Matematik A E2020
Uge 41, Forelæsning 1

Afsnit 5.4-5.5, 7.1-7.2, 7.12

Implicit differentiation, L'Hôpitals regel

Overblik

- I dag
  - Nyttemaks-problemet fra sidst
  - Implicit differentiation (7.1-2 og lidt baggrund i 5.4-5)
  - L'Hôpitals regel (7.12)

- Onsdag
  - Taylor-approksimation og elasticiteter (7.4-7.7)
    (sidste gang med differentialregning for fkt af én variabel)

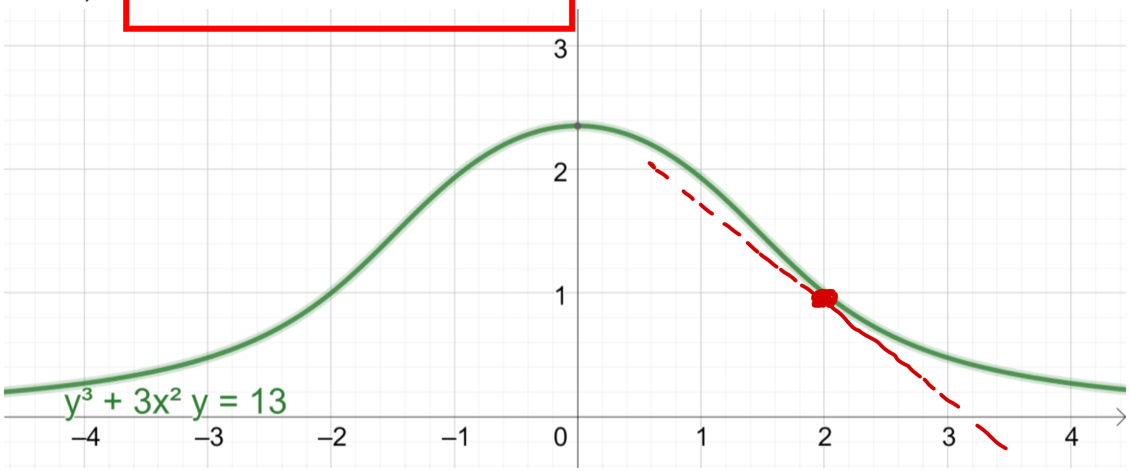
- Uge 43
  - Følger, (uendelige) rækker og rentesregning (7.11, kap 10)

- Uge 44-: Integralregning, derefter fkt af flere variable

Implicit differentiation (7.1-2)

Betragt ligningen (ex 7.1.2): $\boxed{y^3 + 3x^2y = 13}$

Plot af løsninger (x, y):



Funktion $y = f(x)$!

("implicit given funktion")

Hvordan kan vi finde tangenthældningen (y') i punktet $(2, 1)$?

"Implicit differentation":

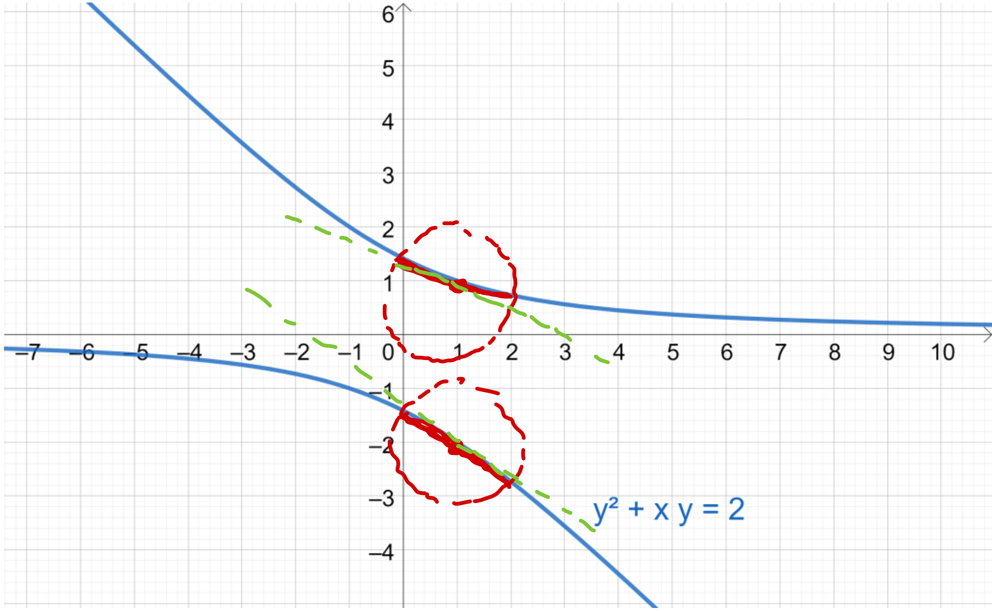
$$y'(3y^2) + 6x \cdot y + 3x^2 y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(3y^2 + 3x^2) + 6xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y' = \frac{-6xy}{3y^2+3x^2} = \frac{-2xy}{x^2+y^2}}$$

