



Time Value of Money

Jakup Frisgaard Reynheim
Økonomisk Institut

KØBENHAVNS UNIVERSITET



Introduktion

- Kapitel 5 i lærebogen: "The Time Value of Money"
- Investeringer involverer typisk betalinger der falder på forskellige tidspunkter
- Betalinger på forskellige tidspunkter kan ikke umiddelbart sammenlignes på grund af alternativomkostningen ("*time value of money*")
- Den basale nutidsværdiligning fortæller hvordan en betaling i fremtiden kan konverteres til en ækvivalent betaling i nutiden
- Simple eksempler på anvendelser:
 - Hvor mange penge har man om 5 år hvis man lægger 100 kr. til side idag (fremtidsværdi)?
 - Hvor meget skal man lægge til side idag for at have 150 kr. om 5 år (nutidsværdi)?
 - Hvad skal afkastet være for at 100 kr. bliver til 150 kr. på 5 år?
 - Hvor mange år tager det før 100 kr. er blevet til 150 kr.?

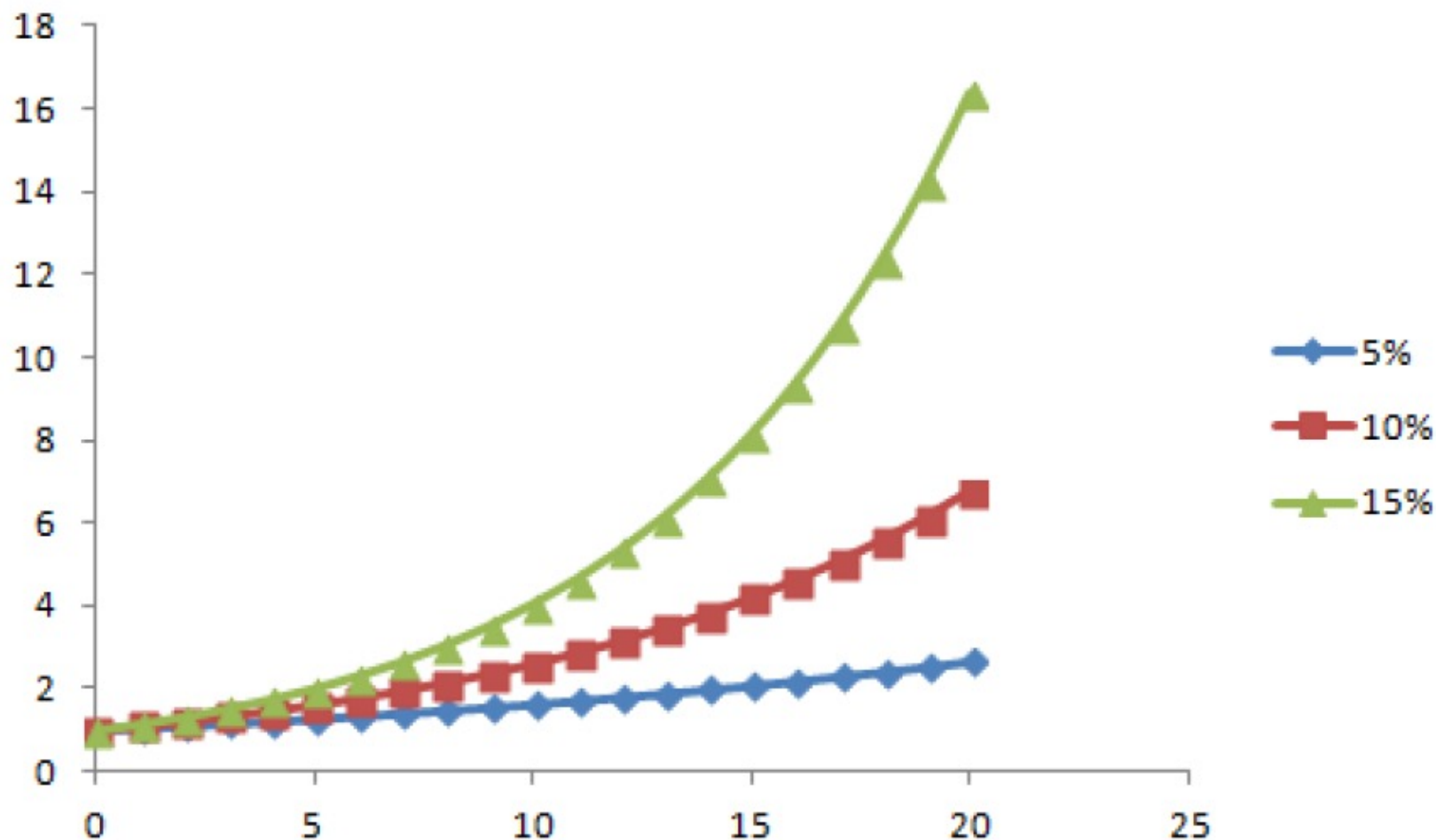
Fremtidsværdi ("*future value*")

