Matematik A E2020
Uge 48, Forelæsning 1

Afsnit 13.5-6

Funktioner af flere variable:

Ekstremværdisætningen, topologiske begreber, generalisering til n variable, strengt voksende transformationer

Lidt overblik

- Ekstremumsbestemmelse for fkt af 2 variable på "kompakte" mængder (13.5)
    - Ekstremværdisætningen: Eksistens af max- og min-pkt
    - Metode til at finde dem (vigtig metode!)
    - Kort intro af nogle topologiske begreber i planen ($\mathbb{R}^2$)

- Lidt om generalisering til n variable og et resultat om "strengt voksende transformationer" (13.6)

- Næste gang: Evt hængepartier og eksempler på optimeringsproblemer (i en økonomisk model)
    - NB: For en gangs skyld er der ikke nyt læsestof

Ekstremværdisætn., 2 var (13.5)

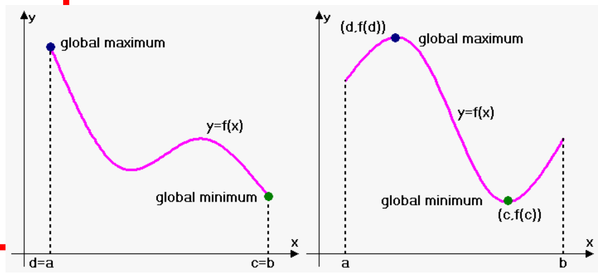
For funktioner af én variabel (uge 40, forelæsning 1):

Ekstremværdisætningen, 1 var (Thm 8.4.1, s. 294):
En kontinuert funktion f på et afsluttet og begrænset interval $[a, b]$ har et maksimumspunkt og et minimumspunkt.
Der findes altså $c, d \in [a, b]$ så:

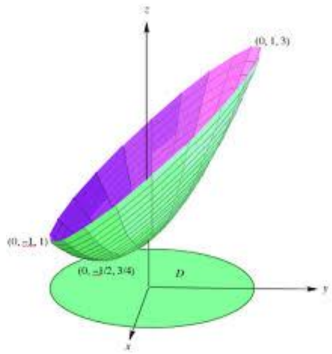
$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \quad \text{for alle } x \in [a, b].$$

For en differentiabel fkt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kan vi finde alle ekstremumspunkter ved at "lede" blandt:

1) alle kritiske punkter for f i (a, b)
2) endepunkterne a og b



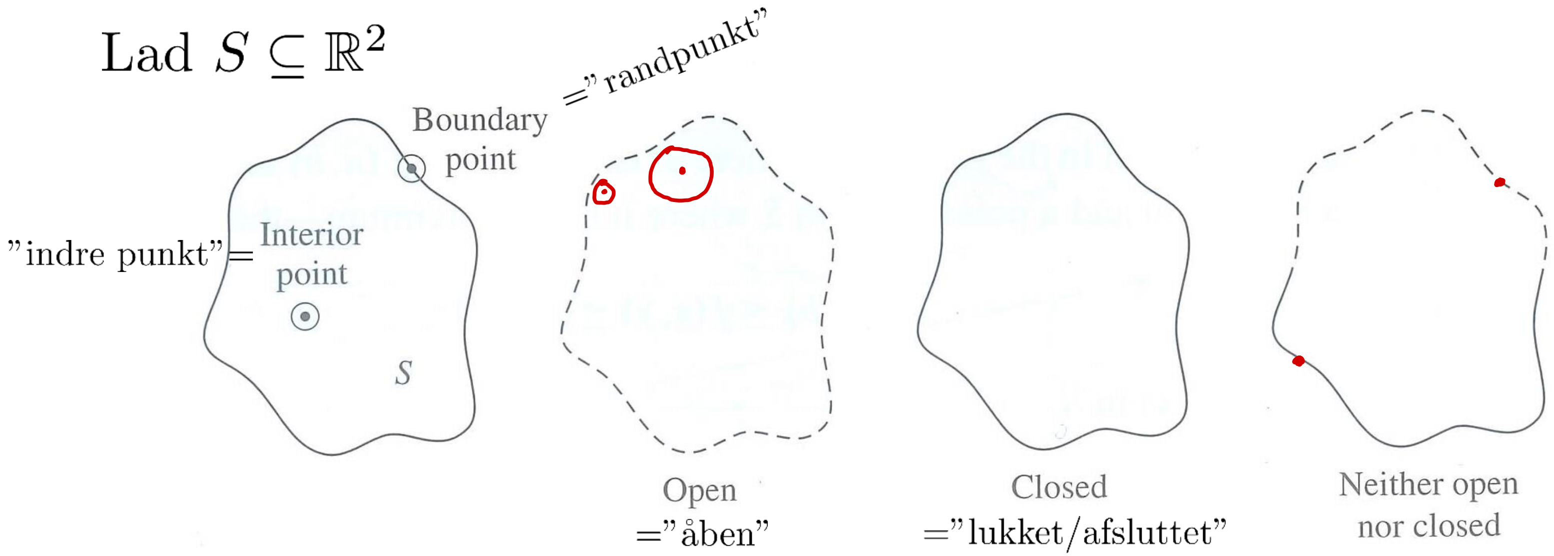
Nu: 2 variable!



