Matematik A E2020
Uge 46, Forelæsning 2

Afsnit 12.1-4

Funktioner af flere variable:

Kæderegler, implicit differentiation

I dag

- Kort om midtvejsevalueringen
  - Resultater og kommentarer kan ses på Absalon
- Kæderegler (12.1-2)
  - Differentiation af sammensat funktion, når der indgår fkt af flere variable
- Implicit differentiation - igen! (12.3-4)
  - Generel formel for differentialkvotienten af en implicit given funktion vha partielle afledede

Kædereglen – simpel version (12.1)

Betragt en funktion $z = f(x, y)$ af de to variable x og y

Antag at x og y begge afhænger af en variabel t:

$$x = g(t) \quad \text{og} \quad y = h(t)$$

Så har vi den sammensatte funktion

$$\boxed{z = F(t) = f(g(t), h(t))}$$

Hvordan kan vi bestemme differentialkvotienten $\frac{dz}{dt} = F'(t)$?

Hvis vi kender funktionerne g, h og f, så kan vi finde et udtryk for $F(t)$, som så kan differentieres

Men det er ofte nyttigt med en generel formel for $\frac{dz}{dt} = F'(t)$

-> En "kæderegel"

For den sammensatte funktion $z = F(t) = f(g(t), h(t))$ gælder:

$$F'(t) = f_1'(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_2'(g(t), h(t)) \cdot h'(t),$$

hvilket også kan skrives (husk $x = g(t)$ og $y = h(t)$)

$$\frac{dz}{dt} = f_1'(x, y)\frac{dx}{dt} + f_2'(x, y)\frac{dy}{dt} \qquad (12.1.1), \text{ s. } 444$$

Bemærk analogien til den velkendte kæderegel for fkt af én variabel!

pingo.coactum.de (185415)

Kort øvelse: Bestem $\frac{dz}{dt}$ når $z = xe^y$, hvor $x = t$ og $y = t^2$

Brug først kædereglen.

Check dernæst resultatet ved at udtrykke z som fkt af t og så differentiere

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = f_1'(x,y)\frac{dx}{dt} + f_2'(x,y)\frac{dy}{dt}}$$

Bestem $\frac{dz}{dt}$ når $z = xe^y$, hvor $x = t$ og $y = t^2$

Kædereglen:

$$\frac{dz}{dt} = e^y \cdot 1 + xe^y \cdot 2t$$

$$= e^{t^2} + te^{t^2} \cdot 2t = \underline{(1+2t^2)e^{t^2}}$$

CHECK: $z = te^{t^2}$

$$\frac{dz}{dt} = 1 \cdot e^{t^2} + t\left(2te^{t^2}\right) = \underline{(1+2t^2)e^{t^2}} \checkmark$$

Økonomisk eksempel (Example 12.1.4, s. 445)

Et samfunds "velstand" er en fkt af BNP x og forureningsniveau y: $u(x,y)$

(realistisk at antage $u_1'(x,y) > 0$ og $u_2'(x,y) < 0$)

Forureningsniveau y er fkt $y = h(x)$ af BNP (realistisk at antage $h'(x) > 0$)

Altså kan velstanden udtrykkes som fkt kun af BNP:

$$\boxed{U(x) = u(x, h(x))}$$

1) Brug kædereglen til at bestemme et udtryk for $U'(x)$

$$U'(x) = u_1'(x, h(x)) \cdot 1 + u_2'(x, h(x)) \cdot h'(x)$$

2) Find en nødvendig betingelse for, at x^* er det optimale BNP

Nødv. førsteordensbet. for at x^* er max-pkt:

$U'(x^*) = 0$, dvs $u_1'(x^*, h(x^*)) = -u_2'(x^*, h(x^*)) \cdot h'(x^*)$

Kædereglen – mere generelt (12.2)

Betragt igen en funktion $z = f(x, y)$ af de to variable x og y

Antag nu, at x og y begge afhænger af <u>to</u> variable: t og s:

$$x = g(t, s) \quad \text{og} \quad y = h(t, s)$$

Kædereglen for den sammensatte funktion

$$z = F(t, s) = f(g(t, s), h(t, s))$$

er så:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_1'(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + f_2'(x, y)\frac{\partial y}{\partial t}$$

og $\qquad$ (12.2.1-2), s. 449

$$\frac{\partial z}{\partial s} = f_1'(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + f_2'(x, y)\frac{\partial y}{\partial s}$$

Bemærk analogien til det simplere tilfælde fra tidligere!

Kan generaliseres til tilfælde, hvor z er fkt af n variable

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

og hvert x_i er en fkt af m variable

$$x_i = g_i(t_1, \ldots, t_m) \qquad (\text{for } i = 1, \ldots, n)$$

Så bliver kædereglen (med ren Leibniz-notation):

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

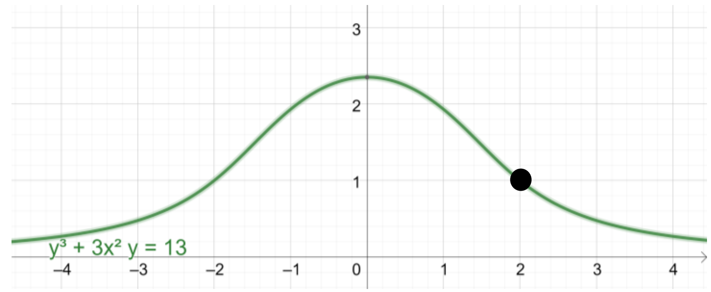
for $j = 1, \ldots, m$

(se (12.2.3), s. 450 for præcise antagelser om f og g_i'erne)

Implicit differentiation - igen! (12.3)

Uge 41, 1 (ex 7.1.2, s. 223): $\boxed{y^3 + 3x^2 y = 13}$

Plot af løsninger (x, y):



Funktion $y = f(x)$!

