Porteføljeteori I

Erhvervsøkonomi

Asger Lau Andersen

Økonomisk Institut, Københavns Universitet

Program

1. Porteføljeteori: Grundlæggende intuition
2. Minikursus i teoretisk statistik
    - Stokastiske variable og sandsynlighedsfordelinger
    - Middelværdi, varians og standardafvigelse
    - Kovarians og korrelationskoefficient
    - Regneregler for sammensatte stokastiske variable
3. Fra teoretisk statistik til virkeligheden
    - Teori vs. empiri, population vs. stikprøve
    - Estimation af teoretiske mål ud fra historiske data

Næste to gange: Den formelle porteføljeteori - Markowitz-modellen

Porteføljeteori: Det basale spørgsmål

En investor ønsker at placere sin formue i en portefølje af værdipapirer med henblik på at opnå et monetært afkast.

Det store spørgsmål: **Hvordan sammensættes porteføljen optimalt?**

Antagelser

- Investoren kan investere i et endeligt antal forskellige værdipapirer
- Kan placere en hvilket som helst andel af formuen i hvert værdipapir, ingen transaktionsomkostninger
- Fundamental usikkerhed omkring værdipapirernes fremtidige afkast
- Investorens præferencer:
  - afkastsøgende: jo højere forventet afkast jo bedre
  - risikoavers: jo mindre usikkerhed, jo bedre

  $\longrightarrow$ vil gerne påtage sig usikkerhed, hvis det bliver betalt med højere forventet afkast

Antagelser

Investoren kender ikke værdipapirernes faktiske fremtidige afkast, men kender:

1. Sandsynlighedsfordelingen over verdens fremtidige tilstande
   - Eksempel: 50% ssh for at subsidie til vindenergi vedtages i USA, 50% ssh for at det ikke vedtages
2. Hvert af værdipapirernes afkast i hver af disse fremtidige tilstande
   - aktier i Vestas og Siemens: 20% afkast hvis subsidie vedtages, -5% hvis ikke vedtages
   - aktier i Shell og BP: 5% afkast hvis subsidie vedtages, 10% hvis ikke vedtages

Diversifikationsprincippet

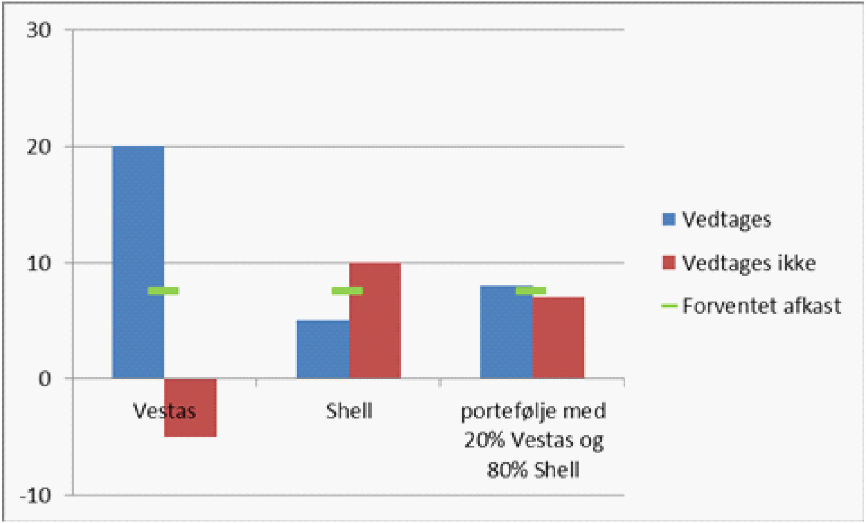
For en portefølje bestående af forskellige værdipapirer er den samlede porteføljerisiko mindre end eller lig det vægtede gennemsnit af risikoen for de enkelte værdipapirer i porteføljen.

