1.1

Tesen om ubetinget konvergens er, at BNP pr. Arbejder på lang sigt vil konvergere mod det samme niveau for alle lande. Ubetinget konvergens implicerer, at alle lande vil ende samme sted, hvorved fattigdom på lang sigt udryddes.

Betinget konvergens beskriver et scenarie, hvor BNP per arbejder vil konvergere mod et specifikt niveau for landet relativt til landets institutionelle og strukturelle begyndelsesniveau. Lande, der er relativt ens, vil konvergere mod samme vækststi. Modsat ubetinget, så implicerer betinget konvergens, at fattigdommen ikke udryddes.

1.2

Tesen om ubetinget konvergens lyder, at lande vil konvergere for samme niveau af BNP per arbejder. Figur 1 viser ikke nogen sammenhæng, der tyder på konvergens. Da OLS-linjen er relativ flad. Figur 2 viser dog tegn på konvergens, da det udledes, at lande, der startede på et lavere niveau, har højere vækstrater senere. Dette indikerer, at alle konvergerer mod samme niveau, hvor nogle lande voksede meget i starten, så er andre på vej senere hen

Fra data mv. i undervisningen har vi mere eller mindre konkluderet, at ubetinget konvergens ikke er understøttet i empirien, modsat betinget konvergens. Malawi vs Denmark fx

1.3

Fra 1.2 kan vi tage ligningen: $\frac{\ln y_t - \ln y_0}{t} = \beta_3 - \beta_4 \cdot \ln y_0$

$$\ln y_t - \ln y_0 = t\beta_3 - t\beta_4 \cdot \ln y_0$$
$$\ln y_t = t\beta_3 - t\beta_4 \cdot \ln y_0 + \ln y_0$$
$$\ln y_t = t\beta_3 + \ln y_0 \,(1 - t\beta_4)$$

Det gives, at det fattige land har 10% af det rige lands bnp per arbejder. Altså må:$lny_0^{poor} - \ln y_0^{rich} = \ln 0{,}1$. For at det fattige land skal ende med 90 pct af det rige lands BNP per arbejder, må det gælde at $ny_t^{poor} - \ln y_t^{rich} = \ln 0{,}9$. Derfor isoleres for t.

$$\ln y_t^{poor} - \ln y_t^{rich} = \left[t\beta_3 + \ln y_0^p \,(1 - t\beta_4)\right] - \left[t\beta_3 + \ln y_0^r \,(1 - t\beta_4)\right]$$
$$\ln 0{,}9 = \ln y_0^p \,(1 - t\beta_4) - \ln y_0^r \,(1 - t\beta_4)$$
$$\ln 0{,}9 = (1 - t\beta_4)\left(\ln y_0^p - \ln y_0^r\right)$$
$$\ln 0{,}9 = (1 - t\beta_4) \cdot \ln 0{,}1$$
$$\frac{\ln 0{,}9}{\ln 0{,}1} = 1 - t\beta_4 \Leftrightarrow t\beta_4 = 1 - \frac{\ln 0{,}9}{\ln 0{,}1} \Leftrightarrow t \cdot 0{,}005 = 1 - \frac{\ln 0{,}9}{\ln 0{,}1}$$
$$t = \frac{1 - \frac{\ln 0{,}9}{\ln 0{,}1}}{0{,}005} \Leftrightarrow t = \frac{1 - \frac{-0{,}105}{-2{,}303}}{0{,}005} \Leftrightarrow t = \frac{1 - 0{,}046}{0{,}005} = \frac{0{,}954}{0{,}005} = 190{,}8$$
$$t \approx 190{,}8$$

Vi ser fra ovenstående, at det ville tage over 190 år for det fattige land at indhente det rige. Selvom figur 2 understøtter ubetinget konvergens, så er ud fra følgende tale om en langsom konvergens. Derfor må resultatet fra figur 2 være svagt.

