Ugeseddel 12: Generel Ligevægt

– med svar –

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber

1. Mulig allokering
2. Pareto-stabil allokering
3. TRS = MRS
4. Walras-ligevægt
5. Koopmans-diagram
6. Første velfærdsteorem
7. Andet velfærdsteorem

Færdigheder

1. Finde Pareto-stabile allokeringer
2. Finde Walras-ligevægt
3. Afgør om Pareto-optimal allokering kan implementeres som en Walras-ligevægt

Checkopgave

Betragt en Koopmans-økonomi med en forbruger, som har præferencer over fritid og et forbrugsgode, og en virksomhed, ejet af forbrugeren, der har adgang til en produktionsteknologi, hvor arbejdskraft kan transformeres til forbrugsgodet.

(a) Forklar i ord, hvad en Walras-ligevægt er i en Koopmans-økonomi
Svar: Det er et sæt af pris, hvor

i. Arbejdsmarkedet clearer

ii. Varemarkedet clearer

og

i. Virksomheden profitmaksimerer givet priserne

ii. Forbrugeren nyttemaksimerer givet priserne og profitten fra virksomheden

(b) Forklar i ord, hvad en Pareto-stabil allokering er i en Koopmans-økonomi
Svar: En Pareto-stabil allokering er en mulig allokering, hvor der ikke findes nogen allokering i økonomien, der stiller forbrugeren bedre.

1 Walras-ligevægt

Gennemgang: Regnes ved tavlen.

Arne er landmand. Han har lige høstet og har produceret en sæk, der rummer 12 kg havre. Arne kan bruge sin havre til at spise (havregrød), eller han kan fodre sin ko med havren og derved få mælk til sine havregryn. Hvis han ikke fodrer koen, får han ingen mælk, mens for hvert kilo havre koen får, da får Arne mælk svarende til kvadratroden af havremængden, $y = f(z) = z^{1/2}$, hvor z er mængden af havre og y er mængden af mælk. Arnes præferencer er givet ved nyttefunktionen $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$, hvor x_1 er havre og x_2 er mælk, og $0 < a < 1$.

(a) Beskriv Arnes situation som en produktionsøkonomi a la Koopmans

Svar: En Koopmans-økonomi består af

i. En initialbeholdning

$$\boldsymbol{e} = (e_1, e_2) = (12, 0)$$

hvor e_1 er beholdning af havre og e_2 er beholdning af mælk

ii. En produktionsteknologi

$$y = f(z) = z^{1/2}$$

hvor z er input af havre og y er output af mælk

iii. Forbrugerens præferencer

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a} \quad \text{hvor } a \in (0, 1)$$

hvor x_1 er forbrug af havre og x_2 er forbrug af mælk

(b) Find Walras-ligevægten for denne økonomi og illustrér den i et Koopmans-diagram

Svar: Walras-ligevægten består af

i. En mulig produktionsplan (z, y), hvor $y = f(z)$

ii. En mulig forbrugsplan (x_1, x_2), hvor

$$\begin{aligned} x_1 &= e_1 - z \\ x_2 &= e_2 + y \end{aligned}$$

iii. Et prissystem (p_1, p_2), der gør at

1) Produktionsplanen er profitmaksimerende givet priserne (p_1, p_2) med profitten π

2) Forbrugsplanen er nyttemaksimerende givet priserne (p_1, p_2) og indkomsten $m = p_1e_1 + p_2e_2 + \pi$

Vi normaliserer $p_2 = 1$. Vi opstiller først virksomhedens profitmaksimeringsproblem.

$$\begin{aligned}\pi &= \max_{y,z} y - p_1 z \quad \text{u.b.b.} \quad y = z^{1/2} \\ &= \max_{z} \ \pi = z^{1/2} - p_1 z\end{aligned}$$

Og finder førsteordensbetingelsen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}z^{-1/2} - p_1 &= 0 \Leftrightarrow \\ z^{-1/2} &= 2p_1 \\ z &= \left(\frac{1}{2p_1}\right)^2\end{aligned}$$

Fra hvilken vi umiddelbart kan udlede virksomhedens output (koens produktion af mælk)

$$y = z^{1/2} = \frac{1}{2p_1}$$

Vi kan nu beregne virksomhedens profit

$$\pi = y - p_1 z = \frac{1}{2p_1} - p_1\left(\frac{1}{2p_1}\right)^2 = \frac{1}{2p_1} - \frac{1}{4p_1} = \frac{1}{4p_1} > 0$$

som vi kan se er positiv. Produktionsfunktionen er strengt konkav, så vi er sikre på, at have fundet det globale maksimum.

Vi opstiller nu forbrugerens nyttemaksimeringsproblem

$$\max_{x_1,x_2} x_1^a x_2^{1-a} \quad \text{u.b.b.} \quad m = p_1e_1 + p_2e_2 + \pi$$

Vi beregner først forbrugerens indkomst

$$m = p_1e_1 + p_2e_2 + \pi = p_1 \cdot 12 + 1 \cdot 0 + \frac{1}{4p_1} = 12p_1 + \frac{1}{4p_1} = \frac{48p_1^2 + 1}{4p_1}$$

Vi bemærker, at forbrugerens præferencer er givet ved Cobb-Douglas nyttefunktion for hvilken vi kender det nyttemaksimerende forbrugsplan

$$\begin{aligned}x_1 &= a\frac{m}{p_1} = a\frac{\frac{48p_1^2+1}{4p_1}}{p_1} = a\frac{48p_1^2 + 1}{4p_1^2} \\ x_2 &= (1-a)\frac{m}{p_2} = (1-a)\frac{48p_1^2 + 1}{4p_1} = (1-a)\frac{48p_1^2 + 1}{4p_1}\end{aligned}$$

Vi betragter nu markedet for mælk for hvilket der gælder

$$
\begin{aligned}
e_2 &= 0 \\
y &= \frac{1}{2p_1} \\
x_2 &= (1-a)\frac{48p_1^2+1}{4p_1}
\end{aligned}
$$

Vi benytter nu, at allokeringen skal være mulig dvs. $x_2 = e_2 + y \Leftrightarrow x_2 = y$

$$
\begin{aligned}
(1-a)\frac{48p_1^2+1}{4p_1} &= \frac{1}{2p_1} \Leftrightarrow \\
(1-a)\left(48p_1^2+1\right) &= 2 \Leftrightarrow \\
48p_1^2+1 &= \frac{2}{1-a} \Leftrightarrow \\
p_1 &= \left(\frac{1+a}{48(1-a)}\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Vi kan nu beregne produktionsplanen

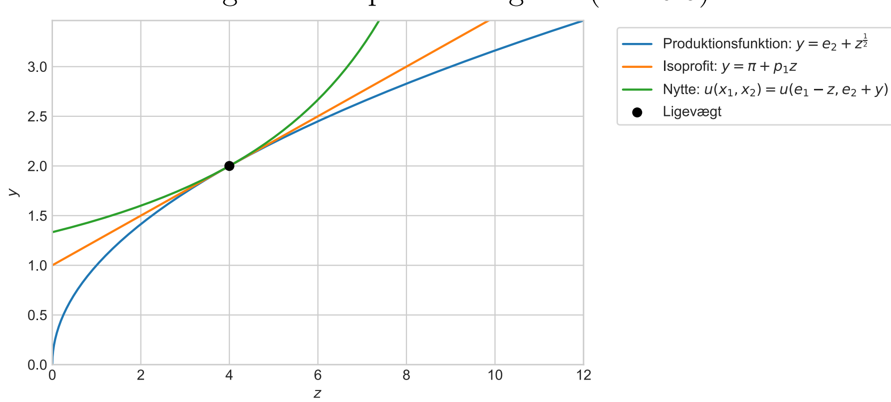
$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1}{4p_1^2} = \frac{1}{4\frac{1+a}{48(1-a)}} = \frac{12(1-a)}{1+a} \\
y &= z^{1/2} = \left(\frac{12(1-a}{1+a)}\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Og forbrugsplanen

$$\begin{aligned}
x_1 &= 12a + \frac{a}{4p_1^2} \\
&= a\left(12 + \frac{1}{4p_1^2}\right) \\
&= a\left(12 + \frac{12(1-a)}{1+a}\right) \\
&= \frac{24a}{1+a} \\
x_2 &= (1-a)\frac{(48p_1^2+1)}{4p_1} \\
&= (1-a)\left(12p_1 + \frac{1}{4p_1}\right) \\
&= (1-a)p_1\left(12 + \frac{1}{4p_1^2}\right) \\
&= (1-a)\left(\frac{1+a}{48(1-a)}\right)^{1/2}\frac{24}{1+a} \\
&= \left(\frac{12(1-a)}{1+a}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Alternativt (og nemmere) kan mulighedsbetingelserne benyttes til at bestemme forbruget. Se Koopmans-diagrammet i Figur 1.

Figur 1: Koopmans-diagram ($a = 0.5$)



(c) Hvilken rolle spiller parameteren a?

Svar: Når a stiger får forbrugeren relativt mere nytte af x_1 ift. x_2 dermed stiger efterspørgslen efter x_1, og han ønsker at transformere mindre x_1 til x_2 vha. sin produktionsteknologi. Det presser dette prisen op,

$$\frac{dp_1}{da} > 0$$

Vi kan også se at

$$\frac{dz}{da} < 0$$
$$\frac{dy}{da} < 0$$

og

$$\frac{dx_1}{da} > 0$$
$$\frac{dx_2}{da} < 0$$

2 Efficiens

Gennemgang: Opgave a)+b) regnes ved tavlen. Opgave c)+d) regnes selv.

En "Robinson Crusoe"-økonomi (Koopmans-økonomi) har to goder, en forbruger og en virksomhed. Virksomheden er karakteriseret ved produktionsfunktionen $y = \frac{1}{2}\ln(2z + K) - \frac{1}{2}\ln(K)$, hvor z er mængden af arbejdskraft, der bruges som input, y er mængden af output, og $K > 0$ er en konstant. Forbrugeren ejer beholdningen $(L, e) \in \mathbb{R}^2_{++}$og har nyttefunktionen $u(f, x) = 2f + x$, hvor f er mængden tid, der nydes som fritid, og x er mængden af forbrugsvare. Forbrugeren er den eneste ejer af virksomheden.

(a) Definér begrebet en Pareto-stabil allokering

Svar: De Pareto-stabile allokeringer er de allokeringer hvor

i. Produktionsplanen (z, y) og forbrugsplanen (f, x) er mulige dvs.

$$\begin{aligned} f &= L - z \\ x &= e + y \end{aligned}$$

ii. Der ikke findes nogen allokering i økonomien, der stiller forbrugeren bedre

(b) Opstil samfundsplanlæggerens problem

Svar: Samfundsplanlæggeren maksimerer forbrugerens nytte givet mulighedsbetingelserne og de teknologiske betingelser

$$\begin{aligned}\max_{x,f,z,y} \; & u(f,x) = 2f + x \quad \text{u.b.b} \\ & f = L - z \\ & x = e + y \\ & y = \frac{1}{2}\ln(2z+K) - \frac{1}{2}\ln(K)\end{aligned}$$

Som kan reduceres til

$$\max_z \; U(z) = \max_z \; 2(L-z) + e + \frac{1}{2}\ln(2z+K) - \frac{1}{2}\ln(K)$$

(c) Find de Pareto-stabile allokeringer i økonomien

Svar: De Pareto-stabile allokeringer i økonomien kan findes som løsningen til samfundsplanlæggerens problem.

Vi kan nu beregne samfundsplanlæggerens førsteordensbetingelse

$$\begin{aligned}-2 + \frac{1}{2z+K} &= 0 \Leftrightarrow \\ 2 &= \frac{1}{2z+K} \Leftrightarrow \\ 4z + 2K &= 1 \Leftrightarrow \\ z &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}K\end{aligned}$$

Bemærk at -2 er nyttetabet af mindre fritid og $\frac{1}{2z+K}$ er nyttegevinsten af øget forbrug. Andenordensbetingelsen er altid overholdt da

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} = -2\frac{1}{(2z+K)^2} < 0$$

Hvis $K \geq \frac{1}{2}$ er nyttegevinsten af forbrug mindre end nytte nyttetabet fra fritid for alle $z > 0$. Derfor må løsningen være $z = 0$, og den Pareto-stabile allokering er:

$$\begin{aligned}\left(f^{PA}, x^{PA}\right) &= (L, e) \\ \left(z^{PA}, y^{PA}\right) &= (0, 0)\end{aligned}$$

Hvis $K \in (0, \frac{1}{2})$ har vi

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\ln(2z+K) - \frac{1}{2}\ln(K) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}K\right) + K\right) - \frac{1}{2}\ln(K) \\
&= \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2} - K + K) - \frac{1}{2}\ln(K) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2K}\right)
\end{aligned}$$

og den Pareto-stabile allokering er derfor

$$\begin{aligned}
\left(f^{PS}, x^{PS}\right) &= \left(L - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}K\right), e + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2K}\right)\right) \\
\left(z^{PS}, y^{PS}\right) &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}K, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2K}\right)\right)
\end{aligned}$$

(d) Hvilken rolle spiller K?

Svar: K bestemmer bl.a. marginalproduktet af arbejde

$$MP_z(z) = \frac{\partial\left[\frac{1}{2}\ln(2z+K) - \frac{1}{2}\ln(K)\right]}{\partial z} = \frac{1}{2z+K}$$

Da forbrugeren altid har $MRS(f,x) = 2$ vil produktionsteknologien kun skulle bruges hvis

$$\begin{aligned}
MP_z(0) &> 2 \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2 \cdot 0 + K} &> 2 \Leftrightarrow \\
K &< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3 Robinson Crusoe

Gennemgang: Opgave a)-d) regnes selv. Opgave e) regnes på tavlen.

Betragt en økonomi med én forbruger, Robert Kruse. Der er i økonomien to varer. Vare 1 er tid, som kan anvendes som arbejdskraft i en produktionsproces eller forbruges som fritid. Vare 2 er mad. Robert har præferencer, der kan repræsenteres af nyttefunktionen $u(f, x) = fx$. Der findes desuden en produktionsteknologi, hvor der ved hjælp af arbejdskraft kan produceres mad. Produktionsfunktionen har formen $y = az$, hvor y er output af mad, og z er input af arbejdskraft.

(a) Antag, at Robert har initialbeholdningen $(24, 0)$, og at $a = 1$. Find økonomiens Pareto-stabile allokering.

Svar: De Pareto-stabile allokeringer opfylder:

i. Produktionsplanen (z, y) og forbrugsplanen (f, x) er mulige, dvs.

$$\begin{aligned} f &= 24 - z \\ x &= 0 + y = y \end{aligned}$$

ii. Der findes ikke nogen allokering i økonomien, der stiller forbrugeren bedre

Vi samfundsplanlæggerens problem, maksimering af forbrugerens nyttemaksimeringsproblem givet mulighedsbetingelserne og de teknologiske betingelser,

$$\begin{aligned} \max_{x,f,z,y} \; & u(f, x) = fx \quad \text{u.b.b} \\ & f = 24 - z \\ & x = y \\ & y = z \end{aligned}$$

Som kan reduceres til

$$\max_z U(z) = \max_z \; (24 - z)z = \max_z \; 24z - z^2$$

Vi kan nu finde førsteordensbetingelsen

$$\begin{aligned} 24 - 2z &= 0 \Leftrightarrow \\ 2z &= 24 \Leftrightarrow \\ z &= 12 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Vi har fundet et maksimum da

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} = -2 < 0$$

Fra hvilken vi kan beregne den Pareto-stabile produktion

$$y = z = 12$$

Ved at benytte at allokeringen skal være mulig fås dermed den Pareto-stabile forbrugsplan

$$\begin{aligned} f &= 24 - z = 24 - 12 = 12 \\ x &= y = 12 \end{aligned}$$

Opsummerende har vi altså de Pareto-stabile allokering

$$\begin{aligned} \left(f^{PS}, x^{PS}\right) &= (12, 12) \\ \left(z^{PS}, y^{PS}\right) &= (12, 12) \end{aligned}$$

(b) Kan vi være sikre på at denne allokering kan implementeres som markedsligevægt? Forsøg at gøre det (sæt mad som numeraire)

Svar: Vi kan ikke være sikre. Fordi produktionsfunktionen ikke er strengt konkav kan vi ikke benytte andet velfærdsteorem. Vi forsøger nu at implementere allokeringen ved prissystemet (w, p). Vi opstiller først virksomhedens maksimeringsproblem

$$\begin{aligned} \pi &= \max_{y,z} \; py - wz \quad \text{u.b.b.} \quad y = z \\ &= \max_{z} \; pz - wz \end{aligned}$$

Og beregner førsteordensbetingelsen

$$p - w = 0 \Leftrightarrow p = w$$

Fra hvilket det umiddelbart fremgår at indre løsninger (herunder den Pareto-stabile allokering beregnet i a) kræver at $p = w$. Vi normaliserer nu $p = 1$. Vi ved derfor allerede at $w = 1$ såfremt allkoeringen skal kunne implementeres. Det fremgår umiddelbart at virksomheden får nulprofit under dette prissystem uanset produktion dvs. $\pi = 0$. Forbrugerens indkomst bestemmes nu

$$m = 24w + 0p + \pi = 24$$

Vi bemærker at forbrugerens præferencer er givet ved en Cobb-Douglas nyttefunktion for hvilken vi kender det nyttemaksimerende forbrugsplan

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}\frac{m}{w} = \frac{1}{2}\frac{24}{1} = 12 \\ x &= \frac{1}{2}\frac{m}{p} = \frac{1}{2}\frac{24}{1} = 12 \end{aligned}$$

Fra hvilket det netop fremgår at prissystemet $(w, p) = (1, 1)$ implementer den Pareto-stabile allokering. Vi kan altså i dette tilfælde godt implementere de Pareto-stabile allkoeringer selvom betingelsen for andet velfærdsteorem ikke er overholdt.

(c) Antag, at Robert har initial-beholdningen $(24, 12)$, og at $a > 0$. Find økonomiens Pareto-stabile allokering.

Svar: De Pareto-stabile allokeringer opfylder:

i. Produktionsplanen (z, y) og forbrugsplanen (f, x) er mulige dvs.

$$\begin{aligned} f &= 24 - z \\ x &= 12 + y \end{aligned}$$

ii. Der findes ikke nogen allokering i økonomien der stiller forbrugeren bedre.

Vi samfundsplanlæggerens problem, maksimering af forbrugerens nyttemaksimeringsproblem givet mulighedsbetingelserne og de teknologiske betingelser, er altså

$$\begin{aligned} \max_{x,f,z,y} \; & u(f, x) = fx \quad \text{u.b.b} \\ & f = 24 - z \\ & x = 12 + y \\ & y = az \end{aligned}$$

Som kan reduceres til

$$\begin{aligned} & \max_z U(z) \\ = & \max_z \,(24 - z)(12 + az) \\ = & \max_z \,288 + 24az - 12z - az^2 \end{aligned}$$

Vi kan nu finde førsteordensbetingelsen

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= 24a - 12 - 2az = 0 \Leftrightarrow \\ 2az &= 24a - 12 \Leftrightarrow \\ z &= \frac{12a - 6}{a} \Leftrightarrow \\ z &= 12 - \frac{6}{a} \end{aligned}$$

Vi har fundet et maksimum da

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} = -2a < 0$$

Fra hvilken vi kan beregne den Pareto-stabile produktion

$$y = az = 12a - 6$$

Vi bemærker indre løsninger kræver $z = 12 - \frac{6}{a} > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$

Ved at benytte at allkoeringen skal være mulig fås dermed den indre Pareto-stabile forbrugsplan

$$\begin{aligned} f &= 24 - z = 24 - \left(12 - \frac{6}{a}\right) = 12 + \frac{6}{a} \\ x &= 12 + y = 12 + 12a - 6 = 12a + 6 \end{aligned}$$

Opsummerende har vi altså den Pareto-stabile allokering for $a > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \left(f^{PS}, x^{PS}\right) &= \left(12 + \frac{6}{a}, 12a + 6\right) \\ \left(z^{PS}, y^{PS}\right) &= \left(12 - \frac{6}{a}, 12a - 6\right) \end{aligned}$$

Og for $a \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \left(f^{PS}, x^{PS}\right) &= (24, 12) \\ \left(z^{PS}, y^{PS}\right) &= (0, 0) \end{aligned}$$

(d) Kan vi være sikre på at denne allokering kan implementeres som markedsligevægt? Forsøg at gøre det (sæt mad som numeraire)

Svar: Vi kan ikke være sikre. Da produktionsfunktionen ikke er strengt konkav kan vi ikke benytte andet velfærdsteorem. Vi forsøger nu at implementere allokeringen ved prissystemet (w, p). Vi opstiller først virksomhedens maksimeringsproblem

$$\begin{aligned} \pi &= \max_{y,z} py - wz \quad \text{u.b.b.} \quad y = az \\ &= \max_{z} \ \pi = paz - wz \end{aligned}$$

Og beregner førsteordensbetingelsen

$$pa - w = 0 \Leftrightarrow pa = w$$

Vi bestemmer først prissystemet for $a > \frac{1}{2}$. Det fremgår af førsteordensbetingelsen at den Pareto-stabile allokering beregnet i c) kræver at $pa = w$. Vi normaliserer nu $p = 1$. Vi ved derfor allerede nu at $w = a$ såfremt allokeringen skal kunne implementeres. Det fremgår umiddelbart at virksomheden får nulprofit under dette prissystem uanset produktion dvs. $\pi = 0$. Forbrugerens indkomst bestemmes nu

$$m = 24w + 12p + \pi = 24a + 12$$

Vi sætter det nyttemaksimerende forbrugsplan for Cobb-Douglas præferencerne lig den ønskede Pareto-stabile allokering

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}\frac{m}{w} = \frac{1}{2}\frac{24a + 12}{a} = 12 + \frac{6}{a} \\ x &= \frac{1}{2}\frac{m}{p} = \frac{1}{2}\frac{24a + 12}{1} = 12a + 6 \end{aligned}$$

Fra hvilket det netop fremgår at prissystemet $(w,p) = (a,1)$ implementer den Pareto-stabile allokering.

Vi bestemmer nu prissystemet for $a \leq \frac{1}{2}$. Det fremgår af virksomhedens førsteordensbetingelse af denne den stabile allokering kræver at $w \geq pa$. Vi ved derfor allerede nu, at $w \geq a$ såfremt allkoeringen skal kunne implementeres med $p = 1$ som numeraire. Virksomheden producerer ikke noget under disse priser, hvorfor profitten oplagt er 0 dvs. $\pi = 0$. Forbrugerens indkomst bestemmes nu

$$m = 24w + 12p = 24w + 12$$

Vi sætter nu forbrugerens efterspørgsel lig den Pareto-stabile allokering hvor virksomheden producerede 0.

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{2}\frac{24w+12}{w} &= 24 \Leftrightarrow \\ 12 + \frac{6}{w} &= 24 \Leftrightarrow \\ w &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Walras' lov sikrer at denne pris ligeledes implementerer den ønskede allokering på »fritidsmarkedet«. Men vi viser nu at dette rent faktisk gør sig gældende

$$x = \frac{1}{2}\frac{24 \cdot \frac{1}{2} + 12}{1} = 12$$

Fra hvilket det netop fremgår at prissystemet $(w,p) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ implementer den Pareto-stabile allokering.

(e) Hvilken rolle spiller parameteren a?

Svar: I den lineære produktionsfunktion angiver parameteren a, marginalproduktet af arbejdskraft. Des højere a des mere x får forbrugeren ud af at afgive fritid som arbejdskraft. Det er derfor helt oplagt at

$$\begin{aligned} \frac{df}{da} &< 0 \\ \frac{dx}{da} &> 0 \end{aligned}$$

Bemærk dog, at forbrugeren aldrig vil forbruge mindre end 12 timer fritid

$$\lim_{a \to \infty} f = 12$$

For $a \leq \frac{1}{2}$ ønskede forbrugeren ikke at benytte sig at produktionsteknologien. Marginalproduktet af arbejdskraft er givet ved

$$MP_z = \frac{\partial y}{\partial z} = a$$

Det marginale substitutionsforhold (hvor meget forbrugsprodukt forbrugeren skulle kompenseres med for at afgive en enhed fritid) er givet ved

$$MRS = -\frac{x}{f}$$

Hvis forbrugeren ikke benytter sig af teknologien er MRS da givet ved

$$MRS(24, 12) = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2}$$

Dvs. forbrugeren skal have en halv enhed forbrugsgode hvis han skal afgive én enhed fritid. Men for $a < 0.5$ får han jo mindre end en halv forbrugsgode får afgivelse af én enhed fritid.

Afleveringsopgave

Betragt en produktionsøkonomi med to forbrugsgoder, fritid f og en generisk forbrugsvare x. Der eksisterer en produktionsteknologi, $y = g(\ell) = 2\alpha\ell^{\frac{1}{2}}$, hvor arbejdskraft er input ℓ og output y er det generiske forbrugsgode. Der er perfekt konkurrence på både arbejds- og varemarkedet. Desuden gælder der at

- Forbrugeren nyttemaksimerer givet initialbeholdningen $(L, e) \in \mathbb{R}^2_+$ og nyttefunktionen $u(L - \ell, x) = u(f, x) = f \cdot x$
- Virksomheden profitmaksimerer og ejes udelukkende af forbrugeren

Lad prisen på forbrug være givet ved p, lønnen givet ved w, og profitten givet ved π.

(a) Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem for givne p og w

Svar: Virksomhedens problem er

$$\max_{\ell} pg(\ell) - w\ell$$

med FOC

$$pMP_\ell - w = 0 \Leftrightarrow MP_\ell = \frac{w}{p} \Leftrightarrow \alpha\ell^{-\frac{1}{2}} = \frac{w}{p} \Leftrightarrow \ell^\star = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^2$$

Udbudsfunktionen bliver derfor

$$y^\star = 2\alpha\left(\ell^\star\right)^{\frac{1}{2}} = 2\alpha^2\frac{p}{w}$$

med profitten

$$\pi = py^\star - w\ell^\star = p2\alpha^2\frac{p}{w} - w\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^2 = \alpha^2\frac{p^2}{w} > 0$$

som altid er positiv. Da produktionsfunktionen er strengt konkav, er vi sikre på at have fundet det global maksimum.

(b) Løs forbrugerens nyttemaksimeringsproblem for givne p, w og π

Svar: Forbrugerens indkomst er

$$m = wL + pe + \pi$$

Forbrugerens problem bliver derfor

$$\begin{aligned} v(w,p,m) &= \max_{f,x} fx \\ &\text{u.b.b.} \\ wf + px &= m \end{aligned}$$

Cobb-Douglas præferencer er velkendte. Løsningen er således

$$f^\star = \frac{1}{2}\frac{m}{w} = \frac{1}{2}\left[L + \frac{p}{w}e + \alpha^2\frac{p^2}{w^2}\right]$$
$$x^\star = \frac{1}{2}\frac{m}{p} = \frac{1}{2}\left[\frac{w}{p}L + e + \alpha^2\frac{p}{w}\right]$$

(c) Find Walras-ligevægten (priser og allokering) for $L = 27$ og $e = 0$. Brug $p = 1$ som numeraire.

Svar: Vi clearer varemarkedet

$$\begin{aligned}
y^\star &= x^\star \Leftrightarrow \\
2\alpha^2\frac{p}{w} &= \frac{1}{2}\left[\frac{w}{p}L + e + \alpha^2\frac{p}{w}\right] \Leftrightarrow \\
2\alpha^2\frac{1}{w} &= \frac{1}{2}\left[wL + \alpha^2\frac{1}{w}\right] \Leftrightarrow \\
2\alpha^2 &= \frac{1}{2}w^2L + \alpha^2\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
4\alpha^2 &= w^2L + \alpha^2 \Leftrightarrow \\
w &= \sqrt{\frac{3\alpha^2}{L}} = \frac{\alpha}{3}
\end{aligned}$$

Dvs. at ligevægtslønnen er $w = \frac{1}{3}p$ og ligevægtsallokeringen er

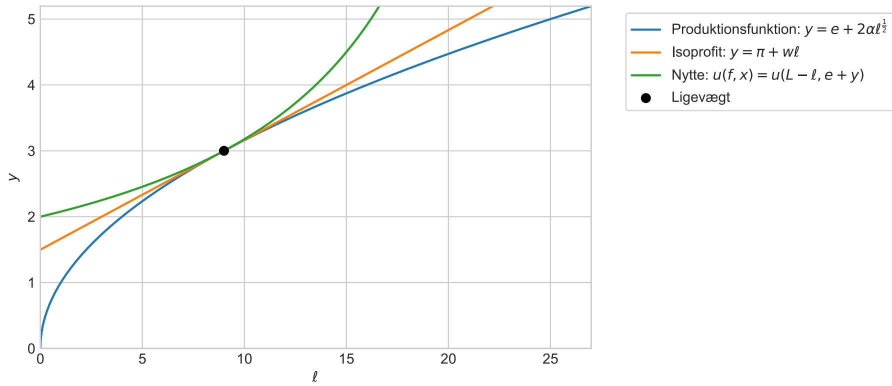
$$\begin{aligned}
\ell^\star &= \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^2 = 9 \\
y^\star &= 2\alpha^2\frac{p}{w} = 6\alpha \\
f^\star &= L - \ell^\star = 18 \\
x^\star &= y^\star = 6\alpha
\end{aligned}$$

(d) Hvordan afhænger ligevægtslønnen af α? Forklar kort.

Svar: Ligevægtslønnen er stigende i α, fordi at arbejdskraften bliver mere produktiv når α stiger.

(e) Illustrér Walras-ligevægten grafisk i et Koopmans-diagram**Svar:** Se Figur 2.

Figur 2: Koopmans-diagram ($\alpha = 0.5$)



UGESEDDEL 1: FORBRUGER SER SIT PROBLEM
– MED SVAR –

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber

1. Priser (absolutte og relative)
2. Forbrugsmulighedsområde
3. Forbrugsplan
4. Budgetmængde
5. Budgetlinje
6. Numeraire
7. Præferencerelation ($\succeq$, $\succ$, $\sim$)
   (a) Rationelle (fuldstændige, refleksive, transitive)
   (b) Pæne (monotone, konvekse, kontinuerte)
8. Indifferens- og øvre konturmængde
9. Nyttefunktion
10. Marginal nytte
11. MRS
12. Monotone transformationer af nyttefunktioner

Færdigheder

1. **Udlede og tegne budgetlinjer** i 2D
2. **Rykke budgetlinjer** med pris- og indkomstændringer
3. **Forklare** om præferencer er rationelle
4. **Vise ud fra indifferenskurver** om præferencer er monotone og/eller konvekse
5. **Bruge nyttefunktion** til at udlede
   (a) Indifferenskurve

(b) Marginal nytte
(c) MRS

6. **Bruge monotone transformationer**

Checkopgave

Antag, at der er to varer, kaffe og croissanter, som kan forbruges i ikke-negative mængder. Prisen på den kaffe (vare 1) er k. Prisen på croissanter (vare 2) er c.

Hvilket matematisk udtryk angiver budgetmængden for en forbruger med indkomst m?

(a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, cx_1 + kx_2 \leq m\}$

(b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, kx_1 + cx_2 \leq m\}$

(c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, cx_1 + kx_2 \leq m\}$

(d) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, kx_1 + cx_2 \leq m\}$(KORREKT)

(e) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, cx_1 + kx_2 < m\}$

(f) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, kx_1 + cx_2 < m\}$

1 Budgetmængden i 2D

Gennemgang: Spørgsmål (a)–(d) gennemgås ved tavlen. Derefter regn selv.

Husk at budgetmængden med *eksogen* indkomst generelt skrives

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(p_1, p_2, m) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_2 \leq (m - p_1 x_1)/p_2\} \end{aligned}$$

Antag, at der er to varer, snacks og drinks, som kan forbruges i ikke-negative mængder. Prisen på snacks (vare 1) er 5 kr., og prisen på drinks (vare 2) er 10 kr. Adam har en indkomst på 300 kr.

(a) Hvad er det matematiske udtryk for budgetlinjen?

Svar: Budgetlinjen findes ved at sætte udgifterne lig med indtægten,

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Budgetlinjen angiver således kombinationer af vare 1 og vare 2, hvor Adam bruger hele sin indtægt.

(b) Hvor meget kan Adam forbruge af hhv. snacks og drinks, hvis han bruger hele sin indkomsten på én af varene?

Svar:

- Skæring med førsteaksen angiver hvor meget Adam maksimalt kan forbrug af snacks (vare 1):
  $x_1 = (m - p_2 \cdot 0)/p_1 = m/p_1 = 300/5 = 60$
- Skæring med andenaksen angiver hvor meget Adam maksimalt kan forbrug af vare 2 (vare 2):
  $x_2 = (m - p_1 \cdot 0)/p_2 = m/p_2 = 300/10 = 30$

(c) Hvad er hældningen på Adams budgetlinje?