Diversifikationsprincippet

Værd at bemærke om diversifikationsprincippet:

- Hvis flere værdipapirer med samme forventede afkast: Muligt at reducere risikoen via diversifikation, *uden at det forventede afkast reduceres!*
  - Ex: Portefølje med Vestas og Shell giver samme forventede afkast som Vestas og Shell hver for sig, men med mindre risiko
- Risikoen reduceres kun lidt, når porteføljen består af værdipapirer med høj grad af samvariation
  - Ex: en portefølje med aktier i Vestas og Siemens har højt afkast, hvis subsidie vedtages, og lavt afkast hvis det ikke vedtages $\longrightarrow$ høj risiko
- Risikoen reduceres mere, når porteføljen består af værdipapirer med lav grad af samvariation
  - Ex: en portefølje med Vestas og Shell har middelhøjt afkast, uanset om subsidiet vedtages eller ej $\longrightarrow$ lav risiko

Illustration af diversifikationsprincippet I



Say what?

Diversifikationsprincippet er en helt central indsigt i porteføljeteori!
$\Longrightarrow$ vigtigt at forstå intuitionen bag.

Hurtig repetitionsøvelse:

- Find noget at skrive med (papir eller computer)
- Brug nøjagtig 2 minutter og 35 sekunder på at beskrive intiutionen bag diversikationsprincippet.
- Tag udgangspunkt i ovenstående eksempel og forestil dig, at modtageren er en ikke-økonom.

- Tænk på en medstuderende, du savner rigtig meget, og send din tekst til vedkommende som et digitalt gækkebrev via https://www.hilsenmig.dk/gaekkebrev/

- Eller: Lad være

Illustration af diversfikationsprincippet II

BERLINGSKE BUSINESS FINANS

Søg Business.dk

Nyheder Investor Økonomi Global Brancher Vækst Karriere Privatøkonomi TV Premium Events

Foto: Jens Nørgaard Larsen

Roskilde Bank smadrer ægtepar

8. juli 2009, 11:49 – **opdateret** 8. juli 2009, 11:52

Pensionen og børnenes opsparing er tabt på aktier, og huset friværdi er havnet i værdiløse udenlandske obligationer. Roskilde-ægtepar ruineret efter møde med Roskilde Bank.

BUSINESS PÅ FACEBOOK

SENESTE NYT PÅ BUSINESS.DK

16:39 Bankerne tager imod hjælp fra Nationalbanken

16:15 Bonusordning i Tryg understøtter konkurrenceevne

15:09 Aktier: Nike spurter frem i USA

14:57 **TV:** Finans-TV: De danske forbrugere er blevet en smule mere forsigtige

14:55 Cheminova-køber venter at lukke handlen i april

Indsigter fra porteføljeteori

Hvor meget kan man reducere risikoen ved at diversificere porteføljen?

- Ved diversifikation kan man fjerne den risiko, der kommer af usikkerhed på virksomhedsniveau
  - bliver Novos nye diabetesmedicin godkendt i USA?
  - bliver Danske Bank idømt bøder eller erstatningskrav for hvidvasksager?
  - kan kunderne lide Carlsbergs nye ølvariant?

- Ved diversifikation kan man IKKE fjerne den risiko, der kommer af usikkerhed på markedsniveau
  - hvad bliver den økonomiske vækst i EU næste år?
  - bliver verden ramt af en global pandemi?

Italien har én aktie, der er steget i år

I et af Europas hårdest ramte lande af coronavirus har kun en enkelt aktie i det ledende indeks formået at stige i år.

ERHVERV | 25.03.2020 KL. 07:07

De italienske børsnoterede selskaber har været hårdt ramt af den coronavirus, som har lukket hele landet ned.

I landets ledende indeks FTSE MIB Indeks - som kan sammenlignes med vores C25 - har kun en enkelt aktie formået at levere en stigning i år, skriver Bloomberg.

Og det er ikke overraskende et firma, der fremstiller testudstyr til coronavirus.

Teori kontra virkelighed

- I virkeligheden kender investorerne selvfølgelig ikke sandsynlighedsfordelingen over verdens fremtidige tilstande og hvert værdipapirers afkast i hver af disse tilstande
- Men investorerne kan lave statistiske analyser af historiske afkastrækker for at bestemme
  - værdipapirernes gennemsnitlige afkast $\longrightarrow$ middelværdi (forventet afkast)
  - graden af variabilitet i afkastene $\longrightarrow$ varians
  - graden af samvariabilitet mellem afkastene $\longrightarrow$ kovarians
- Disse tre statistiske elementer er hovedingredienser i porteføljeteori
- Implicit antagelse: Sandsynlighedsfordelingerne for afkast i fremtiden vil være omtrent, som de har været i fortiden.