2.1

Den approksimative vækstrate i BNP per arbejder finder jeg ved.

$$\frac{Y_t}{L_{Y_t}} = \frac{K_t^\alpha H_t^\phi \left(A_t L_{Y_t}\right)^{1-\alpha-\phi}}{L_{Y_t}}$$

$$\frac{Y_t}{L_{Y_t}} = \frac{K_t^\alpha H_t^\phi \left(A_t L_{Y_t}\right)^{1-\alpha-\phi}}{L_{Y_t}^{1-\alpha-\phi+\alpha+\phi}}$$

$$\frac{Y_t}{L_{Y_t}} = \left(\frac{K_t}{L_{Y_t}}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{H_t}{L_{Y_t}}\right)^\phi \left(\frac{A_t L_{Y_t}}{L_{Y_t}}\right)^{1-\alpha-\phi}$$

$$y_t = k_t^\alpha h_t^\phi A_t^{1-\alpha-\phi}$$

Vi finder den approksimative vækstrate.

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \left(\frac{k_{t+1}^\alpha}{k_t^\alpha}\right)\left(\frac{h_{t+1}^\phi}{h_t^\phi}\right)\left(\frac{A_{t+1}^{1-\alpha-\phi}}{A_t^{1-\alpha-\phi}}\right)$$

Tager logaritmen til udtrykket

$$\ln y_{t+1} - \ln y_t = \alpha(\ln k_{t+1} - \ln k_t) + \phi(\ln h_{t+1} - \ln h_t) + (1-\alpha-\phi)(\ln A_{t+1} - \ln A_t)$$

De givne definitioner indsættes.

$$g_t^y = \alpha g_t^k + \phi g_t^h + (1-\alpha-\phi)\hat{g}_t$$

Hvis $y_t, k_t \wedge h_t$ vokser med samme hastighed, så må $g_t^y = g_t^k = g_t^h$

Derfor.

$$g_t^y = \alpha g_t^y + \phi g_t^y + (1-\alpha-\phi)\widehat{g_t}$$

$$g_y^t(1-\alpha-\phi) = (1-\alpha-\phi)\widehat{g_t}$$

$$g_t^y = \frac{(1-\alpha-\phi)\widehat{g_t}}{(1-\alpha-\phi)}$$

$$g_t^y = \hat{g}_t$$

I tilfældet hvor $y_t, k_t \wedge h_t$ vokser med samme hastighed, er $g_t^y = \hat{g}_t$. Altså er væksten drevet af videnstilføjelsen i økonomien.

2.2

Når antallet af forskere er konstant over tid, så udvikler vidensniveauet sig med:

$$g_t = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \frac{\rho A_t^\phi L_A^\lambda}{A_t} = \rho A_t^{\phi-1} L_A^\lambda$$

Vi ser, vidensniveauets udvikling afhænger positivt af ϕ. ϕ angiver elasticiteten af vidensniveauet i økonomien.

Først ved $\phi > 1$ er vækstraten i vidensniveauet stigende i A_t. Dette

2.3

Den eksakte vækstrate er givet ved:

$$g_t = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \frac{\rho A_t^\phi L_A^\lambda}{A_t} = \rho A_t^{\phi-1} L_A^\lambda$$

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = \frac{\rho A_{t+1}^{\phi-1} L_A^\lambda}{\rho A_t^{\phi-1} L_A^\lambda}$$

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{L_A}{L_A}\right)^\lambda$$

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{s_R L_{t+1}}{s_R L_t}\right)^{\lambda}$$
$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = (1+g_t)^{\phi-1} \left(\frac{L_t(1+n)}{L_t}\right)^{\lambda}$$
$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = (1+g_t)^{\phi-1}(1+n)^{\lambda}$$
$$g_{t+1} = (1+g_t)^{\phi-1}(1+n)^{\lambda} g_t$$

For at finde SS-værdien sættes perioderne lig hinanden. Altså $g_{t+1} = g^\star = g_t$

$$g = (1+g)^{\phi-1}(1+n)g$$
$$1 = (1+g)^{\phi-1}(1+n)^{\lambda}$$
$$\frac{1}{(1+g)^{\phi-1}} = (1+n)^{\lambda}$$
$$(1+g)^{1-\phi} = (1+n)^{\lambda}$$
$$1+g = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$
$$g = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1$$

Det kan udeledes, at kun for $\phi < 1$ er eksponenten defineret. Det udledes, at hvis $\phi = 1$ er vækstraten uendelig(Divideres med nul), derfor enorme skalaeffekter. Altså når antallet af forskere stiger, vil vækstraten for vidensniveauet være stigende, og dermed ikke konvergens mod SS-værdi.