Svar: Hældning på budgetlinje: $-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$

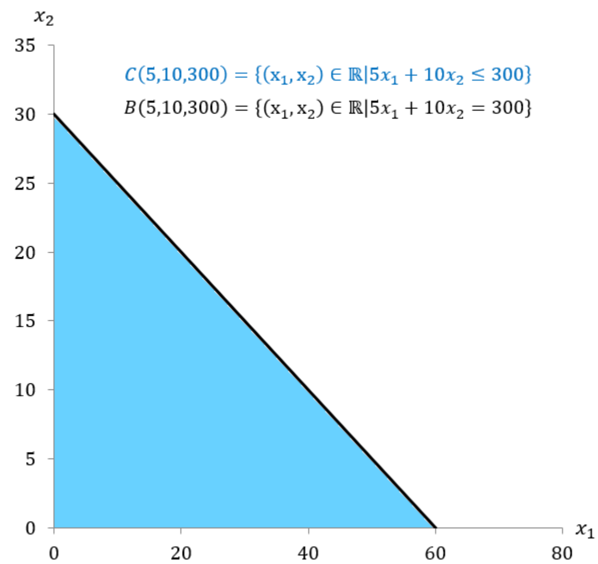
(d) Hvilken budgetmængde har Adam? Tegn i et diagram og opskriv matematisk

Svar:

- Matematisk

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(5, 10, 300) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, 5x_1 + 10x_2 \leq 300\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_2 \leq (300 - 5x_1)/10\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_2 \leq 30 - \tfrac{1}{2}x_1\} \end{aligned}$$

- Illustration



(e) Hvad menes der med den relative pris mellem drinks og snacks? Hvordan er den forbundet med den numeriske hældning på budgetlinjen?

Svar:

- Den relative pris mellem drinks og snacks angiver forholdet mellem de to priser. I dette tilfælde angiver $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$ således at snacks koster halvt så meget som drinks. Den relative pris betegnes også det objektive bytteforhold og kan tolkes som antallet af x_2 forbrugeren skal give afkald på, for at få råd til én ekstra x_1. I dette tilfælde angiver $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$ således at forbrugeren skal give afkald på en halv drink for at få råd til én ekstra snack.
- Den numeriske hældning på budgetlinjen angiver netop den relative pris på drinks og snacks.

Eva har en indkomst på 200 kr.

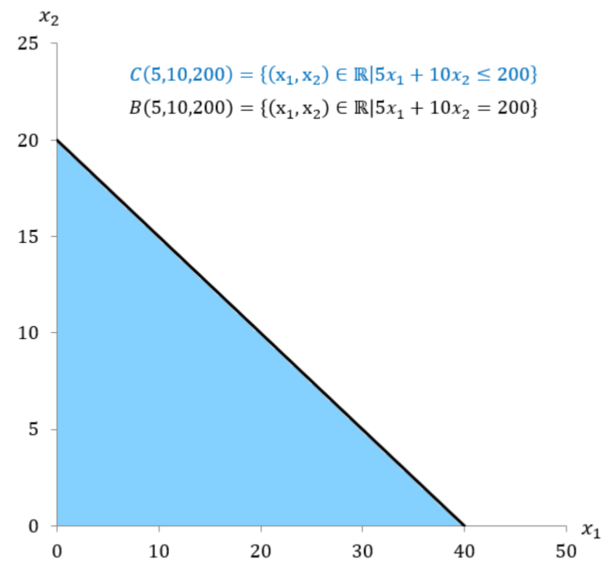
(f) Hvilken budgetmængde har Eva? Tegn i et diagram og opskriv matematisk

Svar:

- Matematisk

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(5, 10, 200) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, 5x_1 + 10x_2 \leq 200\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_2 \leq (200 - 5x_1)/10\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_2 \leq 20 - \tfrac{1}{2}x_1\}
\end{aligned}$$

- Illustration



(g) Er det rigtigt, at Adam vil have “flere forbrugsmuligheder” i sin budgetmængde end Eva, uanset hvad priserne er?

Svar: Ja! Adam og Eva køber til samme priser $(p_1, p_2) = (5, 10)$ men Adams indkomst $I_A = 300$ er større end Evas $I_E = 200$. Evas budgetmængde er således en ægte delmængde af Adams:

$$I_A > I_E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}(p_1, p_2, I_E) \subset \mathcal{C}(p_1, p_2, I_A)$$

(h) Hvad sker der med budgetmængderne, hvis priserne på snacks og drinks, og indkomsten alle tre fordobles?

Svar: Ikke noget! Betragt Adams budgetmængde

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(2 \cdot 5, 2 \cdot 10, 2 \cdot 300) &= \mathcal{C}(10, 20, 600) \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, 10x_1 + 20x_2 \leq 600\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, 5x + 10x_2 \leq 300\} \\
&= \mathcal{C}(5, 10, 300)
\end{aligned}$$

(i) Bliver budgetlinjerne stejlere, alt andet lige, hvis snacks bliver dyrere?

Svar: Ja! Den numeriske hældning af budgetlinjen $\frac{p_1}{p_2}$ angiver hvor stejl budgetlinjen er: Des større numeriske hældning, des stejlere budgetlinje.

2 Forbrugsmulighedsområdet

Gennemgang: Gennemgås ved tavlen.

Antag, at der er to varer, x_1 og x_2. Forbrugsmulighedsområdet er $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2_+$. Pris-vektoren er $\boldsymbol{p} = (p_1, p_1) > 0$. Indkomsten er $m > 0$.

(a) Opskriv et matematisk udtryk for budgetmængden og budgetlinjen

Svar:

- Budgetmængden

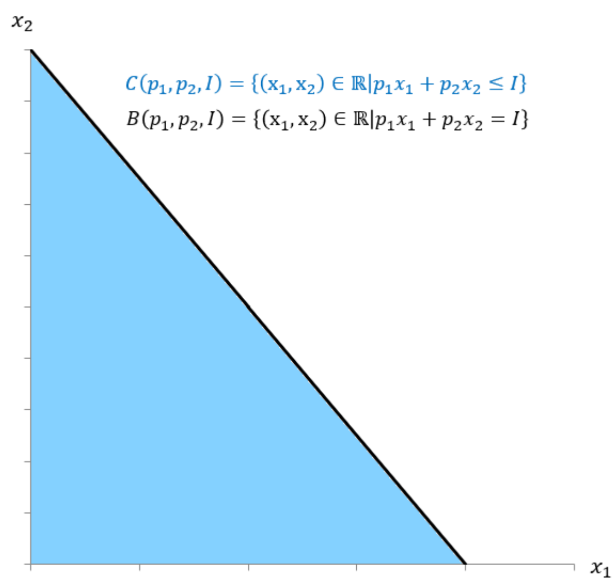
$$\mathcal{C}(p_1, p_2, m) \quad = \quad \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m\}$$

- Budgetlinjen

$$\mathcal{B}(p_1, p_2, m) \quad = \quad \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, p_1 x_1 + p_2 x_2 = m\}$$

(b) Tegn budgetmængden og budgetlinjen i et diagram

Svar:



Antag, at forbrugsmulighedsområdet i stedet er $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0,\ x_2 \in [0, \overline{x}_2]\}$.

(c) Giv en økonomisk fortolkning af forbrugsmulighedsområdet

Svar: Forbrugsmulighedsområdet kan økonomisk tolkes, som de varer det er fysisk muligt at købe (uafhængigt af priserne). Hvis vare 2 er fritid og måles i timer per dag, så har vi $\overline{x}_2 = 24$. Det er umuligt holde fri mere end 24 timer per dag, uanset hvor mange penge man har. I dette tilfælde ville forbrugerens budgetmængde blive $\mathcal{C}(p_1, p_2, m) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \wedge x_2 \leq 24\}$.

(d) Opskriv et matematisk udtryk for budgetmængden og budgetlinjen

Svar:

- Budgetmængden:

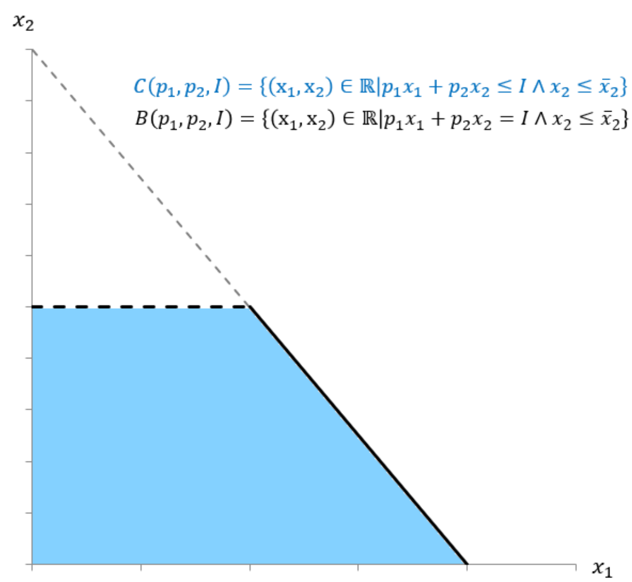
$$\mathcal{C}(p_1, p_2, m) \quad = \quad \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, p_1x_1 + p_2x_2 \leq m \wedge x_2 \leq \overline{x}_2\}$$

- Budgetlinjen:

$$\mathcal{B}(p_1, p_2, m) \quad = \quad \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, p_1x_1 + p_2x_2 = m \wedge x_2 \leq \overline{x}_2\}$$

(e) Indtegn budgetmængden og budgetlinjen i diagrammet fra opgave (b)

Svar:



3 Fra nyttefunktion til indifferenskurve

Gennemgang: Gennemgås for nyttefunktion i.–iii. ved tavlen. Derefter regn selv.

Betragt følgende nyttefunktioner:

i. $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$, $0 < a < 1$

ii. $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

iii. $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$

iv. $u(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + 3x_2$

v. $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

vi. $u(x_1, x_2) = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 4)^2$ (+)

Besvar følgende spørgsmål for én nyttefunktion ad gangen:

(a) Find marginalnytterne for x_1 og x_2

(b) Find MRS som funktion af (x_1, x_2)

(c) Opskriv, hvis det er muligt, indifferensmængden på formen

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \,|\, x_2 = g(x_1, u)\}$$

(d) Tegn indifferenskurverne for hver af disse nyttefunktioner

(e) Undersøg for hver nyttefunktion om de bagvedliggende præferencer er:

  i. Monotone?

  ii. Konvekse?

  iii. $|MRS|$ er aftagende langs en indifferenskurve

i. Svar: $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$**,** $0 < a < 1$

(a) **Marginalnytterne**

$$\begin{aligned} MU_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} &= a x_1^{a-1} x_2^{1-a} = a\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-a} \\ MU_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} &= (1-a) x_1^a x_2^{-a} = (1-a)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a} \end{aligned}$$

(b) **MRS**

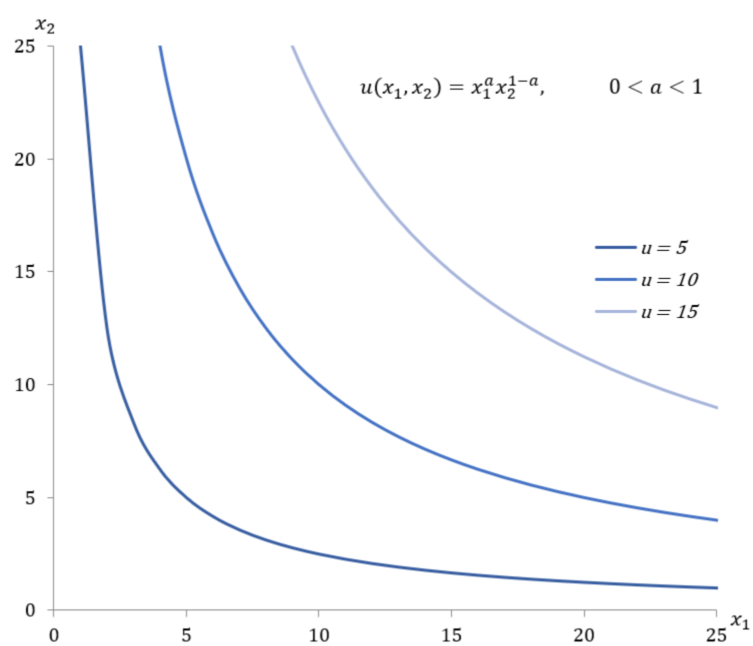
$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{a\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-a}}{(1-a)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a}} = -\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1}$$

(c) **Indifferensmængden**

$$\begin{aligned} u &= x_1^a x_2^{1-a} \Leftrightarrow \\ x_2^{1-a} &= \frac{u}{x_1^a} \Leftrightarrow \\ x_2 &= \left(\frac{u}{x_1^a}\right)^{\frac{1}{1-a}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_2 = \left(\frac{u}{x_1^a}\right)^{\frac{1}{1-a}}\right\}$$

(d) **Illustration**



(e) Af figuren ses:

   i. **Monoton:** Ja, alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde.

   ii. **Konveks:** Ja (tilmeld streng konveks), lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i (det indre af) den øvre konturmængde.

   iii. **Aftagende $|MRS|$:** Ja, fra ∞ til 0.

ii. Svar: $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

(a) **Marginalnytterne**

$$\begin{aligned} MU_1 &= 2x_1 \\ MU_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

(b) **MRS**

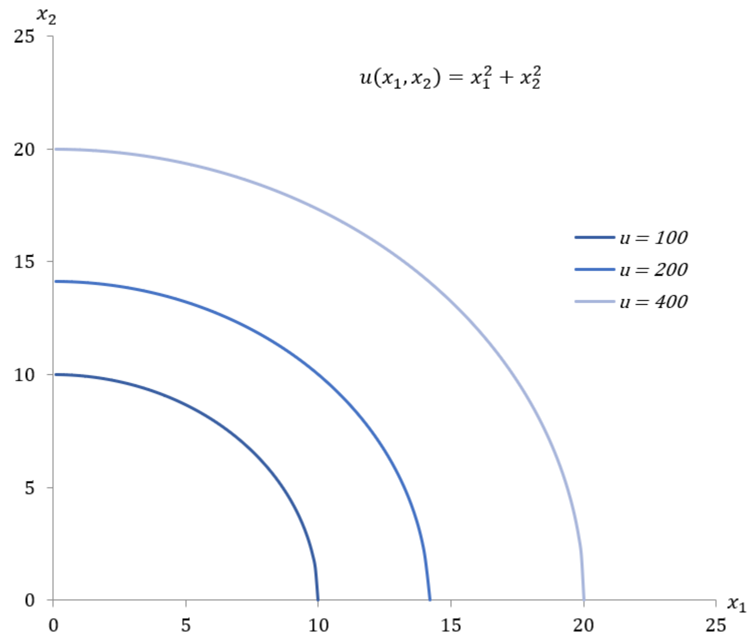
$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{2x_1}{2x_2} = -\frac{x_1}{x_2}$$

(c) **Indifferensmængden**

$$\begin{aligned} u &= x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow \\ x_2^2 &= u - x_1^2 \Leftrightarrow \\ x_2 &= \sqrt{u - x_1^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_2 = \sqrt{u - x_1^2} \right\}$$

(d) **Illustration**



(e) Af figuren ses:

  i. **Monoton:** Ja, alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde.

  ii. **Konveks:** Nej, lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger udenfor den øvre konturmængde.

  iii. **Aftagende $|MRS|$:** Nej, fra 0 til ∞.

iii. Svar: $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$

(a) **Marginalnytterne:** Ikke veldefineret. Kan løst defineres som:

$$MU_1 = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{hvis } x_1 \geq x_2 \end{cases}$$

$$MU_2 = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x_2 < x_1 \\ 0 & \text{hvis } x_2 \geq x_1 \end{cases}$$

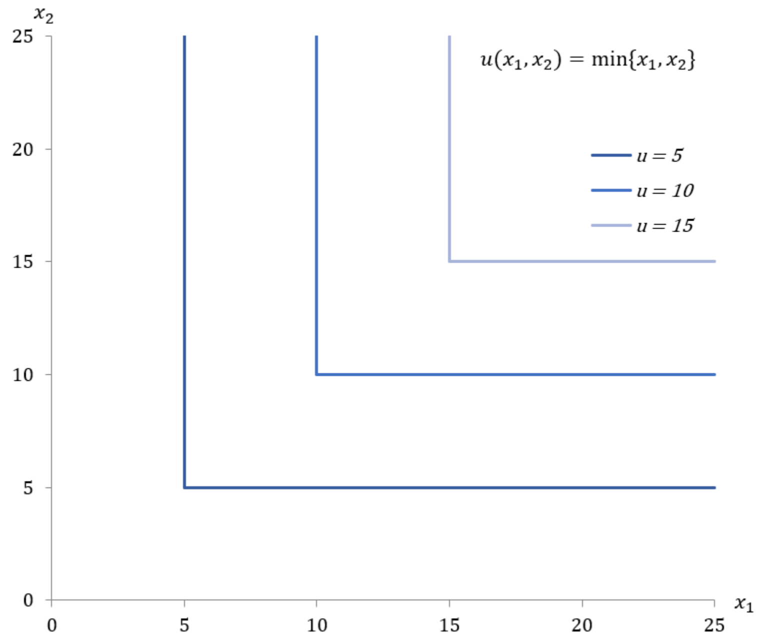
(b) **MRS:** Ikke veldefineret. Kan delvist og løst defineres som:

$$MRS = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x_1 > x_2 \\ -\infty & \text{hvis } x_1 < x_2 \end{cases}$$

(c) **Indifferensmængden:** Ikke muligt. Indifferensmængden er dog

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid (x_1 = u \wedge x_2 \geq u) \vee (x_1 \geq u \wedge x_2 = u)\right\}$$

(d) **Illustration**



(e) Af figuren ses:

i. **Monoton:** Ja, (i) alle punkter nord-øst for et punkt ligger i den øvre konturmængde, og (ii) alle punkter i det indre af nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængden.

ii. **Konveks:** Ja, lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i den øvre konturmængde.

iii. **Aftagende $|MRS|$:** Ikke veldefineret. Men løst sagt ja, fra ∞ til 0.

iv. Svar: $u(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + 3x_2$

(a) **Marginalnytterne**

$$\begin{aligned} MU_1 &= 2x_1^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x_1}} \\ MU_2 &= 3 \end{aligned}$$

(b) **MRS**

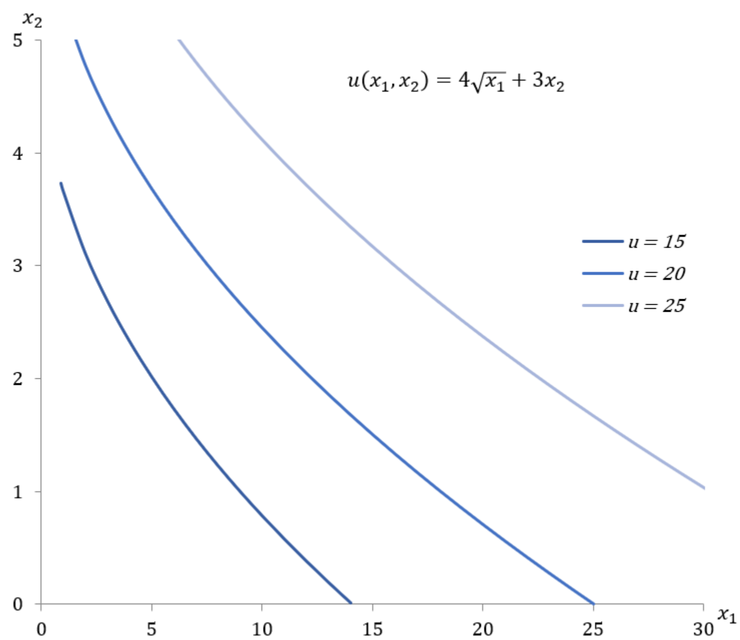
$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{\frac{2}{\sqrt{x_1}}}{3} = -\frac{2}{3\sqrt{x_1}}$$

(c) **Indifferensmængden**

$$\begin{aligned} u &= 4\sqrt{x_1} + 3x_2 \Leftrightarrow \\ 3x_2 &= u - 4\sqrt{x_1} \Leftrightarrow \\ x_2 &= \frac{u - 4\sqrt{x_1}}{3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_2 = \frac{u - 4\sqrt{x_1}}{3}\right\}$$

(d) **Illustration**



(e) Af figuren ses:

i. **Monoton:** Ja, hele nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde.

ii. **Konveks:** Ja, lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i det indre af den øvre konturmængde.

iii. **Aftagende $|MRS|$:** Ja, fra ∞ til et positivt tal.

v. Svar: $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

(a) **Marginalnytterne**

$$\begin{aligned} MU_1 &= 2 \\ MU_2 &= 3 \end{aligned}$$

(b) **MRS**

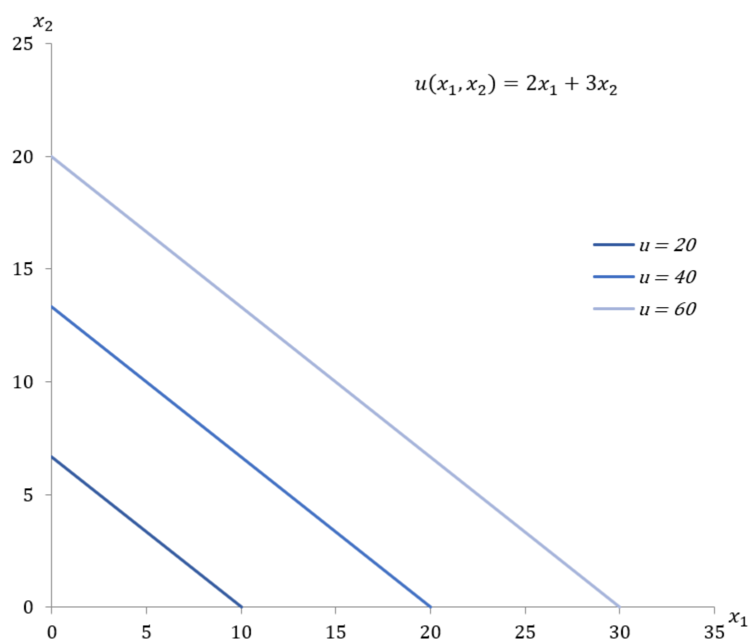
$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{2}{3}$$

(c) **Indifferensmængden**

$$\begin{aligned} u &= 2x_1 + 3x_2 \Leftrightarrow \\ 3x_2 &= u - 2x_1 \Leftrightarrow \\ x_2 &= \frac{u - 2x_1}{3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_2 = \frac{u - 2x_1}{3}\right\}$$

(d) **Illustration**



(e) Af figuren ses:

i. **Monoton:** Ja, alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde.

ii. **Konveks:** Ja, lineære kombinationer af to punkter på indifferenskurven ligger i den øvre konturmængde.

iii. **Aftagende $|MRS|$:** Nej, et konstant tal.

vii. Svar: $u(x_1, x_2) = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 4)^2$

(a) **Marginalnytterne**

$$\begin{aligned} MU_1 &= -2(x_1 - 5) = -2x_1 + 10 \\ MU_2 &= -2(x_2 - 4) = -2x_2 + 8 \end{aligned}$$

(a) **MRS:**

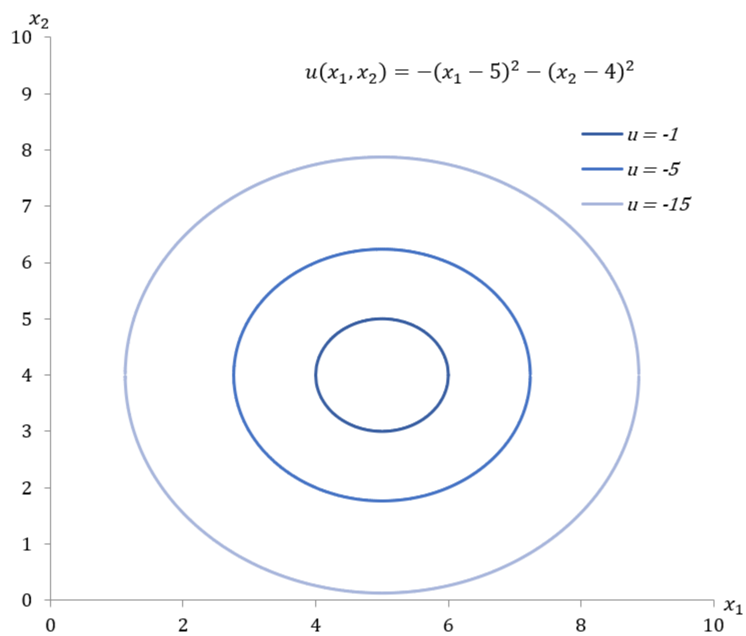
$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{-2x_1 + 10}{-2x_2 + 8} = \frac{x_1 - 5}{4 - x_2} \text{ for } x_2 \neq 4$$

(c) **Indifferensmængden:** Ikke muligt. Indifferensmængden er dog

$$\begin{aligned} u &= -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 4)^2 \Leftrightarrow \\ (x_2 - 4)^2 &= -(x_1 - 5)^2 - u \Leftrightarrow \\ x_2 - 4 &= \pm\sqrt{-(x_1 - 5)^2 - u} \Leftrightarrow \\ x_2 &= \pm\sqrt{-(x_1 - 5)^2 - u} + 4 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_2 = \pm\sqrt{-(x_1 - 5)^2 - u} + 4\right\}$$

(d) **Illustration**



(e) Af figuren ses:

i. **Monoton:** Nej, $(x_1, x_2) = (5, 4)$ er et globalt mætningspunkt.

ii. **Konveks:** Ja, lineære kombinationer af to punkter på indifferenskurven ligge i den øvre konturmængden (for alle punkter på nær det globale mætningspunkt ligger de lineære kombinationer sågar i det indre af den øvre konturmængde).

iii. **Aftagende $|MRS|$:** Nej.

4 Monotone transformationer

Gennemgang: Spørgsmål (a) for nyttefunktion i. gennemgås ved tavlen. Derefter regne selv for (a) ii.-v. og (b). Spørgsmål (c) gennemgås ved tavlen.

Lad $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{++} =]0; \infty[$ være en nyttefunktion.

(a) Hvilke af følgende funktioner g er monotont voksende transformationer af nyttefunktionen $u(x_1, x_2)$?

i. $v(x_1, x_2) = g(u(x_1, x_2)) = au(x_1, x_2) + b$, hvor $a > 0, b \in \mathbb{R}$ er konstanter
Svar: $g(u) = au + b$ er en monotont voksende transformation da

$$\frac{\partial g(u)}{\partial u} = a > 0$$

ii. $v(x_1, x_2) = g(u(x_1, x_2)) = au(x_1, x_2) + b$, hvor $a < 0, b \in \mathbb{R}$ er konstanter
Svar: $g(u) = au + b$ er ikke en monotont voksende transformation da

$$\frac{\partial g(u)}{\partial u} = a < 0$$

iii. $v(x_1, x_2) = g(u(x_1, x_2)) = 7\ln(u(x_1, x_2))$
Svar: $g(u) = 7\ln u$ er en monotont voksende transformation da

$$\frac{\partial g(u)}{\partial u} = \frac{7}{u} > 0$$

iv. $v(x_1, x_2) = g(u(x_1, x_2)) = -\frac{2}{u(x_1, x_2)^2}$
Svar: $g(u) = -\frac{2}{u^2}$ er en monotont voksende transformation da

$$\frac{\partial g(u)}{\partial u} = \frac{4}{u^3} > 0$$

v. $v(x_1, x_2) = g(u(x_1, x_2)) = -\exp(-u(x_1, x_2))$
Svar: $g(u) = -\exp(-u)$ er en monotont voksende transformation da

$$\frac{\partial g(u)}{\partial u} = \exp(-u) > 0$$

(b) Vis, at hvis g er en monotont voksende funktion, så er MRS for nyttefunktionerne $u(x_1, x_2)$ og $v(x_1, x_2) = g(u(x_1, x_2))$ den samme for alle (x_1, x_2)

Svar:

- MRS for $u(x_1, x_2)$

$$MRS = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{MU_1}{MU_2}$$

- MRS for $v(x_1, x_2)$

$$MRS = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_1}}{\frac{\partial v}{\partial x_2}} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{MU_1}{MU_2}$$

(c) Diskutér hvad der går galt, hvis v ikke er en monotont voksende funktion

Svar: Såfremt transformationen ikke er monotont voksende ændres rangordenen mellem varebundterne. Dvs. at man risikerer at præferencerne ændres ved at foretage en sådan transformation.

Eksempel: Betragt nyttefunktionen $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ og de to varebundter $A = (x_1, x_2) = (2, 3)$ og $B = (x_1, x_2) = (4, 5)$. Det forekommer umiddelbart at B er strengt foretrukket fremfor A idet:

$$u(2, 3) = 6 < 20 = u(4, 5)$$

Vi benytter nu transformationen $g(u) = -2u$ (bemærk g er et specialtilfælde af transformationen fra ii) hvor $a = -2$ og $b = 0$ som vi konkluderede ikke var en monotont voksende transformation). Men nu er A strengt foretrukket fremfor B idet

$$\begin{aligned} g(u(2,3)) = -2 \cdot u(2,3) = -2 \cdot 6 = -12 &> -40 \\ &= -2 \cdot 20 = -2 \cdot u(4,5) = g(u(4,5)) \end{aligned}$$

Afleveringsopgaven

Betragt nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = \beta \ln(x_1) + 4x_2, \ \ \beta > 0$$

og besvar

(a) Find marginalnytterne for x_1 og x_2

(b) Find MRS som funktion af (x_1, x_2)

(c) Skriv, hvis det er muligt, indifferenskurven på formen $x_2 = g(x_1)$

(d) Tegn indifferenskurverne

(e) Skærer indifferenskurverne førsteaksen?

Lad i stedet nyttefunktionen være

$$u(x_1, x_2) = x_1 \exp(\frac{4}{\beta} x_2)$$

(f) Forklar hvorfor at det ikke ændrer MRS

Svar:

(a) **Marginalnytterne**

$$\begin{aligned} MU_1 &= \frac{\beta}{x_1} \\ MU_2 &= 4 \end{aligned}$$

(b) **MRS**

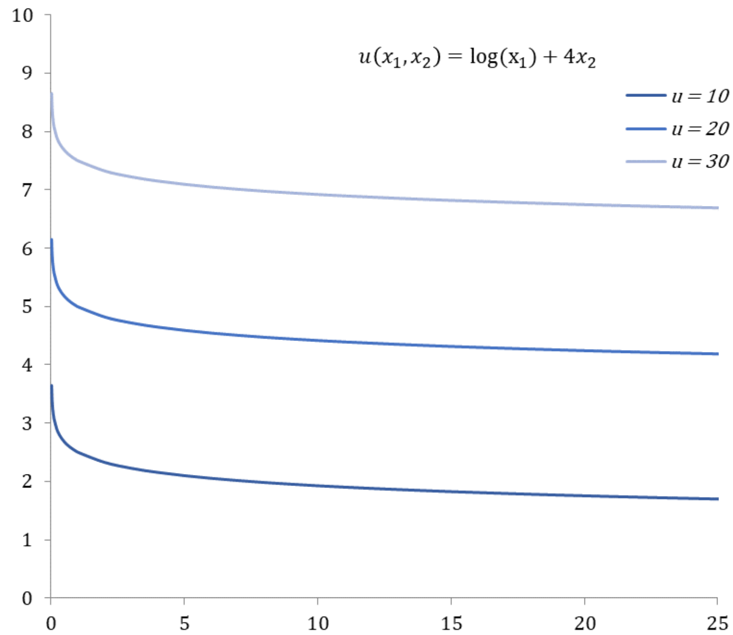
$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{\frac{\beta}{x_1}}{4} = -\frac{\beta}{4x_1}$$

(c) **Indifferensmængden**

$$\begin{aligned} u &= \beta \quad \ln(x_1) + 4x_2 \Leftrightarrow \\ 4x_2 &= \quad u - \beta \ln(x_1) \Leftrightarrow \\ x_2 &= \quad \frac{u - \beta \ln(x_1)}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_2 = \frac{u - \beta \ln(x_1)}{4} \right\}$$

(d) **Illustration for $\beta = 1$**



(e) **Skæringer:** Ja, der er altid en skæring med første-aksen når x_1 er stor nok for givet u.

(f) **Monoton transformation:** Lad

$$g(u) = \exp(\frac{1}{\beta}u)$$

så har vi

$$\begin{aligned} g(u(x_1, x_2)) &= \exp\left(\frac{1}{\beta}\left(\beta \ln(x_1) + 4x_2\right)\right) \\ &= \exp\left(\ln(x_1) + \frac{4}{\beta}x_2\right) \\ &= x_1 \exp\left(\frac{4}{\beta}x_2\right) \end{aligned}$$

Da $g'(u) = \frac{1}{\beta}\exp(\frac{1}{\beta}u) > 0$ er der tale om en voksende monoton transformation, hvilket ikke påvirker MRS.

Ugeseddel 2: Forbrugeren løser sit problem

– MED SVAR –

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber

1. Løsning
2. Løsningsmængde
3. Essentielle goder
4. Walras' lov
5. MRS = relativ pris
6. Lagrange-metoden
7. Substitutionsmetoden
8. Randløsninger
9. Knækløsninger
10. Lokale minima
11. Multiple maxima
12. Substitutionselasticitet

Færdigheder

1. Løs forbrugerens problem ved Lagrange-metoden (eller substitutionsmetoden) under antagelse om pæne præferencer
2. Tjekke for randløsninger
3. Tjekke for knækløsninger
4. Kunne forklarer diverse faldgruber (randløsninger, knækløsninger, lokale minima, multiple maxima) grafisk ud fra indifferenskurver
5. Finde simple løsninger for ikke pæne præferencer

Checkopgave

Betragt en forbruger med nyttefunktionen $u(x_1, x_2)$. Forbrugsmulighedsområdet er $\mathbb{R}^2_+$. Priserne er p_1 og p_2. Indkomsten er m.

(a) Opstil forbrugerens maksimeringsproblem

Svar: $\max_{x_1,x_2} \; u(x_1, x_2) \quad \text{u.b.b.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m$

(b) Opstil den tilhørende Lagrange-funktion

Svar: $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda[m - p_1x_1 - p_2x_2]$

(c) Hvilke tre førstsordensbetingelser bruges når forbrugerens maksimeringsproblemet skal løses ved Lagrange-metoden?