- **En krone nu - hvor meget er den værd om t år?**
- Fx. 100 kroner sættes i banken idag til renten 10%
 - Efter 1 år er beløbet blevet til $100 \cdot 1,10 = 110$ kroner
→ 110 kr. er fremtidsværdi af 100 kroner efter 1 år ved 10%
 - Efter 2 år er beløbet blevet til $110 \cdot 1,10 = 121$ kroner
→ 121 kr. er fremtidsværdi af 100 kroner efter 2 år ved 10%
 - Efter 3 år er beløbet blevet til $121 \cdot 1,10 = 133,1$ kroner
→ 133,1 kr. er fremtidsværdi af 100 kroner efter 3 år ved 10%
- Fremtidsværdi af X kroner nu ved rente r efter t perioder:

$$FV = X \cdot (1 + r)^t$$

hvor $(1 + r)^t$ kaldes for fremtidsværdifaktor

Fremtidsværdi - eksempel



Summespørgsmål (2 min.)

- I 1974 arvede Donald Trump ca. 40 mio. \$
- Hvor mange penge ville Donald Trump have i 2016 hvis han havde investeret sin arv til markedsafkastet?
- **Hint:** Du kan antage at markedsafkastet var omtrent 10%



//

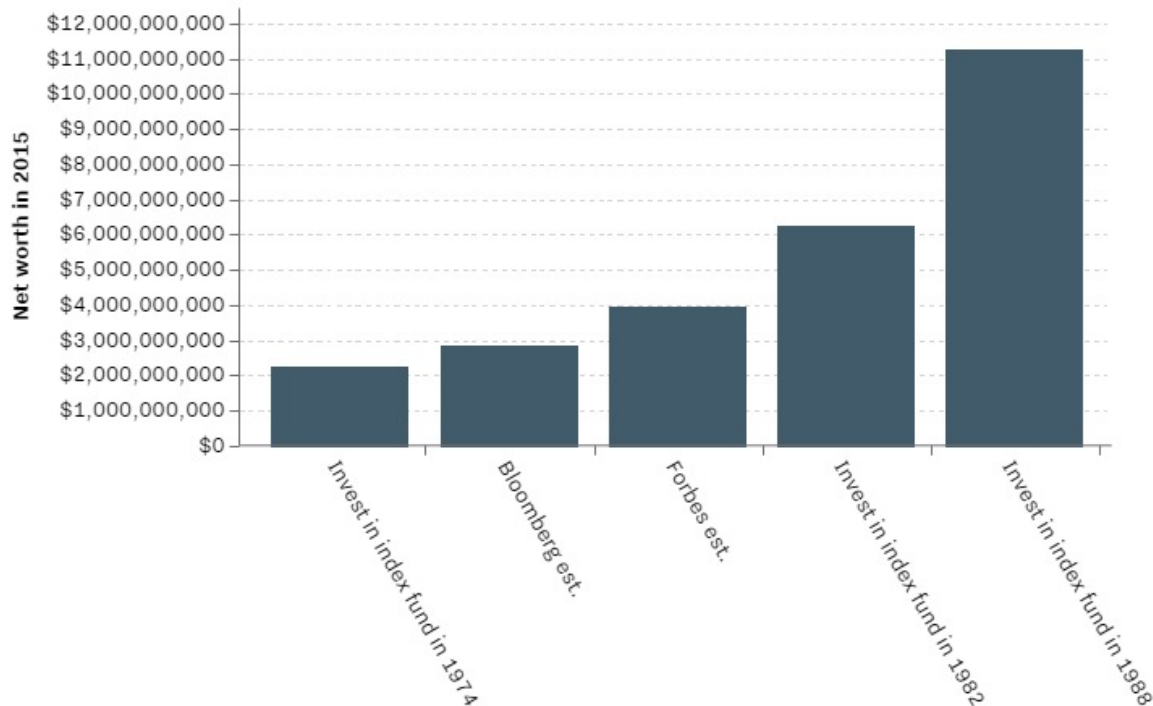
An analysis suggests that Trump would've been a billionaire even if he'd never had a career in real estate, and had instead thrown his father's inheritance into an index fund that tracked the market. His wealth, in other words, isn't because of his brains. It's because he's a Trump.