For at undersøge, hvorvidt g konvergerer over tid, undersøges INDADA-betingelserne.

1. Transitionsligningen går gennem (0,0): Dette ses er opfyldt, da $g_t = 0 \Leftrightarrow g_{t+1} = 0$
2. Transitionskurven er konstant voksende:
$$\frac{\partial g_{t+1}}{g_t} = (1+n)^{\lambda} \cdot (1+g_t)^{\phi-1} + (1+n)^{\lambda} g_t \cdot (\phi-1)(1+g_t)^{\phi-2}$$
$$\frac{\partial g_{t+1}}{g_t} = (1+n)^{\lambda}\left[(1+g_t)^{\phi-1} + g_t \cdot (\phi-1)(1+g_t)^{\phi-2}\right]$$
$$\frac{\partial g_{t+1}}{g_t} = (1+n)^{\lambda}[\frac{1}{(1+g_t)^{1-\phi}} \cdot \frac{g_t(\phi-1)}{(1+g_t)^{2-\phi}}$$
For at transitionskurven er voksende må det gælde, at $\frac{1}{(1+g_t)^{-\phi}} \cdot \frac{g_t(\phi-1)}{(1+g_t)^{2-\phi}} > 0.$
Dette undersøges,
$$\frac{1}{(1+g_t)^1(1+g_t)^{-\phi}} > -\frac{g_t(\phi-1)}{(1+g_t)^2(1+g)^{-\phi}}$$
$$1 > -\frac{g_t(\phi-1)}{1+g_t}$$
$$\frac{1}{(\phi-1)} > -\frac{g_t}{1+g_t}$$
$$\frac{1}{1-\phi} > \frac{g_t}{1+g_t}$$
Dette vides, da $0 < \phi < 1$
3. Transitionskurvens hældning er konstant aftagende: Det ses, at ved voksende g_t, bliver $\frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t}$ mindre og mindre. Derfor er hældningen konstant aftagende.

4. Hældningen går mod et tal mindre end 1: Når $g_t \to \infty$, går $\frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t}$ mod 0. Herved må kravet være opfyldt.

Tegn denne bad-boy

2.4

Tager først udgangspunkt i ligning (4)

$$K_{t+1} = s_K Y_t + (1-\delta)K_t$$
$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{Yt+1}} = \frac{s_K Y_t + (1-\delta)K_t}{A_{t+1}L_{Yt+1}}$$
$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{Yt+1}} = \frac{s_K Y_t + (1-\delta)K_t}{(1+g_t)(1+n)}$$
$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}\left(s_K \tilde{y}_t + (1-\delta)\,\tilde{k}_t\right)$$

Det vides, at $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi}$. Dette indsættes fremfor $\tilde{y}_t$.

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\,\tilde{k}_t\right)$$

Tager udgangspunkt i ligning (5)

$$H_{t+1} = Y_t + (1-\delta)H_t$$
$$\frac{H_{t+1}}{A_{t+1}L_{Yt+1}} = \frac{s_K Y_t + (1-\delta)H_t}{A_{t+1}L_{Yt+1}}$$
$$\frac{H_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = \frac{s_H Y_t + (1-\delta)H_t}{(1+g_t)(1+n)}$$
$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}(s_H \tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t)$$

Indsætter substitutionen for $\tilde{y}_t$

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}(s_H \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{h}_t)$$

Det kan ses, at andelen af befolkningen, der arbejder i R&D-sektoren, ikke påvirkes af humankapital pr effektiv produktionsarbejder.

2.5

For at kunne tegne de to udledte ligninger i samme diagram, skal de have fælels output og fælles input. Dette gør dem sammenlignelige. Af dette grund findes nullclinesfor de to ovenstående funktioner. For at gøre dette droppes tidsindekserne. Derfor: $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^{\star}$