("implicit given funktion")

Vi fandt tangenthældn. y' i $(2, 1)$ ved implicit diff.:

$$y' \cdot 3y^2 + 6x \cdot y + 3x^2 \cdot y' = 0 \xrightarrow[\text{isolér } y']{} y' = -\frac{2xy}{x^2+y^2} \overset{\text{indsæt } x=2,\ y=1}{=} -\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2+1^2} = -\frac{4}{5}$$

Nu: Udled generel formel for y' for implicit givne funktioner

Bemærk, at kurven ovenfor er niveaukurve for $F(x, y) = y^3 + 3x^2 y$:

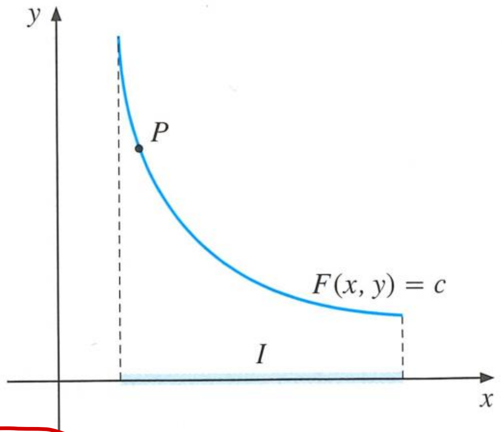
$$F(x, y) = 13$$

Derfor opfylder den implicit givne fkt $y = f(x)$:

$$F(x, f(x)) = 13$$

$(x, f(x))$ løser lign.

Generelt: Betragt niveaukurve for fkt $F(x,y)$



$$\boxed{F(x,y)=c}$$

Antag den definerer y implicit som fkt $y=f(x)$
(omkring pkt P, dvs for x i interval I)

For alle $x\in I$ gælder så: $\boxed{F(x,f(x))=c}$

Differentiér funktionen $u(x)=F(x,f(x))$ vha kædereglen (simpel version!):

$$u'(x)=F_1'(x,f(x))\cdot 1+F_2'(x,f(x))\cdot f'(x)=0$$

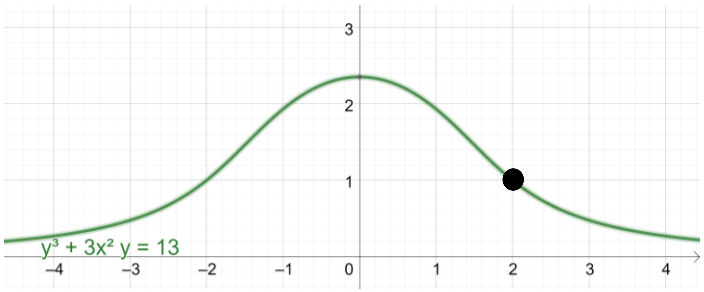
Heraf fås:
$$f'(x)=-\frac{F_1'(x,f(x))}{F_2'(x,f(x))}$$

Altså har vi følgende generelle formel for y' for funktionen $y=f(x)$ givet implicit ved $F(x,y)=c$ ((12.2.3), s. 453):

$$y'=-\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)} \qquad (\text{hvis } F_2'(x,y)\neq 0)$$

Tilbage til eksemplet fra uge 41:

$$\boxed{\underbrace{y^3 + 3x^2y}_{F(x,y)} = 13}$$



$$F_1'(x,y) = 3(2x)y = 6xy$$

$$F_2'(x,y) = 3y^2 + 3x^2 = 3(x^2+y^2)$$

Ved anvendelse af formlen får vi så:

$$y' = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)} = -\frac{6xy}{3(x^2+y^2)} = -\frac{2xy}{x^2+y^2} \checkmark$$

I $(2,1)$: $y' = -\frac{2\cdot 2\cdot 1}{2^2+1^2} = -\frac{4}{5}$ $\checkmark$

Samme resultat!

Bemærk: Vi kan også betragte x som implicit given fkt af y.
Ved argumenter som på forrige slide ovenfor fås formlen:

$$x' = -\frac{F_2'(x,y)}{F_1'(x,y)} = \frac{1}{y'} \qquad (\text{hvis } F_1'(x,y) \neq 0)$$

Kort om impl. givne fkt. af flere var. (12.4)

$$\boxed{F(x, y, z) = c}$$ $\longrightarrow$ Implicit given fkt $z = f(x, y)$

Opfylder: $F(x, y, f(x, y)) = c$

Vha kædereglen kan man differentiere $g(x, y) = F(x, y, f(x, y))$ mht x og y og deraf få formler for $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ og $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ ((12.4.1), s. 457):

$$\boxed{z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \qquad \text{og} \qquad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}}$$

Bemærk analogien til det tidligere resultat for implicit given fkt af én variabel!

Kan videre generaliseres til vilkårligt antal variable (se (12.4.2), s. 459)