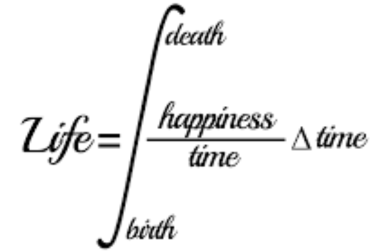
Matematik A E2020
Uge 44, Forelæsning 1

Afsnit 9.1-2 (og lidt af 9.3)

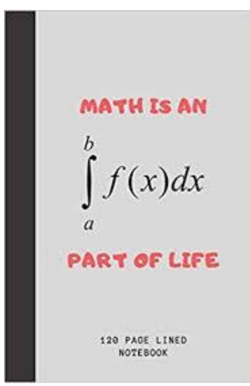
Start på integralregning:

Stamfunktioner, ubestemte integraler, bestemte integraler, areal.

Overblik



- Integralregning (3 forelæsninger, kap 9)
  - I dag: Stamfunktioner, ubestemte integraler, bestemte integraler, areal (9.1-3)
  - Onsdag: Mere om bestemte integraler, “partiel integration” (9.3+5)
  - Mandag uge 45: Integration ved substitution, “uegentlige integraler” (9.6-7)



- Derefter: Funktioner af flere variable

Stamfkt og ubestemte integr. (9.1)

$f : I \to \mathbb{R}$

Stamfunktion (antiderivative) til f:
Differentiabel funktion $F : I \to \mathbb{R}$ så

$$F'(x) = f(x) \quad \text{for alle } x \in I$$

Simple eksempler:

- $F(x) = \ln(x)$ er en stamfunktion til $f(x) = \frac{1}{x}$ (for $x > 0$)
- $G(x) = e^x$ er en stamfunktion til $g(x) = e^x$
- For alle $a \neq -1$ er $H(x) = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ en stamfunktion til $h(x) = x^a$

Sætning:
Hvis F er en stamfunktion til f, så er G givet ved $G(x) = F(x) + C$ (hvor C er en konstant) også en stamfunktion til f

Bevis:
$$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x) \quad \square$$

Sætning:
Hvis F og G begge er stamfunktioner til f, så findes en konstant C så

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{for alle } x \in I$$

Bevis: Antag F, G begge er stamfkt til f.

$$(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Altså må $G-F$ være konstant:

$$(G-F)(x) = G(x) - F(x) = C$$

Dvs: $\underline{G(x) = F(x) + C}$ $\square$

Definition af ubestemt integral ((9.1.1), s. 320):

Det ubestemte integral

$$\int f(x)\,dx$$

er mængden af alle stamfunktioner til f.

Hvis F er en stamfunktion til f, kan vi altså skrive

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

hvor C kan være hvilken som helst konstant.

(”arbitrær konstant”)

Simpelt eksempel:

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Simple regneregler ((9.1.8-9), s.323):

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

("+")

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx \qquad \text{(hvor } a \text{ er en konstant)}$$

$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$ og $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$

$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2 = \underline{F(x) + G(x) + C}$

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \underline{(F(x) + G(x)) + C}$ $\square$

Øvelse

Udregn de ubestemte integraler:

$$\int (e^{3x} - 3x^2)\, dx = \int e^{3x} dx - \int 3x^2 dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}e^{3x} + C_1\right) - \left(x^3 + C_2\right)$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x} - x^3 + C$$

$$\int ((2t)^3 + \frac{1}{\sqrt{t}})\, dt \qquad \text{(hvor } t > 0\text{)}$$

$$= \int (8t^3 + t^{-\frac{1}{2}})\, dt = 8\,\frac{1}{4}t^4 + 2t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2t^4 + 2t^{\frac{1}{2}} + C$$

(Til de hurtige: Se evt ekstra øvelse på slide 15)

Eksempel

"Svært" problem: Bestem $\int \ln(x)\,dx$

[kan løses vha "partiel integration"]

Nemmere problem: Vis $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + C$

$$\frac{d}{dx}\left(x\ln(x) - x\right) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln(x) \checkmark$$

Bestemte integraler og areal (9.2)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinuert med stamfunktion F

Definition af bestemt integral ((9.2.3), s.329):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Bemærk:

Definitionen afhænger ikke af valget af stamfunktion!