Starter med $\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\,\tilde{k}_t\right)$

$$\tilde{k}_t = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\,\tilde{k}_t\right)$$
$$\tilde{k}_t(1+g_t)(1+n) = s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{k}_t$$
$$(1+g_t)(1+n) = \frac{s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t}$$
$$(1+g_t)(1+n) = s_K \tilde{k}_t^{\alpha-1}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)$$
$$\frac{(1+g_t)(1+n) - (1-\delta)}{s_K \tilde{k}_t^{\alpha-1}}\tilde{h}_t^{\phi}$$

$$\frac{1+g_t+n+ng_t-1+\delta}{s_K\tilde{k}_t^{\alpha-1}}=\tilde{h}_t^{\phi}$$
$$\tilde{k}_t^{1-\alpha}\left(\frac{g_t+n+ng_t+\delta}{s_K}\right)=\tilde{h}_t^{\phi}$$
$$\tilde{h}_t=\Delta\tilde{k}_t=\left(\frac{g_t+n+ng_t+\delta}{s_K}\right)^{\frac{1}{\phi}}\tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha}{\phi}}$$

Det samme udføres for h_{t+1}. Også her droppes tidsindekset.

$$\tilde{h}_t=\frac{1}{(1+g_t)(1+n)}\left(s_H\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi}+(1-\delta)\tilde{h}_t\right)$$
$$(1+g_t)(1+n)=\frac{s_H\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi}+(1-\delta)\tilde{h}_t}{\tilde{h}_t}$$
$$\frac{(1+g_t)(1+n)-(1-\delta)}{s_H\tilde{k}_t^{\alpha}}=\tilde{h}_t^{\phi-1}$$
$$\frac{1+n+g_t+ng_t-1+\delta}{s_H\tilde{k}_t^{\alpha}}=\tilde{h}_t^{\phi-1}$$
$$\frac{n+g_t+ng_t+\delta}{s_H\tilde{k}_t^{\alpha}}=\tilde{h}_t^{1-\phi}$$
$$\frac{s_H\tilde{k}_t^{\alpha}}{n+g_t+ng_t+\delta}=\tilde{h}_t^{1-\phi}$$
$$\left(\frac{s_H\tilde{k}_t^{\alpha}}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}=h_t$$
$$\Delta h_t=\tilde{h}_t=\left(\frac{s_H\tilde{k}_t^{\alpha}}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}$$

Tegn endnu en bad-boy.

For at finde SS-værdien for $\tilde{y}$ omskrives ligning (3) til per effektiv arbejder. $Y_t = K_t^{\alpha}H_t^{\phi}(A_tL_{Yt})^{1-\alpha-\phi}$

$$\frac{Y_t}{A_tL_{Yt}}=\frac{K_t^{\alpha}H_t^{\phi}(A_tL_t)^{1-\alpha-\phi}}{A_tL_{Yt}}$$
$$\tilde{y}_t=k_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi}.$$

Nu kan $\tilde{h}_t$ og $\tilde{k}_t$ findes.

Det kan ses, at nullclinen for $\tilde{h}_t$ er lig med dens steady-state værdi.

For $\tilde{k}$ droppes perioderne. Eller $\tilde{k}^{\star}=\tilde{k}_t=\tilde{k}_{t+1}$

$\tilde{k}_t=\frac{1}{(1+g_t)(1+n)}\left(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi}+(1-\delta)\,\tilde{k}_t\right)$

$$\tilde{k}_t=\frac{1}{(1+g_t)(1+n)}\left(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi}+(1-\delta)\,\tilde{k}_t\right)$$
$$\tilde{k}_t(1+g_t)(1+n)=s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi}+(1-\delta)\,\tilde{k}_t$$
$$(1+g_t)(1+n)=s_K\tilde{k}_t^{\alpha-1}\tilde{h}_t^{\phi}+(1-\delta)$$
$$(1+g_t)(1+n)-(1-\delta)=s_K\tilde{k}_t^{\alpha-1}\tilde{h}_t^{\phi}$$
$$g_t+n+ng_t+\delta=s_K\tilde{k}_t^{\alpha-1}\tilde{h}_t^{\phi}$$
$$g_t+n+ng_t+\delta=s_K\tilde{k}_t^{\alpha-1}\tilde{h}_t^{\phi}$$

$$\frac{g_t + n + ng_t + \delta}{\tilde{h}_t^{\phi} s_K} = \tilde{k}_t^{\alpha-1}$$

$$\frac{\tilde{h}_t^{\phi} s_K}{g_t + n + ng_t + \delta} = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$$

$$\left(\frac{\tilde{h}_t^{\phi} s_K}{g_t + n + ng_t + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \tilde{k}_t$$

$$\left(\frac{s_K}{g_t + n + ng_t + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{1}{1-\alpha}} = \tilde{k}_t$$