Men det kræver nogle nye begreber…

Nogle topologiske begreber i $\mathbb{R}^2$

Lad $S \subseteq \mathbb{R}^2$



S er *åben*, hvis alle punkter i S er indre punkter

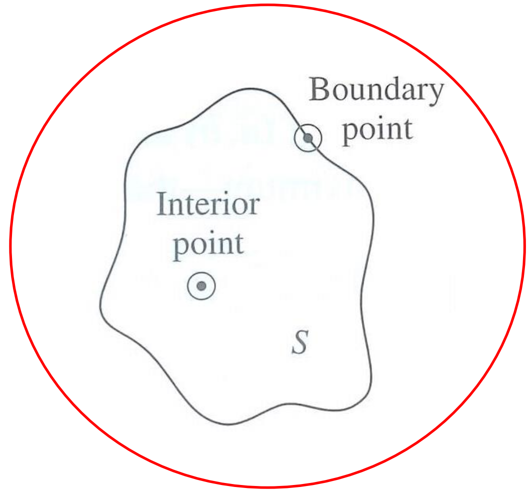
S er *lukket/afsluttet*, hvis den indeholder alle sine randpunkter

Bemærk:

En mængde er ikke nødvendigvis enten åben eller afsluttet

$S = \mathbb{R}^2$ er både åben og afsluttet

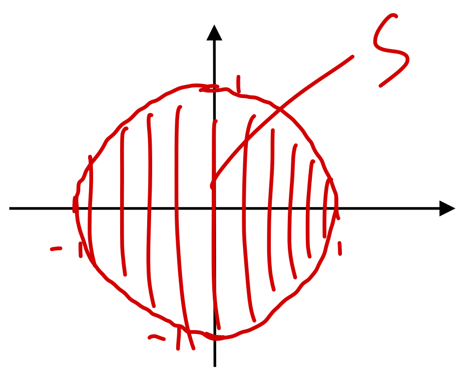
S er *begrænset* (*bounded*), hvis den er indeholdt i tilstr. stor cirkel:



S er *kompakt*, hvis den er både afsluttet og begrænset

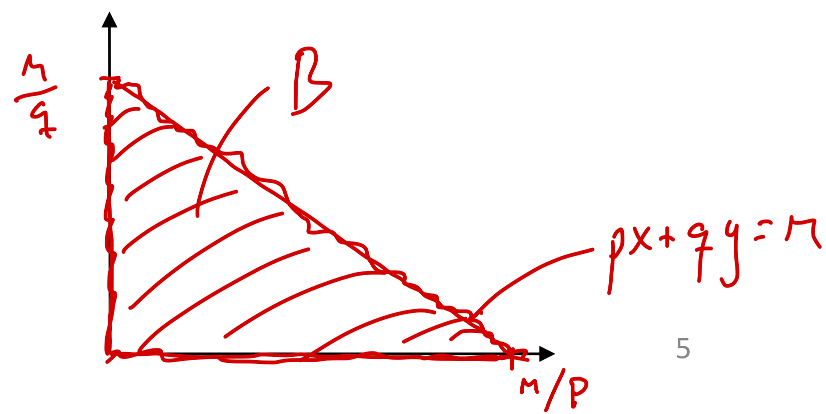
Eksempler på kompakte mængder:

$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$



Budgetmængde (lad $p, q, m > 0$)

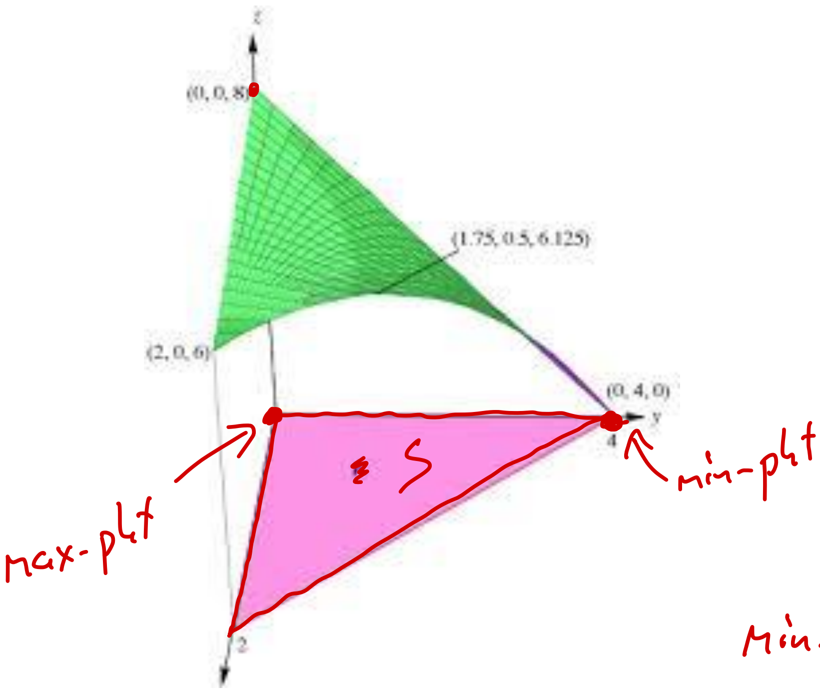
$B = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ px + qy \leq m\}$

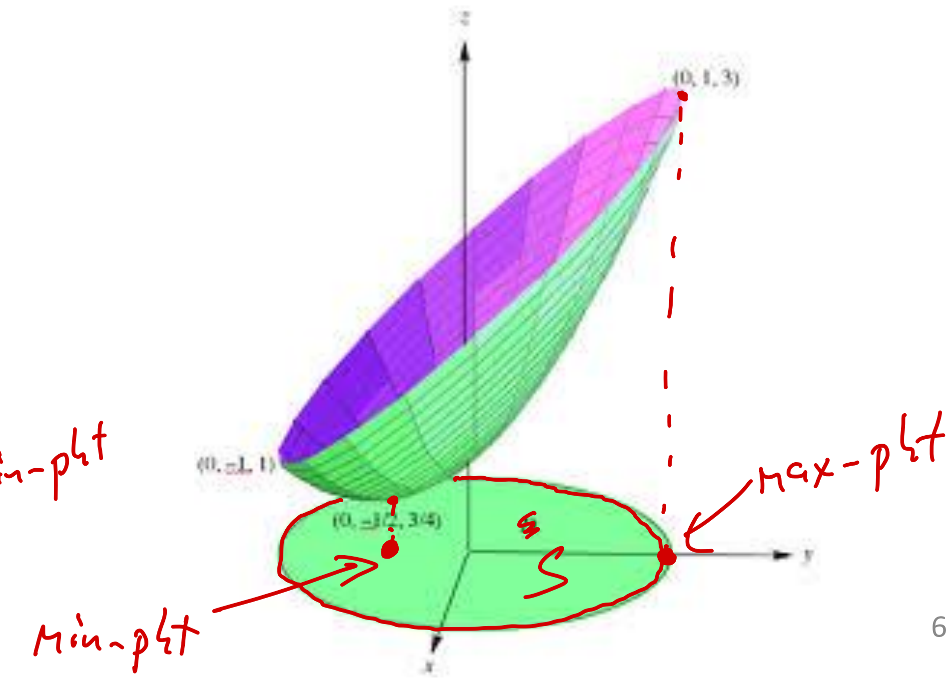


Ekstremværdisætningen, 2 var (Thm 13.5.1, s. 518):

