Matematik A E2020
Uge 43, Forelæsning 2

Afsnit 10.3, 10.5(-s.392), 10.6, 10.8

Nutidsværdi, annuiteter, annuitetslån, differensligninger

Nutidsværdi/PDV (10.3)

Hvad er "nutidværdien" A af et beløb K til betaling om t år?

(ved årlig rente r og årlig rentetilskrivning)

Ved t årlige forrentninger skal A vokse til K:

$$A(1+r)^t = K$$

Altså:

$$\boxed{A = K(1+r)^{-t}}$$

Ved kontinuert rentetilskrivning fås tilsvarende:

$$Ae^{rt} = K \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = Ke^{-rt}}$$

Annuiteter (10.5)

Annuitet: En række betalinger af et fast beløb med faste mellemrum over et givent tidsrum.

	"Nutid" (t=0)	$t=1$ 1. betaling	2. betaling	3. betaling	n-1'te bet.	$t=n$ n'te bet.
Betalinger:		a	a	a	a	a
Nutidsværdi:		$\frac{a}{1+r}$	$\frac{a}{(1+r)^2}$	$\frac{a}{(1+r)^3}$	$\frac{a}{(1+r)^{n-1}}$	$\frac{a}{(1+r)^n}$

Hvad er nutidsværdien/PDV af en sådan annuitet?

(ved rente r per periode (fx årlig) og rentetilskrivning hver periode)

$$P_n = \frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \frac{a}{(1+r)^3} + \dots + \frac{a}{(1+r)^{n-1}} + \frac{a}{(1+r)^n}$$

$$= \frac{a}{1+r}\left(1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}}\right)$$

$$P_n = \frac{a}{1+r}\underbrace{\left(1 + \left(\frac{1}{1+r}\right) + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-1}\right)}$$

Endelig geometrisk række!

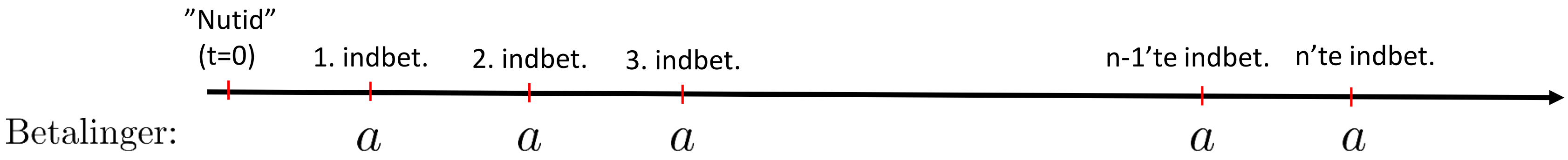
$(k = \frac{1}{1+r})$

$$= \frac{a}{1+r}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}\right) = a\,\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{(1+r)-1} = \frac{a}{r}\left(1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)$$

$$= \frac{a}{r}\left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)$$

Nutidsværdien af annuiteten er altså ((10.5.2), s. 391):

$$\boxed{P_n = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)}$$



”Fremtidsværdien” F_n af annuiteten er værdien umiddelbart efter den sidste indbetaling

Kan fx udregnes nemt vha nutidsværdien ((10.5.3), s. 392):

$$\boxed{F_n = P_n(1+r)^n = \frac{a}{r}\Big(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\Big)(1+r)^n = \frac{a}{r}\Big((1+r)^n - 1\Big)}$$

Annuitetslån (10.6)

Annuitetslån: Der stiftes en gæld K, som tilbagebetales med faste beløb med faste mellemrum over et givent tidsrum.

	"Nutid" (t=0)	1. termin	2. termin	3. termin	n-1'te termin	n'te termin
Lån:	K					
Tilbagebetaling:		a	a	a	a	a

Hvad er sammenhængen mellem K, a, r og n?

1) $K = P_n$

2) $K(1+r)^n = F_n$

$$\boxed{K = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)}$$

Øvelse

$$K = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Gorm vil låne 10 mio. kr. til at købe et familie-slot. Han tager et annuitetslån med uendelig løbetid, som han selv og hans efterkommere skal betale af på i al fremtid. Terminerne er årlige og den årlige rente er 7%.