Teoretisk Statistik

- et minikursus i centrale begreber

Stokastiske variable

- En **stokastisk variabel** X er en variabel, hvis værdi er usikker på forhånd
  - antag at der er I mulige udfald, når usikkerheden udløses
  - til hver af de mulige udfald hører en sandsynlighed: $p_{1,} p_2 ..., p_i ... p_I$
  - til hver af de I mulige tilstande hører en værdi af X: $x_{1,} x_2 ..., x_i ... x_I$
- Den **realiserede værdi** er den værdi, som X faktisk antager, når usikkerheden udløses.

Eksempel: Terningkast

Resultatet af et forestående terningkast er en stokastisk variabel:

- Seks mulige udfald, svarende til hver af terningens seks sider
- Hvert udfald indtræffer med sandsynlighed $1/6$
- Til de seks udfald hører værdierne 1,2,3,4,5, og 6.

Når terningkastet er udført, er udfaldet ikke længere en stokastisk variabel. I stedet har vi nu fået en *realiseret værdi*, nemlig antallet af prikker på den side, der vender opad.

Stokastiske variable og porteføljeteori I

Hvorfor er teorien om stokastiske variable relevant for porteføljeteori?

- Vi vil opfatte afkastet af et værdipapir som en stokastisk variabel, der realiseres i hver periode
- Vi kan dermed udvikle porteføljeteorien med udgangspunkt i begreber og regneregler for stokastiske variable

Sandsynlighedsfordeling

Hvis en stokastisk variabel har et **endeligt** antal mulige udfald, kan den beskrives ved en **diskret sandsynlighedsfordeling**

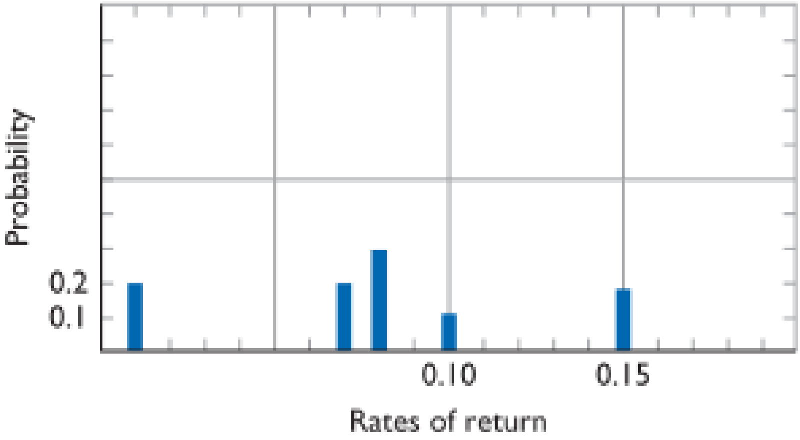
Eksempel: afkastet af en aktie bliver:

- 1% med p=0,2;
- 7% med p=0,2;
- 8% med p=0,3;
- 10% med p=0,1;
- 15% med p=0,2

- Sandsynlighederne summer til 1 $\rightarrow$ vi har fuldstændig beskrevet de mulige udfald

Diskret sandsynlighedsfordeling

Punktsandsynligheder



(a)

Beregning af forventet afkast

- Vi er interesserede i det fremtidige afkast af et bestemt værdipapir.
- Det fremtidige afkast er imidlertid usikkert $\longrightarrow$ en stokastisk variabel.
- Antag, at vi kender sandsynlighedsfordelingen for det fremtidige afkast. Kan vi så beregne et mål for det *forventede* fremtidige afkast?

Middelværdi

Middelværdien (eller den forventede værdi) af en diskret stokastisk variabel X er givet ved:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{I} p_i x_i$$

- Udregnes som et vægtet gennemsnit af de mulige værdier, med værdiernes ssh som vægte

- Fortolkning: den gennemsnitlige realiserede værdi der opnås, hvis X realiseres mange gange

Quiz: Hvad er middelværdien af X, hvis X er antallet af prikker i et forestående terningkast?

- Besvar på socrative.com (room name ERHVERVSOKONOMI2021)
- ... og lad være med at logge ud.

Beregning af risiko

Hvad betyder risiko?