[Vox.com](https://www.vox.com)

Svar

- $Fremtidsværdi = 0,04 \text{ mia. \$} \cdot (1 + 0,10)^{2016-1974} = 2,2 \text{ mia. \$}$

How rich Donald Trump would've been if he'd just put his money in the S&P 500



- [Kilde: vox.com](https://www.vox.com)
- Senere i faget skal vi have om efficiente markeder...

Nutidsværdi ("*present value*")

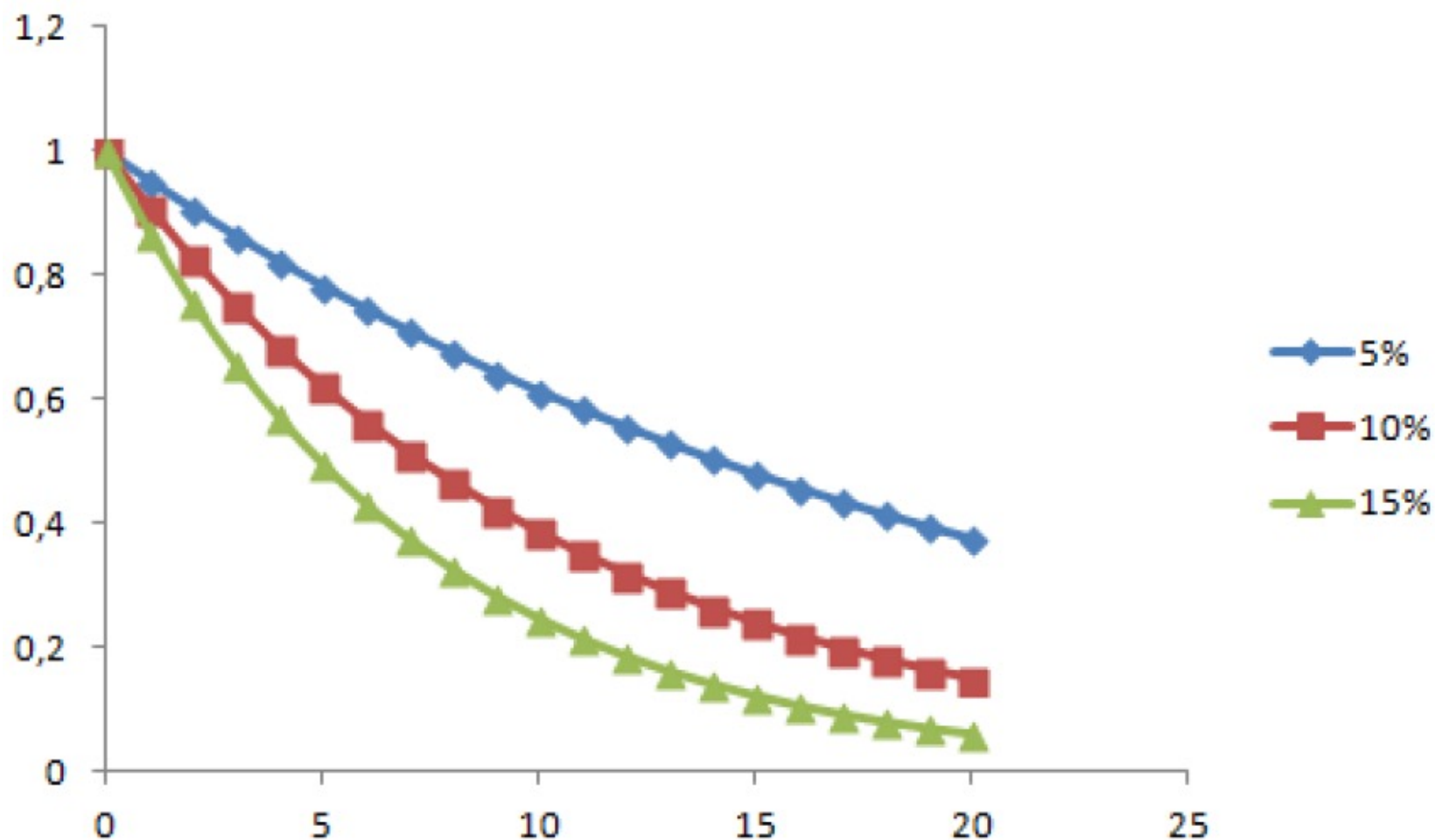
- En krone om t år - hvor meget er den værd nu?
- Hvor meget skal man sætte i banken nu for at have 100 kroner om et år ved rente på 10%?
 - $X \text{ kr. bliver til } X \cdot 1,10 \text{ kr. på et år}$
 - $X \cdot 1,10 = 100 \text{ så } X = 100 / 1,10 = 90,91$
 - 90,91 kr. er nutidsværdien af 100 kr. om et år ved en rente på 10%
- Hvor meget skal man sætte i banken nu for at have 100 kroner om to år ved rente på 10%?
 - $Y \text{ kr. bliver til } Y \cdot 1,10^2 \text{ kr. på to år}$
 - $Y \cdot 1,10^2 = 100 \text{ så } Y = 100 / 1,10^2 = 82,64$
 - 82,64 kr. er nutidsværdien af 100 kr. om to år ved 10%