Hvis G er stamfkt til f har vi $G(x) = F(x) + C$.

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

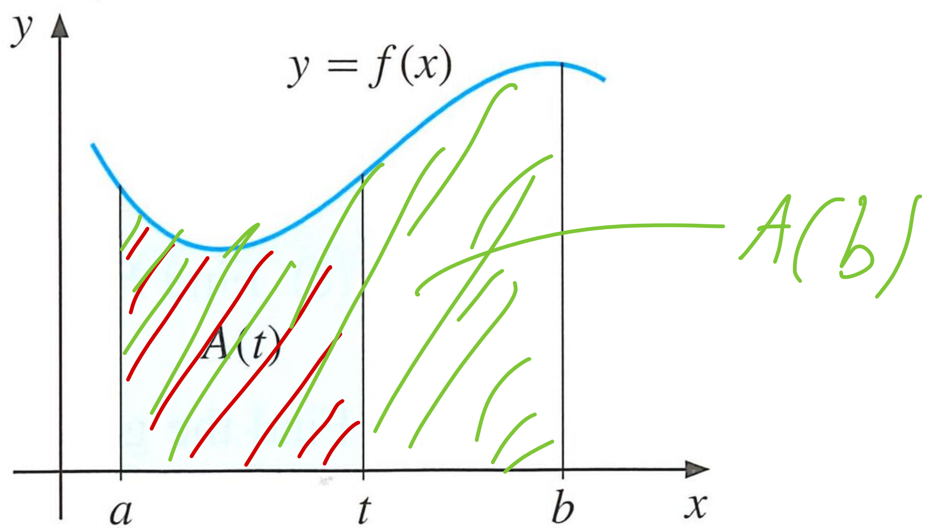
Definitionen kræver ikke at $a < b$.

Vi kan bruge samme definition hvis $a > b$ (så er f bare en fkt på $[b, a]$)

Arealfunktionen

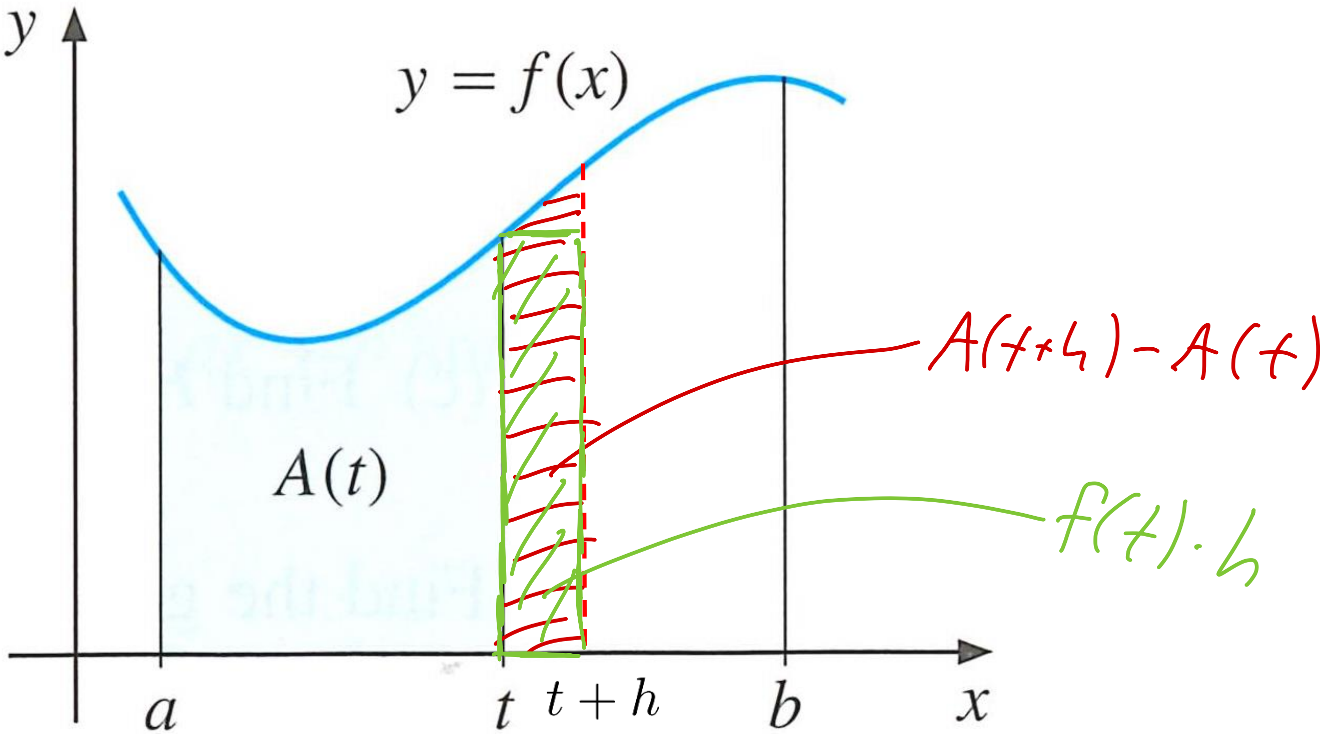
f er kontinuert og ikke-negativ $(f(x) \geq 0)$ på intervallet $[a, b]$