Lad $f(x,y)$ være en *kontinuert* funktion defineret på en (ikke-tom) *kompakt* mængde S.
Da har f både et (globalt) maksimumspunkt og et (globalt) minimumspunkt i S.
Dvs. at der findes punkter (a,b) og (c,d) i S så:

$$f(a,b) \le f(x,y) \le f(c,d) \quad \text{for alle } (x,y) \in S.$$





Metode: Find max- og min-pkt for $f(x,y)$ på kompakt S

Overordnet:

1) Find mulige ekstremumspunkter i det indre af S

2) Find mulige ekstremumspunkter på randen af S

3) Sammenlign funktionsværdierne i alle de mulige ekstremumspunkter

Mere detaljeret:

1) Find kritiske punkter i det indre af S (nødv. FOC!)

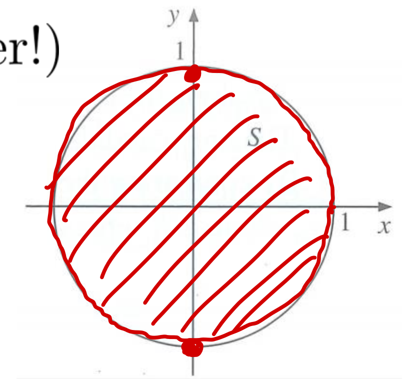
2) Find max-pkt og min-pkt for f på randen af S ved (løst sagt) at udtrykke f på randen som en funktion af én variabel.

NB: Ofte må man opdele randen i flere ”stykker” og finde max-/min-pkt for f på hvert enkelt stykke

3) Sammenlign funktionsværdierne i de mulige max-/min-pkt

Man bliver kun fortrolig med metoden ved at anvende den!

Example 13.5.1 (behandles kun overordnet, læs selv detaljer!)



$$f(x,y) = x^2 + y^2 + y - 1 \qquad S = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Find (globale) maks- og min-punkter for f på S
og de tilhørende max- og min-værdier

1) Find krit. pkt i det indre af S

$f_1'(x,y) = 0$ og $f_2'(x,y) = 0$

Et kritisk pkt: $(0, -\frac{1}{2})$, $f(0,-\frac{1}{2}) = 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$

2) Undersøg randen: $x^2 + y^2 = 1$

f på randen: $g(y) = 1 + y - 1 = y$, $-1 \leq y \leq 1$

min-pkt på randen: $y = -1$, dvs: $(0,-1)$, $f(0,-1) = -1$

max-pkt på randen: $y = 1$, dvs: $(0,1)$, $f(0,1) = 1$

3) Sammenlign. mulige ekstr. pkt.

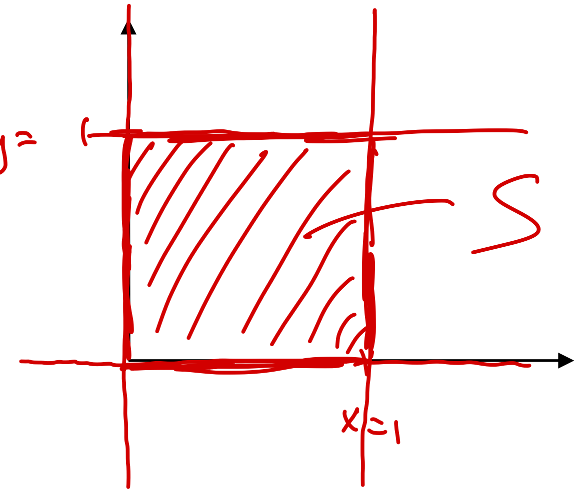
Min-pkt på S: $(0,-\frac{1}{2})$, min-værdi: $f(0,-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$

