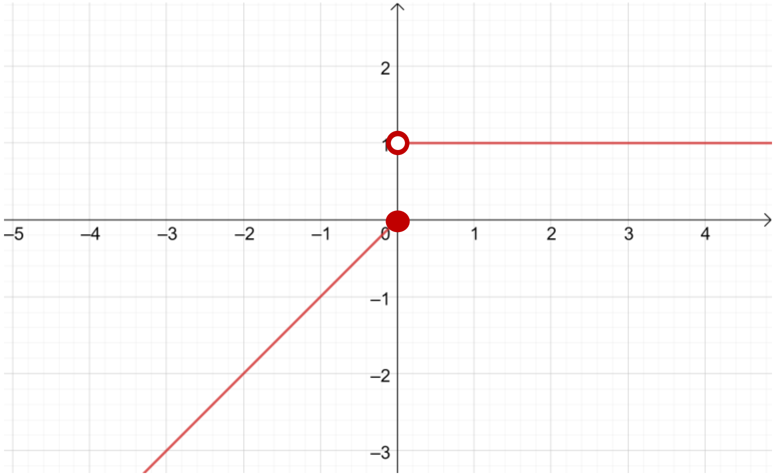


Figure 7.9.6 Definition of limit

Grænseværdi fra venstre/højre (s. 258-60)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x > 0 \\ x & \text{hvis } x \leq 0 \end{cases}$$



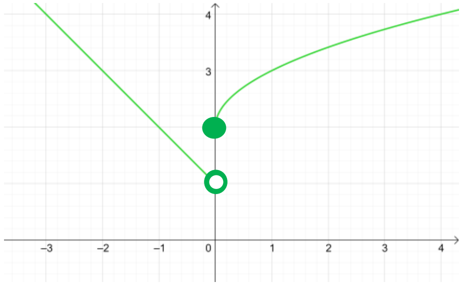
f har ikke grænseværdi for $x \to 0$

Men f har grænseværdier fra hhv venstre og højre:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0) \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$$

Da $f(0) = 0$ siges f at være *venstre-kontinuert* i $x = 0$

Tilsvarende er g højre-kontinuert i $x = 0$:



Grænseværdi for $x \to \pm\infty$ (s. 260-1)

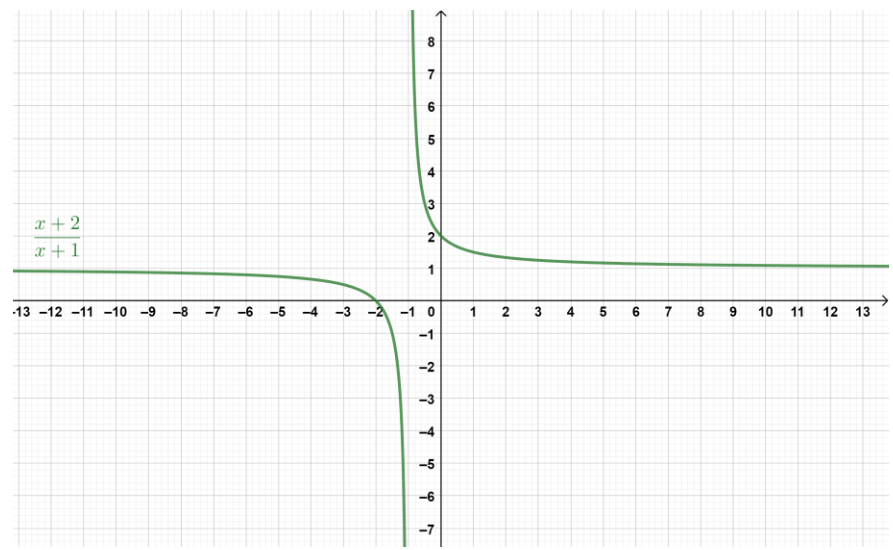
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

betyder, at vi kan gøre $|f(x) - A|$ så lille vi ønsker for alle x, der er tilstrækkeligt store.