Svar: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}$ og $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$

1 Cobb-Douglas I

Gennemgang: Gennemgås ved tavlen.

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}},$$

som vi ved repræsenterer monotone præferencer, hvor begge goder er essentielle. Forbrugsmulighedsområdet er $\mathbb{R}_+^2$.
Antag priserne er $p_1 = 4, p_2 = 3$, og at forbrugeren har indkomsten $I = 50$.

(a) Opstil forbrugerens maksimeringsproblem og find løsningen vha. Lagrange

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1, x_2} x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} \quad \text{u.b.b.} \quad 4x_1 + 3x_2 = 50 \tag{1.1}$$

Bemærk, (i) at monotonicitet medfører = i bibetingelsen, og (ii) at $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ er sikret af at begge goder er essentielle.

Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} + \lambda[50 - 4x_1 - 3x_2] \tag{1.2}$$

og udlede førsteordensbetingelserne (FOC)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \tfrac{2}{5} x_1^{-\frac{3}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \tfrac{2}{5} x_1^{-\frac{3}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} = 4\lambda \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \tfrac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{-\frac{2}{5}} - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \tfrac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{-\frac{2}{5}} = 3\lambda \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 50 - 4x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow 4x_1 + 3x_2 = 50 \tag{1.5}$$

Vi deler nu (1.3) med (1.4) således at λ forsvinder, og vi kan udtrykke x_2 som en funktion af x_1

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{2}{5} x_1^{-\frac{3}{5}} x_2^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{-\frac{2}{5}}} &= \frac{4\lambda}{3\lambda} \Leftrightarrow \\
\frac{\frac{2}{5} x_2^{\frac{3}{5}} x_2^{\frac{2}{5}}}{\frac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} x_1^{\frac{3}{5}}} &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow \\
\frac{2x_2}{3x_1} &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow \\
x_2 &= 2x_1 \equiv x_2^*(x_1)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Vi indsætter nu (1.6) i (1.5) (budgetlinjen) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3(2x_1) &= 50 \Leftrightarrow \\ 4x_1 + 6x_1 &= 50 \Leftrightarrow \\ x_1^* &= 5 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Vi indsætter nu (1.7) i (1.6) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$x_2^* = x_2^*(x_1) = 2 \cdot 5 = 10 \tag{1.8}$$

(b) Løs forbrugerens problem for alle $p_1, p_2, m > 0$ vha. Lagrange

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1,x_2} x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x + p_2 x_2 = m \tag{1.9}$$

Bemærk, (i) at monotonicitet medfører = i bibetingelsen, og (ii) at $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ er sikret af at begge goder er essentielle.

Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} + \lambda[m - p_1 x_1 - p_2 x_2] \tag{1.10}$$

og udlede førsteordensbetingelserne (FOC)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \tfrac{2}{5} x_1^{-\frac{3}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \tfrac{2}{5} x_1^{-\frac{3}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} = \lambda p_1 \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \tfrac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{-\frac{2}{5}} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \tfrac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{-\frac{2}{5}} = \lambda p_2 \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \tag{1.13}$$

Vi deler nu (1.11) med (1.12) således at λ forsvinder, og vi kan udtrykke x_2 som en funktion af x_1

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2}{5} x_1^{-\frac{3}{5}} x_2^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{-\frac{2}{5}}} &= \frac{p_1 \lambda}{p_2 \lambda} \Leftrightarrow \\ \frac{\frac{2}{5} x_2^{\frac{3}{5}} x_2^{\frac{2}{5}}}{\frac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} x_1^{\frac{3}{5}}} &= \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \\ \frac{2x_2}{3x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \\ x_2 &= \frac{3p_1}{2p_2} x_1 \equiv x_2^*(x_1) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Vi indsætter nu (1.14) i (1.13) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2\frac{3p_1}{2p_2}x_1 &= m \Leftrightarrow \\ p_1x_1 + \frac{3}{2}p_1x_1 &= m \Leftrightarrow \\ \frac{5}{2}p_1x_1 &= m \Leftrightarrow \\ x_1^* &= \frac{2}{5}\frac{m}{p_1} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Vi indsætter nu (1.15) i (1.14) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned} x_2^* &= x_2^*(x_1) = \\ &= \frac{3p_1}{2p_2}\frac{2}{5}\frac{m}{p_2} \\ &= \frac{3}{5}\frac{I}{p_2} \end{aligned} \tag{1.16}$$

(c) Løs forbrugerens problem for alle $p_1, p_2, m > 0$ vha. substitutionsmetoden

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1,x_2} \; x_1^{\frac{2}{5}}x_2^{\frac{3}{5}} \quad \text{u.b.b.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m \tag{1.17}$$

Bemærk, (i) at monotonicitet medfører $=$ i bibetingelsen, og (ii) at $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ er sikret af at begge goder er essentielle.

Vi isolerer nu x_2 i budgetlinjen som en funktion af x_1 (og priserne og indkomsten)

$$x_2 = \frac{m - p_1x_1}{p_2} \equiv x_2^*(x_1, p_1, p_2, m) \tag{1.18}$$

Vi substituerer nu (1.18) ind i nyttefunktionen og opnår det nye maksimeringsproblem, der blot afhænger af x_1

$$\max_{x_1} \; x_1^{\frac{2}{5}}\left(\frac{m - p_1x_1}{p_2}\right)^{\frac{3}{5}} \tag{1.19}$$

Vi bestemmer nu førsteordensbetingelsen (FOC)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x_1, x_2^*(x_1, p_1, p_2, m))}{\partial x_1} &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{2}{5} x_1^{-\frac{3}{5}} \left(\frac{m - p_1 x_1}{p_2} \right)^{\frac{3}{5}} + \frac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} \left(\frac{m - p_1 x_1}{p_2} \right)^{-\frac{2}{5}} \left(-\frac{p_1}{p_2} \right) &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{m - p_1 x_1}{p_2} \right)^{-\frac{2}{5}} &= \frac{2}{5} x_1^{-\frac{3}{5}} \left(\frac{m - p_1 x_1}{p_2} \right)^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \\
x_1^{\frac{2}{5}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{m - p_1 x_1}{p_2} \right)^{-\frac{2}{5}} &= \frac{2}{3} x_1^{-\frac{3}{5}} \left(\frac{m - p_1 x_1}{p_2} \right)^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \\
x_1 &= \frac{2}{3} \frac{p_2}{p_1} \frac{m - p_1 x_1}{p_2} \Leftrightarrow \\
x_1 &= \frac{2}{3} \frac{m - p_1 x_1}{p_1} \Leftrightarrow \\
x_1 + \frac{2}{3} x_1 &= \frac{2}{3} \frac{m}{p_1} \Leftrightarrow \\
x_1^* &= \frac{2}{5} \frac{m}{p_1} \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (1.20) i (1.18) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned}
x_2^* &= x_2^*(x_1, p_1, p_2, m) \\
&= \frac{m - p_1 \frac{2}{5} \frac{m}{p_1}}{p_2} \\
&= \frac{m - \frac{2}{5} m}{p_2} \\
&= \frac{3}{5} \frac{m}{p_2} \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

En anden forbruger har nyttefunktionen

$$v(x_1, x_2) = 2 \ln(x_1) + 3 \ln(x_2).$$

(d) Hvilket varebundt efterspørger denne forbruger ved priserne $p_1 = 10, p_2 = 6$ og indkomsten $I = 100$?

Svar: Vi bemærker at vi med $g(u) = 5 \ln(u)$ har

$$\begin{aligned}
g(u(x_1, x_2)) &= 5 \ln \left(x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} \right) \\
&= 5 \frac{2}{5} \ln(x_1) + 5 \frac{3}{5} \ln(x_2) \\
&= 2 \ln(x_1) + 3 \ln(x_2) \\
&= v(x_1, x_2) \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Derudover er $g(u)$ en monotont voksende transformation da

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 5\frac{1}{u} > 0 \tag{1.23}$$

Derfor kan vi blot bruge formlerne fra b)-c) til at bestemme efterspørgslen:

$$x_1^* = \frac{2}{5}\frac{m}{p_1} = \frac{2}{5}\frac{100}{10} = 4 \tag{1.24}$$

$$x_2^* = \frac{3}{5}\frac{m}{p_2} = \frac{3}{5}\frac{100}{6} = 10 \tag{1.25}$$

2 Cobb-Douglas II

Gennemgang: Spørgsmål (a) regnes selv. Opgaven minder meget om den foregående, som blev regnet ved tavlen, så prøv at undgå at bruge nogen hjælpemidler. Spørgsmål (b)–(f) gennemgås ved tavlen.

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^{1-a},$$

hvor $A > 0$ og $0 < a < 1$ er konstanter, og som vi ved repræsenterer monotone præferencer, hvor begge goder er essentielle. Forbrugsmulighedsområdet er $\mathbb{R}_+^2$.
Priserne på varerne er hhv. p_1 og p_2 kr. per enhed, og forbrugeren har sat I kr. til side til køb af de to varer. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, m > 0$.

(a) Hvad er forbrugerens optimale forbrugsbundt?

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1, x_2} \; Ax_1^a x_2^{1-a} \quad \text{u.b.b.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m \tag{2.1}$$

Bemærk, (i) at monotonicitet medfører $=$ i bibetingelsen, og (ii) at $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ er sikret af at begge goder er essentielle.

Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = Ax_1^a x_2^{1-a} + \lambda[m - p_1x_1 - p_2x_2] \tag{2.2}$$

og udlede førsteordensbetingelserne (FOC)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = aAx_1^{a-1}x_2^{1-a} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow aAx_1^{a-1}x_2^{1-a} = \lambda p_1 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = (1-a)Ax_1^a x_2^{-a} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow (1-a)Ax_1^a x_2^{-a} = \lambda p_2 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = m \tag{2.5}$$

Vi deler nu (2.3) med (2.4) således at λ forsvinder, og vi kan udtrykke x_2 som en funktion af x_1

$$\begin{aligned}
\frac{aAx_1^{a-1}x_2^{1-a}}{(1-a)Ax_1^a x_2^{-a}} &= \frac{p_1\lambda}{p_2\lambda} \Leftrightarrow \\
\frac{ax_1^{a-1}x_2^{1-a}}{(1-a)x_1^a x_2^{-a}} &= \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \\
\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \\
x_2 &= \frac{1-a}{a}\frac{p_1}{p_2}x_1 \equiv x_2^*(x_1) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (2.6) i (2.5) (budgetlinjen) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned}
p_1x_1 + p_2\frac{1-a}{a}\frac{p_1}{p_2}x_1 &= m \Leftrightarrow \\
p_1x_1 + \frac{1-a}{a}p_1x_1 &= m \Leftrightarrow \\
\frac{1}{a}p_1x_1 &= m \Leftrightarrow \\
x_1^* &= a\frac{m}{p_1} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (2.6) i (2.7) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned}
x_2^* &= x_2^*(x_1, p_1, p_2) \\
&= \frac{1-a}{a}\frac{p_1}{p_2}\frac{am}{p_1} \\
&= (1-a)\frac{m}{p_2} \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

(b) Hvad er effekten af en prisændring i p_1 på forbruget af de to varer?

Svar:

- Vare 1:
$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = -\frac{am}{p_1^2} < 0$$
- Vare 2:
$$\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = 0$$

(c) Hvordan vil en stigning i indkomsten I påvirke forbruget af vare 1?

Svar:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial m} = \frac{a}{p_1} > 0$$

(d) Hvordan vil en stigning i prisen på vare 2 påvirke forbruget at vare 1?

Svar:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} = 0$$

(e) Hvordan vil en ændring af parameteren A påvirke forbruget at vare 1?

Svar:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial A} = 0$$

(f) Hvordan vil en ændring af parameteren a påvirke forbruget at vare 1?

Svar:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial a} = \frac{m}{p_1} > 0$$

3 Flere Nyttefunktioner I

Gennemgang: Gennemgås for nyttefunktion i. ved tavlen. Derefter regnes selv.

Betragt følgende nyttefunktioner:

i. $u(x_1, x_2) = x_1(x_2 + 5)$

ii. $u(x_1, x_2) = 3 \ln x_1 + x_2$

iii. $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

Forbrugsmulighedsområdet er $\mathbb{R}^2_+$. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, m > 0$.
Besvar følgende spørgsmål for én nyttefunktion ad gangen:

(a) Tegn indifferenskurverne

(b) Bestem hvilke af varerne som er essentielle

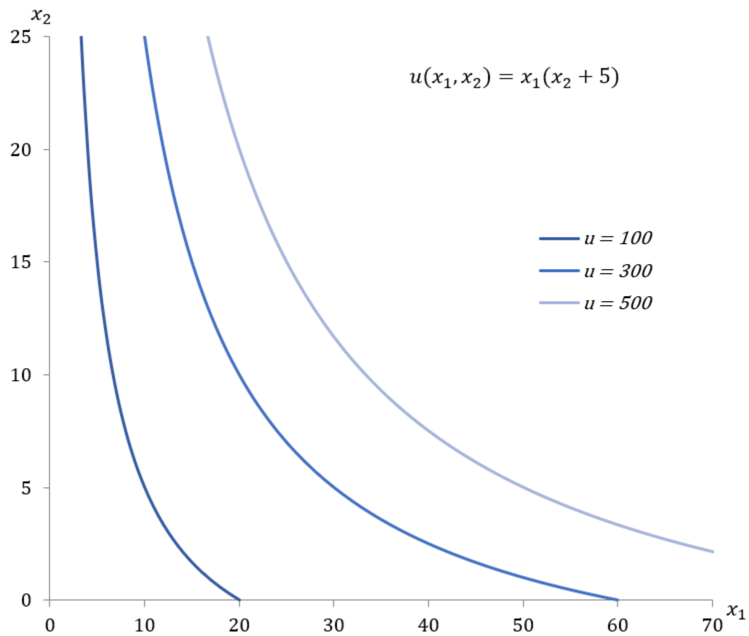
(c) Tag stilling til om der kan være randløsninger

(d) Tag stilling til om indre løsninger vil være karakteriset ved $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$ og i så fald om løsningen er et minimum eller et maksimum

(e) Løs forbrugerens nyttemaksimeringsproblem. Illustrér løsningsmængden

i. Svar: $u(x_1, x_2) = x_1(x_2 + 5)$

(a) $u_0 = x_1(x_2 + 5) \Leftrightarrow x_2 = \frac{u_0}{x_1} - 5$



(b) Vi har

$$|MRS(x_1, x_2)| = \left| -\frac{MU_1}{MU_2} \right| = \frac{x_2 + 5}{x_1}$$

x_1 er essentiel da

$$\lim_{x_1 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \infty, \, \forall x_2 > 0$$

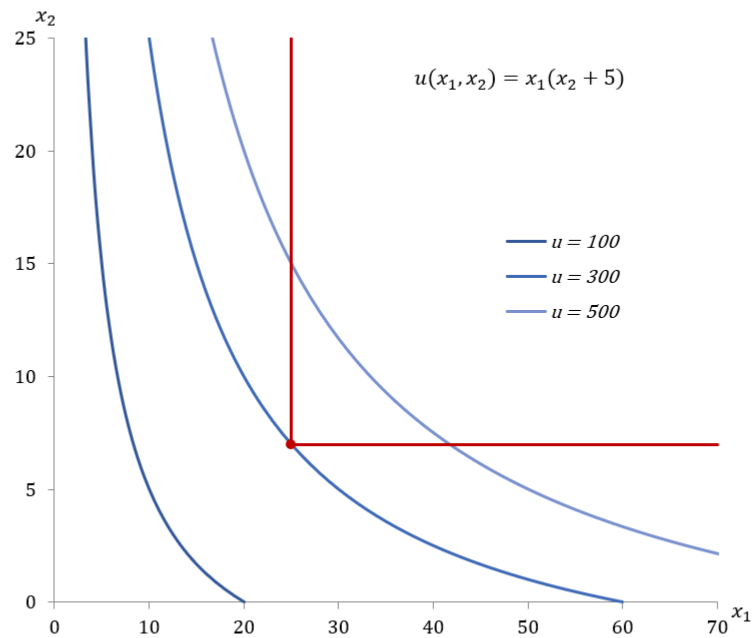
x_2 er *ikke* essentiel da

$$\lim_{x_2 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \frac{5}{x_1} > 0, \, \forall x_1 > 0$$

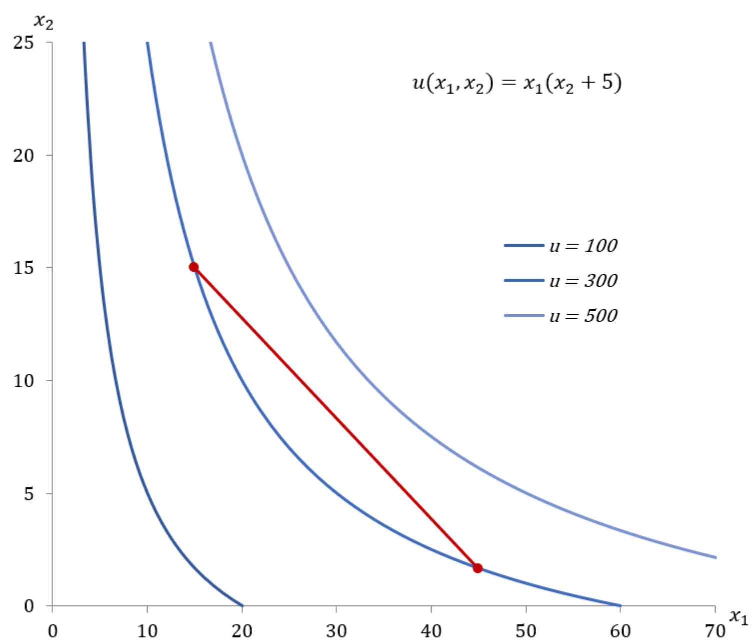
(c) Da x_2 ikke er essentiel kan der forekomme randløsninger hvor $x_2 = 0$.

(d) Da nyttefunktionen er *differentiabel* og præferencer *monotone* vil indre optima være karakteriseret ved $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$, dvs. *ingen knækløsninger* eller løsninger væk fra budgetlinjen. Da præferencerne *strengt konvekse* vil der være tale om et unikt indre maksimum.

Monotone: Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde



Strengt konvekse: Lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i det indre af den øvre konturmængde



(e) Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1, x_2} \; x_1(x_2 + 5) \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \tag{3.1}$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone, og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Vi kan nu opskrive

Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1(x_2 + 5) + \lambda[m - p_1x_1 - p_2x_2] \tag{3.2}$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) for et indre optimum kan beregnes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_2 + 5 - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 + 5 = \lambda p_1 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \lambda p_2 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = m \tag{3.5}$$

Vi deler nu (3.3) med (3.4)

$$\begin{aligned} \frac{x_2 + 5}{x_1} &= \frac{p_1\lambda}{p_2\lambda} \Leftrightarrow \\ x_2 + 5 &= \frac{p_1}{p_2}x_1 \Leftrightarrow \\ x_2 &= \frac{p_1}{p_2}x_1 - 5 \equiv x_2^*(x_1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Vi indsætter nu (3.6) ind (3.5) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2\left(\frac{p_1}{p_2}x_1 - 5\right) &= m \Leftrightarrow \\ p_1x_1 + p_1x_1 - 5p_2 &= m \Leftrightarrow \\ 2p_1x_1 &= m + 5p_2 \Leftrightarrow \\ x_1^* &= \frac{m + 5p_2}{2p_1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Vi indsætter nu (3.7) i (3.6) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned} x_2^* &= x_2^*(x_1) \\ &= \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{m + 5p_2}{2p_1}\right) - 5 \\ &= \left(\frac{m + 5p_2}{2p_2}\right) - 5 \\ &= \frac{m - 5p_2}{2p_2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

[Udledes alternativt fra Walras's lov.]

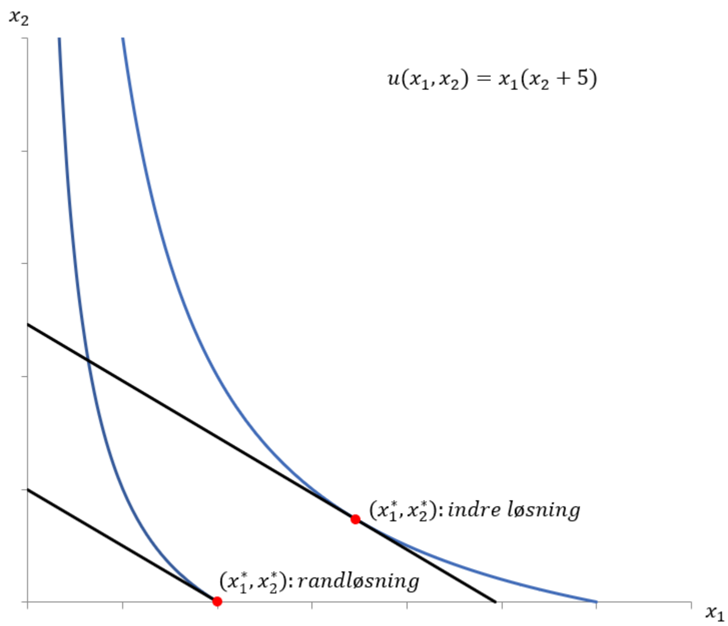
Bemærk, at vi kun har en indre løsning hvis

$$x_2^* > 0 \Leftrightarrow \frac{m - 5p_2}{2p_2} > 0 \Leftrightarrow m > 5p_2 \tag{3.9}$$

Løsningsmængden er derfor

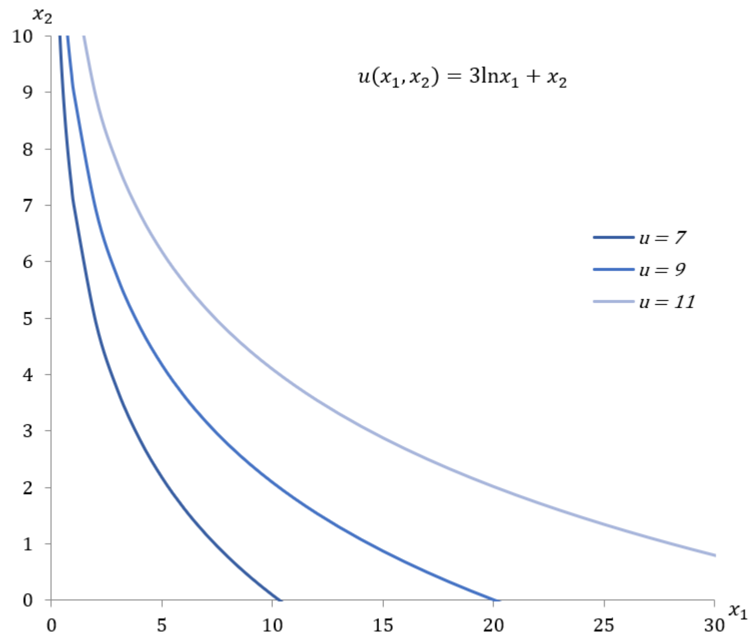
$$(x_1^*, x_2^*) \in \begin{cases} \left\{\left(\frac{m+5p_2}{2p_1}, \frac{m-5p_2}{2p_2}\right)\right\} & \text{hvis } m > 5p_2 \\ \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \text{ellers} \end{cases} \tag{3.10}$$

Illustration



ii. Svar: $u(x_1, x_2) = 3\ln x_1 + x_2$

(a) $u_0 = 3\ln x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_2 = u_0 - 3\ln x_1$



(b) Vi har

$$|MRS(x_1, x_2)| = \left|-\frac{MU_1}{MU_2}\right| = \left|-\frac{3\frac{1}{x_1}}{1}\right| = \frac{3}{x_1}$$

x_1 er essentiel da

$$\lim_{x_1 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \infty, \, \forall x_2 > 0$$

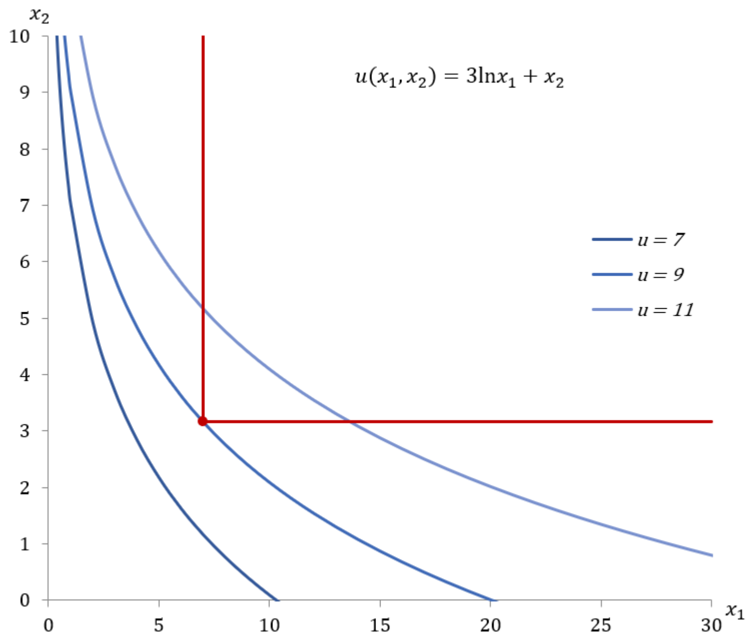
x_2 er *ikke* essentiel da

$$\lim_{x_2 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| > 0, \, \forall x_1 > 0$$

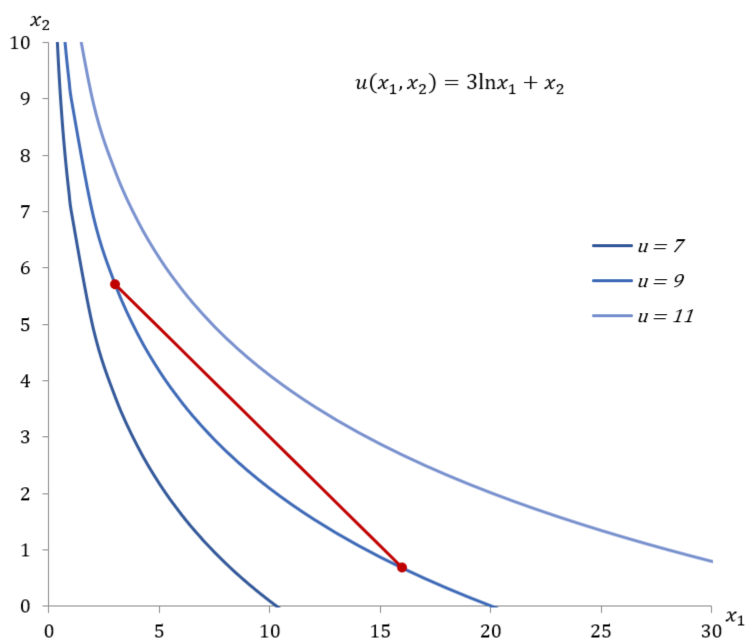
(c) Da x_2 ikke essentiel kan der forekomme randløsninger hvor $x_2 = 0$.

(d) Da nyttefunktionen er *differentiabel* og præferencer *monotone* vil indre optima være karakteriseret ved $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$, dvs. *ingen knækløsninger* eller løsninger væk fra budgetlinjen. Da præferencerne *strengt konvekse* vil der være tale om et unikt indre maksimum.

> *Monotone:* Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde



Strengt konvekse: Lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i det indre af den øvre konturmængde



(e) Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1, x_2} \; 3 \ln x_1 + x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x + p_2 x_2 = m$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone, og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Vi kan nu opskrive

Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 3\ln x_1 + x_2 + \lambda[m - p_1x_1 - p_2x_2]$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) kan beregnes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= \frac{3}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x_1} = \lambda p_1 && (3.11)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= 1 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow 1 = \lambda p_2 && (3.12)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = m && (3.13)
\end{aligned}$$

Vi deler nu (3.11) med (3.12) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x_1} &= \frac{p_1\lambda}{p_2\lambda} \Leftrightarrow\\
3 &= \frac{p_1}{p_2}x_1 \Leftrightarrow\\
x_1^* &= \frac{3p_2}{p_1} && (3.14)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (3.14) i (3.13) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned}
p_1\left(\frac{3p_2}{p_1}\right) + p_2x_2 &= m \Leftrightarrow\\
3p_2 + p_2x_2 &= m \Leftrightarrow\\
x_2^* &= \frac{m - 3p_2}{p_2} && (3.15)
\end{aligned}$$

[Udledes alternativt fra Walras' Lov.]

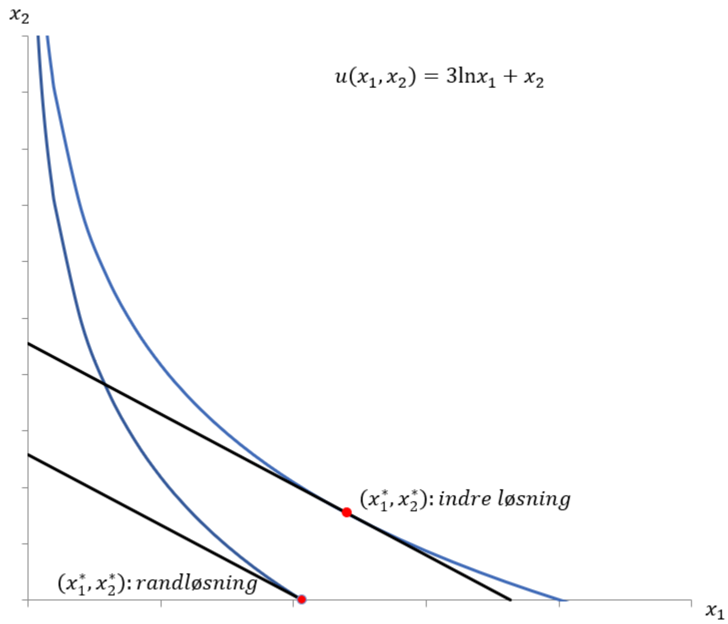
Bemærk, at vi kun har en indre løsning hvis

$$x_2^* > 0 \Leftrightarrow \frac{m - 3p_2}{p_2} > 0 \Leftrightarrow m > 3p_2 \qquad (3.16)$$

Løsningsmængden er derfor

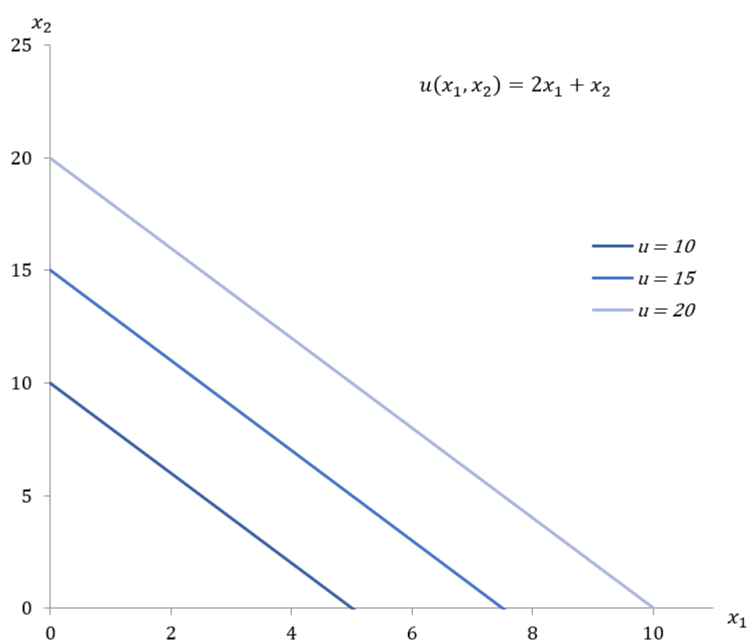
$$(x_1^*, x_2^*) \in \begin{cases} \left\{\left(\frac{3p_2}{p_1}, \frac{m-3p_2}{p_2}\right)\right\} & \text{hvis } m > 3p_2 \\ \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \text{ellers} \end{cases} \qquad (3.17)$$

Illustration



iii. Svar: $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

(a) $u_0 = 2x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_2 = u_0 - 2x_1$



(b) Vi har

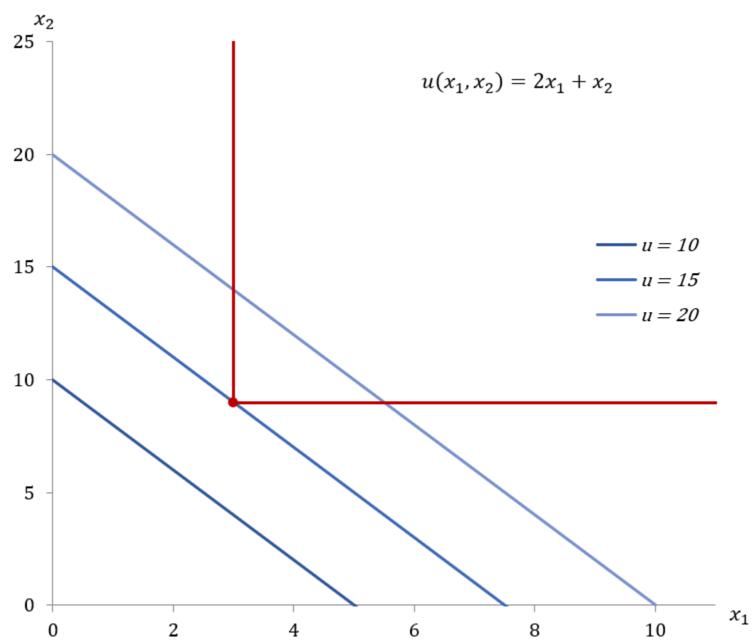
$$|MRS(x_1, x_2)| = \left|-\frac{MU_1}{MU_2}\right| = \left|-\frac{2}{1}\right| = 2$$

Hvoraf det fremgår at hverken x_1 eller x_2 er essentielle, da $0 < |MRS(x_1, x_2)| < \infty$.