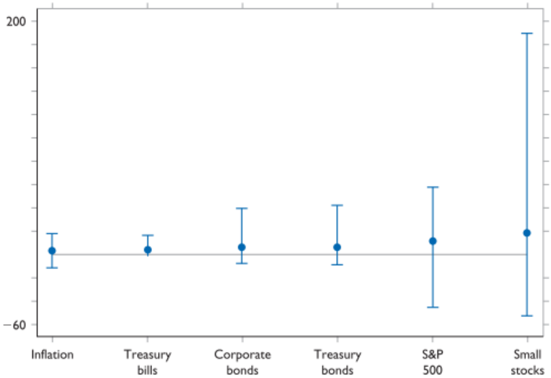
- I daglig tale: Ssh. for at noget går dårligt / værre end forventet
- Overført til værdipapirer: Ssh. for at afkastet bliver "markant" lavere end forventet

Måling af risiko

- De fleste risikomål udtrykker omfanget af *variabilitet*: hvor meget varierer afkastet typisk omkring gennemsnittet?
  - Stor variabilitet $\Longrightarrow$ stor ssh. for markant lavere afkast end forventet

Et simpelt mål for risiko

Et meget simpelt mål er afstanden mellem det værst tænkelige afkast og det bedst tænkelige afkast.



Siger dog intet om, hvor sandsynlige de ekstreme afkast er.

- 0% hvert andet år og 20% hvert andet år → relativt stor risiko
- 0% hvert 100. år, 20% hvert 100. år og 10% i 98 ud af 100 år → relativt lille risiko

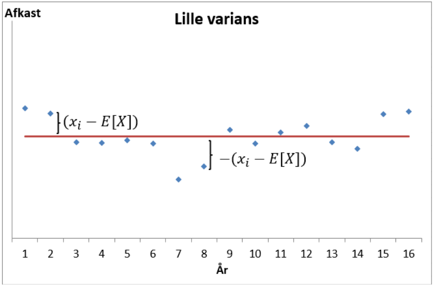
Varians

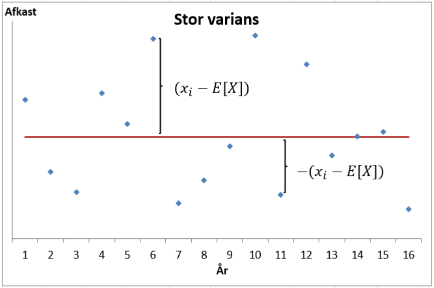
Variansen af en diskret stokastisk variabel X er givet ved:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E([X - E(X)]^2) \\ &= \sum_{i=1}^{I} [x_i - E(X)]^2 p_i \end{aligned}$$

- Middelværdien af den kvadrerede afvigelse fra den forventede værdi.
- Fortolkning: den gennemsnitlige kvadrerede afvigelse fra den forventede værdi, hvis X realiseres mange gange
- Variansen siger noget om variabiliteten af $X \Longrightarrow$ hyppigt anvendt mål for *risiko*
- Lille varians: mulige værdier ligger tæt på middelværdien *og/eller* værdier langt fra middelværdien er usandsynlige

Illustration: Lille vs. stor varians





Kvadrerede afvigelser fra gennemsnit $\longrightarrow$ positive og negative afvigelser behandles ens og udligner ikke hinanden

Standardafvigelse

Standardafvigelsen er defineret som kvadratroden af variansen:

$$\sigma = \left(\sum_{i=1}^{I} [x_i - E(X)]^2 p_i\right)^{\frac{1}{2}}$$

Hvorfor bruger vi ikke bare variansen som risikomål?

- Variansen er en vægtet sum af *kvadrerede* termer $\longrightarrow$ ikke samme enhed som den variabel, hvis variabilitet måles
- Standardafvigelsen måles derimod i samme enhed som den pågældende variabel $\longrightarrow$ lettere at fortolke

Beregning af samvariation

- Fra tidligere: Gevinsten fra diversifikation er større, hvis værdipapirerne i porteføljen har lav grad af *samvariation.*
- Vi har derfor brug for et formelt mål for samvariationen mellem to værdipapirers afkast.