I $(2,1)$: $\quad y' = \frac{-2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2 + 1^2} = -\frac{4}{5}$

Ny ligning: $\boxed{y^2 + xy = 2}$

Plot af løsninger (x, y):



Omkring ("i omegn af") løsningspunkt (x_0, y_0) definerer ligningen funktion y af x

Fx. $(x_0, y_0) = (1, 1)$

pingo.coactum.de (185415)

Brug implicit differentiation til at bestemme tangenthældningen i punkterne $(1, 1)$ og $(1, -2)$

$$y' \cdot 2y + 1 \cdot y + x \cdot y' = 0 \iff y' = \frac{-y}{x + 2y}$$

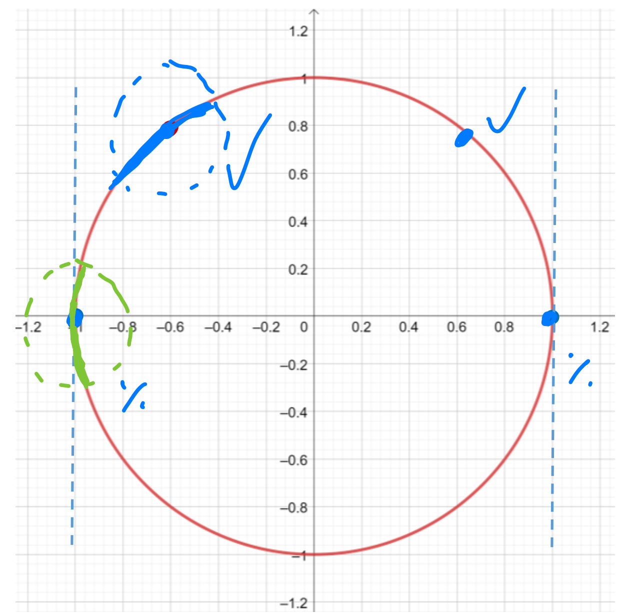
I $(1,1)$: $y' = \dfrac{-1}{1 + 2\cdot 1} = -\dfrac{1}{3}$

I $(1,-2)$: $y' = \dfrac{-(-2)}{1 - 4} = -\dfrac{2}{3}$

”Kan noget gå galt?”

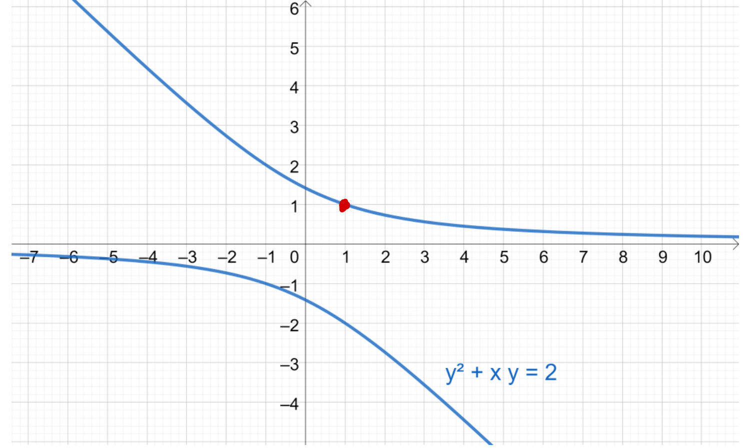
Intuition vha enhedscirklen:

Ligning: $x^2 + y^2 = 1$



+ udtrykket der afhænger af x og y skal være ”tilpas pænt”

$$\boxed{y^2 + xy = 2}$$



Bestem y'' i punktet $(1, 1)$

Fra tidligere har vi:

$$y'(x+2y) + y = 0$$

Diff. implicit en gang til:

$$y''(x+2y) + y'(1+2y') + y' = 0$$

$\iff$

$$y'' = \frac{-2y'(1+y')}{x+2y}$$

I $(1,1)$:

$\left(y' = -\frac{1}{3}\right)$

$$y'' = \frac{-2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}{1+2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{3} = \frac{4}{27}$$

L'Hôpitals regel (7.12)

Betragt grænseværdierne:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) \to 0}{x-1 \to 0} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-2x-1 \to 0}{x \to 0}$$

Begge er af typen "0/0", så hvad gør vi?

L'Hôpitals regel (s. 273):

Lad f, g være differentiable fkt på interval omkring a med $f(a) = g(a) = 0$, $g(x) \neq 0$ for $x \neq a$ og $g'(a) \neq 0$. Så gælder:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Check: Kan vi bruge dette resultat på grænseværdierne ovenfor?

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

L'Hôpital

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(1) = 1$

$g'(x) = 1$, $g'(1) = 1$

Prøv selv med $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 2x - 1}{x} = \frac{-2}{1} = -2$ (pingo.coactum.de, 185415)

$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2$ $f'(0) = -2$

$g'(x) = 1$ $g'(0) = 1$

L'Hôpitals regel (s. 273):

Lad f, g være differentiable fkt på interval omkring a med $f(a) = g(a) = 0$, $g(x) \neq 0$ for $x \neq a$ og $g'(a) \neq 0$. Så gælder:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

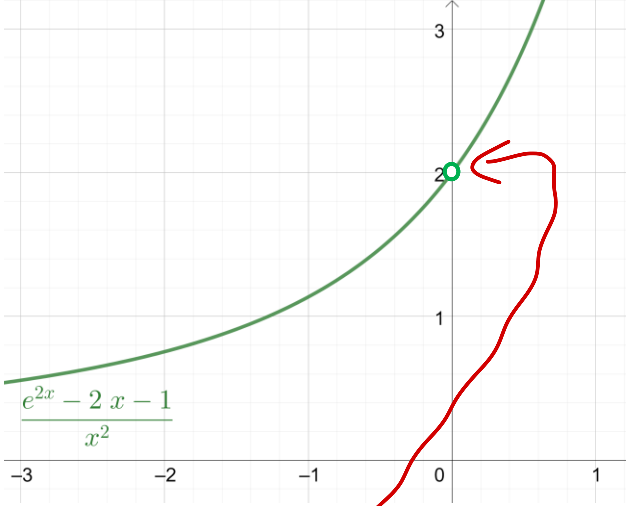
Bevis:

For $x \neq a$: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \xrightarrow{x \to a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$

$\square$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x^2}$$ $\to 0$, $\to 0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2e^{2x} - 2}{2x}$$ $\longleftarrow$ Stadig "0/0" for $x \to 0$



Lad os prøve med $\frac{f''(x)}{g''(x)}$:

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{4e^{2x}}{2}$$

$$\frac{f''(0)}{g''(0)} = \frac{4}{2} = 2$$

Ser ud til at passe...

L'Hôpitals regel, stærkere version (Thm 7.12.1):
Lad f, g være differentiable fkt på interval omkring a, pånær muligvis i a.
Antag $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ og at $g(x) \neq 0$ for $x \neq a$.
Hvis $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (evt ∞ eller $-\infty$), så gælder:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Anvendelse (jvf eksempel på forrige slide)

Hvis $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ og $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ begge er "0/0", men $\lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = L$,
så giver to anvendelser af sætningen:

1) $$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

2) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

[NB: I nogle tilfælde skal man diff flere gange, før man får en grænseværdi]

Øvelse (kun hvis tid!)

$$\text{Bestem} \quad \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)e^x - 1}{x^3} \quad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x \longrightarrow 2$ for $x \to 0$

$g'(x) = 3x^2 \longrightarrow 0^+$ for $x \to 0$

Altså vil $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow \infty$ for $x \to 0$ (Dvs. $L = \infty$)

Så giver Thm 7.12.1 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)e^x - 1}{x^3} = \infty$$