Indsætter h i k.

$$\left(\frac{s_K}{g_t + n + ng_t + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\left(\frac{s_H \tilde{k}_t^{\alpha}}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \tilde{k}_t$$

$$\left(\frac{s_K}{g_t + n + ng_t + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\left(\frac{s_H \tilde{k}_t^{\alpha}}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \tilde{k}_t$$

$$\left(\frac{s_H}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{\phi}{(1-\alpha)(1-\phi)}} \left(\frac{s_K}{g_t + n + ng_t + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \tilde{k}_t$$

$$\left(\frac{s_H}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \left(\frac{s_K}{g_t + n + ng_t + \delta}\right) = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$$

$$\left(\frac{s_H}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \left(\frac{s_K}{g_t + n + ng_t + \delta}\right) = \tilde{k}_t^{1-\alpha} \cdot \tilde{k}_t^{-\frac{\alpha\phi}{1-\phi}}$$

$$\left(\frac{s_H}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \left(\frac{s_K}{g_t + n + ng_t + \delta}\right) = \tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha-\phi-\alpha\phi}{1-\phi}} \cdot \tilde{k}_t^{-\frac{\alpha\phi}{1-\phi}}$$

$$\left(\frac{1}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \left(\frac{1}{g_t + n + ng_t + \delta}\right) s_K s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}} = \tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha-\phi}{1-\phi}}$$

$$\left(\frac{1}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}+1} s_K s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}} = \tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha-\phi}{1-\phi}}$$

$$\left(\frac{1}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\phi}+\frac{1-\phi}{1-\phi}} s_K s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}} = \tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha-\phi}{1-\phi}}$$

$$\left(\frac{1}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_K s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}} = \tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha-\phi}{1-\phi}}$$

$$\left(\frac{1}{n + g_t + ng_t + \delta}\right) s_K^{1-\phi} s_H^{\phi} = \tilde{k}_t^{1-\alpha-\phi}$$

$$\left(\frac{s_K^{1-\phi} s_H^{\phi}}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}} = \tilde{k}_t$$

Dette indsættes i h_t

$$\tilde{h}_t = \left(\frac{s_H}{n + g_t + ng_t + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \tilde{k}_t^{\frac{\alpha}{1-\phi}}$$

$$\tilde{h}_t = \left(\frac{s_H}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \left(\left(\frac{s_K^{1-\phi}s_H^{\phi}}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\phi}}$$

$$\tilde{h}_t^{1-\phi} = \frac{s_H}{n+g_t+ng_t+\delta} \cdot \left(\frac{s_K^{1-\phi}s_H^{\phi}}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{h}_t^{1-\phi} = \frac{1}{n+g_t+ng_t+\delta} \cdot \left(\frac{1}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\phi}} s_H\left(s_K^{1-\phi}s_H^{\phi}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{h}_t^{1-\phi} = \left(\frac{1}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\phi}+\frac{1-\alpha-\phi}{1-\alpha-\phi}} s_H^{\frac{1-\alpha-\phi}{1-\alpha-\phi}} s_H^{\frac{\phi\alpha}{1-\alpha-\phi}} s_K^{\frac{(1-\phi)\alpha}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{h}_t^{1-\phi} = \left(\frac{1}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{(1-\phi)}{1-\alpha-\phi}} s_H^{\frac{1-\alpha-\phi+\alpha\phi}{1-\alpha-\phi}} s_K^{\frac{(1-\phi)\alpha}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{h}_t^{(1-\phi)(1-\alpha-\phi)} = \left(\frac{1}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{1-\phi} s_H^{1-\phi-\alpha(1-\phi)} s_K^{(1-\phi)\alpha}$$

$$\tilde{h}_t^{(1-\alpha-\phi)} = \left(\frac{1}{n+g_t+ng_t+\delta}\right) s_H^{1-\alpha} s_K^{\alpha}$$

$$\tilde{h}_t = \left(\frac{s_H^{1-\alpha}s_K^{\alpha}}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}}$$