Areal-funktionen A på $[a, b]$ defineres så på følgende måde:



Bemærk:
$A(a) = 0$ og $A(b)$ er lig hele arealet mellem grafen og x-aksen fra $x = a$ til $x = b$

Hvad er sammenhængen mellem arealfkt og det bestemte integral?



For små h: $$A(t+h) - A(t) \approx f(t) \cdot h$$

$$A'(t) \xleftarrow{h \to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \approx f(t)$$

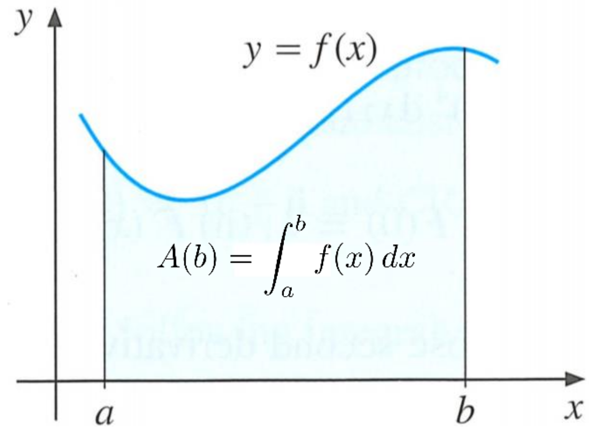
Altså har vi argumenteret for:

$$\boxed{A'(t) = f(t)}$$

Arealfunktionen er en stamfunktion til f!

Da arealfunktionen er en stamfunktion til f:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = A(b) - \underbrace{A(a)}_{=0} = A(b)}$$



Det bestemte integral er lig arealet mellem grafen og x-aksen fra $x = a$ til $x = b$!

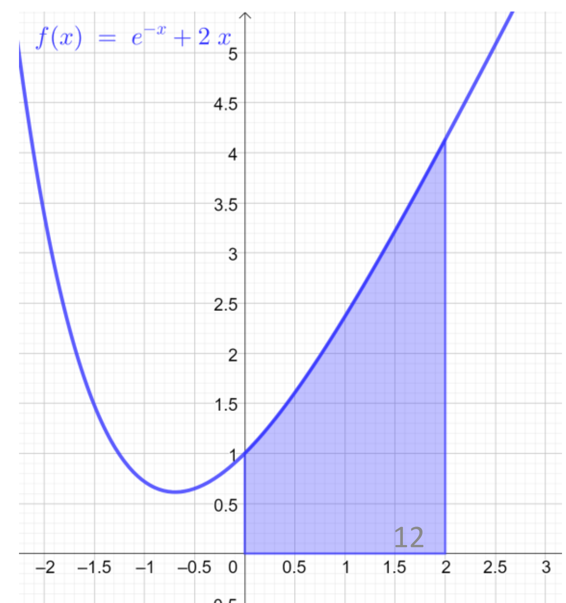
pingo.coactum.de (185415)