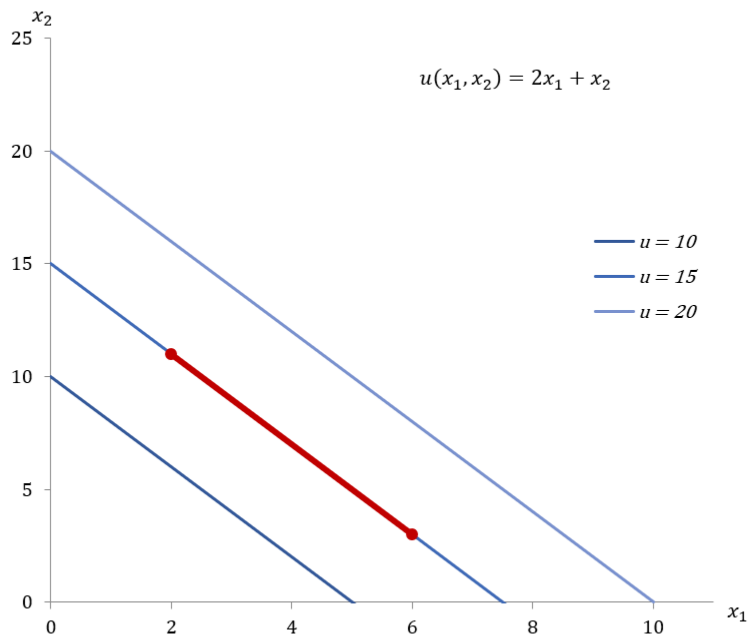
(c) Da hverken x_1 eller x_2 er essentielle kan der forekomme randløsninger hvor $x_1 = 0$ eller/og $x_2 = 0$.

(d) Da nyttefunktionen er *differentiabel* og præferencer *monotone* vil indre optima være karakteriseret ved $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$, dvs. *ingen knækløsninger* eller løsninger væk fra budgetlinjen. Da præferencerne er konvekse vil der være tale om en konveks mængde af indre maksima, men ikke nødvendigvis et enkelt punkt (det kræver strengt konveksitet).

Monotone: Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde.



Konvekse: Lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i den øvre konturmængde (dog på randen, så ikke strengt konvekse).



(e) Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1,x_2} 2x_1 + x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1x + p_2x_2 = m \tag{3.18}$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone, e, og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + x_2 + \lambda[m - p_1x_1 - p_2x_2] \tag{3.19}$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) kan beregnes

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2 - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow 2 = \lambda p_1 \tag{3.20}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow 1 = \lambda p_2 \tag{3.21}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = m \tag{3.22}$$

Vi deler nu (3.20) med (3.21):

$$2 = \frac{p_1}{p_2} \tag{3.23}$$

Bemærk: Dette er et direkte resultat af de konstante marginal nytter. Såfremt

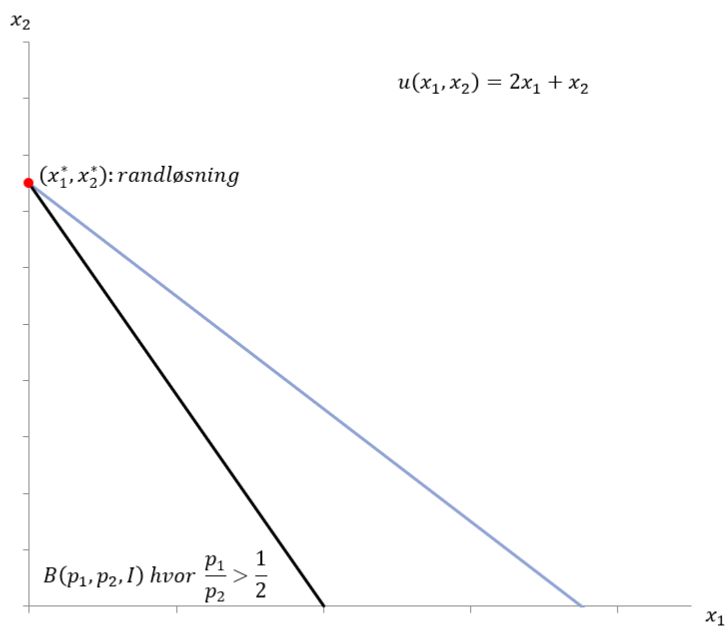
$2 \neq \frac{p_1}{p_2}$ ligger det nyttemaksimerende forbrugsbundt på randen. Bemærk at

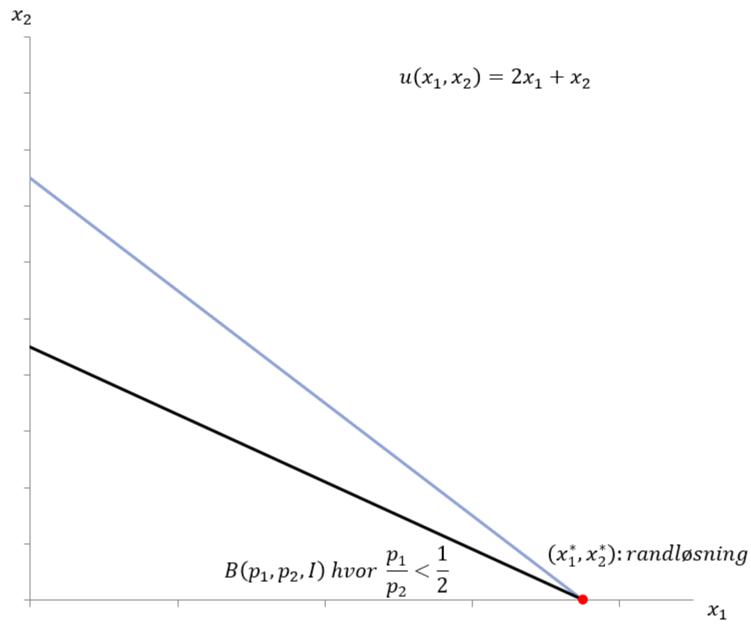
$$\begin{aligned} u(\frac{m}{p_1}, 0) &> u(0, \frac{m}{p_2}) \Leftrightarrow \\ 2\frac{m}{p_1} &> \frac{m}{p_2} \Leftrightarrow \\ \frac{p_1}{p_2} &< 2 \end{aligned}$$

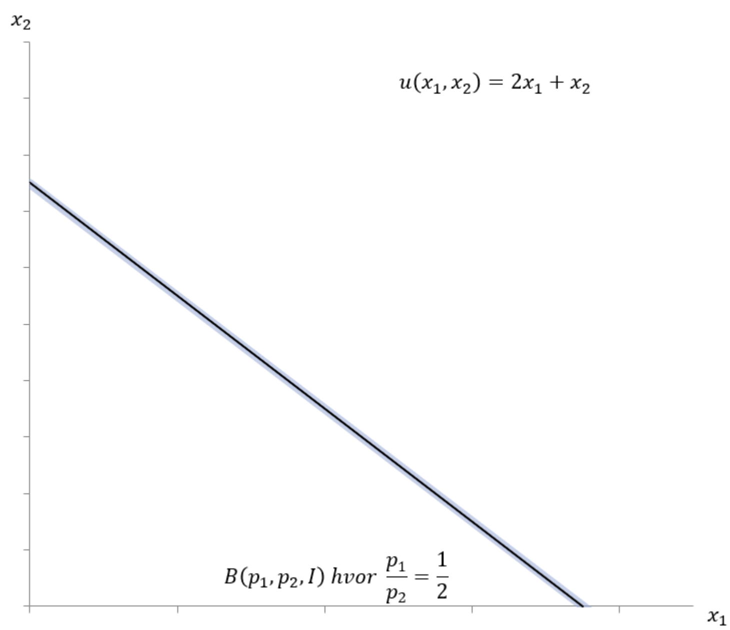
Løsningsmængden bliver derfor

$$(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \text{hvis } \frac{p_1}{p_2} < 2 \\ \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\} & \text{hvis } \frac{p_1}{p_2} = 2 \\ \left\{\left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right\} & \text{hvis } \frac{p_1}{p_2} > 2 \end{cases} \tag{3.24}$$

Illustration




x_2
$u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$
(x_1^*, x_2^*): $randløsning$
$B(p_1, p_2, I)$ $hvor$ $\frac{p_1}{p_2} < \frac{1}{2}$
x_1


x_2
$u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$
$B(p_1, p_2, I)$ $hvor$ $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$
x_1

Afleveringsopgaven

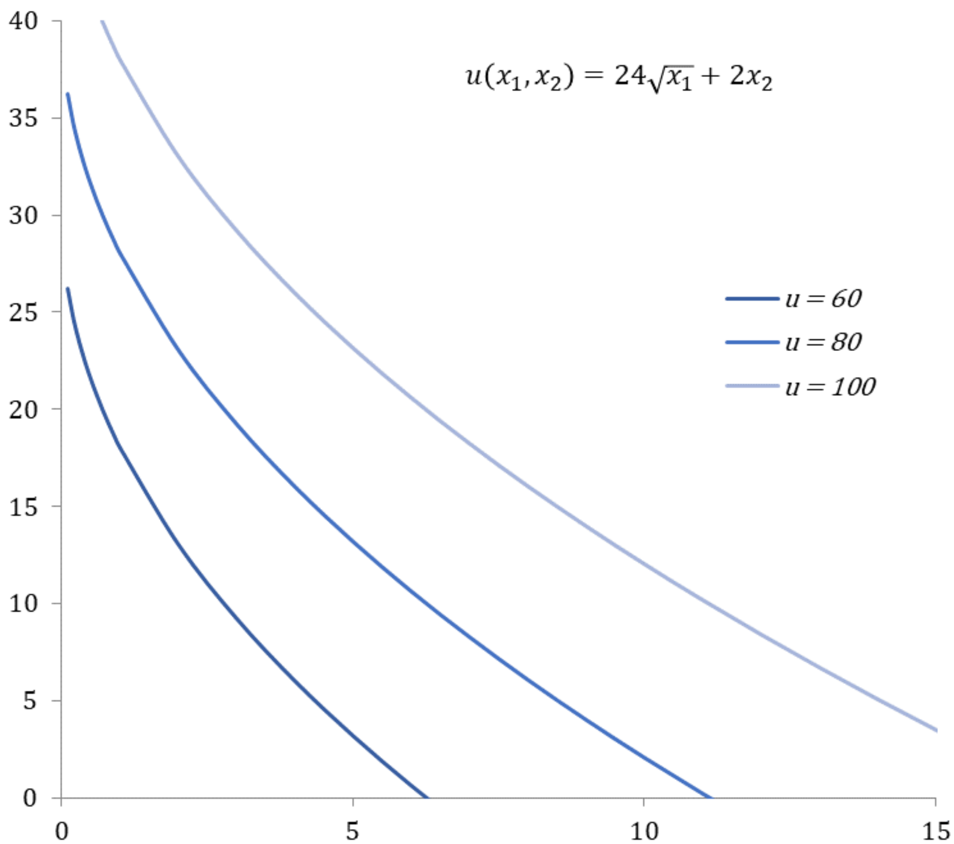
Betragt nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = 24\sqrt{x_1} + 2x_2.$$

Forbrugsmulighedsområdet er $\mathbb{R}^2_+$. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, m > 0$.

(a) Tegn indifferenskurverne

Svar: $u_0 = 24\sqrt{x_1} + 2x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{u_0 - 24\sqrt{x_1}}{2}$



(b) Bestem hvilke af varerne som er essentielle

Svar: Vi har

$$|MRS(x_1, x_2)| = \left| -\frac{MU_1}{MU_2} \right| = \left| -\frac{24 \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1}}}{2} \right| = \frac{6}{\sqrt{x_1}}$$

x_1 er essentiel da

$$\lim_{x_1 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \infty, \, \forall x_2 > 0$$

x_2 er *ikke* essentiel da

$$\lim_{x_2 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| > 0, \, \forall x_1 > 0$$

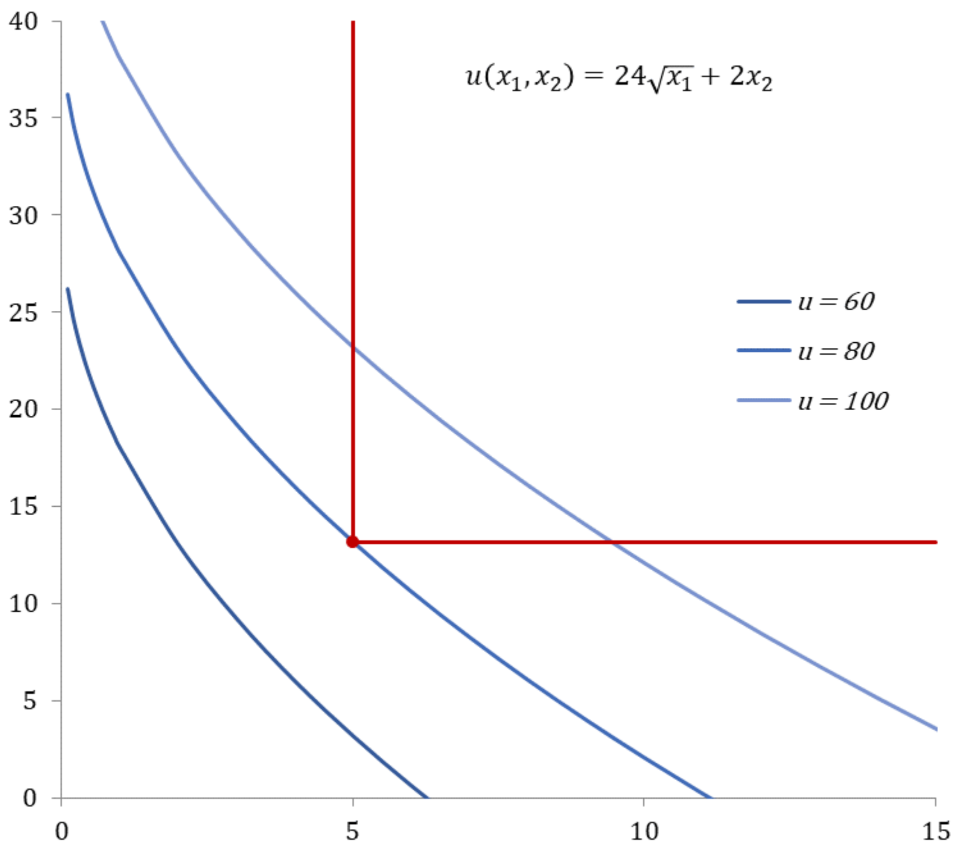
(c) Tag stilling til om der kan være randløsninger

Svar: Da x_2 ikke essentiel kan der forekomme randløsninger hvor $x_2 = 0$.

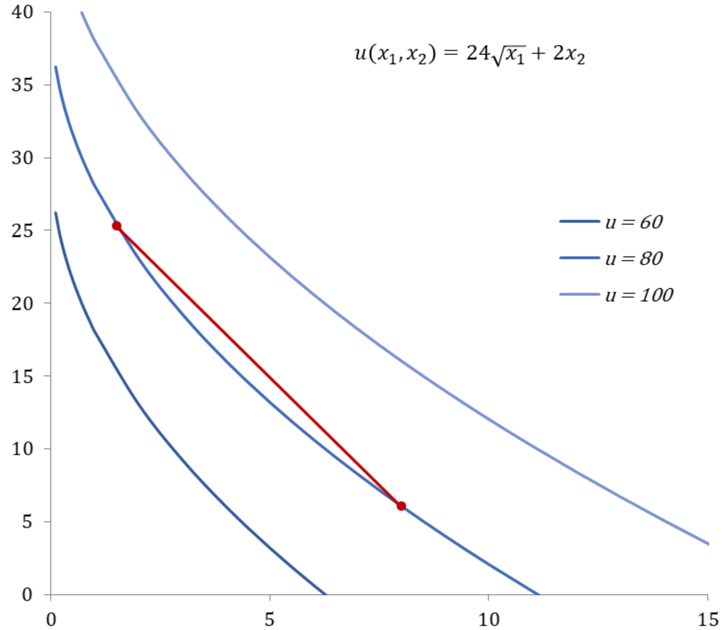
(d) Tag stilling til om indre løsninger vil være karakteriset ved $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$ og i så fald om løsningen er optimal

Svar: Da nyttefunktionen er *differentiabel* og præferencer *monotone* vil indre optima være karakteriseret ved $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$, dvs. *ingen knækløsninger* eller løsninger væk fra budgetlinjen. Da præferencerne *strengt konvekse* vil der være tale om et unikt indre maksimum.

Monotone: Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde



Strengt konvekse: Lineære kombinationer af to punkter på indifferenskurven ligger i det indre af den øvre konturmængde



(e) Løs forbrugerens nyttemaksimeringsproblem. Illustrér løsningsmængden.

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles:

$$\max_{x_1,x_2} \; 24\sqrt{x_1} + 2x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone, og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 24\sqrt{x_1} + 2x_2 + \lambda[m - p_1x_1 - p_2x_2]$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) kan beregnes

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{12}{\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{x_1}} = \lambda p_1 \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow 2 = \lambda p_2 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = m \tag{3.27}$$

Vi deler nu (3.3) med (3.4) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned}
\frac{12}{2\sqrt{x_1}} &= \frac{p_1\lambda}{p_2\lambda} \Leftrightarrow \\
\sqrt{x_1} &= 6\frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow \\
x_1^* &= \left(6\frac{p_2}{p_1}\right)^2 && (3.28)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (3.28) i (3.27) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned}
p_1\left(6\frac{p_2}{p_1}\right)^2 + p_2x_2 &= m \Leftrightarrow \\
36\frac{p_2^2}{p_1} + p_2x_2 &= m \Leftrightarrow \\
p_2x_2 &= m - 36\frac{p_2^2}{p_1} \\
x_2^* &= \frac{m}{p_2} - 36\frac{p_2}{p_1} && (3.29)
\end{aligned}$$

[Udledes alternativt fra Walras' Lov.]

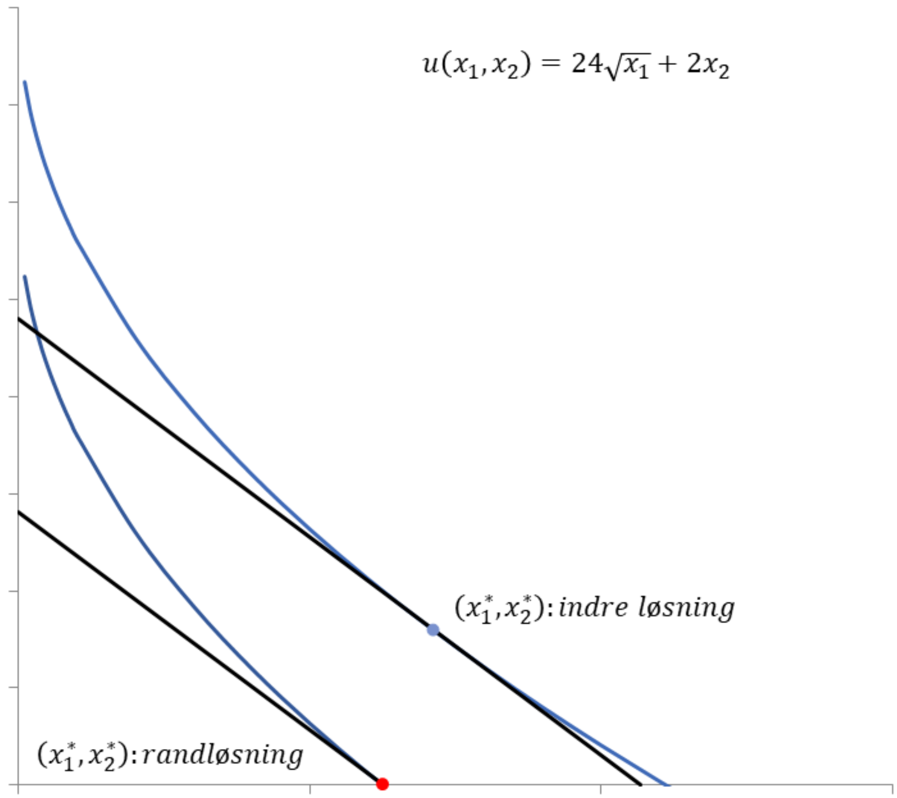
Bemærk, at vi kun har en indre løsning hvis

$$x_2^* > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{p_2} - 36\frac{p_2}{p_1} > 0 \Leftrightarrow m > 36\frac{p_2^2}{p_1} \tag{3.30}$$

Løsningsmængden er derfor

$$X^* = \begin{cases} \left\{\left(36\frac{p_2^2}{p_1^2}, \frac{m}{p_2} - 36\frac{p_2}{p_1}\right)\right\} & \text{hvis } m > 36\frac{p_2^2}{p_1} \\ \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \text{ellers} \end{cases} \tag{3.31}$$

Illustration



(f) Antag at regeringen giver forbrugeren en voucher som *udelukkende* kan bruges på én enhed af x_2, og samtidig opkræver en skat på τ. Forbrugens efter skat indkomst er så $\tilde{m} = m - \tau$. Antag $\tau = p_2$. Hvad vil forbrugeren tænke om det tiltag?

Svar: Da præferencerne er montone vil forbrugen altid indløse voucheren. Forbrugerens problem kan nu skrives

$$\max_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} 24\sqrt{x_1} + 2(x_2 + 1) \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = \tilde{m}$$

Vi kan også definere $\tilde{x}_2 = x_1 + 1$, og skive

$$\max_{x_1 \geq 0, \tilde{x}_2 \geq 1} 24\sqrt{x_1} + 2\tilde{x}_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x_1 + p_2(\tilde{x}_2 - 1) = m - p_2$$

Det er det samme som

$$\max_{x_1 \geq 0, \tilde{x}_2 \geq 1} 24\sqrt{x_1} + 2\tilde{x}_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 \tilde{x}_2 = m$$

Tiltaget kan altså tænkes som en *indsnævring af forbrugsmulighedsområdet*. Det kan aldrig stille forbrugeren bedre at miste muligheder. De indre løsninger er dog uændrede. Adfærden og nytten er derfor uændret hvis forbrugeren er rig nok

$$x_2^* > 1 \Leftrightarrow \frac{m}{p_2} - 36\frac{p_2}{p_1} > 1 \Leftrightarrow m > p_2 + 36\frac{p_2^2}{p_1}$$

Hvis forbrugeren er fattig tvinges hun til overforbrug af x_2, hvilket reducerer hendes nytte, da hendes adfærd ellers ikke kan have været optimal i første omgang.

Ugeseddel 3: Efterspørgselsfunktionen
– med svar –

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber

1. Initialbeholdning
2. Arbejdsudbud
3. Intertemporale valg
4. Efterspørgselsfunktionen (Marshall-, indkomst-, pris-, krydspris-)
5. Indkomstofferkurven
6. Gode typer
   (a) indkomstændring:
   inferiøre, kvasi-lineære, normale,
   nødvendige, homotetiske, luksus
   (b) prisændringer:
   almindelige, Giffen
   substituter, komplementer
7. Substitut vs. komplement

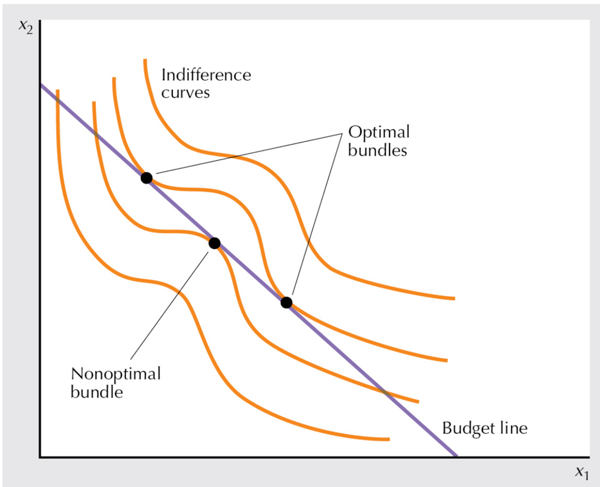
Færdigheder

1. Rykke budgetlinjer med pris- og indkomstændringer når indkomsten er endogen
2. Løse simple problemer med arbejdsudbud
3. Løse simple problemer med intertemporale valg
4. Bestemme gode typer

Bemærk: Vi fortsætter også med begreber og færdigheder fra sidste ugeseddel

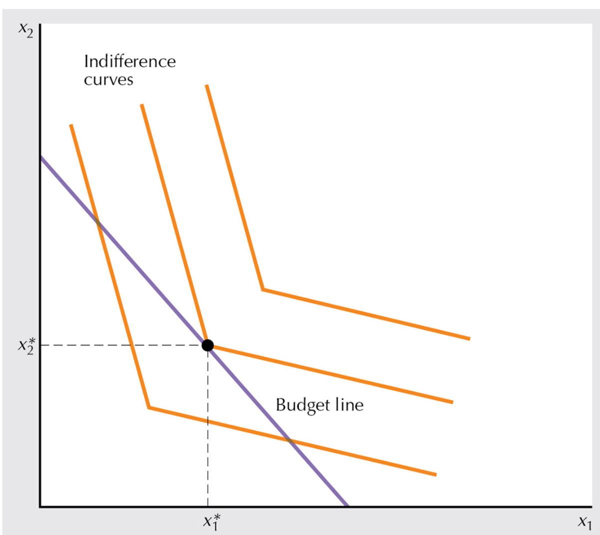
Checkopgave

(a) Giv et grafisk eksempel på et forbrugerproblem med et *lokalt minimum*, hvor *budgetlinjen tangerer indifferenskurven*



Svar:

(b) Giv et grafisk eksempel på et forbrugerproblem med et *globalt maksimum*, hvor *budgetlinjen* ikke *tangerer indifferenskurven*



Svar:

1 Budgetmængden i 2D - *endogen* indkomst

Gennemgang: Regn selv.

Husk at budgetmængden med *endogen* indkomst generelt skrives

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(p_1, p_2, e_1, e_2) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_1\omega_1 + p_2\omega_2\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_2 \leq (p_1\omega_1 + p_2\omega_2 - p_1x_1)/p_2\} \end{aligned}$$

Antag, at der er to varer, snacks og drinks, som kan forbruges i ikke-negative mængder. Prisen på snacks (vare 1) er 5 kr., og prisen på drinks (vare 2) er 10 kr. Antag at Adam ejer 20 snacks og 20 drinks.

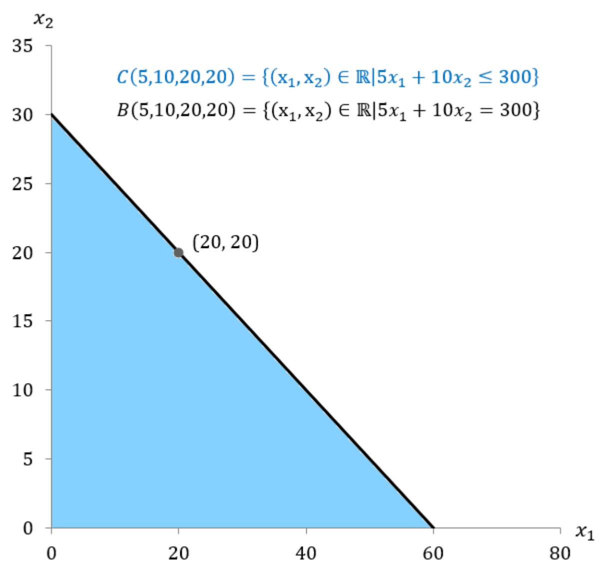
(a) Hvilken budgetmængde har Adam? Tegn i et diagram og opskriv matematisk

Svar:

- Matematisk

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(5, 10, 20, 20) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, 5x_1 + 10x_2 \leq 5 \cdot 20 + 10 \cdot 20\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, 5x_1 + 10x_2 \leq 300\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_2 \leq 30 - \tfrac{1}{2}x_1\} \end{aligned}$$

- Illustration



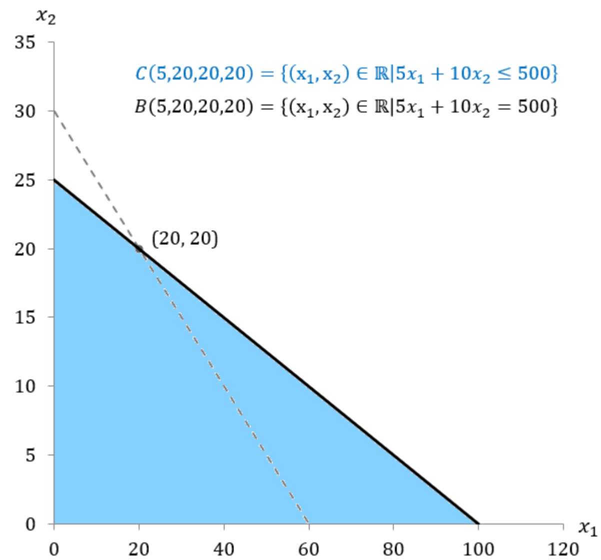
(b) Hvad sker der med budgetmængden hvis prisen på drinks stiger til 20 kr.? Tegn i et diagram og opskriv matematisk

Svar:

- Matematisk

$$\begin{aligned} C(5,20,20,20) &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, 5x_1 + 20x_2 \le 5 \cdot 20 + 20 \cdot 20\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, 5x_1 + 20x_2 \le 500\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_2 \le 25 - \tfrac{1}{4}x_1\} \end{aligned}$$

- Illustration



(c) Hvis Adam gerne vil forbruge 20 snacks og 20 drinks er han så sikker på at kunne dette uanset, hvad priserne er?

Svar:

- Ja! Adam kan altid vælge blot at forbruge sin initialbeholdning:

$$\boldsymbol{\omega} = (20,20) \in B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}),\ \forall \boldsymbol{p}$$

2 Flere Nyttefunktioner II

Gennemgang: Gennemgås ved tavlen for (i) og regn selv for (ii).

Betragt følgende nyttefunktioner:

i. $u(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

ii. $u(x_1,x_2) = \min\{x_1,x_2\}$

Forbrugsmulighedsområdet er $\mathbb{R}^2_+$. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, m > 0$.
Besvar følgende spørgsmål for én nyttefunktion ad gangen:

(a) Tegn indifferenskurverne

(b) Bestem hvilke af varerne som er essentielle

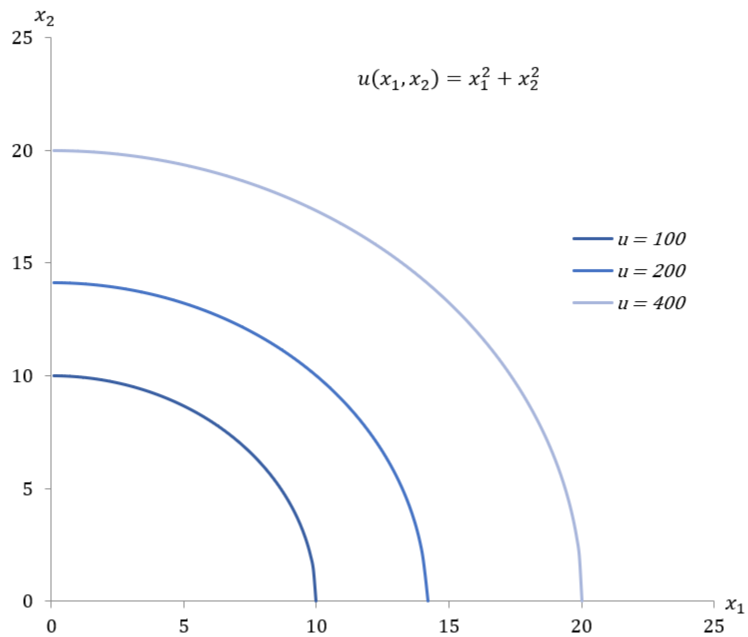
(c) Tag stilling til om der kan være randløsninger

(d) Tag stilling til om indre løsninger vil være karakteriset ved $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$ og i så fald om løsningen er et minima eller maxima

(e) Løs forbrugerens nyttemaksimeringsproblem. Illustrér løsningsmængden

i. Svar: $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

(a) $u_0 = x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow x_2 = u_0 - x_1^2$



(b) $|MRS(x_1, x_2)|$ er

$$|MRS(x_1, x_2)| = \left|-\frac{MU_1}{MU_2}\right| = \frac{2x_1}{2x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

x_1 er *ikke* essentiel da

$$\lim_{x_1 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = 0 < \infty, \, \forall x_2 > 0$$

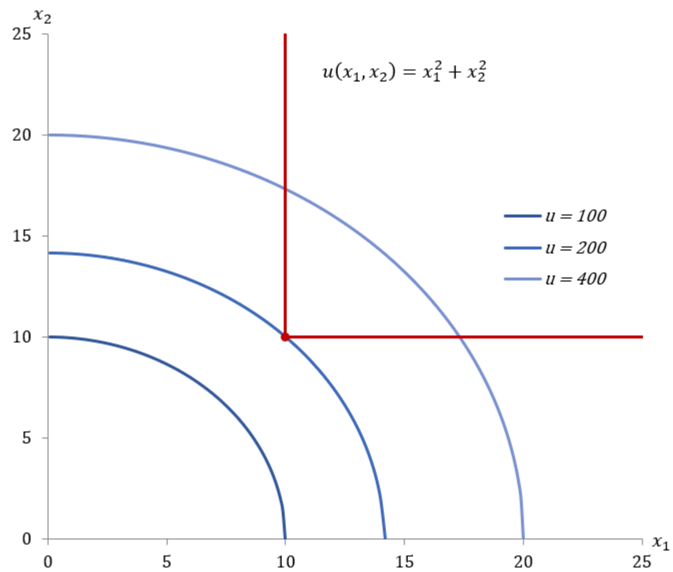
x_2 er *ikke* essentiel da

$$\lim_{x_2 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \infty > 0, \, \forall x_1 > 0$$

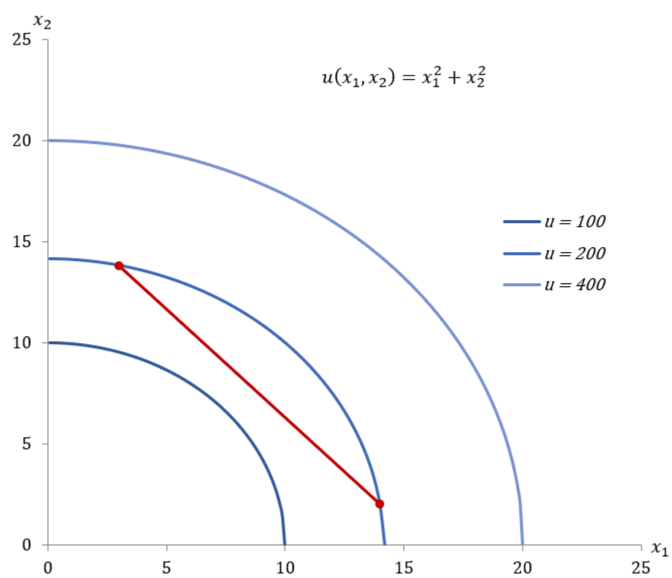
(c) Da hverken x_1 eller x_2 er essentielle kan der forekomme randløsninger hvor $x_1 = 0$ og/eller $x_2 = 0$.