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

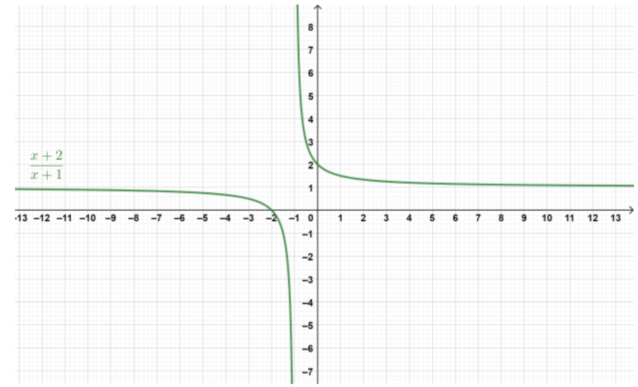
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$



$f(x) \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} \to \infty \quad \text{når} \quad x \to -1^{+}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} \to -\infty \quad \text{når} \quad x \to -1^{-}$$



Husk: ∞ og $-\infty$ er ikke grænseværdier!

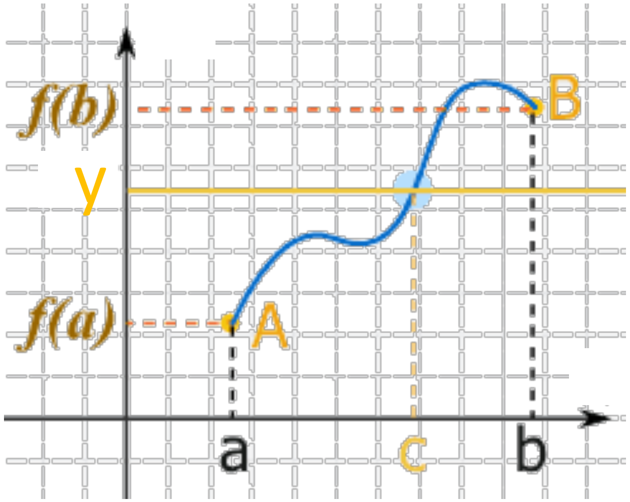
Og pas på! $\quad f(x) = x \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = x^3$

$$f(x), g(x), h(x) \to \infty \quad \text{når} \quad x \to \infty$$

Men:
$$\frac{1}{x} = \frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad \text{når} \quad x \to \infty$$
$$x = \frac{h(x)}{g(x)} \to \infty \quad \text{når} \quad x \to \infty$$

Sætn. om mellemliggende værdier (7.10)

Lad f være en kontinuert fkt på $[a, b]$.
Antag $f(a) \neq f(b)$.
Da findes for enhver værdi y i det åbne interval mellem $f(a)$ og $f(b)$ et $c \in (a, b)$, så $f(c) = y$.



Anvendelse: Ligningen

$$e^{x-1} = 2x$$

har en løsning mellem 0 og 1

$f(x) = e^{x-1} - 2x$

$f(0) = e^{-1} > 0$ $\quad f(1) = e^{0} - 2 = -1 < 0$

Vælg $y = 0$.

Sætn: Der findes $c \in (0, 1)$ så $f(c) = \underline{e^{c-1} - 2c} = 0$

c er løsn. til lign.: $\underline{e^{c-1} = 2c}$

Øvelse

Bestem grænseværdien (x er et fast tal):

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

For $h \neq 0$:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} \underline{2x}$$

Overvej:

Hvad bruger I fra dagens stof?

Minder grænseværdien jer om noget, I kender fra tidligere?

Differentialkvotienten $f'(x)$ for $f(x) = x^2$!

Ekstra øvelse
(kun hvis tid!)

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+a) & \text{hvis } x > 0 \\ x + 2e^x & \text{hvis } x \leq 0 \end{cases}$$

Bestem tallet $a > 0$, så f er kontinuert for alle $x \in \mathbb{R}$

For alle $a > 0$ er f kont i alle $x \neq 0$ og højrekontinuert i $x = 0$.

Vi skal således bare bestemme a, så f også er venstrekont i $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0), \quad \text{dvs} \quad \ln(a) = 0 + 2e^0 = 2$$

Heraf fås: $a = e^2$