Øvelse: Udregn den eksakte værdi af arealet mellem grafen for $f(x) = e^{-x} + 2x$ og x-aksen fra $x = 0$ til $x = 2$

$$\int_0^2 (e^{-x} + 2x)\,dx = \left[-e^{-x} + x^2\right]_0^2$$

$$= (-e^{-2} + 4) - (-e^0 + 0)$$

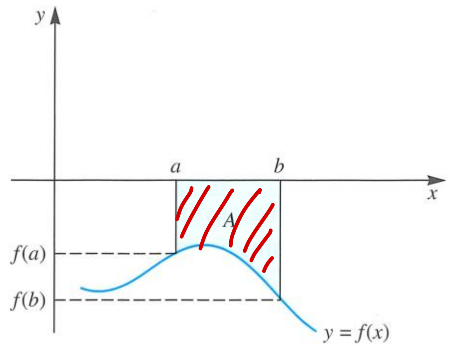
$$= -e^{-2} + 4 + 1 = \underline{5 - e^{-2}}$$

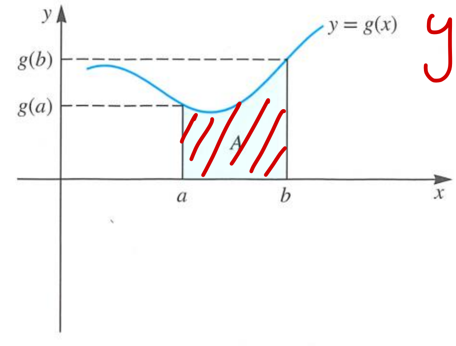


Areal for vilkårlige kont. fkt.

For ikke-positiv f:

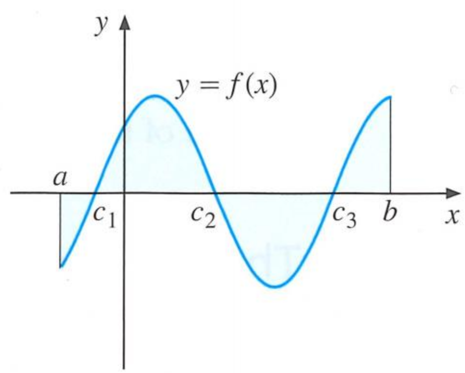
$$A = \int_a^b -f(x)\,dx$$





$y = -f(x)$

For fkt med både positive og negative værdier:



Opdel i intervaller hvor f er hhv positiv og negativ!

$$A = \int_a^{c_1} -f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} -f(x)\,dx + \int_{c_3}^{b} f(x)\,dx$$

Simple egensk. for best. integr. (9.3)

(9.3.1-5), s. 332-3

Hvis f, g er kont. fkt på interval I med $a, b, c \in I$ gælder:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Bevis: Brug definitionen af det bestemte integral!

Ekstra øvelse (hvis tid)

Exercise 9.1(d), s.324: Udregn det ubestemte integral

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$$

Vi omskriver integranden vha potensregneregler:

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \left(x\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(x\cdot x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \underline{x^{\frac{7}{8}}}$$

Heraf får vi:

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \frac{1}{\frac{7}{8}+1}x^{\frac{7}{8}+1} + C = \frac{1}{\frac{15}{8}}x^{\frac{15}{8}} + C$$

$$= \underline{\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C},$$ hvor C er en arbitrær konstant.