(d) Da nyttefunktionen er *differentiabel* og præferencerne er *monotone* vil indre optima være karakteriseret ved $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$, dvs. *ingen knækløsninger* eller løsninger væk fra budgetlinjen. Da præferencerne *ikke* er *konvekse* kan der være tale om indre minimum.

  i. *Monotone:* Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde.



ii. *Ikke konvekse:* Lineære kombinationer af to punkter på indifferenskurven ligger *ikke* i det indre af den øvre konturmængde.



(e) Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1,x_2} \; x_1^2 + x_2^2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x + p_2 x_2 = m \tag{2.1}$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone, og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda[m - p_1 x_1 - p_2 x_2] \tag{2.2}$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) for et indre optimum kan beregnes

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = \lambda p_1 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_2 = \lambda p_2 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \tag{2.5}$$

Vi deler nu (2.3) med (2.4)

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_2} &= \frac{p_1 \lambda}{p_2 \lambda} \Leftrightarrow \\ x_1 &= \frac{p_1}{p_2} x_2 \equiv x_1^*(x_2, p_1, p_2) \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (2.6) i (2.5) og udleder det *optimale forbrug af* x_2

$$\begin{aligned}p_1\left(\frac{p_1}{p_2}x_2\right) + p_2 x_2 &= m \Leftrightarrow \\ \frac{p_1^2}{p_2}x_2 + p_2 x_2 &= m \Leftrightarrow \\ \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_2} x_2 &= m \Leftrightarrow \\ x_2^* &= \frac{p_2}{p_1^2 + p_2^2} m \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (2.7) i (2.6) og udleder det *optimale forbrug af* x_1

$$\begin{aligned}x_1^* &= x_1^*(x_2, p_1, p_2) \\ &= \frac{p_1}{p_2} \frac{p_2}{p_1^2 + p_2^2} m \\ &= \frac{p_1}{p_1^2 + p_2^2} m \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Vi beregner nu nytteniveauet af den *indre løsning*

$$\begin{aligned}u\left(\frac{p_1}{p_1^2+p_2^2}m, \frac{p_2}{p_1^2+p_2^2}m\right) &= \left(\frac{p_1}{p_1^2+p_2^2}m\right)^2 + \left(\frac{p_2}{p_1^2+p_2^2}m\right)^2 \\ &= \frac{p_1^2}{(p_1^2+p_2^2)^2}m^2 + \frac{p_2^2}{(p_1^2+p_2^2)^2}m^2 \\ &= \frac{(p_1^2+p_2^2)\,m^2}{(p_1^2+p_2^2)^2} \\ &= \frac{m^2}{p_1^2+p_2^2} \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Vi sammenligner nu dette niveau med nytten ved *randløsningen hvor* $x_2 = 0$ (bemærk beregningerne er helt analoge for *randløsningen hvor* $x_1 = 0$)

$$\begin{aligned} u\left(\frac{m}{p_1}, 0\right) &= \left(\frac{m}{p_1}\right)^2 + 0^2 \\ &= \frac{m^2}{p_1^2} \\ &> \frac{m^2}{p_1^2 + p_2^2} \forall p_1, p_2 > 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

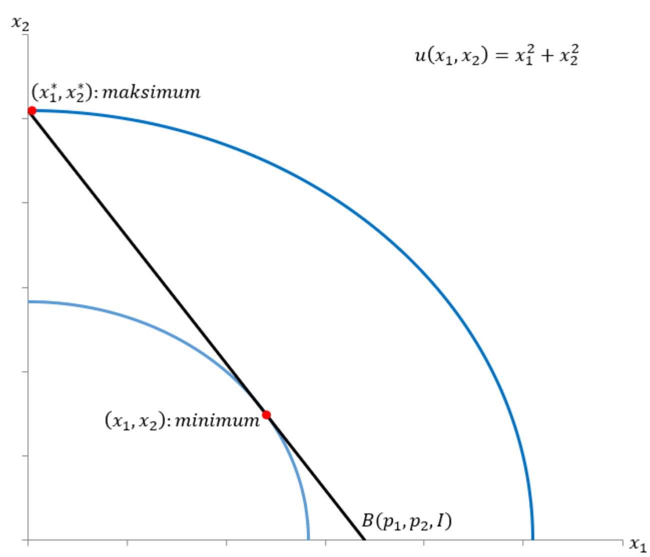
Heraf fremgår det, at det nyttemaksimerende forbrug altid vil ligge på randen. Vi sammenligner nu de *to mulige randløsninger*

$$\begin{aligned} u(\frac{m}{p_1}, 0) &> u(0, \frac{m}{p_2}) \Leftrightarrow \\ \frac{m^2}{p_1^2} &> \frac{m^2}{p_2^2} \Leftrightarrow \\ p_2^2 &> p_1^2 \Leftrightarrow \\ p_2 &> p_1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Løsningsmængden er derfor

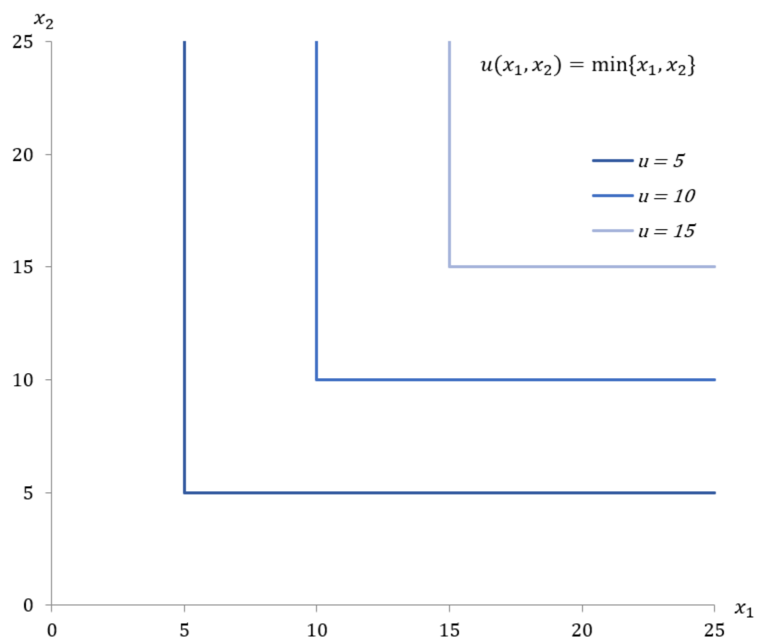
$$(x_1^*, x_2^*) \in \begin{cases} \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \text{hvis } p_2 > p_1 \\ \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right), \left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right\} & \text{hvis } p_2 = p_1 \\ \left\{\left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right\} & \text{hvis } p_2 < p_1 \end{cases} \tag{2.12}$$

Illustration



ii. Svar: $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$

(a) $u_0 = \min\{x_1, x_2\} \Rightarrow \{(x_1, x_2) \,|\, (x_1 \geq u_0 \wedge x_2 = u_0) \vee (x_1 = u_0 \wedge x_2 \geq u_0)\}$



(b) Da $|MRS(x_1, x_2)|$ ikke er veldefineret, kan den tekniske definition på essentielle goder ikke bruges her. Men da indifferenskurverne helt oplagt ikke skærer hverken første eller andenaksen, konkluderer vi at både x_1 og x_2 er essentielle goder.

(c) Da både x_1 og x_2 er essentielle vil der ikke forekomme randløsninger.

(d) Da nyttefunktionen ikke er *differentiabel* vil indre optima ikke være karakteriseret ved $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$, dvs. løsninger vil være i *knækket*.

(e) Maksimeringsproblemet opstilles:

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \min\{x_1, x_2\} \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x + p_2 x_2 \leq m \tag{2.13}$$

Grundet funktionsudtrykket er det oplagt at det nyttemaksimerende forbrug må være at forbruge de to goder i lige store mængder dvs. $x_1 = x_2$ idet

$$u(x, x + \epsilon) = \min\{x, x + \epsilon\} = x$$

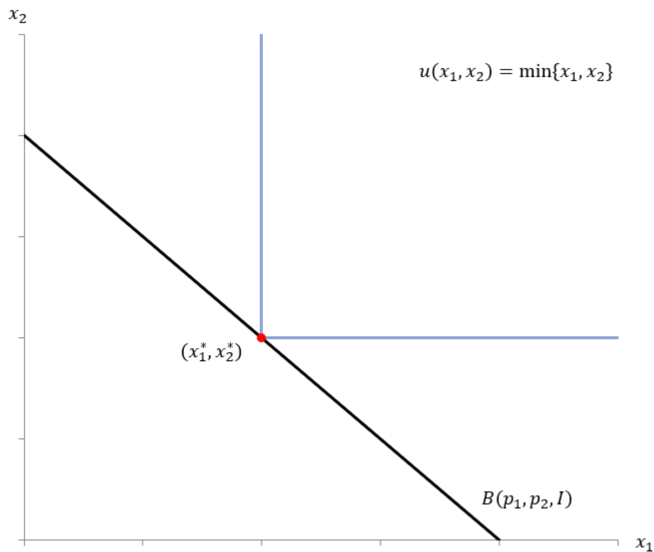
Vi sætter nu $x_1 = x_2$ i budgetlinjen hvormed fås:

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 x_1 &= m \Leftrightarrow \\ (p_1 + p_2) x_1 &= m \Leftrightarrow \\ x_1^* &= \frac{m}{p_1 + p_2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Da vi har sat $x_1 = x_2$ Følger det umiddelbart herfra at *løsningsmængden* er givet ved

$$(x_1^*, x_2^*) \in \left\{ \left(\frac{m}{p_1 + p_2}, \frac{m}{p_1 + p_2} \right) \right\} \tag{2.15}$$

Illustration



3 Indkomstofferkurven

Gennemgang: Regn selv.

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a},$$

hvor $0 < a < 1$ er en konstant. Forbrugsmulighedsområdet er $\mathbb{R}_+^2$. Priserne på varerne er hhv. $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$ kr. per enhed, og forbrugeren har sat $m > 0$ kr. til side til køb af de to varer.

(a) Hvad er forbrugerens efterspørgselsfunktion?

Svar: Fra Ugeseddel 3 (spørgsmål 2) ved vi at løsningen til forbrugerens problem er

$$\begin{aligned} x_1^\star &= a\frac{m}{p_1} \\ x_2^\star &= (1-a)\frac{m}{p_2} \end{aligned}$$

Efterspørgselsfunktionen er derfor

$$\boldsymbol{x}^\star(p_1, p_2, m) = (a\frac{m}{p_1}, (1-a)\frac{m}{p_2})$$

(b) Hvad er forbrugerens indkomst-efterspørgselsfunktion?

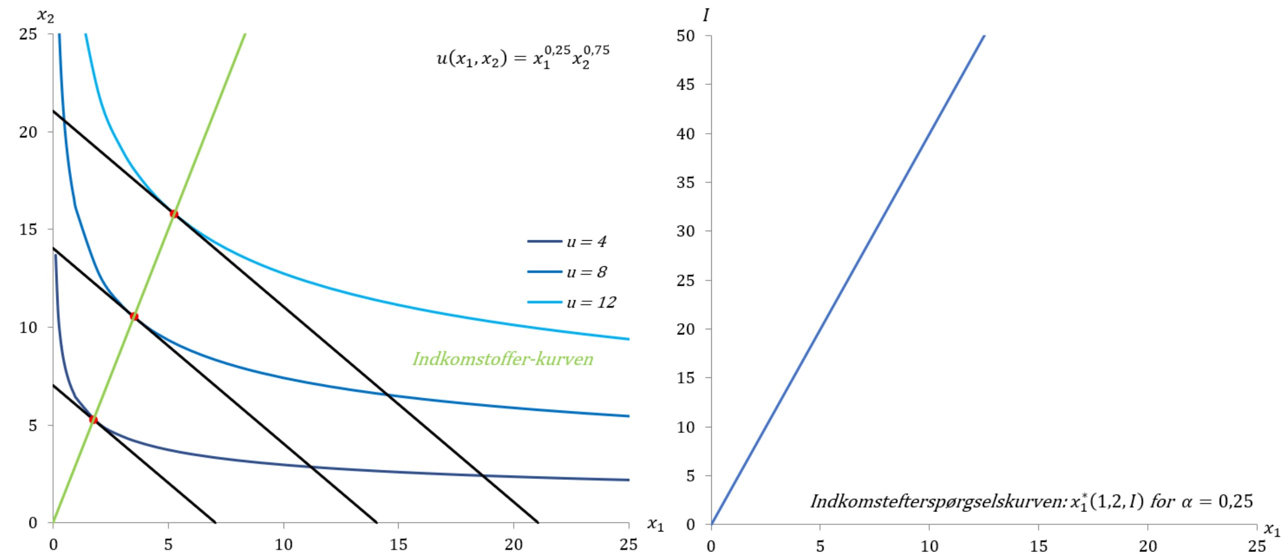
Svar: Forbrugerens indkomst-efterspørgselsfunktion er givet ved den normale efterspørgselsfunktion, men for givne $p_1 = \overline{p}_1$ og $p_2 = \overline{p}_2$. Dvs. at man lader kun indkomsten variere

$$\boldsymbol{x}^\star(\overline{p}_1, \overline{p}_2, m) = \left(a\frac{m}{\overline{p}_1}, (1-a)\frac{m}{\overline{p}_2}\right) \text{ for givne } (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$$

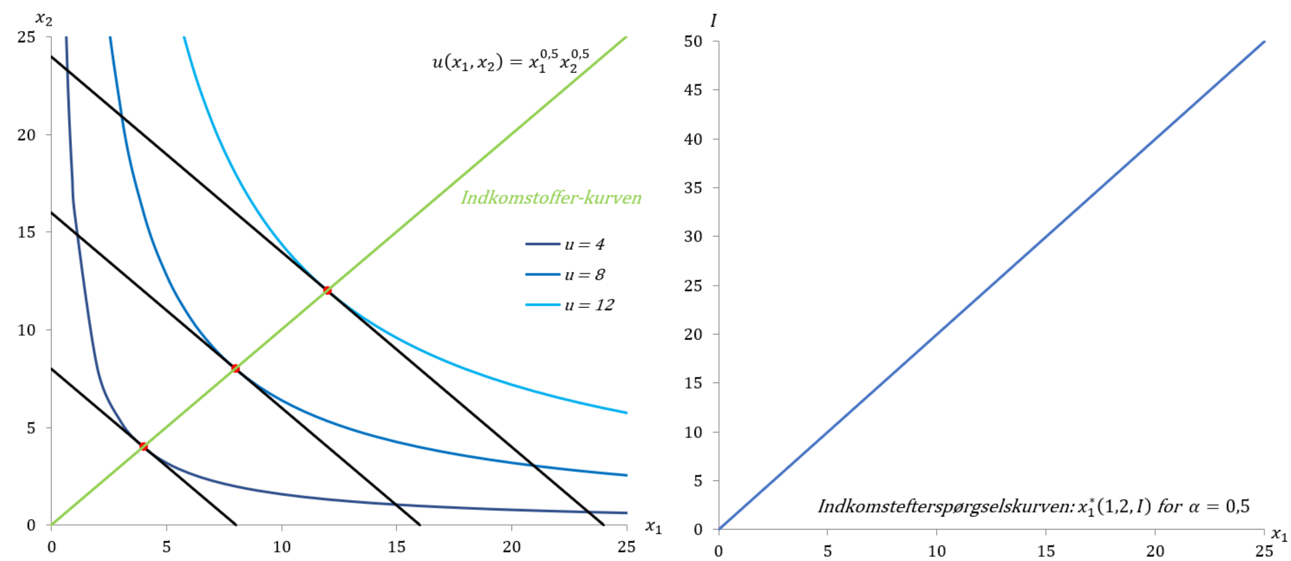
(c) Tegn indkomstofferkurven og indkomstefterspørgselskurven for vare 1 for $a \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$

Svar:

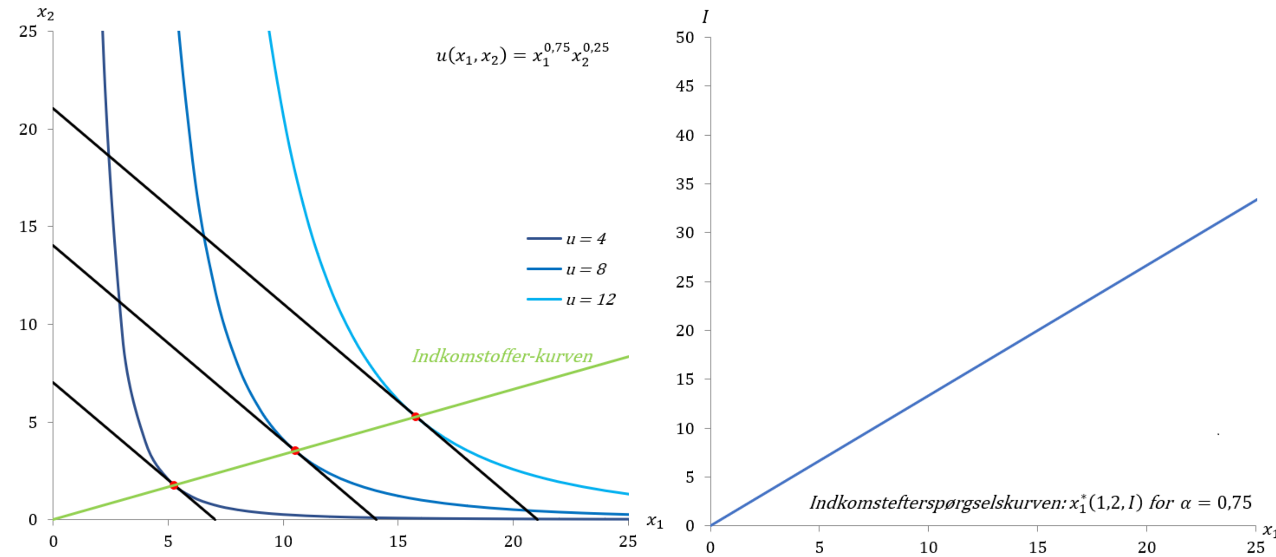
- For $\alpha = 0.25$



- For $\alpha = 0.5$



- For $\alpha = 0.75$



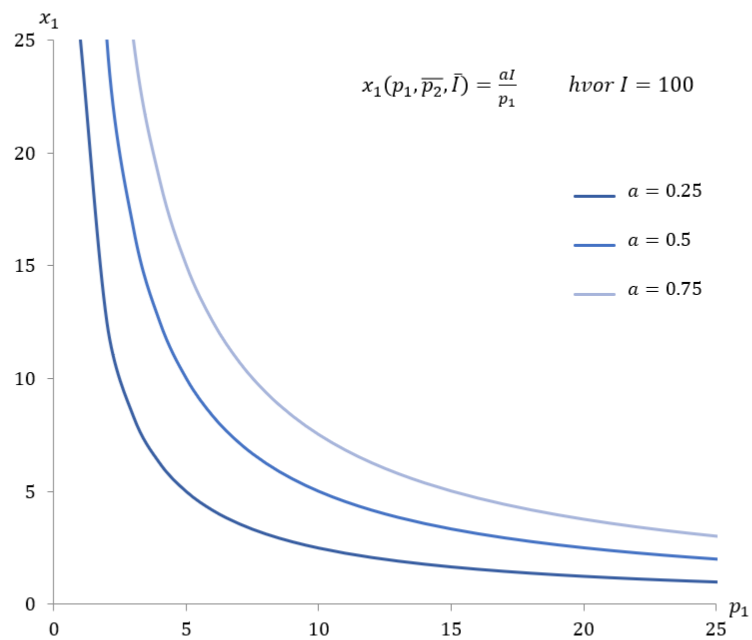
(d) For hvilke værdier af a er vare 1 hhv. et inferiørt, normalt og luksus gode?

Svar: Da $dx_1^\star(\overline{p}_1, \overline{p}_2, m)/dm = \frac{a}{\overline{p}_1} > 0$ er vare 1 et normalt gode. Da $d\frac{x_i^\star(\overline{p}_1, \overline{p}_2, m)}{m}/dm = 0$ er vare 1 også et homotetisk gode.

(e) Tegn egenpris-efterspørgselskurven for vare 1 for $a \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$

Svar: Forbrugerens egenpris-efterspørgselsfunktion er givet ved den normale efterspørgselsfunktion, men for givne $p_2 = \overline{p}_2$ og $m = \overline{m}$. Dvs. at man kun lader prisen på vare 1 variere:

$$\boldsymbol{x}_1^\star(p_1, \overline{p}_2, \overline{m}) = a\frac{\overline{m}}{p_1} \text{ for givne } (\overline{p}_2, \overline{m})$$



(f) For hvilke værdier af a er vare 1 hhv. et Giffen gode og et almindeligt gode?

Svar: Da $\frac{dx_1^\star(p_1,\bar{p}_2,\overline{m})}{dp_1} = -\frac{a\overline{I}}{p_1^2} < 0$ er vare altid et almindeligt gode.

4 Intertemporalt forbrug

Gennemgang: Regn selv (a). Gennemgang ved tavlen af (b)-(c). Regn selv (d)-(f). Gennemgang ved tavlen af (g)-(i).

Betragt følgende intertemporale forbrugerproblem

$$v(r, m, \Delta) = \max_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2_{++}} \ln(c_1) + \beta \ln(c_2)$$
$$\text{u.b.b.}$$
$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} \leq \Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r},$$

hvor $\beta > 0$ er diskonteringsfaktoren, $r > -1$ er renten, $m_1 = \Delta m$ er indkomsten i periode 1, $m_2 = (1-\Delta)m$ indkomsten i periode 2, og $\Delta \in [0, 1]$. Det kan vises at præferencerne er monotone, konvekse og at randløsninger kan udelukkes.

(a) Find det optimale forbrug i begge perioder, $c_1^\star(r, m, \Delta)$ og $c_2^\star(r, m, \Delta)$

Svar: Lagrange-funktionen er

$$\mathcal{L}(c_1, c_2, \lambda) = \ln(c_1) + \beta \ln(c_2) + \lambda \left[\Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right] \tag{4.1}$$

FOCs er

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c_1} = \lambda \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{c_2} = \lambda \frac{1}{1+r} \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \tag{4.4}$$

Fra (4.2) og (4.3) fås

$$\frac{c_2}{c_1} = \beta(1+r) \tag{4.5}$$

Fra (4.4) fås

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{c_2}{1+r} &= \Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r} \Leftrightarrow \\ c_1 + \frac{\beta(1+r)c_1}{1+r} &= \Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r} \Leftrightarrow \\ c_1 + \beta c_1 &= \Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r} \Leftrightarrow \\ c_1^\star(r,m,\Delta) &= \frac{\Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r}}{1+\beta} \end{aligned}$$

Og heraf fås

$$c_2^\star(r,m,\Delta) = \beta(1+r)c_1^\star(r,m,\Delta) = \beta(1+r)\frac{\Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r}}{1+\beta}$$

Betragt nu i stedet det lidt mere generelle intertemporale forbrugerproblem

$$v(m,\Delta) = \max_{c_1,c_2 \in \mathbb{R}_+^2} \ln(c_1) + \beta \ln(c_2)$$

$$\text{u.b.b.}$$

$$\begin{aligned} \text{hvis } c_1 \leq \Delta m: \ c_1 + \frac{c_2}{1+r_o} &\leq \Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r_o} \\ \text{hvis } c_1 > \Delta m: \ c_1 + \frac{c_2}{1+r_l} &\leq \Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r_l}, \end{aligned}$$

hvor $r_l > r_o$.

(b) Giv en fortolkning af r_o og r_l

Svar:

i. r_o er renten når forbrugeren sparer op

ii. r_o er renten når forbrugeren låner

Lad $\beta = 1.0$, $r_0 = 0.0$, $r_l = 1.0$, og $m = 2$.

(c) Hvornår er der et lokalt indre maksimum hvor forbrugeren er *opsparer*? Hvad bliver nytten?

Svar: Løsningsmetoden er helt som før:

$$\begin{aligned} c_1^o &= \frac{1}{1+\beta}\left(\Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r_o}\right) \\ &= 1 \\ c_2^o &= \beta(1+r_0)c_1^o = 1 \end{aligned}$$

Løsningen er mulig hvis $c_1^o < \Delta m \Leftrightarrow 1 < \Delta 2 \Leftrightarrow \Delta > 0.5$.

Nytten bliver i så fald:

$$u^o(\Delta) = \ln 1 + \beta \ln 1 = 0$$

(d) Hvornår er der et lokalt indre maksimum hvor forbrugeren er *låner*? Hvad bliver nytten?

Svar: Løsningsmetoden er helt som før

$$\begin{aligned} c_1^l &= \frac{1}{1+\beta}\left(\Delta m + \frac{(1-\Delta)m}{1+r_l}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1+\Delta) \\ c_2^l &= \beta(1+r_l)c_1^l = (1+\Delta) \end{aligned}$$

Løsningen mulig hvis $c_1^l > \Delta m \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+\Delta) > 2\Delta \Leftrightarrow \Delta < \frac{1}{3}$.

Nytten bliver i så fald:

$$u^l(\Delta) = \ln \frac{1}{2}(1+\Delta) + \ln(1+\Delta)$$

(e) Hvad bliver nytten hvis forbrugeren vælger at leve fra *hånd-til-mund* og forbruge hele sin indkomst i hver periode? For hvilket Δ er nytten så størst?

Svar: Det er altid muligt og nytte bliver

$$u^{htm}(\Delta) = \ln 2\Delta + \ln(1-\Delta)2$$

Nytten er størst når $\Delta = 0.5$ fordi

$$\frac{\partial u^{htm}(\Delta)}{\partial \Delta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\Delta} + \frac{1}{(1-\Delta)2} = 0 \Leftrightarrow 2\Delta = -(1-\Delta)2 \Leftrightarrow \Delta = 0.5$$

og

$$u^{htm}(0.5) = \ln 1 + \ln 1 = 0$$

(f) Argumentér for at forbrugeren er *opsparer* når $\Delta > 0.5$

Svar: Det skyldes $u^{htm}(\Delta) < u^0(\Delta) = 0$, mens vi kan udelukke at forbrugeren er låner da det kræver $\Delta < \frac{1}{3}$.

(g) Argumentér for at forbrugeren er *hånd-til-mund* når $\Delta \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

Svar: Det skyldes at vi både kan udelukke at forbrugeren er opsparer og låner.

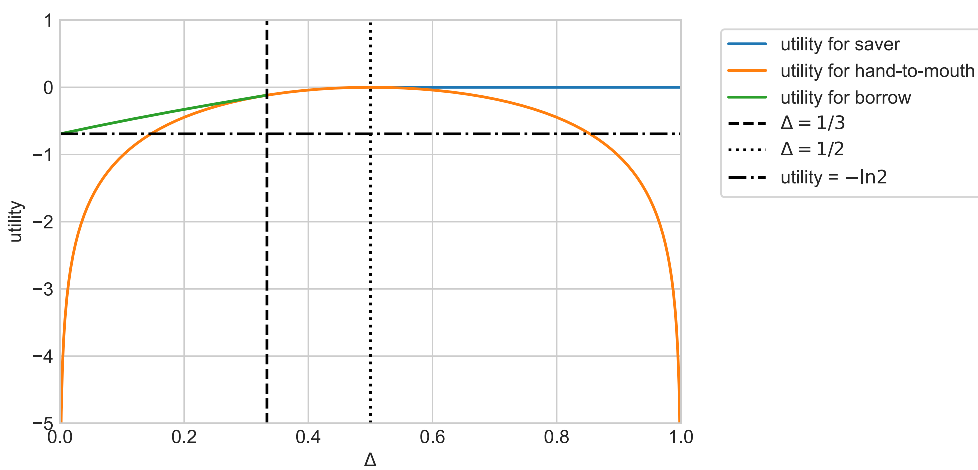
(h) Argumentér for at forbrugeren er *låner* når $\Delta \to 0$

Svar: Det skyldes at vi både kan udelukke at forbrugeren er opsparer og at nytten som hånd-til-mind er lavere

$$\lim_{\Delta \to 0} u^{htm}(\Delta) = -\infty < \lim_{\Delta \to 0} u^{l}(\Delta) = \ln \frac{1}{2} + \ln 1 = -\ln 2$$

(i) Illustrer ved brug af fx Excel nytten af at være hhv. opsparer, låner og hånd-til-mund som funktion af Δ, og giv en samlet fortolkning.

Svar: Se figuren:



Fortolkning:

i. Lav Δ: Lille relativ indkomst i periode 1. Det bliver på et tidspunkt interessant nok at låne for at udglatte forbrug selvom renten er høj.

ii. Høj Δ: Høj relativ indkomst i periode 1. Det bliver på et tidspunkt interessant nok at opspare for at udglatte forbrug selvom renten er lav.

iii. Middel Δ: Forbrugeren har ikke lyst til at spare op til den lave rente, men har heller ikke lyst til at låne til den høje rente. Derfor ender det med forbrug = indkomst i hver periode.

5 Mere intertemporalt forbrug (+)

Løs Opgave 2 fra vinter-eksamen fra 2020 [se *Absalon* under »Files/Eksamen«].

Afleveringsopgaven

Betragt følgende intertemporale forbrugerproblem

$$V(r,m,g) = \max_{c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}^3_{++}} \ln(c_1) + \beta \ln(c_2) + \beta^2 \ln(c_3)$$
$$\text{u.b.b.}$$
$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} + \frac{c_3}{(1+r)^2} \leq m + \frac{(1+g)m}{1+r} + \frac{(1+g)^2 m}{(1+r)^2}$$

hvor $\beta > 0$ er diskonteringsfaktoren, $r > -1$ er renten, $m_1 = m$ er indkomsten i periode 1, $m_2 = (1+g)m$ indkomsten i periode 2, og $m_3 = (1+g)^2 m$ er indkomsten i periode 3. Det kan vises at præferencerne er monotone, konvekse og at randløsninger kan udelukkes.

(a) Hvad er g?

Svar: Det er indkomstvækstraten.

(b) Find det optimale forbrug i periode 1, $c_1^\star(r,m,g)$

Svar: Lagrange-funktionen er

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(c_1,c_2,c_3,\lambda) =& \ln(c_1) + \beta \ln(c_2) + \beta \ln(c_2) \\ & + \lambda \left[m + \frac{(1+g)m}{1+r} + \frac{(1+g)^2 m}{(1+r)^2} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} - \frac{c_3}{(1+r)^2} \right]\end{aligned}$$

FOCs er

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c_1} = \lambda \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{c_2} = \lambda \frac{1}{1+r} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_3} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{c_3} = \lambda \frac{1}{(1+r)^2}\end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{aligned}\frac{c_2}{c_1} &= \beta(1+r) \\ \frac{c_3}{c_1} &= (\beta(1+r))^2\end{aligned}$$

Definer

$$H \equiv m + \frac{(1+g)m}{1+r} + \frac{(1+g)^2 m}{(1+r)^2}$$

Fra $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ fås

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{c_2}{1+r} + \frac{c_3}{(1+r)^2} &= H \Leftrightarrow \\ c_1 + \beta c_1 + \beta^2 c_1 &= H \Leftrightarrow \\ c_1 &= \frac{H}{1+\beta+\beta^2} \end{aligned}$$

(c) Hvad er den marginale forbrugstilbøjelighed?

Svar:

$$\frac{\partial c_1}{\partial H} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}$$

Betragt nu i stedet det intertemporale forbrugerproblem

$$\begin{gathered} V(r,m,g) = \max_{c_1,\ldots,c_T \in \mathbb{R}^T_{++}} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} \ln(c_t) \\ \text{u.b.b.} \\ \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-(t-1)} c_t \leq \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^{t-1} m \end{gathered}$$

hvor $0 < \beta(1+r) < 1$ og $0 < g < r$. Det kan stadig vises at præferencerne er monotone, konvekse og at randløsninger kan udelukkes.