- Nutidsværdi af X kroner om t perioder ved rente r er

$$PV = X \cdot \frac{1}{(1 + r)^t}$$

hvor $1/(1 + r)^t$ kaldes diskonteringsfaktoren ("*discount factor*")

Nutidsværdi - eksempel



Summespørgsmål (2 min.)

- Hvor meget skulle din oldefar have sat i banken i marts 1921 for at han idag kunne give dig 1 mio. kr.?
- Antag en konstant årlig rente på 5%



Svar

- $PV_{1918} = \frac{1.000.000}{(1+0,05)^{100}} = 7.604 \text{ kr.}$

Nutidsværdiligning

- Den **basale nutidsværdiligning** siger da

$$FV_t = PV \cdot (1 + r)^t$$

- En given betaling kan altid konverteres mellem nutidsværdi (PV) og fremtidsværdi (FV) på forskellige tidspunkter t
- Ligning med 4 variable: PV, FV , t og r → kendes 3 variable kan den 4. variabel bestemmes

Find diskonteringsrenten

- **Eksempel:** Hvor meget skal en formue på 1 mio. kr. forrentes årligt for at vokse til 1,5 mio. kr. på 8 år?
- Indsæt i formlen

$$\begin{aligned}1,5 &= 1 \cdot (1 + r)^8 \\(1 + r) &= 1,5^{1/8} = 1,052 \\r &= 5,2\%\end{aligned}$$

Summespørgsmål (2 min.)

- Hvor mange år tager det dig at blive millionær hvis din børneopsparing på 50.000 investeres til 4% i rente?



Svar

$$1.000.000 = 50.000 \cdot 1,04^t$$

$$1,04^t = 20$$

$$t = 76,4 \text{ år}$$

Løs med Goal Seek i Excel eller log-transformation

Find antal perioder

- Ex: Hvor lang tid skal en formue på 1 mio. kr. stå i banken for at fordobles ved en rente på 3%?

- Indsæt i formlen

$$2 = 1 \cdot (1 + 0,03)^t$$
$$t \approx 23$$

- Hint: den sidste ligning kan løses med excel Goal Seek eller med log-transformation

Opsamling

- Betalinger på forskellige tidspunkter kan ikke umiddelbart sammenlignes, men hænger sammen via den **basale nutidsværdiligning**

$$FV_t = PV \cdot (1 + r)^t \Leftrightarrow PV = \frac{FV_t}{(1 + r)^t}$$

- Beregn:
 - **Fremtidsværdi**: hvor mange penge har man om 5 år hvis man lægger 100 kr. til side idag ved en 10% rente?
 - **Nutidsværdi**: hvor meget skal man lægge til side idag for at have 150 kr. om 5 år ved en 10% rente?
 - **Krævet afkast**: hvad skal afkastet være for at 100 kr. bliver til 150 kr. på 5 år?
 - **Antal perioder**: hvor mange år tager det før 100 kr. er blevet til 150 kr. ved en 10% rente?