Kovarians

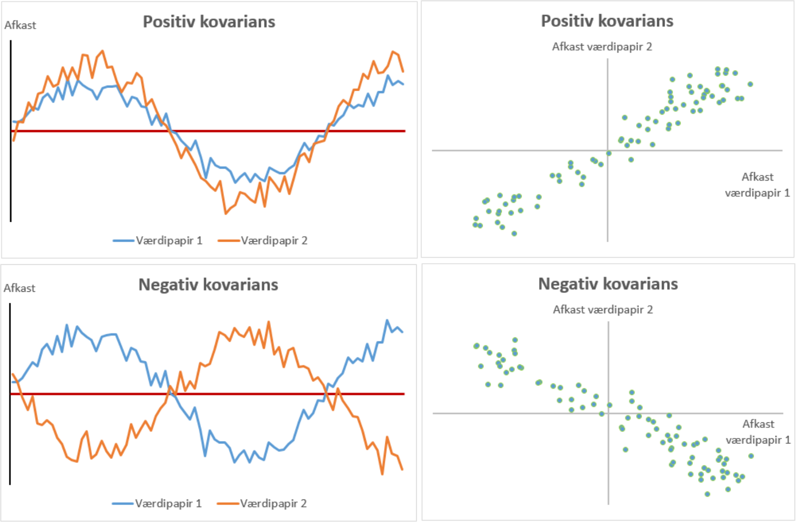
- **Kovariansen** af to diskrete stokastiske variable X og Y er givet ved:

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} &= E\left([X_i - E(X)][Y_i - E(Y)]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{I} [x_i - E(X)][y_i - E(Y)]p_i\end{aligned}$$

- Middelværdien af produktet af variablenes afvigelser fra deres forventede værdier

- Kovariansen udtrykker, hvor meget to stokastiske variable samvarierer
  - hvis $x_i = y_i$ i alle mulige udfald $\rightarrow \sigma_{XY} = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$
  - hvis $x_i = -y_i$ i alle mulige udfald $\rightarrow \sigma_{XY} = -\sigma_X^2 = -\sigma_Y^2$
  - hvis værdien af X er uafhængig af værdien af Y $\rightarrow \sigma_{XY} = 0$

Illustration: Positiv vs. negativ kovarians



Graden af samvariation

- Det interesserer os ofte, **i hvilken grad** to variable samvarierer
- Kovariansen er ikke velegnet som mål for dette, fordi dens størrelse er afhængig af de stokastiske variables skala
- Eksempel
  - to variable der med ssh=1/2 begge tager værdien 1 og med ssh=1/2 begge tager værdien 0 $\rightarrow \sigma_{XY} = 0.25$
  - to variable der med ssh=1/2 begge tager værdien 100 og med ssh=1/2 begge tager værdien 0 $\rightarrow \sigma_{XY} = 2500$

Korrelationskoefficient

- **Korrelationskoefficienten** for to stokastiske variable X og Y er givet ved:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

- Korrelationskoefficienten udtrykker samvariation, ligesom kovariansen, men er skaleret til intervallet $[-1;1]$

- Eksempel
  - to variable der med ssh=1/2 begge tager værdien 1 og med ssh=1/2 begge tager værdien 0 $\rightarrow \rho_{XY} = 1$
  - to variable der med ssh=1/2 begge tager værdien 100 og med ssh=1/2 begge tager værdien 0 $\rightarrow \rho_{XY} = 1$

- Korrelationskoefficienten definerer begrebet *korrelation* mellem to variable
  - $\rho_{XY} > 0$: positivt korrelerede
  - $\rho_{XY} < 0$: negativt korrelerede
  - $\rho_{XY} = 0$: ikke korrelerede

Checkspørgsmål

1. Varians: Hvad er variansen af den stokastiske variabel, der er givet ved antallet af prikker ved et enkelt slag med en terning?
2. Kovarians: Kast plat-eller-krone med to forskellige mønter. Lad plat være forbundet med værdien 0 og krone være forbundet med værdien 1. Hvad er kovariansen for de to stokastiske variable, der er givet ved udfaldene af de to kast?

Indtast svar i Socrative (room name ERHVERVSOKONOMI2021)

Stokastiske variable og porteføljeteori II

Hvorfor er teorien om stokastiske variable relevant for porteføljeteori?