Max-pkt på S: $(0,1)$, max-værdi: $f(0,1) = 1$

Eksempel/opgave (en del af opg 2 fra eksamen august 2017)

$$\boxed{f(x,y) = x^3 + x^2 - y + y^2 + xy \qquad S = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}}$$

Find (globale) maks- og min-punkter for f på S
og de tilhørende max- og min-værdier



1) Find eventuelle kritiske punkter i det indre af S
(pingo.coactum.de, 185415)

2) Undersøg randen af S for mulige max-/min-pkt

3) Sammenlign funktionsværdier i alle de mulige max-/min-pkt

Konklusion (se de næste slides for udregninger):

Max-pkt: $(1,1)$ med max-værdi $f(1,1) = 3$

Min-pkt: $(0,\frac{1}{2})$ med min-værdi $f(0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

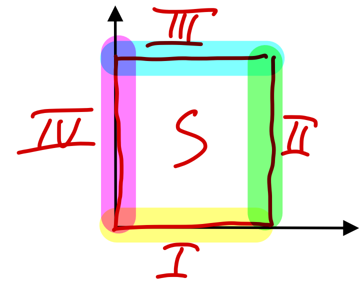
[Til de hurtige: Begynd evt på exercise 13.5.1 eller 13.5.2(a)]

$$f(x,y) = x^3 + x^2 - y + y^2 + xy \qquad S = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

1) Kritiske pkt:

$$3x^2 + 2x + y = 0 \quad \text{og} \quad -1 + 2y + x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{2}(1-x)$$



$$3x^2 + 2x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x = 3x^2 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2} = 0$$

$$D = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} < 0$$

Ingen løsn!

Ingen kritiske pkt!

2) Undersøg randen!

I: $0 \le x \le 1$, $y = 0$

$f(x,0) = x^3 + x^2$ voksende for $0 \le x \le 1$ $(0,0)$, $f(0,0) = 0$; $(1,0)$, $f(1,0) = 2$

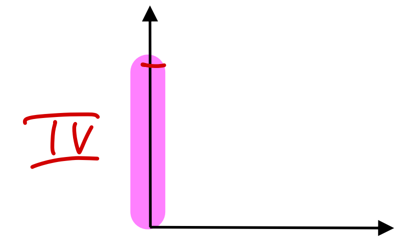
II: $x = 1$, $0 \le y \le 1$

$f(1,y) = 2 - y + y^2 + y = 2 + y^2$ voks. for $0 \le y \le 1$ $(1,0)$, $f(1,0) = 2$; $(1,1)$, $f(1,1) = 3$

III: $0 \le x \le 1$, $y = 1$

$f(x,1) = x^3 + x^2 + x$ voks. for $0 \le x \le 1$ $(0,1)$, $f(0,1) = 0$; $(1,1)$, $f(1,1) = 3$

$$f(x,y) = x^3 + x^2 - y + y^2 + xy \qquad S = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}$$



$\underline{IV}$: $x=0$, $0 \le y \le 1$

$f(0,y) = -y + y^2$

$\frac{d}{dy}(-y+y^2) = -1 + 2y = 0 \iff \underline{y = \frac{1}{2}}$ →

$(0,0)$, $f(0,0) = 0$

$(0,1)$, $f(0,1) = 0$

$(0,\frac{1}{2})$, $f(0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

3) Sammenlign funktionsværdier...

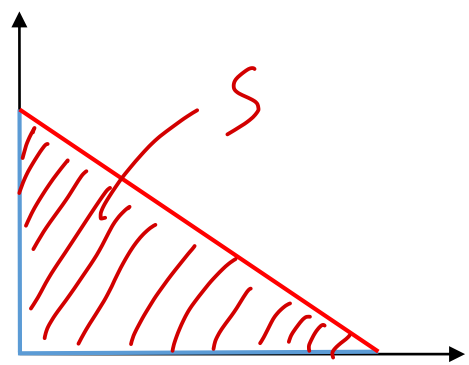
Min-pkt for f på S: $(0,\frac{1}{2})$, min-værdi $-\frac{1}{4}$

Max-pkt for f på S: $(1,1)$, max-værdi 3

Nyttemaksimeringsproblem, 2 varer:

$$\max_{x,y \geq 0} \; u(x,y) \quad \text{under bibetingelsen} \quad px + qy \leq m$$