(d) Find det optimale forbrug i periode 1, $c_1^{\star}(r,m,g)$, når $T \to \infty$? (*svær opgave*)

Svar: Lagrange-funktionen er

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_1,\ldots,c_T,\lambda) = &\sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} \ln(c_t) \\ &+ \lambda \left[\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^{t-1} m - \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-(t-1)} c_t \right] \end{aligned}$$

FOCs er

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c_1} = \lambda \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^{t-1}}{c_t} = \lambda \frac{1}{(1+r)^{t-1}} \end{aligned}$$

De kan kombineres til

$$\frac{c_t}{c_1} = \beta^{t-1} (1+r)^{t-1}$$

Definer

$$H \equiv \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^{t-1}$$
$$\kappa \equiv \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}}$$

Fra $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ fås

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-(t-1)} c_t = H &\Leftrightarrow \\
\sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-(t-1)} \frac{c_t}{c_1} c_1 = H &\Leftrightarrow \\
\sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-(t-1)} \beta^{t-1} (1+r)^{t-1} c_1 = H &\Leftrightarrow \\
\sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} c_1 = H &\Leftrightarrow \\
c_1 = \frac{H}{\kappa}
\end{aligned}$$

Lad $T \to \infty$:

$$\lim_{T \to \infty} H = \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+r}} m$$
$$\lim_{T \to \infty} \kappa = 1 - \beta$$
$$\lim_{T \to \infty} c_1^{\star}(r, m, g) = (1 - \beta) \left(\frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+r}} m \right)$$

Ekstra: Hvis $g = 0$ og $\beta = (1 - r)^{-1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{T \to \infty} c_1^{\star}(r, m, g) &= \left(1 - \frac{1}{1+r} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1+0}{1+r}} m \right) \\
&= \frac{r}{1+r} \frac{1+r}{r} m \\
&= m
\end{aligned}$$

(e) Hvad er den marginale forbrugstilbøjelighed?

Svar:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\partial c_1^{\star}(r, m, g)}{\partial H} = 1 - \beta$$

Ugeseddel 4: Slutsky-ligningen

– med svar –

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber

1. Hicks- og Slutsky-kompensation
2. Hicks- og Sltusky-efterspørgselsfunktioner
3. Substitutions-, indkomst- og formueeffekt
4. Den indirekte nyttefunktion
5. Udgiftsminimering
6. Udgiftsfunktionen
7. Dualitet mellem nyttemaksimering og udgiftsminimering
8. Slutsky-ligningen med *eksogen* indkomst
9. Slutsky-ligningen med *endogen* indkomst

Færdigheder

1. Løse minimeringsproblem med Lagrange
2. Udregne og illustrerer substitutions- og indkomsteffekter med *Hicks* kompensation og *eksogen* indkomst
3. Udregne og illustrerer substitutions- og indkomsteffekter med *Slutsky* kompensation og *eksogen* indkomst
4. Udregne og illustrerer substitutions-, indkomst- og formueeffekter med *Hicks* kompensation og *endogen* indkomst
5. Udregne og illustrerer substitutions-, indkomst- og formueeffekter med *Slutsky* kompensation og *endogen* indkomst

Checkopgave

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$$

Antag som sædvanligt at $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ og $p_1, p_2, m > 0$.
Det kan vises at Marshall- og Hicks-efterspørgselsfunktionerne er

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^\star(p_1, p_2, m) &= \left(\frac{m}{3p_1}, \frac{2m}{3p_2}\right) \\
\boldsymbol{h}^*(p_1, p_2, u) &= \left(\left(\frac{up_2^2}{4p_1^2}\right)^{1/3}, 2^{1/3}\left(\frac{up_1}{p_2}\right)^{1/3}\right)
\end{aligned}$$

Ved $p_1 = 20$, $p_1' = 25$, $p_2 = 20$ og $m = 100$ har vi derfor

$$\begin{aligned}
x_1^\star(20, 20, 100) &\approx 1.67 \\
x_2^\star(20, 20, 100) &\approx 3.33
\end{aligned}$$

$$u(x_1^\star(20, 20, 100), x_1^\star(20, 20, 100)) = \frac{500}{27} \approx 18.52$$

$$\begin{aligned}
x_1^\star(20, 25, 100) &\approx 1.67 \\
x_2^\star(20, 25, 100) &\approx 2.67
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1^*(20, 25, \frac{500}{27}) &\approx 1.93 \\
h_2^*(20, 25, \frac{500}{27}) &\approx 3.09
\end{aligned}$$

(a) Beregn substitutionseffekten og indkomsteffekten for prisændringen fra p_1 til p_1' givet Hicks-kompensation
Svar: Vi definérer følgende punkter:

i. $X = (1.67, 3.33)$ [»Marshall ved gamle priser«]
ii. $Z = (1.67, 2.67)$ [»Marshall ved nye priser«]
iii. $Y^{Hicks} = (1.93, 3.09)$ [»Hicks ved nye priser, gammel nytte«]

Vi kan nu beregne den samlede effekt af prisstignignen som $Z - Y$, substitutionseffekten som $Y^{Hicks} - X$ og indkomsteffekten som $Z - Y^{Hicks}$

$$\begin{aligned}
\text{Samlet effekt: } Z - X: (1.67, 2.67) - (1.67, 3.33) &= (0, -0.66) \\
\text{Substitutionseffekt: } Y^{Hicks} - X: (1.93, 3.09) - (1.67, 3.33) &= (+0.26, -0.24) \\
\text{Indkomsteffekt: } Z - Y^{Hicks}: (1.67, 2.67) - (1.93, 3.09) &= (-0.26, -0.42)
\end{aligned}$$

1 Hicks vs. Slutsky

Gennemgang: (a) og (b) regnes selv. (c) gennemgås ved tavlen.

Fortsæt der hvor checkopgaven slap.

(a) Vis at Hicks-efterspørgslen er $\boldsymbol{h}^*(p_1, p_2, u) = \left(\left(\frac{up_2^2}{4p_1^2}\right)^{1/3}, 2^{1/3}\left(\frac{up_1}{p_2}\right)^{1/3}\right)$

Svar: Vi beregner først den Slutskykompenserede indkomst: Minimeringsproblemet opstilles:

$$\min_{x_1,x_2} \; p_1x_1 + p_2x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad x_1x_2^2 = u \tag{1.1}$$

Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda[u - x_1x_2^2] \tag{1.2}$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) for et indre optimum kan beregnes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda x_2^2 = 0 \Leftrightarrow p_1 = \lambda x_2^2 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - 2\lambda x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = 2\lambda x_1 x_2 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u - x_1x_2^2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow x_1x_2^2 = u \tag{1.5}$$

Vi deler nu (1.3) med (1.4):

$$\begin{aligned} \frac{\lambda x_2^2}{2\lambda x_1 x_2} &= \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \\ \frac{x_2}{2x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \\ x_2 &= 2\frac{p_1}{p_2}x_1 \equiv h_2^*(p_1, p_2, x_1) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Vi indsætter nu (1.6) i (1.5) og udleder x_1

$$\begin{aligned} x_1\left(2\frac{p_1}{p_2}x_1\right)^2 &= u \Leftrightarrow \\ 4\frac{p_1^2}{p_2^2}x_1^3 &= u \Leftrightarrow \\ x_1^3 &= \frac{up_2^2}{4p_1^2} \Leftrightarrow \\ x_1 &= \left(\frac{up_2^2}{4p_1^2}\right)^{1/3} \equiv h_1^*(p_1, p_2, u) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Vi indsætter nu (1.7) i (1.6) og udleder x_2

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2^*(p_1, p_2, x_1) \Leftrightarrow \\ x_2^* &= 2\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{up_2^2}{4p_1^2}\right)^{1/3} \\ &= 2^{1/3}\left(\frac{up_1}{p_2}\right)^{1/3} \equiv h_2^*(p_1, p_2, u) \end{aligned}$$

(b) Beregn substitutionseffekten og indkomsteffekten for prisændringen fra p_1 til p_1' givet Slutsky-kompensation

Svar: Vi beregner først den Slutskykompenserede indkomst:

$$m^{Slutsky} = 20 \cdot 1.7 + 25 \cdot 3.3 = 116.5$$

Vi beregner nu det optimale forbrug givet denne indkomst og de nye priser $(p_1, p_2) = (20, 25)$

$$\begin{aligned} x_1^\star = x_1^\star(20, 25, 116.5) = \frac{116.5}{3 \cdot 20} &\approx 1.94 \\ x_2^\star = x_2^\star(20, 25, 116.5) = \frac{2 \cdot 116.5}{3 \cdot 25} &\approx 3.11 \end{aligned}$$

Vi kalder dette punkt $Y^{Slutsky} = (1.94, 3.11)$

Substitutionseffekten er $Y^{Slutsky} - X$ og indkomsteffekten er $Z - Y^{Slutsky}$

$$\begin{aligned} \text{Substitutionseffekt: } Y^{Slutsky} - X : (1.94, 3.11) - (1.67, 3.33) &= (+0.27, -0.22) \\ \text{Indkomsteffekt: } Z - Y^{Slutsky} : (1.67, 2.67) - (1.94, 3.11) &= (-0.27, -0.44) \end{aligned}$$

(c) Diskuter forskellen på Hicks- og Slutsky-kompensation

Svar: Ved Hicks-kompensation kompenseres forbrugeren således, at han er i stand til at købe et bundt, der stiller ham lige så godt som oprindeligt. Ved Slutsky-kompensation kompenseres forbrugeren således, at han er i stand til at købe det samme bundt som oprindeligt. De nye priser vil dog typisk betyde, at det oprindeligt bundt ikke længere vil være optimalt med den nye og højere indkomst. Man kan derfor sige at forbrugeren over-kompenseres ved Slutsky-kompensation.

2 Substitutions- og indkomsteffekter

Gennemgang: Regn selv.

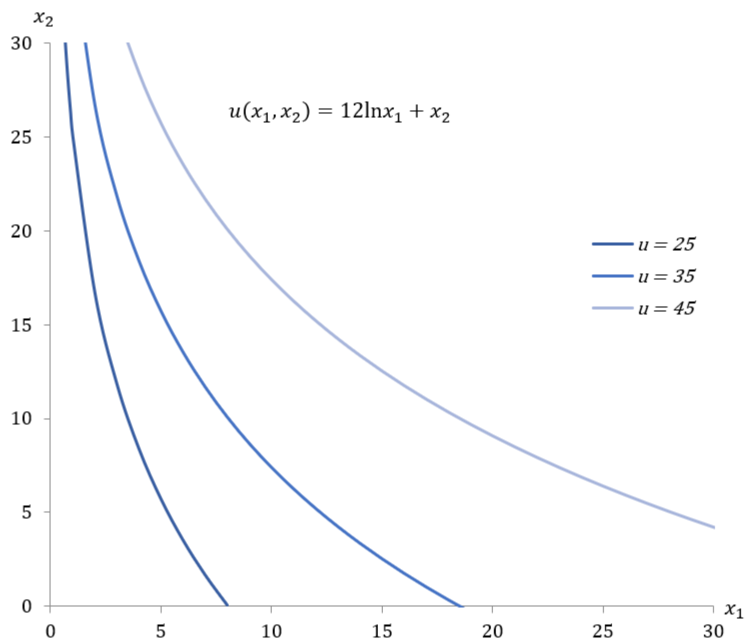
Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = 12\ln(x_1) + x_2$$

Forbrugsmulighedsområdet er $\mathbb{R}_+^2$. Priserne på varerne er hhv. $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$ kr. per enhed, og forbrugeren har sat $I > 0$ kr. til side til køb af de to varer.

(a) Tegn forbrugerens indifferenskurver

Svar: $u_0 = 12\ln x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_2 = u_0 - 12\ln x_1$



(b) Opstil nyttemaksimeringsproblemet og udled Marshall-efterspørgselsfunktionen

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1,x_2} 12\ln x_1 + x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1x + p_2x_2 = m$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone, og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 12\ln x_1 + x_2 + \lambda[m - p_1x_1 - p_2x_2]$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) kan beregnes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{12}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{x_1} = \lambda p_1 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p_2} = \lambda \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = m \quad (2.3)$$

Vi indsætter nu (2.2) i (2.1) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\frac{12}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow$$

$$x_1^* = \frac{12p_2}{p_1} \quad (2.4)$$

Vi indsætter nu (2.4) i (2.3) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned} p_1\left(\frac{12}{p_1/p_2}\right)+p_2x_2 &= m \Leftrightarrow \\ p_2 12+p_2x_2 &= m \Leftrightarrow \\ x_2^* &= \frac{m}{p_2}-12 \end{aligned} \tag{2.5}$$

[Udledes alternativt fra Walras' Lov.]. Bemærk, at vi kun har en indre løsning hvis

$$x_2^*>0 \Leftrightarrow \frac{m}{p_2}-12>0 \Leftrightarrow m>12p_2 \tag{2.6}$$

Marshall-efterspørgselsfunktionen er derfor

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*) \in \begin{cases} \left(\frac{12p_2}{p_1}, \frac{m-12p_2}{p_2}\right) & \text{hvis } m>12p_2 \\ \left(\frac{m}{p_1}, 0\right) & \text{ellers} \end{cases} \tag{2.7}$$

(c) Opstil udgiftsminimeringsproblemet (ved nytteniveau u) og udled den Hicks-kompenserede efterspørgsel

Svar: Minimeringsproblemet opstilles

$$\min_{x_1,x_2} p_1x_1+p_2x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad 12\ln x_1 + x_2 = u$$

Vi kan opskrive Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda) = p_1x_1+p_2x_2+\lambda[u-12\ln x_1 - x_2] \tag{2.8}$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) for et indre optimum kan beregnes

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda\left(\frac{12}{x_1}\right)=0 \Leftrightarrow p_1 = \frac{12\lambda}{x_1} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = p_2 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u-12\ln x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow 12\ln x_1 + x_2 = u \tag{2.11}$$

Vi indsætter nu (2.10) i (2.9) og bestemmer det udgiftsminimerende forbrug af x_1

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{12p_2}{x_1} \Leftrightarrow \\ x_1 &= \frac{12p_2}{p_1} \equiv h_1^\star(p_1,p_2,u) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Vi indsætter nu (2.12) i (2.11) og udleder det udgiftsminimerende forbrug x_2

$$\begin{aligned} 12\ln\left(\frac{12p_2}{p_1}\right)+x_2 &= u \Leftrightarrow \\ x_2 &= u-12\ln\left(\frac{12p_2}{p_1}\right) \equiv h_1^\star(p_1,p_2,u) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Den Hicks-kompenserede efterspørgselsfunktion er derfor

$$h^*(p_1, p_2, u) = \left(\frac{12p_2}{p_1}, u - 12\ln\left(\frac{12p_2}{p_1}\right)\right) \tag{2.14}$$

Antag nu, at $m = 40$, og priserne $p_1 = 6$ og $p_2 = 2$.

(d) Find den optimale forbrugsplan

Svar: Vi indsætter priser og indkomst ($p_1 = 6, p_2 = 2, m = 40$) i (2.7) (bemærk, vi har at gøre med et indre optimum i det $m = 40 > 12 \cdot 2 = 24$)

$$\begin{aligned} x_1^*(6,2,40) &= \frac{12 \cdot 2}{6} = 4 \\ x_2^*(6,2,40) &= \frac{40 - 12 \cdot 2}{2} = 8 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $A = (4, 8)$

Nu stiger prisen på vare 1 til det dobbelte.

(e) Hvad bliver den nye optimale forbrugplan?

Svar: Vi indsætter priser og indkomst ($p_1 = 12, p_2 = 2, m = 40$) i (2.7) og beregner det ukompenserede forbrug efter prisstigningen (Marshall-forbruget)

$$\begin{aligned} x_1^*(12,2,40) &= \frac{12 \cdot 2}{12} = 2 \\ x_2^*(12,2,40) &= \frac{40 - 12 \cdot 2}{2} = 8 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $C = (2, 8)$.

(f) Find substitutionseffekten og indkomsteffekten som følge af fordoblingen af prisen på vare 1 og kommentér resultaterne

Svar: Vi beregner nytten af det oprindelige forbrug

$$u^* = u(4, 8) = 12\ln(4) + 8 \approx 24.6$$

Vi indsætter nye priser og oprindelig nytte i ($p_1 = 12, p_2 = 2, u^* = 24.6$) i (2.14) og beregner det kompenserede forbrug (Hicks-forbruget)

$$\begin{aligned} h_1^*(12,2,24.6) &= \frac{12 \cdot 2}{12} = 2 \\ h_2^*(12,2,24.6) &= 24.6 - 12\ln\left(\frac{12 \cdot 2}{12}\right) \approx 16.3 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $Y = (2, 16.3)$. Dette kompenserede forbrug er det varebundt, forbrugeren havde valgt, såfremt han var blevet indkomstkompenseret under de nye priser akkurat nok til, at opnå den samme nytte som under de gamle priser.

Vi kan nu beregne den samlede effekt af prisstigningen som $Z - X$, substitutionseffekten er $Y - X$ og indkomsteffekten er $Z - Y$

$$\begin{aligned} \text{Samlet effekt: } Z - X : (2,8) - (4,8) &= (-2,0) \\ \text{Substitutionseffekt: } Y - X : (2,16.3) - (4,8) &= (-2,8.3) \\ \text{Indkomsteffekt: } Z - Y : (2,8) - (2,16.3) &= (0,-8.3) \end{aligned}$$

Substitutionseffekten er den ændring i forbruget der skyldes ændringen i de relative priser. Den er altid ikke-positiv (ikke-negativ) for den vare hvis pris er steget (faldet). Indkomsteffekten er omvendt den effekt, der skyldes at forbrugeren relativt set er blevet fattigere grundet prisstigningen. Indkomsteffekten er negativ for normale goder og positiv for inferiøre goder ved en prisstigning. For kvasi-linære goder er indkomsteffekten 0 for det ikke-lineære gode.

3 Slutsky-ligningen

Gennemgang: Gennemgås på tavlen.

Antag, at indkomsten er eksogen.

(a) Opskriv Slutsky-ligningen for ændringen i en forbrugers efterspørgsel efter vare i ved en marginal prisstigning på vare i.
Svar: Egenpris Slutsky-ligningen er

$$\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, m)}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)}{\partial p_i}}_{\text{substitutionseffekt}} \underbrace{-\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, m)}{\partial m} x_i^\star(\boldsymbol{p}, m)}_{\text{indkomsteffekt}}$$

hvor $h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)$ er Hicks-efterspørgslen ved prisvektoren $\boldsymbol{p}$ og nytten $u^\star \equiv u(\boldsymbol{x}^\star(\boldsymbol{p}, I))$.

(b) Forklar kort den økonomiske betydning af hvert enkelt led i ligningen, herunder deres fortegn.
Svar:

i. Substitutionseffekt: Efterspørgselsændringen grundet ændret relativ pris, men fastholdt nytteniveau. Altid negativ.

ii. Indkomsteffekt: Efterspørgselsændring grundet ændret købekraft (ændret realindkomst). Negative for normale goder, positiv for inferiøre goder.

(c) Opskriv Slutsky-ligningen for ændringen i en forbrugers efterspørgsel efter vare i ved en marginal prisstigning på vare i når vare i er et kvasi-lineært gode.
Svar: Egenpris Slutsky-ligningen reduceres til

$$\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, m)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)}{\partial p_i}$$

fordi $\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},m)}{\partial I} = 0$ for kvasi-lineære goder.

4 Arbejdsmarkedet

Gennemgang: Regn selv først, men gennemgås på tavlen efterfølgende.

En ung stud. polit på anden årsprøve har stor lyst til at bruge sin tid på at holde fri, men holder også af at forbruge andre typer forbrugsvarer (i mængden x). Den studerende har kun råd til at forbruge disse varer ved at arbejde og derved tjene lønindkomst. Spørgsmålet er, hvordan vi kan beskrive sådan en situation.

Antag at den studerende har en nyttefunktion $u(x, f) = x^a f^{1-a}$, hvor $0 < a < 1$, x er mængden af forbrugsvaren, og f er fritid målt i timer. Forbrugsvaren koster p pr. enhed, mens timelønnen er w. Den studerende har L timer til rådighed dvs. "ejer" disse timer, $L > 0$. Disse L timer kan blive brugt som enten fritid, f, eller sælges på arbejdsmarkedet (mængden l), dvs. tidsrestriktionen er $L = f + l$.

(a) Vis at den studerendes budgetbetingelse kan omskrives til $px + wf = wL$

Svar: Vi opskriver den generelle budgetbetingelse (indtægter lig udgifter), isolerer l i tidsrestriktionen og substituterer ind:

$$\begin{aligned} px &= wl \Leftrightarrow \\ px &= w(L-f) \Leftrightarrow \\ px + wf &= wL \end{aligned}$$

(b) Beskriv matematisk den studerendes optimeringsproblem og find hendes Marshall-efterspørgselsfunktion for forbrugsvaren, x, og fritid, f
Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x,f} x^a f^{1-a} \quad \text{u.b.b.} \quad px + wf = wL$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone, og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x, f) \in \mathbb{R}_+^2$. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x, f, \lambda) = x^a f^{1-a} + \lambda[wL - px - wf]$$

og udlede førsteordensbetingelserne (FOC)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= a x^{a-1} f^{1-a} - \lambda p = 0 \Leftrightarrow a x^{a-1} f^{1-a} = \lambda p && (4.1)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} &= (1-a) x^{a} f^{-a} - \lambda w = 0 \Leftrightarrow (1-a) x^{a} f^{-a} = \lambda w && (4.2)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= wL - px - wf = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow px + wf = wL && (4.3)
\end{aligned}$$

Vi deler nu (4.1) med (4.2) således at λ forsvinder, og vi kan udtrykke f som en funktion af x

$$\begin{aligned}
\frac{a x^{a-1} f^{1-a}}{(1-a) x^{a} f^{-a}} &= \frac{\lambda p}{\lambda w} \Leftrightarrow \\
\frac{a}{1-a}\frac{f}{x} &= \frac{p}{w} \Leftrightarrow \\
f &= \frac{1-a}{a}\frac{p}{w} x \equiv f^{*}(x) && (4.4)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (4.4) i (4.3) (budgetlinjen) og udleder det optimale forbrug af x

$$\begin{aligned}
px + w\left(\frac{1-a}{a}\frac{p}{w}x\right) &= wL \Leftrightarrow \\
px + \frac{1-a}{a}px &= wL \Leftrightarrow \\
\frac{1}{a}px &= wL \Leftrightarrow \\
x^{*}(p,w,L) &= a\frac{wL}{p} && (4.5)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (4.4) i (4.5) og udleder det optimale forbrug af f

$$\begin{aligned}
f^{*} &= f^{*}(p,w,L) \\
&= \frac{1-a}{a}\frac{p}{w} a \frac{wL}{p} \\
&= (1-a)L && (4.6)
\end{aligned}$$

(c) Udled hendes arbejdsudbudsfunktion
Svar: Vi substituerer (4.6) ind i tidsrestriktionen og isolerer arbejdsudbuddet

$$\begin{aligned}
L &= f + l \Leftrightarrow \\
L &= (1-a)L + l \Leftrightarrow \\
l^{*}(p,w,L) &= aL
\end{aligned}$$

(d) Den studerende skal betale en flad skat på τ procent af sin indkomst i skat. Hvordan kommer hendes nye budgetbetingelse til at se ud, og hvad kommer hendes nye arbejdsudbud til at være?
Svar: Vi opskriver den generelle budgetbetingelse (disponible indtægter lig udgifter) når der indføres en flad skat, isolerer l i tidsrestriktionen og substituterer ind:

$$\begin{aligned} px &= w(1-\tau)l \Leftrightarrow \\ px &= w(1-\tau)(L-f) \Leftrightarrow \\ px + w(1-\tau)f &= w(1-\tau)L \end{aligned}$$

Det fremgår dog umiddelbart at arbejdsudbuddet er inelastisk (konstant) og ikke afhænger af lønnen/prisen på fritid, hvorfor arbejdsudbuddet er uændret.

(e) Diskutér overstående analyse i lyset af de populære udtryk »gulerodseffekten« og »hængekøjeeffekten«
Svar: Gulerodseffekten og hængekøjeffekten er to populærudtryk der betegner to modsatrettede effekter ved en skattelettelse eller stigning (I det følgende tages udgangspunkt i en skattelettelse). Gulerodseffekten tilsiger at det bedre kan betale sig at arbejde efter en skattelettelse, fordi beløningen (guleroden) ved at arbejde er blevet større, da den disponible marginalløn er steget. Denne effekt trækker alt andet lige i retning af et større arbejdsudbud ved en skattelempelse. Hængekøjeeffekten trækker omvendt i modsat retning. Den tilsiger at forbrugeren nu ikke behøves at arbejde så meget som før, for at opretholde samme indkomstniveau. Denne effekt trækker i retning af et mindre arbejdsudbud ved en skattelempelse. Hvilken af effekterne der er størst er et empirisk spørgsmål. I vores tilfælde udligner de to effekter præcis hinanden, hvorfor arbejdsudbuddet er upåvirket af skattestigningen. Bemærk evt. at intuitionen når vi benytter f frem for l er, at det er blevet relativt dyrere at holde fri efter en skattelettelsen, idet alternativomkostningen (den disponible løn $w(1-\tau)$) er større. Bemærk at gulerods- og hængekøjeeffekten er det vi betegner henholdsvis substitutions- og indkomsteffekten.

5 Kapitalmarkedet (+)

Gennemgang: Gennemgås på tavlen.

En forbruger lever i to perioder i en økonomi, hvor der er ét forbrugsgode (i hver periode). Hendes initialbeholdning er $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$. Forbrugeren kan fuldstændig frit spare op og låne fra periode 1 til periode 2 til rentesatsen r. Vi antager, at forbrugeren har strengt konvekse, differentiable og monotont voksende præferencer, samt at forbrug som både ung og gammel er et normalt gode.

(a) Afgør om følgende påstand er sand eller falsk: »En stigning i markedsrenten r vil altid reducere forbrugerens forbrug i periode 1«. Begrund dit svar, gerne med et grafisk argument.

Svar: Falsk.

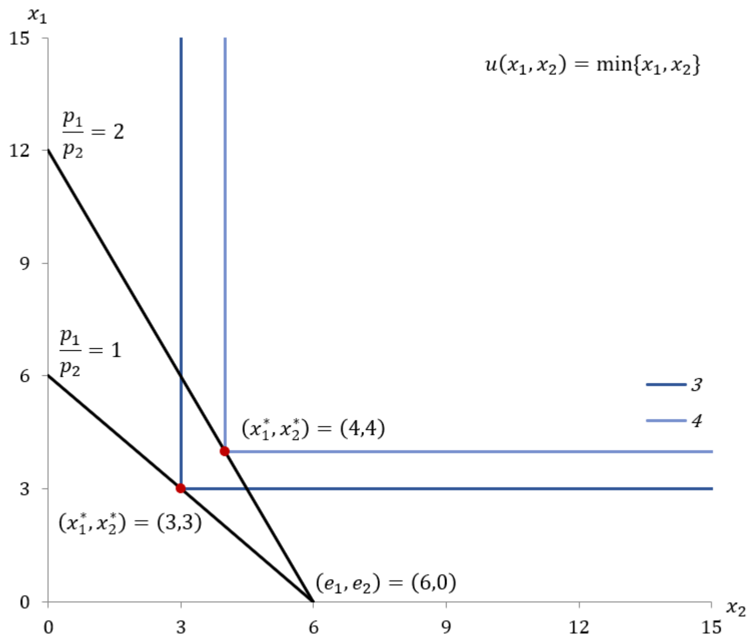
Bemærk renten kan betragtes som prisen på forbrug i periode 1 ($1 + r = p_1$). Vi definerer nu forbrug $x_1 = \omega_1 + z_1 \Leftrightarrow z_1 = x_1 - \omega_1$ hvor z_1 angiver forbrugerens nettohandel med vare 1. Der gælder derfor:

$$\begin{array}{rcl} \text{Låntager: forbrugeren er nettokøber af vare 1} & : & z_1 > 0 \\ \text{Forbrugeren forbruger sin initialbeholdning} & : & z_1 = 0 \quad (\Rightarrow z_2 = 0) \\ \text{Udlåner: forbrugeren er nettosælger af vare 1} & : & z_1 < 0 \end{array}$$

Betragt nu slutskyligningen for det relevante gode:

$$\frac{\partial z_1}{\partial p_1} = \underbrace{\frac{\partial h_1(p_1, p_2, u)}{\partial p_1}}_{\text{substitutionseffekt}} \underbrace{- \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial m} z_1(p_1, p_2)}_{\text{samlet indkomsteffekt}}$$

Bemærk at $\frac{\partial z_1}{\partial p_1} > 0$ generelt betyder at forbrugeren køber mere eller sælger mindre af vare 1 (afhængigt af om han er nettokøber/nettosælger) når prisen stiger. Dette svarer her til at forbrugeren låner mere/udlåner mindre og dermed forbruger mere i periode 1. Idet det altid gælder at $\frac{\partial h_1(p_1,p_2,u)}{\partial p_1} \leq 0$ må en nødvendig betingelse for $\frac{\partial z_1}{\partial p_1} > 0$ være en positiv indkomsteffekt $-\frac{\partial x_1(p_1,p_2,u)}{\partial m} z_1(p_1, p_2) > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial x_1(p_1,p_2,u)}{\partial m} z_1(p_1, p_2) < 0$. Vi har ydermere antaget at forbrug i periode 1, $x_1$er et normalt gode dvs. $\frac{\partial x_1(p_1,p_2,u)}{\partial m} > 0$. Heraf følger at hvis forbrugeren er nettosælger $z_1(p_1, p_2) < 0$ (udlåner) er indkomsteffekten positiv. Hvis størrelsen af f.eks. $z_1(p_1, p_2)$ er numerisk stor nok (så stor at indkomsteffekten er numerisk større end substitutionseffekten) vil en stigning i renten øge forbrugerens forbrug i periode 1.
Et oplagt eksempel på dette er perfekte komplementer hvor der jo ikke er en nogen substitutionseffekt. Betragt f.eks.: $(\omega_1, \omega_2) = (6, 0)$, $(p_1, p_2) = (10, 10)$. Dette medfører det nyttemaksimerende forbrug $(x_1^*, x_2^*) = (3, 3)$. Betragt nu en fordobling i prisen på vare 1 så $(p_1^{'}, p_2) = (20, 10)$. Dette medfører det nyttemaksimerende forbrug $(x_1^*, x_2^*) = (4, 4)$ altså en stigning i forbruget af vare 1.



(b) Afgør om følgende påstand er sand eller falsk: »En lånertagers efterspørgsel efter lån kan ikke vokse, når renten stiger«. Begrund dit svar, gerne med et grafisk argument.

Svar: Sandt.

Bemærk renten kan betragtes som prisen på forbrug i periode 1 ($1 + r = p_1$). Vi definerer nu forbrug $x_1 = \omega_1 + z_1 \Leftrightarrow z_1 = x_1 - \omega_1$ hvor z_1 angiver forbrugerens nettohandel med vare 1. Der gælder derfor:

$$\begin{aligned} \text{Nettolåner: forbrugeren er nettokøber af vare 1} &: \quad z_1 > 0 \\ \text{Forbrugeren forbruger sin initialbeholdning} &: \quad z_1 = 0 \quad (\Rightarrow z_2 = 0) \\ \text{Nettoudlåner: forbrugeren er nettosælger af vare 1} &: \quad z_1 < 0 \end{aligned}$$

Betragt nu slutskyligningen for relevante gode:

$$\frac{\partial z_1}{\partial p_1} = \underbrace{\frac{\partial h_1(p_1, p_2, u)}{\partial p_1}}_{\text{substitutionseffekt}} \underbrace{- \frac{\partial x_1(p_1, p_2, u)}{\partial m} z_1(p_1, p_2)}_{\text{samlet indkomsteffekt}}$$

Bemærk at $\frac{\partial z_1}{\partial p_1} > 0$ her betyder at forbrugeren låner mere (dvs. køber mere af vare 1) når prisen stiger idet vi har antaget at han initialt er nettokøber af vare 1 dvs. låntager . Idet det altid gælder at $\frac{\partial h_1(p_1,p_2,u)}{\partial p_1} \leq 0$ må en nødvendig betingelse for $\frac{\partial z_1}{\partial p_1} > 0$ være en positiv indkomsteffekt $-\frac{\partial x_1(p_1,p_2,u)}{\partial I} z_1(p_1, p_2) > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial x_1(p_1,p_2,u)}{\partial m} z_1(p_1, p_2) < 0$. Men idet vi har antaget at forbrug i periode 1, $x_1$er et normalt gode dvs. $\frac{\partial x_1(p_1,p_2,u)}{\partial m} > 0$ samt at forbrugeren er låntager $z_1(p_1, p_2) > 0$

er indkomsteffekten altid negativ. Heraf følger umiddelbart at en låntagers efterspørgsel efter lån aldrig kan vokse, når renten stiger.

Afleveringsopgaven

Betragt en forbruger med nyttefunktion $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ og initialbeholdning $(\omega_1, \omega_2) = (4, 6)$. I udgangspunktet er priserne $p_1 = p_2 = 10$. Prisen på vare 1 stiger nu til 12.