- Vi vil opfatte afkastet af et værdipapir som en stokastisk variabel, der realiseres i hver periode
- Vi kan dermed udvikle porteføljeteorien med udgangspunkt i begreber og regneregler for stokastiske variable
- Porteføljer består af kombinationer af værdipapirer
- $\Longrightarrow$ nødvendigt at kende til regneregler for middelværdi og varians af *kombinationer* af stokastiske variable

Regneregler for sammensatte stokastiske variable

Betragt en stokastisk variabel Z, som er et vægtet gennemsnit af to andre stokastiske variable, X og Y:

$$Z = w_X X + w_Y Y$$

hvor w_X og w_Y er konstante vægte

- Middelværdien af Z er:

  $$E[Z] = w_X E[X] + w_Y E[Y]$$

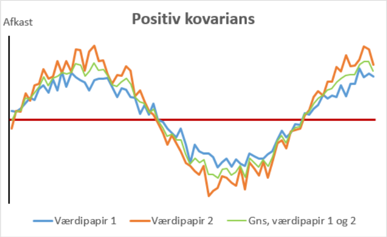
  $\rightarrow$ middelværdien af Z er et vægtet gennemsnit af middelværdierne af de to komponenter

- Variansen af Z er

  $$\sigma_Z^2 = w_X^2 \sigma_X^2 + w_Y^2 \sigma_Y^2 + 2 w_X w_Y \sigma_{XY}$$

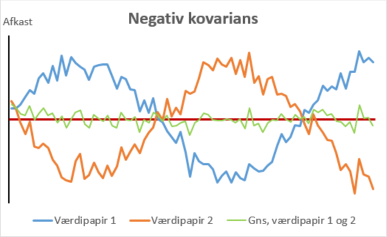
  $\rightarrow$ variansen af Z afhænger både af varianserne af X og Y samt af deres *kovarians*

Illustration: Varians af sammensat stokastisk variabel



Positiv kovarians ml. X og Y

$\Longrightarrow$ stor varians i $Z = 0,5X + 0,5Y$



Negativ kovarians ml. X og Y

$\Longrightarrow$ lille varians i $Z = 0,5X + 0,5Y$

Implikationer af regnereglen for varians

- Omskriv variansen af Z vha formlen for ρ_{XY}:

$$\sigma_Z^2 = w_X^2\sigma_X^2 + w_Y^2\sigma_Y^2 + 2w_X w_Y \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$$

$\rightarrow$jo større korrelation mellem X og Y, jo større varians har Z

- Hvad sker der, hvis $\rho_{XY} = 1$?

$$\sigma_Z^2 = (w_X\sigma_X + w_Y\sigma_Y)^2$$

$\rightarrow$standardafvigelsen af Z er et vægtet gennemsnit af standardafvigelserne af X og Y

- Hvad sker der, hvis $\rho_{XY} < 1$?

$$\sigma_Z^2 < (w_X\sigma_X + w_Y\sigma_Y)^2$$

$\rightarrow$standardafvigelsen af Z er *mindre* end et vægtet gennemsnit af standardafvigelserne af X og Y

Sammensatte stokastiske variable - opsummering

- For en stokastisk variabel $Z = w_X X + w_Y Y$ gælder:

$$E[Z] = w_X E[X] + w_Y E[Y]$$

$$\sigma_Z \leq w_X \sigma_X + w_Y \sigma_Y$$

- For givne σ_X og σ_Y: lavere korrelation mellem X og Y (lavere ρ_{XY}) $\iff$ mindre σ_Z

Fra teoretisk statistik til virkeligheden

Teori vs. empiri

Middelværdi, varians og kovarians er *teoretiske* begreber for stokastiske variable.

- Beregning af dem forudsætter, at man kender sandsynlighedsfordelingen for samtlige mulige udfald
- Meget sjældent tilfældet i virkeligheden (undtagelser: terningkast, Lotto, lodtrækning)
- I praksis kan vi vurdere ("estimere") størrelsen af de teoretiske begreber ved brug af *empiriske* mål, som beregnes ud fra observerede realiserede værdier af de stokastiske variable.

I porteføljesammenhæng:

- *Fremtidige* afkast af værdipapirer opfattes som stokastiske variable, som har bestemte teoretiske egenskaber (middelværdi, varians, kovarians)
- *Historiske* afkast opfattes som realiserede værdier af de *samme* stokastiske variable. Beskrives ved hjælp af *empiriske, stikprøvebaserede mål*.

Population vs. stikprøve

I statistik skelner man mellem en *population* og en *stikprøve.*
Eksempel: Danmarks befolkning (population) vs. de mennesker, der er i et lokale (stikprøve).