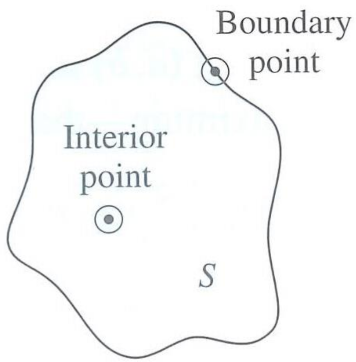
Vi skal altså finde max-pkt for $u(x,y)$
på budgetmængden $S = \{(x,y) \,|\, x \geq 0,\; y \geq 0,\; px + qy \leq m\}$

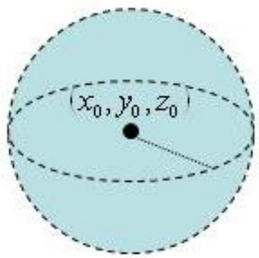


Lidt om udvidelse til n var (13.6)

De topologiske begreber fra tidligere kan alle generaliseres til $\mathbb{R}^n$

"Åben cirkelskive" i def. af indre pkt skal erstattes af "åben kugle":





[Åben kugle: $B_r(a_1,\ldots,a_n) = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2} < r\}$]

Indre pkt i mgd $S \subseteq \mathbb{R}^n$: Der findes åben kugle omkr. punktet, som er indeholdt i S.

Åben mgd $S \subseteq R^n$: Alle pkt i S er indre punkter (som i $\mathbb{R}^2$!)

Etc...

[For spec. interesserede: Se "FMEA" (Mat B) kap 13]

"Nødv. FOCS" og ekstremværdisætningen gælder også for n var.!

Theorem 13.6.1 (s. 522): Nødvendige førsteordensbetingelser
Lad $f(x_1, \ldots, x_n)$ være en funktion defineret på $S \subseteq \mathbb{R}^n$
Hvis $(c_1, \ldots, c_n)$ er et indre lokalt ekstremumspunkt
(max- eller min-punkt), så er $(c_1, \ldots, c_n)$ et kritisk punkt, dvs.

$$f'_i(c_1, \ldots, c_n) = 0 \quad \text{for alle } i = 1, \ldots, n$$

Ekstremværdisætningen, n var (Thm 13.6.2, s. 523):
Lad $f(x_1, \ldots, x_n)$ være en *kontinuert* funktion defineret på en (ikke-tom) *kompakt* mængde $S \subseteq \mathbb{R}^n$.
Da har f både et (globalt) maksimumspunkt og et (globalt) minimumspunkt i S.

”Strengt voksende transformationer”

Følgende problemer har samme løsning(er):

$$\max\ e^{x^2+2xy^2-y^3} \text{ for } (x,y) \in S$$

$$\max\ x^2+2xy^2-y^3 \text{ for } (x,y) \in S$$

Generelt (Thm 13.6.3, s. 523):

Lad $f(x_1,\ldots,x_n)$ være funktion på $S \subseteq \mathbb{R}^n$
Lad $F(x)$ være en strengt voksende funktion af én variabel
Betragt den sammensatte fkt $g(x_1,\ldots,x_n) = F(f(x_1,\ldots,x_n))$ på S og lad $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n) \in S$
Da gælder:

$$\mathbf{c} \text{ er max-pkt for } f \text{ på } S \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} \text{ er max-pkt for } g \text{ på } S$$

og

$$\mathbf{c} \text{ er min-pkt for } f \text{ på } S \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} \text{ er min-pkt for } g \text{ på } S$$

Eksempel fra økonomi: Transformation af nyttefunktion

Følgende problemer (hvor $a \in (0,1)$) har samme løsning:

$$\boxed{\max_{x,y \geq 0} x^a y^{1-a} \quad \text{under bibetingelsen} \quad px + qy \leq m}$$

$$\boxed{\max_{x,y > 0} \; a\ln(x) + (1-a)\ln(y) \quad \text{under bibet.} \quad px + qy \leq m}$$

$$\ln(x^a y^{1-a}) = a\ln(x) + (1-a)\ln(y)$$