(a) Find den samlede effekt af prisstigningen på forbrugerens efterspørgsel
Svar: Bemærk at $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ er en positiv monoton transformation af Cobb-Douglas nyttefunktionen $u(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^{1-a}$ fra ugeseddel 3 hvor $A = 1$, $a = \frac{1}{2}$ og $m = p_1\omega_1 + p_2\omega_2$. Vi kan således benytte vores udtryk for det optimale forbrug herfra:

$$\begin{aligned} x_1^*(p_1, p_2, e_1, e_2) &= a\frac{p_1\omega_1 + p_2\omega_2}{p_1} \\ x_2^*(p_1, p_2, e_1, e_2) &= (1-a)\frac{p_1\omega_1 + p_2\omega_2}{p_2} \end{aligned}$$

Vi indsætter nu $(\omega_1, \omega_2) = (4, 6)$ og $p_1 = p_2 = 10$ samt $a = \frac{1}{2}$ for at beregne det optimale forbrug under de oprindelige priser:

$$\begin{aligned} x_1^*(10, 10, 4, 6) &= \frac{1}{2}\frac{10 \cdot 4 + 10 \cdot 6}{10} = 5 \\ x_2^*(10, 10, 4, 6) &= \frac{1}{2}\frac{10 \cdot 4 + 10 \cdot 6}{10} = 5 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $X = (5, 5)$
Vi indsætter nu $(e_1, e_2) = (4, 6)$, $p_1 = 12$ og $p_2 = 10$ samt $a = \frac{1}{2}$ for at beregne det optimale forbrug under de nye priser:

$$\begin{aligned} x_1^*(10, 10, 4, 6) &= \frac{1}{2}\frac{12 \cdot 4 + 10 \cdot 6}{12} = 4.5 \\ x_2^*(10, 10, 4, 6) &= \frac{1}{2}\frac{12 \cdot 4 + 10 \cdot 6}{10} = 5.4 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $Z_2 = (4.5, 5.4)$
Vi kan herfra umiddelbart beregne den samlede effekt af prisstigningen som $Z_2 - X$

$$\text{Samlet effekt: } Z_2 - X : (4.5, 5.4) - (5, 5) \quad = \quad (-0.5, +0.4)$$

(b) Inddel denne effekt i substitutions- og indkomsteffekter (både ren indkomsteffekt og formueeffekt)
Svar: Udgiftsminimeringsproblemet opstilles:

$$\min_{x_1, x_2} \; p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad x_1 x_2 = u \tag{5.1}$$

Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda[u - x_1 x_2] \tag{5.2}$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) for et indre optimum kan beregnes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda x_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 = \lambda x_2 \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \lambda x_1 = 0 \Leftrightarrow p_2 = \lambda x_1 \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u - x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = u \tag{5.5}$$

Vi deler nu (5.3) med (5.4):

$$\begin{aligned} \frac{\lambda x_2}{\lambda x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \\ x_2 &= \frac{p_1}{p_2} x_1 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Vi indsætter nu (5.6) i (5.5) og udleder x_1

$$\begin{aligned} x_1 \frac{p_1}{p_2} x_1 &= u \Leftrightarrow \\ \frac{p_1}{p_2} x_1^2 &= u \Leftrightarrow \\ x_1 &= \sqrt{\frac{p_2}{p_1} u} \equiv h_1^*(p_1, p_2, u) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Vi indsætter nu (5.7) i (5.6) og udleder x_2

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{p_1}{p_2} \sqrt{\frac{p_2}{p_1} u} \\ &= \sqrt{\frac{p_1}{p_2} u} \equiv h_2^*(p_1, p_2, u) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Vi beregner nu nytten af det initiale forbrug

$$u^* = u(5,5) = 5 \cdot 5 = 25$$

Vi indsætter nu nye priser og oprindelig nytte i ($p_1 = 12, p_2 = 10, u^* = 25$) i henholdsvis 5.7 og 5.8 og beregner det kompenserede forbrug (Hicks-forbruget)

$$\begin{aligned} h_1^*(12, 10, 25) &= \sqrt{\frac{10}{12} 25} \approx 4.6 \\ h_2^*(12, 10, 25) &= \sqrt{\frac{12}{10} 25} \approx 5.5 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $Y = (4.6, 5.5)$
Vi kan nu beregne substitutionseffekten af $Y - X$ og indkomsteffekten som $Z_2 - Y$

grundet prisstigningen

$$\begin{aligned}
\text{Substitutionseffekt: } Y - X :(4.6, 5.5) - (5, 5) &= (-0.4, +0.5) \\
\text{Indkomsteffekt: } Z_2 - Y :(4.5, 5.4) - (4.6, 5.5) &= (-0.1, -0.1)
\end{aligned}$$

Vi beregner nu hvilket forbrug forbrugeren havde valgt under de nye priser, såfremt værdien af hans initialbeholdning ikke havde ændret sig (fra 100):

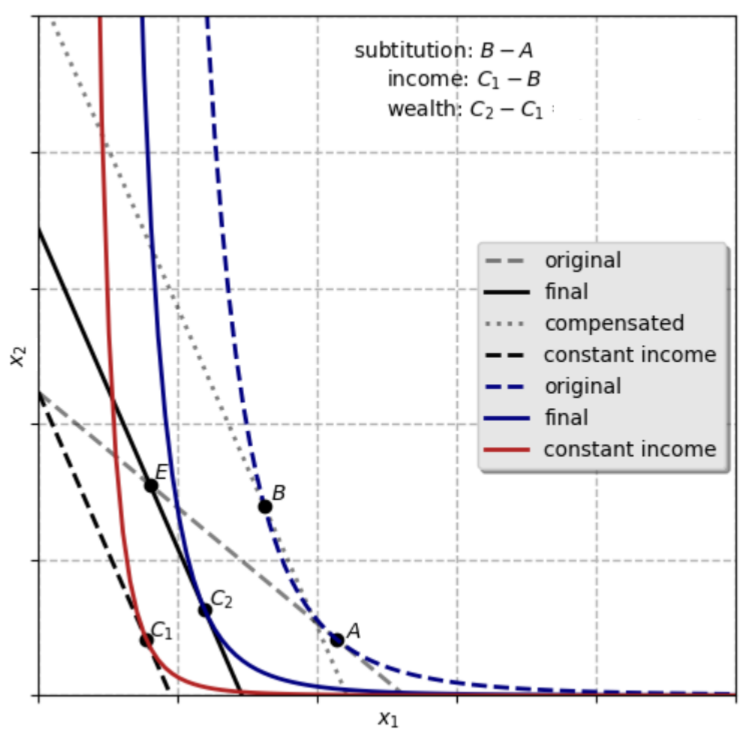
$$\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{1}{2}\frac{100}{12} = 4.2 \\
x_2^* &= \frac{1}{2}\frac{100}{10} = 5.0
\end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $Z_1 = (4.2, 5.0)$
Vi kan nu dele indkomsteffekten op i henholdsvis ren indkomsteffekt $Z_1 - Y$ og formueeffekt som $Z_2 - Z_1$ grundet prisstigningen

$$\begin{aligned}
\text{Ren indkomsteffekt: } Z_1 - Y :(4.2, 5.0) - (4.6, 5.5) &= (-0.4, -0.5) \\
\text{Formueeffekt: } Z_2 - Z_1 :(4.5, 5.4) - (4.2, 5.0) &= (+0.3, +0.4)
\end{aligned}$$

Bemærk, formueeffekt kaldes også beholdningseffekten. Bemærk yderligere, at indkomsteffekten også kaldes den samlede indkomsteffekt eller velstandseffekten.

(c) Lav en grafisk illustration af dine resultater**Svar:** Lad $A = X$, $B = Y$, $C_1 = Z_1$ og $C_2 = Z_2$



Ekstra. Den særligt mikro-interessede studerende indbydes også til at svare på følgende spørgsmål:

(d) Er forbrugeren værre eller bedre stillet efter prisstigningen? Ville svaret på dette spørgsmål være anderledes, hvis forbrugerens initialbeholdning i stedet var $(\omega_1, \omega_2) = (10, 0)$? Giv en intuitiv forklaring på dine resultater
Svar: Nytten af hans oprindelige forbrug var $u^* = u(5, 5) = 25$. Vi beregner nu nytten af hans nye forbrug

$$u(4.5, 5.4) = 4.5 \cdot 5.4 = 24.3 < 25$$

Hvis forbrugerens initialbeholdning i stedet var $(\omega_1, \omega_2) = (10, 0)$ ville hans oprindelige forbrug stadige være $(5, 5)$ med nytte $u(5, 5) = 25$, da

$$\begin{aligned} x_1^*(10, 10, 10, 0) &= \frac{1}{2}\frac{10 \cdot 10 + 10 \cdot 0}{10} = 5 \\ x_2^*(10, 10, 10, 0) &= \frac{1}{2}\frac{10 \cdot 10 + 10 \cdot 0}{10} = 5 \end{aligned}$$

Hans nye forbrug efter prisstigningen ville derimod være

$$\begin{aligned} x_1^*(12, 10, 10, 0) &= \frac{1}{2}\frac{12 \cdot 10 + 10 \cdot 0}{12} = 5 \\ x_2^*(12, 10, 10, 0) &= \frac{1}{2}\frac{12 \cdot 10 + 10 \cdot 0}{10} = 6 \end{aligned}$$

med nytte $u(5, 6) = 30 > 25$, altså bliver forbrugeren nu bedre stillet ved prisstigningen.
Forklaringen er, at forbrugeren med $(\omega_1, \omega_2) = (4, 6)$ er nettokøber af vare 1

$$z_1 = x_1 - e_1 = 5 - 4 = 1 > 0$$

og derfor bliver dårligere stillet når prisen på vare 1 stiger. Med initialbeholdning $(\omega_1, \omega_2) = (10, 0)$ er forbrugeren derimod nettosælger af vare 1 og bliver derfor stillet bedre når prisen på vare 1 stiger.

Ugeseddel 5: Forbrugeroverskud

— med svar —

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber

1. Reservationspris (for diskret gode)
2. Forbrugeroverskud (for diskrete og kontinuerte goder)
3. Kompenserende variation
4. Ækvivalerende variation
5. Afgifter og lump-sum skatter
6. Dødvægtstab
7. Prisindeks

Færdigheder

1. Udregne CV for en prisændring
2. Udregne EV for en prisændring
3. Udregne $-\Delta CS$ for en prisændring
4. Udregne dødvægtstab

Checkopgave

Betragt en forbruger med indkomst I. Priserne er i udgangspunktet $\boldsymbol{p}$, men ændrer sig så til $\boldsymbol{p}'$.

(a) Antag CV for prisændringen er 100 kr. Forklar i én sætning, hvad det betyder.
Svar: »Nytten ved hhv. $(m, \boldsymbol{p})$ og $(m + 100, \boldsymbol{p}')$ er den samme.«

(b) Antag EV for prisændringen er 100 kr. Forklar i én sætning, hvad det betyder.
Svar: »Nytten ved hhv. $(m - 100, \boldsymbol{p})$ og $(m, \boldsymbol{p}')$ er den samme.«

1 Perfekte komplementer og perfekte substitutter

Gennemgang: Spørgsmål (a) til (f) gennemgås på tavlen. Spørgsmål (g)-(i) regnes selv. Spørgsmål (j)-(k) gennemgås på tavlen.

Vi betragter to jævnaldrende studerende, Susse og Konny, der begge forbruger to varer: Mad og bolig (begge i kontinuerte mængder). Begge har en eksogen indkomst (fx SU) på 120.

Susse har nyttefunktionen $u^S(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, mens Konny har $u^K(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. I det følgende beskæftiger vi os kun med situationer, hvor prisen på bolig (vare 2) er låst fast til at være $p_2 = 3$.

(a) Udled de to studerendes Marshall-efterspørgselsfunktioner, og bestem deres efterspørgsel når prisen på mad er $p_1 = 1$

Svar: Susses præferencer er karakteriseret ved at være perfekte substitutter med samme marginalnytte for $x_1$og x_2, det fremgår heraf klart at hendes Marshall-efterspørgsel er givet ved randløsninger for alle $\frac{p_1}{p_2} \neq |MRS| \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} \neq 1 \Leftrightarrow p_1 \neq p_2$. Dvs.

$$(x_1^*, x_2^*) \in \begin{cases} \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \text{hvis } p_1 < p_2 \\ \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1x_1 + p_2x_2 = I\right\} & \text{hvis } p_1 = p_2 \\ \left\{\left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right\} & \text{hvis } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Ved at benytte at $I = 120$ samt $p_1 = 1 < 3 = p_2$ fås der

$$\left(x_1^{S*}, x_2^{S*}\right) = (120, 0) \tag{1.1}$$

Konnys præferencer er karakteriseret ved at være perfekte komplementer, det fremgår heraf klart at hendes optimale forbrug må være karakteriseret ved $x_1 = x_2$. Dette substitueres nu ind i hendes budgetbetingelse $p_1x_1 + p_2x_2 = I$, hvormed Marshall-efterspørgslen kan beregnes

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 &= I \Leftrightarrow \\ p_1x_1 + p_2x_1 &= I \Leftrightarrow \\ (p_1 + p_2)x_1 &= I \Leftrightarrow \\ x_1^*(p_1, p_2, I) &= \frac{m}{p_1 + p_2} = x_2^*(p_1, p_2, I) \end{aligned}$$

Ved at benytte at $I = 120$, $p_1 = 1$ og $p_2 = 3$ fås der

$$\left(x_1^{K*}, x_2^{K*}\right) = \left(\frac{120}{1+3}, \frac{120}{1+3}\right) = (30, 30) \tag{1.2}$$

(b) Hvilke nytteniveauer opnår de? Kan nytteforskellen bruges til at sige, hvem af dem, som der er bedst stillet? Vil Susse være misunderlig på Konny eller omvendt?

Svar: Nytteniveauerne beregnes

$$u^{S*} = u^S(120,0) = 120 + 0 = 120 \tag{1.3}$$
$$u^{K*} = u^S(30,30) = \min\{30,30\} = 30 \tag{1.4}$$

Nytteforskellen kan ikke bruges til at sige noget om, hvem der er bedst stillet. Dette følger af, at nytte er et ordinalt begreb. Det ses umiddelbart at hverken Susse eller Konny ville være misundelig på hinanden ved at sammenligne nytteniveauet ved modpartens forbrugsbundt

$$u^S(30,30) = 30 + 30 = 60 \tag{1.5}$$
$$u^K(120,0) = \min\{120,0\} = 0 \tag{1.6}$$

Denne konklusion er dog helt oplagt idet de to forbrugere har samme indkomst og handler under samme priser. Hvis en af dem havde foretrukket den andens forbrugsbundt, kunne de dermed blot have købt det

(c) Udled de to studerendes Hicks-efterspørgselsfunktioner

Svar: Vi opstiller Susses udgiftsminimeringsproblem idet $p_2 = 3$

$$\min_{x_1,x_2} \; p_1x_1 + 3x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad x_1 + x_2 = u \tag{1.7}$$

Da præferencerne er perfekte substitutter er det klart at det udgiftsminimerende forbrug må være givet ved $x_1 = 0 \equiv h_1(p_1,p_2,u)$ for $p_1 > 3$. Dette substitueres nu ind i nyttebetingelsen $x_2 = u \equiv h_2^S(p_1,p_2,u)$. Helt omvendt gælder naturligvis for $p_1 < 3$. Herfra fås Hicks-efterspørgselsfunktionerne

$$h^{S*}(p_1,3,u) = \begin{cases} (u,0) & \text{hvis } p_1 < 3 \\ (0,u) & \text{hvis } p_1 > 3 \end{cases} \tag{1.8}$$

Vi opstiller Konnys udgiftsminimeringsproblem idet $p_2 = 3$

$$\min_{x_1,x_2} \; p_1x_1 + 3x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad \min\{x_1,x_2\} = u \tag{1.9}$$

Da præferencerne er perfekte komplementer med lige store vægte er det klart, at det udgiftsminimerende forbrug må være givet ved $x_1 = x_2$. Dette substitueres nu ind i nyttebetingelsen

$$\begin{aligned} \min\{x_1,x_1\} &= u \Leftrightarrow \\ x_1 &= u = h_1^K(p_1,p_2,u) \end{aligned}$$

Dette er naturligvis helt analogt for x_2. Herfra fås Hicks-efterspørgselsfunktionerne

$$h^{K*}(p_1,3,u) = (u,u) \tag{1.10}$$

(d) Nu stiger prisen på mad til $p_1' = 2$. Hvordan ændrer dette de to studerendes forbrug af hhv. mad og bolig? Opdel ændringen i substitutions- hhv. indkomsteffekt.
Svar: Ved at benytte at $I = 120$ samt $p_1 = 2 < 3 = p_2$ fås Susses nye forbrug

$$\left(x_1^{S*}, x_2^{S*}\right) = (60, 0) \tag{1.11}$$

Vi beregner nu Susses kompenserede forbrug:

$$\begin{aligned} h_1^{S*}(2, 3, 120) &= 120 \\ h_2^{S*}(2, 3, 120) &= 0 \end{aligned}$$

Vi kan nu beregne den samlede effekt af prisstigningen samt opdele denne i henholdvis substitutionseffekt og indkomsteffekten for Susse:

$$\begin{aligned} \text{Samlet effekt: } (60, 0) - (120, 0) &= (-60, 0) \\ \text{Substitutionseffekt:} (120, 0) - (120, 0) &= (0, 0) \\ \text{Indkomsteffekt: } (60, 0) - (120, 0) &= (-60, 0) \end{aligned}$$

Ved at benytte at $I = 120$,$p_1 = 2$, $p_2 = 3$ fås Konnys nye forbrug

$$\left(x_1^{K*}, x_2^{K*}\right) = \left(\frac{120}{2+3}, \frac{120}{2+3}\right) = (24, 24) \tag{1.12}$$

Vi beregner nu Konnys kompenserede forbrug:

$$\begin{aligned} h_1^{K*}(2, 3, 30) &= 30 \\ h_2^{K*}(2, 3, 30) &= 30 \end{aligned}$$

Vi kan nu beregne den samlede effekt af prisstigningen samt opdele denne i henholdvis substitutionseffekt og indkomsteffekten:

$$\begin{aligned} \text{Samlet effekt: } (24, 24) - (30, 30) &= (-6, -6) \\ \text{Substitutionseffekt:} (30, 30) - (30, 30) &= (0, 0) \\ \text{Indkomsteffekt: } (24, 24) - (30, 30) &= (-6, -6) \end{aligned}$$

(e) Udregn for hver af de to studerende, som følge af madprisstigningen:

i. CV

ii. EV

iii. Ændring i forbrugeroverskuddet
Svar: Vi minder om at CV og EV er givet ved

$$\begin{aligned} \text{CV} &= E[p^n, u^g] - m \\ \text{EV} &= m - E[p^g, u^n] \end{aligned}$$

hvor $E[p,u] = p_1 h_1(p_1,p_2,u) + p_2 h_2(p_1,p_2,u)$ og toptegn angiver hvorvidt der benyttes nye eller gamle priser/nytteniveauer. Vi beregner nu for Susse

$$\begin{aligned}
\text{CV}^S &= 2\cdot 120 + 3\cdot 0 - 120 = 120\\
\text{EV}^S &= 120 - 1\cdot 60 - 3\cdot 0 = 60\\
\Delta CS^S &= -\int_{p_1^g}^{p_1^n} x_1^*(p_1,p_2,I)dp_1\\
&= -\int_1^2 \frac{120}{p_1}dp_1\\
&= -120\cdot[\ln p_1]_1^2\\
&= -120(\ln(2)-\ln(1))\\
&= -120\ln(2) \approx -83.2
\end{aligned}$$

Vi beregner nu for Konny

$$\begin{aligned}
\text{CV}^K &= 2\cdot 30 + 3\cdot 30 - 120 = 30\\
\text{EV}^K &= 120 - 1\cdot 24 - 3\cdot 24 = 24\\
\Delta CS^K &= -\int_{p_1^g}^{p_1^n} x_1^*(p_1,p_2,I)dp_1\\
&= -\int_1^2 \frac{120}{p_1+3}dp_1\\
&= -120\cdot[\ln(p_1+3)]_1^2\\
&= -120(\ln(2+3)-\ln(1+3))\\
&= -120\ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx -26.8
\end{aligned}$$

(f) Check, at dine resultater i spørgsmål (e) passer med integraler bag passende efterspørgselskurver

Svar: Vi minder om at den kompenserende variation (CV), ækvivalente variation (EV) og forbrugeroverskud ved en ændring i prisen på vare 1 kan beregnes som

$$\begin{aligned}
\text{CV} &= \int_{p_1^g}^{p_1^n} h_1(p_1,p_2,u^g)dp_1\\
\text{EV} &= \int_{p_1^g}^{p_1^n} h_1(p_1,p_2,u^g)dp_1\\
\Delta CS^K &= -\int_{p_1^g}^{p_1^n} x_1^*(p_1,p_2,I)dp_1
\end{aligned}$$

. Vi beregner nu for Susse

$$\begin{aligned}
\text{CV}^S &= \int_1^2 120 dp_1 = 120 \\
\text{EV}^S &= \int_1^2 60 dp_1 = 60 \\
\Delta CS^S &= -\int_{p_1^g}^{p_1^n} x_1^*(p_1, p_2, I) dp_1 \\
&= -\int_1^2 \frac{120}{p_1} dp_1 \\
&= -120 \cdot [\ln p_1]_1^2 \\
&= -120(\ln(2) - \ln(1)) \\
&= -120 \ln(2) \approx -83.2
\end{aligned}$$

Vi beregner nu for Konny

$$\begin{aligned}
\text{CV}^K &= \int_1^2 30 dp_1 = 30 \\
\text{EV}^K &= \int_1^2 24 dp_1 = 24 \\
\Delta CS^K &= -\int_{p_1^g}^{p_1^n} x_1^*(p_1, p_2, I) dp_1 \\
&= -\int_1^2 \frac{120}{p_1 + 3} dp_1 \\
&= -120 \cdot [\ln(p_1 + 3)]_1^2 \\
&= -120(\ln(2+3) - \ln(1+3)) \\
&= -120 \ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx -26.8
\end{aligned}$$

(g) Nu sker der igen prisstigning på mad. Sundheds- hhv. skatteministeren indfører en stykafgift på 3 kr., så den nye forbrugerpris bliver $p_1'' = 5$. Hvordan ændrer dette de to studerendes forbrug? Opdel ændringen i substitutions- hhv. indkomsteffekt.
Svar: Ved at benytte at $I = 120$ samt $p_1 = 5 > 3 = p_2$ fås Susses nye forbrug

$$\left(x_1^{S*}, x_2^{S*}\right) = (0, 40) \tag{1.13}$$

Vi beregner nu Susses kompenserede forbrug:

$$\begin{aligned}
h_1^{S*}(5, 3, 60) &= 0 \\
h_2^{S*}(5, 3, 60) &= 60
\end{aligned}$$

Vi kan nu beregne den samlede effekt af prisstigningen samt opdele denne i henholdvis substitutionseffekt og indkomsteffekten for Susse:

$$\begin{aligned}
\text{Samlet effekt: } (0, 40) - (60, 0) &= (-60, +40) \\
\text{Substitutionseffekt:} (0, 60) - (60, 0) &= (-60, +60) \\
\text{Indkomsteffekt: } (0, 40) - (0, 60) &= (0, -20)
\end{aligned}$$

Ved at benytte at $I = 120$,$p_1 = 5$, $p_2 = 3$ fås Konnys nye forbrug

$$\left(x_1^{K*}, x_2^{K*}\right) = \left(\frac{120}{5+3}, \frac{120}{5+3}\right) = (15, 15) \tag{1.14}$$

Vi beregner nu Konnys kompenserede forbrug:

$$\begin{aligned} h_1^{K*}(5,3,24) &= 24 \\ h_2^{K*}(5,3,24) &= 24 \end{aligned}$$

Vi kan nu beregne den samlede effekt af prisstigningen samt opdele denne i henholdvis substitutionseffekt og indkomsteffekten:

$$\begin{aligned} \text{Samlet effekt: } (15,15) - (24,24) &= (-9,-9) \\ \text{Substitutionseffekt:} (24,24) - (24,24) &= (0,0) \\ \text{Indkomsteffekt: } (15,15) - (24,24) &= (-9,-9) \end{aligned}$$

(h) Udregn for hver af de to studerende, som følge af denne ekstra madprisstigning:

i. CV

ii. EV

iii. Ændring i forbrugeroverskuddet

Svar: Vi minder om at CV og EV er givet ved

$$\begin{aligned} \text{CV} &= E[p^n, u^g] - m \\ \text{EV} &= m - E[p^g, u^n] \end{aligned}$$

hvor $E[p,u] = p_1 h_1(p_1,p_2,u) + p_2 h_2(p_1,p_2,u)$ og toptegn angiver hvorvidt der benyttes nye eller gamle priser/nytteniveauer. Vi beregner nu for Susse

$$\begin{aligned} \text{CV}^S &= 5 \cdot 0 + 3 \cdot 60 - 120 = 60 \\ \text{EV}^S &= 120 - 2 \cdot 40 - 3 \cdot 0 = 40 \\ \Delta CS^S &= -\int_{p_1^g}^{p_1^n} x_1^*(p_1,p_2,I)dp_1 \\ &= -\left(\int_2^3 \frac{120}{p_1} dp_1 + \int_3^5 0 dp_1\right) \\ &= -120 \cdot [\ln p_1]_2^3 \\ &= -120(\ln(3) - \ln(2)) \\ &= -120 \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx -48.7 \end{aligned}$$

Vi beregner nu for Konny

$$\begin{aligned}
\text{CV}^K &= 5 \cdot 24 + 3 \cdot 24 - 120 = 72 \\
\text{EV}^K &= 120 - 2 \cdot 15 - 3 \cdot 15 = 45 \\
\Delta CS^K &= -\int_{p_1^g}^{p_1^n} x_1^*(p_1, p_2, I) dp_1 \\
&= -\int_2^5 \frac{120}{p_1 + 3} dp_1 \\
&= -120 \cdot [\ln(p_1 + 3)]_2^5 \\
&= -120(\ln(5 + 3) - \ln(2 + 3)) \\
&= -120 \ln\left(\frac{8}{5}\right) \approx -56.4
\end{aligned}$$

(i) Check, at dine resultater i spørgsmål (h) passer med integraler bag passende efterspørgselskurver

Svar: Vi minder om at den kompenserende variation (CV), ækvivalente variation (EV) og forbrugeroverskud ved en ændring i prisen på vare 1 kan beregnes som

$$\begin{aligned}
\text{CV} &= \int_{p_1^g}^{p_1^n} h_1(p_1, p_2, u^g) dp_1 \\
\text{EV} &= \int_{p_1^g}^{p_1^n} h_1(p_1, p_2, u^n) dp_1 \\
\Delta CS &= -\int_{p_1^g}^{p_1^n} x_1^*(p_1, p_2, I) dp_1
\end{aligned}$$

. Vi beregner nu for Susse

$$\begin{aligned}
\text{CV}^S &= \int_2^3 60 dp_1 + \int_3^5 0 dp_1 = 60 \\
\text{EV}^S &= \int_2^3 40 dp_1 + \int_3^5 0 dp_1 = 40 \\
\Delta CS^S &= -\left(\int_2^3 \frac{120}{p_1} dp_1 + \int_3^5 0 dp_1\right) \\
&= -120 \cdot [\ln p_1]_2^3 \\
&= -120(\ln(3) - \ln(2)) \\
&= -120 \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx -48.7
\end{aligned}$$

Vi beregner nu for Konny

$$\begin{aligned}
\mathrm{CV}^K &= \int_2^5 24 dp_1 = 72 \\
\mathrm{EV}^K &= \int_2^5 15 dp_1 = 45 \\
\Delta CS^K &= -\int_2^5 \frac{120}{p_1+3} dp_1 \\
&= -120 \cdot [\ln(p_1+3)]_2^5 \\
&= -120(\ln(5+3) - \ln(2+3)) \\
&= -120 \ln\left(\frac{8}{5}\right) \approx -56.4
\end{aligned}$$

(j) Udregn for hver af forbrugerne, hvor stort et provenu myndighederne får fra stykafgiften. Kommentér forskellen for de to forbrugere.

Svar: Det samlede provenu beregnes som stykafgiften gange antallet den pågældende forbruger køber:

$$T = t \cdot x_1$$

Vi beregner nu for Susse

$$\mathrm{T}^S = 3 \cdot 0 = 0$$

Vi beregner nu for Konny

$$\mathrm{T}^K = 3 \cdot 15 = 45$$

Da Susses præferencer er perfekte substitutter, vælger hun at substituere helt væk fra x_1 det øjeblik prisen overstiger 3. Derfor opnår myndighederne 0 kr. i provenu fra Susse. Helt omvendt gælder det for Konny, hvis præferencer betyder at hun ikke substituerer væk fra x_1, uafhængigt af beskatningsgraden. Derfor opnår myndighederne positivt provenu fra Konny.

(k) Udregn for hver af forbrugerne, hvor stort et dødvægtstab stykafgiften medfører. Kommentér forskellen for de to forbrugere.

Svar: Dødvægtstabet kan beregnes som:

$$DWL = EV - T$$

Vi beregner nu for Susse

$$DWL^S = 40 - 0 = 40$$

Vi beregner nu for Konny

$$DWL^S = 45 - 45 = 0$$

Dødvægtstab opstår som resultat af at forbrugeren flytter sit forbrug grundet ændringen i de relative priser (substitutionseffekten). Derfor er der et dødsvægtstab ved beskatning af Susse. Intuitionen er at Susse oplagt er blevet dårligere stillet, men myndighederne har ikke tjent noget på skatten. Omvendt gør det sig gældende for Konny hvis manglende mulighed for at substituere væk fra x_1 betyder, at der ikke opstår noget dødvægtstab her.

2 Kvasi-lineær nytte

Gennemgang: Gennemgås på tavlen.

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \ln x_2$$

Forbrugsmulighedsområdet er $\mathbb{R}^2_+$. Priserne på varerne er hhv. $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$ kr. per enhed, og forbrugeren har sat $I > 0$ kr. til side til køb af de to varer.

(a) Find Marshall-efterspørgselsfunktionen
Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1,x_2} \frac{1}{2}x_1 + \ln x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x + p_2 x_2 = m$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone, og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2}x_1 + \ln x_2 + \lambda[I - p_1 x_1 - p_2 x_2]$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) kan beregnes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= \frac{1}{2} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \lambda p_1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2p_1} && (2.1)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= \frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} = \lambda p_2 && (2.2)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = m && (2.3)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (2.1) i (2.2) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_2} &= \frac{p_2}{2p_1} \Leftrightarrow \\
x_2^* &= \frac{2p_1}{p_2} && (2.4)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (2.4) i (2.3) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2\left(\frac{2p_1}{p_2}\right) &= m \Leftrightarrow \\ p_1x_1 + 2p_1 &= m \Leftrightarrow \\ x_1^* &= \frac{m-2p_1}{p_1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Bemærk, at vi kun har en indre løsning hvis

$$x_1^* > 0 \Leftrightarrow I - 2p_1 > 0 \Leftrightarrow m > 2p_1 \tag{2.6}$$

Marshall-efterspørgselsfunktionen er derfor

$$(x_1^*, x_2^*) \in \begin{cases} \left(\frac{m-2p_1}{p_1}, \frac{2p_1}{p_2}\right) & \text{hvis } m > 2p_1 \\ \left(0, \frac{m}{p_2}\right) & \text{ellers} \end{cases} \tag{2.7}$$

(b) Find Hicks-efterspørgselsfunktionen

Svar: Minimeringsproblemet opstilles

$$\min_{x_1,x_2} p_1x_1 + p_2x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad \frac{1}{2}x_1 + \ln x_2 = u$$

Vi kan opskrive Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda\left[u - \frac{1}{2}x_1 - \ln x_2\right] \tag{2.8}$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) for et indre optimum kan beregnes

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \frac{1}{2}\lambda = 0 \Leftrightarrow p_1 = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow 2p_1 = \lambda \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \frac{\lambda}{x_2} = 0 \Leftrightarrow p_2 = \frac{\lambda}{x_2} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u - \frac{1}{2}x_1 - \ln x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1 + \ln x_2 = u \tag{2.11}$$

Vi indsætter nu (2.9) i (2.10) og bestemmer det udgiftsminimerende forbrug af x_2

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{2p_1}{x_2} \Leftrightarrow \\ x_2 &= \frac{2p_1}{p_2} \equiv h_2^*(p_1, p_2, u) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Vi indsætter nu (2.12) i (2.11) og udleder det udgiftsminimerende forbrug x_1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + \ln\left(\frac{2p_1}{p_2}\right) &= u \Leftrightarrow \\ x_1 &= 2u - 2\ln\left(\frac{2p_1}{p_2}\right) \equiv h_1^*(p_1, 1, u) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Hicks-efterspørgselsfunktionen er derfor

$$h^*(p_1, p_2, u) = \left(2u - 2\ln\left(\frac{2p_1}{p_2}\right), \frac{2p_1}{p_2}\right) \tag{2.14}$$

Lad den initiale indkomst $I = 5000$ og de initiale priser være $p_1 = 75$ og $p_2 = 30$.

(c) Bestem EV og CV som følge af en ændring i p_2 til 50

Svar:

$$\begin{aligned} \text{CV} &= \int_{30}^{50} h_2(75, p_2, u^g)dp_2 \\ &= \int_{30}^{50} \frac{2 \cdot 75}{p_2} dp_2 \\ &= 150 \int_{30}^{50} \frac{1}{p_2} dp_2 \\ &= 150[\ln p_2]_{30}^{50} \\ &= 150 \ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 76.6 \\ \text{EV} &= \int_{30}^{50} h_2(75, p_2, u^n)dp_2 \\ &= \int_{30}^{50} \frac{2 \cdot 75}{p_2} dp_2 \approx 76.6 \end{aligned}$$

(d) Bestem $-\Delta CS$ som følge af en ændring i p_2 til 50

Svar:

$$\begin{aligned} \Delta\text{CS} &= -\int_{30}^{50} x_2^*(75, p_2, 5000)dp_2 \\ &= \int_{30}^{50} \frac{2 \cdot 75}{p_2} dp_2 \\ &\approx 76.6 \end{aligned}$$

Bemærk, at det er et generelt resultat at CV, EV og $|\Delta CS|$ er sammenfaldende ved kvasi-lineære goder når prisen ændres på det ikke lineære goder. Dette resultat skyldes den manglende indkomseffekt ved denne type goder.