Hvor meget skal Gorm (og hans efterkommere) betale i årligt afdrag?

$n \to \infty$: $K = \frac{a}{r}$

$a = K \cdot r = 10.000.000 \cdot 0{,}07 = 700.000$ kr.

Hvor meget større bliver de årlige afdrag, hvis lånet betales tilbage over 100 år?

pingo.coactum.de
(185415)

$n = 100$.

$$a = \frac{K \cdot r}{\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{100}}\right)} = \ldots = 700.808 \text{ kr.}$$

Dvs afdragene bliver 808 kr. større.

Differensligninger (10.8)

Generel differensligning af første orden:

$$x_{t+1} = f(t, x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Givet "initialværdi" x_0, kan vi bestemme $x_1, x_2, \ldots$:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(0, x_0) \\ x_2 &= f(1, x_1) \\ x_3 &= f(2, x_2) \qquad \text{etc...} \end{aligned}$$

Hvis muligt vil vi gerne have formel, så vi kan udregne x_t uden først at skulle udregne $x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}$

Eller i hvert fald vide noget om, hvordan x_t opfører sig, når t bliver stor

Lineær første-ordens ligning med konst. koeff.

$$\boxed{x_{t+1} = ax_t + b, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= ax_0 + b \\
x_2 &= a(ax_0 + b) + b = a^2 x_0 + (1 + a)b \\
x_3 &= a(a^2 x_0 + (1 + a)b) + b = a^3 x_0 + (1 + a + a^2)b \\
&\vdots \\
x_t &= a^t x_0 + \underbrace{(1 + a + a^2 + \ldots + a^{t-1})}_{}b
\end{aligned}$$

Endelig geometrisk række: $= \frac{1-a^t}{1-a}$ (for $a \neq 1$)

Altså:

$$\boxed{x_t = a^t x_0 + \left(\frac{1-a^t}{1-a}\right)b = a^t\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} \qquad (a \neq 1)}$$

For $a = 1$: $x_t = x_0 + tb$

Eksempel:

$$\boxed{x_t = a^t(x_0 - \tfrac{b}{1-a}) + \tfrac{b}{1-a}}$$

$$4x_{t+1} - 2x_t - 6 = 0, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

$\Leftrightarrow \quad 4x_{t+1} = 2x_t + 6 \quad \Leftrightarrow \quad x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{3}{2}$

Dvs: $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$

$$x_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t\left(x_0 - \frac{3/2}{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\left(\frac{1}{2}\right)^t(x_0 - 3) + 3}$$

Hvad sker der når $t \to \infty$?

$\left(\frac{1}{2}\right)^t \to 0$

$x_t \to 3 = x^*$ når $t \to \infty$ $\leftarrow$ ligevægtstilst.

(uanset hvad x_0 er!)

"globalt asymptotisk stabil".

Pelle Polardyr:

Øvelse

En bank tilbyder en Pelle Polardyr-børnekonto. Den årlige rente er 5%, og derudover indsætter banken hvert år en bonus på 100 kr på barnets fødselsdag (som ikke forrentes før det følgende år).

1) Antag en konto åbnes og et engangsbeløb indsættes.

Lad x_t betegne saldoen på kontoen efter t år. Opskriv udviklingen i x_t som en lineær første-ordens differensligning.

$$\underline{x_{t+1}} = \underbrace{(1+0{,}05)\cdot x_t}_{\text{rentetilskrivning}} + \underbrace{100}_{\text{bonus}} = \underline{1{,}05 \cdot x_t + 100} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Dvs.}\\ a = 1{,}05 \\ b = 100\end{array}\right)$$

2) Poul på 9 år åbner en konto og indsætter 1000 kr.

Hvor mange penge står der på kontoen 7 år senere?

$x_0 = 1000$. Brug løsningsformel til at finde x_7:

$$x_7 = (1{,}05)^7\left(1000 - \frac{100}{1-1{,}05}\right) + \frac{100}{1-1{,}05} = (1{,}05)^7(1000+2000) - 2000 \approx 2221 \text{ kr.}$$


HEJ!