- Populationen er kendetegnet ved en fordeling, som kan beskrives med (ukendte) teoretiske parametre
- Stikprøven kan beskrives med empiriske mål

I porteføljesammenhæng:

- Population: Samtlige fortidige og fremtidige afkast
- Stikprøve: (delmængde af) historiske afkast

Estimation af populationsparametre

Det centrale problem: Vi er interesserede i de teoretiske populationsparametre, men disse er som oftest ukendte.
Løsning: Estimer dem vha. empiriske mål baseret på en stikprøve.

Virker det?

- JA! Hvis stikprøven er *tilfældigt udtrukket*..
- I så fald kan man vise, at de empiriske stikprøvemål i *gennemsnit* rammer rigtigt som mål for de teoretiske populationsparametre.

Empirisk mål for forventet afkast: Aritmetisk gns.

- Husk: Det forventede afkast for et værdipapir er givet ved *middelværdien* af afkastet.
- Estimér denne ved at beregne det **aritmetiske gennemsnit**:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

  baseret på stikprøve med n realiserede afkast.
- Det aritmetiske gennemsnit er *stikprøveækvivalenten* til middelværdien.

Empiriske mål for risiko: Empirisk varians / empirisk standardafvigelse.

- Husk: Risiko udtrykkes ofte vha. *variansen* eller *standardafvigelsen* for værdipapirets afkast .
- Estimér variansen ved at beregne den **empiriske varians**:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

- "gennemsnitlige kvadrerede afvigelse fra gennemsnittet" (men bemærk at der divideres med $n-1$ i stedet for n)
- Den **empiriske standardafvigelse** $\widehat{\sigma}$ beregnes som kvadratroden af den empiriske varians.

Empiriske mål for samvariation: Empirisk kovarians / empirisk korrelationskoefficient.

- Husk: Samvariation mellem værdipapirers afkast udtrykkes vha. *kovariansen* eller *korrelationskoefficienten* mellem dem.
- Estimér kovariansen ved at beregne den **empiriske kovarians**:

$$\widehat{\sigma}_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

- "gennemsnitlige produkt af variablenes afvigelser deres eget gennemsnit"
(men vi dividerer igen med $n-1$ i stedet for n)
- Den **empiriske korrelationskoefficient** beregnes som $\widehat{\rho}_{XY} = \widehat{\sigma}_{XY} / (\widehat{\sigma}_X \cdot \widehat{\sigma}_Y)$.

Populationsparametre og stikprøveækvivalenter - overblik

Forventet afkast:

- Teoretisk populationsparam.: Middelværdi, $E(X) = \sum_{i=1}^{I} p_i x_i$
- Empirisk stikprøveækvivalent: Aritmetisk gns. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Variabilitet / risiko:

- Population.:
  - Varians, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{I}(x_i - E(X))^2 p_i$
  - Standardafvigelse: $\sigma = \left(\sum_{i=1}^{I}(x_i - E(X))^2 p_i\right)^{\frac{1}{2}}$
- Stikprøve.:
  - Empirisk varians: $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
  - Empirisk standardafvigelse: $\widehat{\sigma} = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Samvariation mellem to aktiver:

- Pop.: Kovarians, $\sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{I}(x_i - E(X))(y_i - E(Y))p_i$
- Stikprøve: Empirisk kovarians
  $\widehat{\sigma}_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$

Empiriske afkastmål baseret på historiske data fra USA

Table 6-6 Summary Statistics of Annual Total Returns for Major Financial Assets for 85 Years, January 1, 1926–December 31, 2010, Nominal and Inflation-Adjusted

	Arithmetic		Geometric
	Mean	**Std.Dev.**	**Mean**
Nominal Total Returns Summary			
S&P 500 Composite	11.5%	19.9%	9.6%
Aaa Corporate Bond	6.3	8.5	5.9
US Treasury Bond	5.8	9.2	5.4
Treasury bill	3.7	3.0	3.6
Inflation	3.1	4.2	3.0
Inflation-Adjusted Total Returns Summary			
S&P 500 Composite	8.3%	19.9%	6.3%
Aaa Corporate Bond	3.3	9.7	2.8
US Treasury Bond	2.7	10.3	2.3
Treasury bill	0.7	3.9	0.6

Source: Jack W. Wilson and Charles P. Jones