Disse udtryk indsættes i $\tilde{y}_t$

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi}$$

$$\tilde{y}_t = \left(\frac{s_K^{1-\phi}s_H^{\phi}}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\phi}} \cdot \left(\frac{s_H^{1-\alpha}s_K^{\alpha}}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{y}_t = s_H^{\frac{\alpha\phi}{1-\phi-\alpha}} s_K^{\frac{(1-\phi)\alpha}{1-\alpha-\phi}} s_K^{\frac{\alpha\phi}{1-\alpha-\phi}} s_H^{\frac{(1-\alpha)\phi}{1-\alpha-\phi}} \left(\frac{1}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{y}_t = s_H^{\frac{\phi}{1-\phi-\alpha}} s_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\phi}} \left(\frac{1}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{y}_t^{1-\alpha-\phi} = s_H^{\phi}s_K^{\alpha}\left(\frac{1}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\alpha+\phi}$$

$$\tilde{y}_t^{1-\alpha-\phi} = \left(\frac{s_K}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\alpha}\left(\frac{s_H}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\phi}$$

$$\tilde{y}^{\star} = \left(\frac{s_K}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\phi}}\left(\frac{s_H}{n+g_t+ng_t+\delta}\right)^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

2.7

Vækstbanen for BNP per arbejder kan udledes.

Vi har ligningen $g_e = \frac{A_{t+1}-A_t}{A_t} = \frac{\rho A_t^{\phi}L_{At}^{\lambda}}{A_t} = \rho A_t^{\phi-1}L_{At}^{\lambda}$

A indsættes i ligning 7 og isoleres:

$$g_{se} = \rho A^{\phi-1}(s_R L_t)^{\lambda}$$

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} L_t^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Indsætter løsningsformlen for L_t

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} ((1+n)^t L_0)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

For kun at have en uafhængig variabel indsættes $g_{se}(= 1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1 \Leftrightarrow (1+g_{se})^{\frac{1-\phi}{\lambda}} = 1+n$

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \left(\left((1+g_{se})^{\frac{1-\phi}{\lambda}}\right)^t L_0\right)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Dette indsættes i $y_t = \tilde{y}_t A_t$

$$\tilde{y} = y_t \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Det vides, at $\tilde{y}_t = (1-s_R)^{1-\alpha} \left(\tilde{k}^{\star}\right)^{\alpha}$

$$\tilde{y} = (1-s_R)^{1-\alpha} \left(\tilde{k}^{\star}\right)^{\alpha} \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Undersøger, hvad andelen af forskerer gør for økonomien. Dette gøres ved at tage log og differentier ift. s_R

$$\tilde{y} = (1-s_R)^{1-\alpha} \left(\tilde{k}^{\star}\right)^{\alpha} \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

$$\ln y_t = (1-\alpha)\ln(1-s_R) + \ln\left(k^{\alpha} \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}\right) + \frac{\lambda}{1-\phi}\ln s_R + \ln\left((1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}\right)$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial s_R} = \frac{1-\alpha}{1-s_R} + \frac{\lambda}{(1-\phi)s_R} = 0$$

$$(1-\phi)s_R(1-\alpha) = \lambda(1-s_R)$$

$$(1-\phi)s_R(1-\alpha) + \lambda s_R = \lambda$$

$$s_R\big((1-\phi)(1-\alpha)+\lambda\big) = \lambda$$

$$s_R = \frac{\lambda}{(1-\phi)(1-\alpha)+\lambda}$$

Det kan udledes, at når ϕ vokser, så vil andelen af forskere også stige. Væksten vil derfor være positv ved større andel af forskere.

2.8

Semi-endogene vækstmodeller siger, at:

- Højere befolkningsvækst fører til et højere indkomstniveau
- Større befolkningsvækst fører til mere vækst i økonomien.

De endogene vækstmodeller forudsiger, at:

- Mere befolkningsvækst fører til eksplosiv vækst

Altså kan det udledes, at modellerne forudsiger en positiv sammenhæng mellem befolkningsvækst og økonomisk vækst. Fra undervisningen har den underliggende empiri dog vist tegn på det modsatte. At befolkningsvækst har en negativ sammenhæng med økonomisk vækst. Vi kan dog se kloden som en samlet økonomi, og herved kan det konkluderes, at der er en positiv sammenhæng mellem befolkningsvækst og økonomisk vækst. Derfor kan disse modeller bruges under visse undtagelser.