Afleveringsopgaven

Den studerende Sigurd kan forbruge to varer, begge i kontinuerte mængder: Tøj (vare 1) og "andet forbrug" (vare 2). Tøj koster p_1 kr. pr. enhed, mens andet forbrug har prisen $p_2 = 1$ (andet forbrug kan siges at være numeraire).

Sigurds præferencer kan repræsenteres af nyttefunktionen $u(x_1, x_2) = 12 \ln x_1 + x_2$, hvilket giver følgende Marshall- og Hicks-efterspørgselsfunktioner for indre løsninger:

$$x_1(p_1, 1, m) = 12/p_1,$$

$$x_2(p_1, 1, m) = m - 12$$

$$h_1(p_1, 1, u) = 12/p_1$$

$$h_2(p_1, 1, u) = u + 12 \ln(p_1) - 12 \ln(12)$$

Sigurds eksogent givne indkomst fra SU er $m = 40$. I udgangspunktet er prisen på tøj 3, men prisen fordobles til 6.

(a) Udregn for Sigurd som følge af prisstigningen

i. CV

ii. EV

iii. Ændring i forbrugeroverskuddet

Svar:

$$\begin{aligned}
\text{CV} &= \int_{p_1^g}^{p_1^n} h_1(p_1, p_2, u^g) dp_1 \\
&= \int_3^6 \frac{12}{p_1} dp_1 \\
&= 12 \int_3^6 \frac{1}{p_1} dp_2 \\
&= 12[\ln p_1]_3^6 \\
&= 12 \ln\left(\frac{6}{3}\right) \\
&= 12 \ln 2 \approx 8.3 \\
\text{EV} &= \int_{p_1^g}^{p_1^n} h_1(p_1, p_2, u^n) dp_1 \\
&= \int_3^6 \frac{12}{p_1} dp_1 \approx 8.3 \\
\Delta CS &= -\int_{p_1^g}^{p_1^n} x_1^*(p_1, p_2, I) dp_1 \\
&= -\int_3^6 \frac{12}{p_1} dp_1 \approx 8.3
\end{aligned}$$

Nytten i den nye pris er

$$u^n = u(x_1(6,1,40), x_2(6,1,40)) = u(2,28) = 12\ln(2) + 28$$

Hicks-efterspørgslen i de gamle priser med den nye nytte er derfor

$$\begin{aligned} h_1(3,1,u^n) &= 4 \\ h_2(3,1,u^n) &= 12\ln(2) + 28 + 12\ln(3) - 12\ln(12) \approx 20.3177 < 0 \end{aligned}$$

(b) Hvis fordoblingen skyldtes en afgiftsstigning fra 0 til 3 kr. pr. enhed tøj, hvad ville dødvægtstabet så være?

Svar: Vi beregner først forbruget ved $p_1 = 6$ og $p_2 = 1$

$$x_1^*(6,1,40) = \frac{12}{6} = 2$$

Da provenuet fra skatten er givet ved $T = t \cdot x_1 = 3 \cdot 2 = 6$ kan dødvægtstabet nu beregnes

$$\text{DWL} \;\;=\;\; \text{EV} - T = 8.3 - 6 = 2.3$$

(c) Hvor stor en procentvis stigning i sin SU skal Sigurd have for at være lige så godt stillet efter prisstigningen?

Svar: $\frac{CV}{m} = \frac{8.3}{40} \approx 20.8\%$

Ugeseddel 6: Bytteøkonomi

– med svar –

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber

1. Mulig allokering
2. Pareto-dominans og -stabilitet
3. Kontraktkurven
4. Overskudsefterspørgsel
5. Walras-ligevægt
6. Første velfærdsteorem
7. Andet velfærdsteorem

Færdigheder

1. Bestemme om en allokering Pareto dominerer en anden allokering
2. Finde kontraktkurven i Edgeworth-boksen for simple tilfælde med Lagrange
3. Finde kontraktkurven i Edgeworth-boksen for mere komplicerede tilfælde ved grafiske argumenter
4. Finde Walras-ligevægte i Edgeworth-boksen
5. Forklare antagelserne bag og betydningen af 1. velfærdsteorem
6. Forklare antagelserne bag og betydningen af 2. velfærdsteorem

Checkopgave

(a) Beskriv i ord hvad der karakteriserer en pareto-stabil allokering i en bytteøkonomi
Svar: En allokering er pareto-stabil såfremt, at allokeringen selv er mulig, og der ikke findes en anden mulig allokering, hvor ingen er dårligere stillet, og mindst en person er strengt bedre stillet.

(b) Forklar hvorfor at det i en bytteøkonomi ofte vil være en pareto-stabil allokering at én forbruger har alle varerne
Svar: Hvis en forbruger har alle varerne kan andre kun stilles bedre ved at tage nogle af denne forbrugers varer. Med monotone præferencer vil det betyde at denne forbruger får mindre i nytte, og derfor er værre stillet. Uanset hvor meget bedre de andre bliver stillet er der derfor ikke tale om en pareto-forbedring.

1 En samfundsplanlæggers problem

Gennemgang: Spørgsmål (a) regnes ved tavlen. Spørgsmål (b) regnes selv.

Betragt en bytteøkonomi med to varer, hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionerne:

$$u^A(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$

og

$$u^B(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$$

Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Den samlede initialbeholdning af varer i økonomien er $\overline{\omega} = (10, 10)$.

(a) Opstil en samfundsplanlæggers problem når hun skal maksimere B's nytte, mens hun sikrer at A får nytte 5

Svar: Vi opstiller nu samfundsplanlæggerens problem

$$\begin{array}{rcl} \max\limits_{x_1^B, x_2^B} & x_1^B \left(x_2^B\right)^2 & \\ & \text{u.b.b.} & \\ \min\{x_1^A, x_2^A\} & = & 5 \\ x_1^A + x_1^B & = & 10 = \overline{\omega}_1 \\ x_2^A + x_2^B & = & 10 = \overline{\omega}_2 \end{array}$$

(b) Find den Pareto optimale allokering, hvor A får nytten 5

Svar: Det er oplagt ineffecient hvis $x_1^A \neq x_2^A$ dvs. de pareto-stabile allokeringe må opfylde $x_1^A = x_2^A$. Dette substitueres nu ind i den første bibetingelse

$$\begin{aligned} \min\{x_1^A, x_2^A\} = \min\{x^A, x^A\} &= 5 \Leftrightarrow \\ x_1^A &= 5 \Rightarrow \\ x_2^A &= 5 \end{aligned}$$

Dette indsættes nu i de to sidste bibetingelser, så

$$\begin{aligned} x_1^B + 5 = 10 &\quad\Leftrightarrow\quad x_1^B = 5 \\ x_2^B + 5 &\quad\Leftrightarrow\quad x_2^B = 5 \end{aligned}$$

Den efterspurgte pareto-stabile allokering er derfor $(x_1^A, x_2^A) = (5, 5)$ og $(x_1^B, x_2^B) = (5, 5)$.

2 Kontraktkurven

Gennemgang: Gennemgås ved tavlen.

Betragt en bytteøkonomi med to varer, hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionerne:

$$u^A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

og

$$u^B(x_1, x_2) = 4\ln(x_1) + x_2$$

Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Den samlede initialbeholdning af varer i økonomien er $\bar{\boldsymbol{e}} = (\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) = (12, 12)$.

(a) Definér og redegør for begrebet pareto-stabilitet (efficiens) i en bytteøkonomi

Svar: En Pareto optimal (efficient) allokering, $X = (\boldsymbol{x}^A, \boldsymbol{x}^B)$, i en bytteøkonomi er defineret som

i. En mulig allokering

$$\begin{aligned} x_1^A + x_1^B &= \overline{\omega}_1 \\ x_2^A + x_2^B &= \overline{\omega}_2 \end{aligned}$$

ii. Der *ikke* Pareto domineres af en anden mulig allokering

(b) Find og angiv de efficiente allokeringe i det *indre* af Edgeworth-boksen i denne specifikke bytteøkonomi

Svar: Da præferencerne er differentiable og konvekse vil indre pareto-stabile allokeringe være karakteriseret af $MRS_A = MRS_B$. Forbrugernes MRS beregnes derfor nu

$$\begin{aligned} MRS_A &= 1 \\ MRS_B &= \frac{4}{x_1^B} \end{aligned}$$

Og sættes lig hinanden

$$1 = \frac{4}{x_1^B} \Leftrightarrow x_1^B = 4$$

Det vil sige, at de indre pareto-stabile allokeringe er

$$\left\{(x_1^A, x_2^A) \,|\, x_1^A = 8, x_2^A \in (0, 12)\right\}$$

(c) Find og angiv alle de efficiente allokeringe i denne specifikke bytteøkonomi

Svar: Vi betragter nu også forbrugerenes marginale substituionsrate i punkter hvor $x_1^B \neq 4$.

$$\text{for } x_{1B} < 4: \quad MRS_A = 1 < \tfrac{4}{x_1^B} = MRS_B \quad \Rightarrow x_2^B = 0 \Leftrightarrow x_2^A = 12$$
$$\text{for } x_{1B} > 4: \quad MRS_A = 1 > \tfrac{4}{x_1^B} = MRS_B \quad \Rightarrow x_2^A = 0 \Leftrightarrow x_2^B = 12$$

I alt fås de pareto-stabile allokeringe altså

$$\begin{gathered}\left\{(x_1^A, x_2^A) \,|\, x_1^A \in [0, 8[, x_2^A = 0\right\} \\ \cup \left\{(x_1^A, x_2^A) \,|\, x_1^A = 8, x_2^A \in [0, 12]\right\} \\ \cup \left\{(x_1^A, x_2^A) \,|\, x_1^A \in [8, 12[, x_2^A = 12\right\}\end{gathered}$$

3 Walras-ligevægt I

Gennemgang: Spørgsmål (a) gennemgås ved tavlen. Spørgsmål (b)-(d) regnes selv.

Betragt en bytteøkonomi med to varer, hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionerne:

$$u^A(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

og

$$u^B(x_1, x_2) = 4\ln(x_1) + x_2$$

Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Der er privat ejendomsret i økonomien. A's initialbeholdning er $\boldsymbol{\omega}^A = (\omega_1^A, \omega_2^A)$, mens B's initialbeholdning er $\boldsymbol{\omega}^B = (\omega_1^B, \omega_2^B)$. Der findes markeder for begge varer med fuldkommen konkurrence. Priserne er p_1 og p_2.

(a) Definér begrebet Walras-ligevægt for en bytteøkonomi

Svar: I en bytteøkonomi med privat ejendomsret og to goder er en Walras-ligevægt karakteriseret ved en prisvektor, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$, og en allokering $(\boldsymbol{x}^{A*}, \boldsymbol{x}^{B*}) = ((x_1^{A*}, x_2^{A*}), (x_1^{B*}, x_2^{B*}))$, hvor

i. *Udbud* = *efterspørgsel* for begge varer

$$\begin{aligned} x_1^{A*}\left(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A\right) + x_1^{B*}\left(p_1, p_2, \omega_1^B, \omega_2^B\right) &= \overline{\omega}_1 \equiv \omega_1^A + \omega_1^B \\ x_2^{A*}\left(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A\right) + x_2^{B*}\left(p_1, p_2, \omega_1^B, \omega_2^B\right) &= \overline{\omega}_2 \equiv \omega_2^A + \omega_2^B \end{aligned}$$

ii. x_1^{A*},x_2^{A*},x_1^{B*} og x_2^{B*} er de *optimale efterspørgselsfunktioner* givet priserne

(b) Find forbruger A's og B's efterspørgselsfunktioner

Svar: Vi bemærker at forbruger A's præferencer er karakteriseret ved en positiv monoton transformation af en Cobb-Douglas nyttefunktion. Vi er velbekendte med det nyttemaksimerende forbrug for denne præferencetype

$$\begin{aligned} x_1^{A*}\left(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A\right) &= \frac{1}{2}\frac{p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A}{p_1} \\ x_2^{A*}\left(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A\right) &= \frac{1}{2}\frac{p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A}{p_2} \end{aligned}$$

Vi beregner nu det nyttemaksimerende forbrug for forbruger B ved at benytte den sædvanlige betingelse for indre optima

$$|MRS^B| = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{4}{x_1^B} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow x_1^B = \frac{4p_2}{p_1} \equiv x_1^{B*}\left(p_1, p_2, \omega_1^B, \omega_2^B\right)$$

Dette substitueres nu ind i forbruges Bs budgetbetingelse for at bestemme det nyttemaksikmerede forbrug af x_2^B

$$\begin{aligned}
p_1 x_1^B + p_2 x_2^B &= p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B \Leftrightarrow \\
p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right) + p_2 x_2^B &= p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B \Leftrightarrow \\
4p_2 + p_2 x_2^B &= p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B \Leftrightarrow \\
x_2^B &= \frac{p_1\omega_1^B + p_2(\omega_2^B - 4)}{p_2} \equiv x_2^{B*}\left(p_1, p_2, \omega_1^B, \omega_2^B\right)
\end{aligned}$$

(c) Forklar hvad det vil sige at sætte vare 2 som numeraire, og hvorfor at vi frit kan vælge numeraire

Svar: At vare 2 er numeraire betyder at $p_2 = 1$. Vi kan frit vælge numeraire fordi forbrugerens efterspørgsel, og derfor ligevægtsprisvektoren, kun afhænger af de relative priser. Efterspørgslen ved $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ er den samme som $\boldsymbol{p'} = (\frac{p_1}{p_2}, 1)$.

Antag $\boldsymbol{e}^A = (4, 12)$ og $\boldsymbol{e}^B = (8, 4)$.

(d) Find Walras-ligevægten for denne specifikke bytteøkonomi, dvs. find ligevægtspriserne og ligevægtsallokeringen

Svar: Idet det ved endogen indkomst udelukkende er de relative priser, der har betydning (i modsætning til de absolutte), kan vi, uden tab af generalitet, normalisere den ene af priserne. Vi sætter derfor $p_2 = 1$. Det nyttemaksimerende forbrug af x_2 for de to forbrugere bliver dermed

$$\begin{aligned}
x_2^{A*}(p_1, 1, 4, 12) &= 2p_1 + 6 \\
x_2^{B*}(p_1, 1, 8, 4) &= 8p_1
\end{aligned}$$

Vi benytter betingelsen at allokeringen skal være mulig

$$\begin{aligned}
x_2^{A*}(p_1, 1, 4, 12) + x_2^{B*}(p_1, 1, 8, 4) &= 12 + 4 = \overline{\omega}_1 \\
2p_1 + 6 + 8p_1 &= 16 \\
10p_1 &= 10 \\
p_1 &= 1
\end{aligned}$$

Bemærk Walras' lov sikrer disse priser også clearer markedet for x_1. Ligevægtspriserne er derfor $(p_1 p_2) = (1, 1)$, mens ligevægtsallokeringen er

$$\begin{aligned}
x_1^{A*}(1, 1, 4, 12) &= 8 \\
x_2^{A*}(1, 1, 4, 12) &= 8 \\
x_1^{B*}(1, 1, 8, 4) &= 4 \\
x_1^{B*}(1, 1, 8, 4) &= 8
\end{aligned}$$

som vi umiddelbart ser er en mulig allokering.

4 Walras-ligevægt II

Gennemgang: Spørgsmål (a)-(d) regnes selv. Spørgsmål (e) gennemgås ved tavlen.

Betragt en bytteøkonomi med to varer, hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionerne:

$$u^A(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$$

og

$$u^B(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$$

Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Der er privat ejendomsret i økonomien. A's initialbeholdning er $(k^A, 6)$, mens B's initialbeholdning er $(3 + k^B, 0)$, hvor k^A og k^B er ikke-negative konstanter. Der findes markeder for begge varer med fuldkommen konkurrence. Vare 2 er numeraire, mens prisen på vare 1 er p_1.

(a) Find ligevægtspriserne for denne bytteøkonomi

Svar: Vi bemærker at begge forbrugeres præferencer er karakteriseret ved en positiv monoton transformation af en Cobb-Douglas nyttefunktion. Vi er velbekendte med det nyttemaksimerende forbrug for denne præferencetype.

$$\begin{aligned}
x_1^{A*}\left(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A\right) &= \frac{2}{3}\frac{p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A}{p_1} \\
x_2^{A*}\left(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A\right) &= \frac{1}{3}\frac{p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A}{p_2} \\
x_1^{B*}\left(p_1, p_2, \omega_1^B, \omega_2^B\right) &= \frac{1}{3}\frac{p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B}{p_1} \\
x_2^{B*}\left(p_1, p_2, \omega_1^B, \omega_2^B\right) &= \frac{2}{3}\frac{p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B}{p_2}
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu initialbeholdningerne samt normaliserer prisen på x_2, $p_2 = 1$

$$\begin{aligned}
x_1^{A*}\left(p_1, 1, 0 + k^A, 6\right) &= \frac{2}{3}\frac{p_1 k^A + 6}{p_1} \\
x_2^{A*}\left(p_1, 1, 0 + k^A, 6\right) &= \frac{p_1 k^A + 6}{3} \\
x_1^{B*}\left(p_1, 1, 3 + k^B, 0\right) &= \frac{1}{3}\frac{p_1\left(3 + k^B\right)}{p_1} \\
x_2^{B*}\left(p_1, 1, 3 + k^B, 0\right) &= \frac{2p_1\left(3 + k^B\right)}{3}
\end{aligned}$$

Vi benytter betingelsen at allokeringen skal være mulig og betragter markedet for x_2

$$\begin{aligned}
x_2^{A*}\left(p_1,p_2,\omega_1^A,\omega_2^A\right)+x_2^{B*}\left(p_1,p_2,\omega_1^B,\omega_2^B\right) &= \overline{\omega}_1 \Leftrightarrow \\
\frac{p_1k^A+6}{3}+\frac{2p_1\left(3+k^B\right)}{3} &= 6 \Leftrightarrow \\
p_1k^A+6+2p_1\left(3+k^B\right) &= 18 \Leftrightarrow \\
p_1k^A+6p_1+2p_1k^B &= 12 \Leftrightarrow \\
p_1\left(k^A+6+2k^B\right) &= 12 \Leftrightarrow \\
p_1 &= \frac{12}{k^A+6+2k^B}
\end{aligned}$$

Bemærk Walras' lov sikrer disse priser også clearer markedet for x_1.

(b) Find Walras-ligevægten for denne bytteøkonomien når $k^A = k^B = 0$, dvs. find ligevægtspriserne og ligevægtsallokeringen

Vi sætter nu $k^A = k^B = 0$ og bestemmer ligevægtsprisen for vare 1

$$p_1 = \frac{12}{6} = 2$$

Ligevægtspriserne er derfor $(p_1p_2) = (2,1)$, mens ligevægtsallokeringen er

$$\begin{aligned}
x_1^{A*}\left(2,1,0+k^A,6\right) &= \frac{2}{3}\frac{6}{2} = 2 \\
x_2^{A*}\left(2,1,0+k^A,6\right) &= \frac{6}{3} = 2 \\
x_1^{B*}\left(2,1,3+k^B,0\right) &= \frac{1}{3}\frac{2\cdot 3}{2} = 1 \\
x_2^{B*}\left(2,1,3+k^B,0\right) &= \frac{2\cdot 2\cdot 3}{3} = 4
\end{aligned}$$

som vi umiddelbart ser er en mulig allokering.

(c) Find Walras-ligevægten når $k^B = 0$

Svar: Generel løsning beregnet i (a). Vi sætter nu $k^B = 0$ og bestemmer ligevægtsprisen for vare 1.

$$p_1 = \frac{12}{k^A+6}$$

Ligevægtspriserne er derfor $(p_1 p_2) = (\frac{12}{k^A+6}, 1)$, mens ligevægtsallokeringen er

$$
\begin{aligned}
x_1^{A*}\left(\frac{12}{k^A+6}, 1, 0+k^A, 6\right) &= \frac{2}{3}\frac{\frac{12}{k^A+6}k^A+6}{\frac{12}{k^A+6}} = \frac{2}{3}k^A + \frac{4(k^A+6)}{12} = \frac{2}{3}k^A + \frac{k^A+6}{3} = k^A + 2 \\
x_2^{A*}\left(\frac{12}{k^A+6}, 1, 0+k^A, 6\right) &= \frac{\frac{12}{k^A+6}k^A+6}{3} = \frac{4k^A}{k^A+6} + 2 \\
x_1^{B*}\left(\frac{12}{k^A+6}, 1, 3+k^B, 0\right) &= \frac{1}{3}\frac{\frac{12}{k^A+6}\cdot 3}{\frac{12}{k^A+6}} = 1 \\
x_2^{B*}\left(\frac{12}{k^A+6}, 1, 3+k^B, 0\right) &= \frac{2\frac{12}{k^A+6}\cdot 3}{3} = \frac{24}{k^A+6}
\end{aligned}
$$

(d) Find Walras-ligevægten når $k^A = 0$

Svar: Generel løsning beregnet i (a). Vi sætter nu $k^A = 0$ og bestemmer ligevægtsprisen for vare 1.

$$p_1 = \frac{12}{6+2k^B}$$

Ligevægtspriserne er derfor $(p_1 p_2) = (\frac{12}{6+2k^B}, 1)$, mens ligevægtsallokeringen er

$$
\begin{aligned}
x_1^{A*}\left(\frac{12}{6+2k^B}, 1, 0, 6\right) &= \frac{2}{3}\frac{6}{\frac{12}{6+2k^B}} = \frac{4(6+2k^B)}{12} = \frac{6+2k^B}{3} \\
x_2^{A*}\left(\frac{12}{6+2k^B}, 1, 0, 6\right) &= \frac{6}{3} = 2 \\
x_1^{B*}\left(\frac{12}{6+2k^B}, 1, 3+k^B, 0\right) &= \frac{1}{3}\frac{\frac{12}{6+2k^B}\left(3+k^B\right)}{\frac{12}{6+2k^B}} = \frac{3+k^B}{3} \\
x_2^{B*}\left(\frac{12}{6+2k^B}, 1, 3+k^B, 0\right) &= \frac{2\frac{12}{6+2k^B}\left(3+k^B\right)}{3} = \frac{2\frac{12}{2(3+k^B)}\left(3+k^B\right)}{3} = 4
\end{aligned}
$$

(e) Sammenlign resultaterne i spørgsmål (c) og (d) og giv en intuitiv forklaring på en evt. forskel

Svar: Vi bemærker at prisen på vare 1 falder i både (c) og (d). Dette skyldes naturligvis blot at markedsudbuddet øges hvilket presser prisen ned således at markederne stadig clearer. Vi bemærker desuden at en forøgelse af forbruger B's initialbeholdning slår kraftigere igennem på p_1 end ved tilsvarende forøgelse af forbrugers A's initialbeholdning idet $\frac{12}{6+2k^B} < \frac{12}{k^A+6}$ for $k^B = k^A$. Dette skyldes at forbruger B's relative præference for x_2 ift. x_1 er større end forbruger A's. Når forbruger B's beholdning af vare 1 forøges, vil han ønske at sælge en støre andel at denne forøgelse (i bytte for vare 2) ift. forbruger A. Dermed presses markedsprisen relativt mere ned her.

Vi bemærker at forbruger A i både (c) og (d) forbruger mere end hans oprindelige forbrugspunkt. Denne situation gør sig omvendt ikke gældende for forbruger B

der er entydigt dårligere stillet i den situation hvor forbruger A har fået øget sin initialbeholdning $\frac{24}{k^A+6} < 4$. Denne asymmetri skyldes at tildelingen af vare 1 i (c) betyder at forbruger A har en positiv beholdning af begge varer. Mens forbruger B i (d) blot får øget sin (i forvejen positive) beholdning af vare 1. Bemærk her at begge goder er essentielle for begge forbrugere. Forbruger A får således mere ud af beholdningsforøgelsen end forbruger B der stadig er tvunget til at handle.

Afleveringsopgaven

Betragt en bytteøkonomi med to varer og to forbrugere A og B. Forbrugernes nyttefunktioner er

$$u^A(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$$

og

$$u^B(x_1, x_2) = x_1^b x_2^{1-b}$$

hvor $0 < a < 1$ og $0 < b < 1$. Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Der er privat ejendomsret i økonomien. Den samlede initialbeholdning af varerne er $(\overline{\omega}, \overline{\omega})$. Forbrugernes individuelle initiale beholdninger er givet ved

$$\begin{aligned}
\omega_1^A &= k\overline{\omega} \\
\omega_2^A &= k\overline{\omega} \\
\omega_1^B &= (1-k)\overline{\omega} \\
\omega_2^B &= (1-k)\overline{\omega}
\end{aligned}$$

hvor $0 < k < 1$.

(a) Vis at $X = ((x_1^A, x_2^A), (x_1^B, x_2^B)) = ((\omega_1^A, \omega_2^A), (\omega_1^B, \omega_2^B))$ er en mulig allokering

Svar: Vi minder om at »en mulig allokering« betyder

$$\begin{aligned}
x_1^A + x_1^B &= \overline{\omega}_1 = \overline{\omega} \\
x_2^A + x_2^B &= \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}
\end{aligned}$$

Dette vises nu

$$\begin{aligned}
\omega_1^A + \omega_1^B &= \overline{\omega} \Leftrightarrow k\overline{\omega} + (1-k)\overline{\omega} = \overline{\omega} \Leftrightarrow \overline{\omega} = \overline{\omega} \\
\omega_2^A + \omega_2^B &= \overline{\omega} \Leftrightarrow k\overline{\omega} + (1-k)\overline{\omega} = \overline{\omega} \Leftrightarrow \overline{\omega} = \overline{\omega}
\end{aligned}$$

Hvoraf det følger at allokeringen X er mulig.

(b) Find ligevægtspriserne i Walras-ligevægten når vare 2 numeraire, mens prisen på vare 1 er p_1

Svar: Vi opskriver forbrugernes indkomster

$$\begin{aligned}
p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A &= p_1 k\overline{\omega} + p_2 k\overline{\omega} = (p_1 + p_2)k\overline{\omega} \\
p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B &= p_1(1-k)\overline{\omega} + p_2(1-k)\overline{\omega} = (p_1 + p_2)(1-k)\overline{\omega}
\end{aligned}$$

Vi bemærker at begge forbrugeres præferencer er karakteriseret ved en positiv monoton transformation af en Cobb-Douglas nyttefunktion. Vi er velbekendte med det nyttemaksimerende forbrug for denne præferencetype. Vi betragter i det følgende udelukkende markedet for vare 1 (vi kunne også have fokuseret på markedet for vare 2)

$$\begin{aligned} x_1^{A*}(p_1, p_2, k\overline{\omega}, k\overline{\omega}) &= a\frac{(p_1 + p_2)k\overline{\omega}}{p_1} \\ x_1^{B*}(p_1, p_2, (1-k)\overline{\omega}, (1-k)\overline{\omega}) &= b\frac{(p_1 + p_2)(1-k)\overline{\omega}}{p_1} \end{aligned}$$

Vi sætter vare 2 som numeraire

$$\begin{aligned} x_1^{A*}(p_1, p_2, k\overline{\omega}, k\overline{\omega}) &= a\frac{(p_1 + 1)k\overline{\omega}}{p_1} \\ x_1^{B*}(p_1, p_2, (1-k)\overline{\omega}, (1-k)\overline{\omega}) &= b\frac{(p_1 + 1)(1-k)\overline{\omega}}{p_1} \end{aligned}$$

Vi benytter betingelsen at allokeringen skal være mulig

$$\begin{aligned} \overline{\omega} &= x_1^{A*}(p_1, p_2, k\overline{\omega}, k\overline{\omega}) + x_1^{B*}(p_1, p_2, (1-k)\overline{\omega}, (1-k)\overline{\omega}) \Leftrightarrow \\ \overline{\omega} &= a\frac{(p_1+1)k\overline{\omega}}{p_1} + b\frac{(p_1+1)(1-k)\overline{\omega}}{p_1} \Leftrightarrow \\ p_1 &= a(p_1+1)k + b(p_1+1)(1-k) \Leftrightarrow \\ p_1 &= ap_1k + ak + bp_1(1-k) + b(1-k) \Leftrightarrow \\ p_1 - ap_1k - bp_1(1-k) &= ak + b(1-k) \Leftrightarrow \\ p_1 &= \frac{ak + b(1-k)}{1 - ak - b(1-k)} \end{aligned}$$

(c) Hvad bestemmer hvor meget ulighed der er i modellen?
Svar: Det gør k. Når k stiger falder Bs forbrug og As forbrug stiger.

Ugeseddel 7: Beslutninger under usikkerhed

– med svar –

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber

1. Lotteri (simpelt, sammensat)
2. von Neuman-Morgenstern (vNM) forventet nyttefunktion
3. Forventet værdi vs. forventet nytte
4. Sikkerhedsækvivalens
5. Risikopræmie
6. Risiko attituder (avers, neutral, elsker)
7. Arrow-Pratt mål for risiko aversion
8. Aktuarisk fair
9. Aggregeret vs. idiosynkratisk usikkerhed

Færdigheder

1. Løse simple forsikrings- og investeringsproblemer
2. Beregne den forventede værdi
3. Beregne sikkerhedsækvivalenten
4. Beregne risikopræmien
5. Finde Walras-ligevægten i Edgeworth-boksen med usikkerhed

Checkopgave

Betragt en forbruger med von Neumann-Morgenstern-præferencer (vNM-præferencer), der kan repræsenteres af Bernoulli-nyttefunktionen:

$$u(x) = \sqrt{x},$$

Betragt desuden lotterierne:

$$A = \left(\frac{1}{2} \cdot 4, \frac{1}{2} \cdot 16\right)$$
$$B = \left(\frac{1}{2} \cdot 1, \frac{1}{2} \cdot 25\right).$$

(a) Hvad er den forventede værdi af de to lotterier?
Svar:

$$\mathbb{E}[A] = \frac{1}{2}4 + \frac{1}{2}16 = 10$$
$$\mathbb{E}[B] = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}25 = 13$$

(b) Er følgende udsagn sandt/falsk? »Forbrugerens vNM forventet nyttefunktion er defineret som nytten af den forventede værdi af lotteriet.«
Svar: Falsk, da vNM nyttefunktioner er defineret som den forventede nytte af deltagelse i lotteriet. Fx

$$U(A) = \frac{1}{2}u(4) + \frac{1}{2}u(16)$$
$$U(B) = \frac{1}{2}u(1) + \frac{1}{2}u(25).$$

(c) Vis at forbrugeren er indifferent mellem de to lotterier.
Svar: Det ses at $U(A) = U(B)$ da

$$U(A) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16} = 1 + 2 = 3$$

$$U(B) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{25} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3.$$

Lotteri B har en væsentligt større forventet værdi end lotteri A, men forbrugeren er indifferent mellem lotterierne forbi risikoen i lotteri B også er større. Forbrugeren er med andre ord risikoavers.

1 Lotterier og risiko attituder

Gennemgang: Regnes ved tavlen.

Betragt følgende tre lotterier

$$\begin{aligned} G_I &= (\frac{1}{2} \circ 1, \frac{1}{2} \circ 16) \\ G_{II} &= (1 \circ 8.5) \\ G_{III} &= (1 \circ 6) \end{aligned}$$

og følgende tre forbrugere, A, B og C, med vNM-præferencer, der kan repræsenteres af Bernoulli-nyttefunktionerne,

$$\begin{aligned} u^A(x) &= x \\ u^B(x) &= \sqrt{x} \\ u^C(x) &= x^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

(a) Beregn Arrow-Pratt målet for risiko-aversion for hver af de tre forbrugere

Svar:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^A(x) &= -\frac{u^{A\prime\prime}(x)}{u^{A\prime}(x)} = -\frac{0}{1} = 0 \\ \mathcal{A}^B(x) &= -\frac{u^{B\prime\prime}(x)}{u^{B\prime}(x)} = -\frac{-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x} \\ \mathcal{A}^C(x) &= -\frac{u^{C\prime}(x)}{u^{C\prime}(x)} = -\frac{-\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}}{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}x^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4x} \end{aligned}$$

(b) Hvilke af forbrugerne er hhv. risiko averse, risiko neutrale og risiko elskere?

Svar: En forbruger er

$$\begin{aligned} \text{Risiko-avers hvis} &\quad \mathcal{A}(x) > 0 \ \forall x \\ \text{Risiko-neutral hvis} &\quad \mathcal{A}(x) = 0 \ \forall x \\ \text{Risiko-elsker hvis} &\quad \mathcal{A}(x) < 0 \ \forall x \end{aligned}$$

Heraf følger umiddelbart at A er risiko-neutral og B og C er risiko-averse.

(c) Bestemt rangordningen af de tre lotterier for de tre forbrugere

Svar: Da forbrugerernes har vNM-præferencer evaluerer de beslutninger under usikkerhed som følgende (i situationer med 2 udfald)

$$u(x) = p \cdot u(x_G) + (1 - p) \cdot u(x_B)$$

Vi evaluerer først de tre lotterier i den risikoneutrale forbrugers nyttefunktion (dette svarer til at beregne den forventede værdi af de tre lotterier)

$$\begin{aligned} U^A(G_I) = \mathbb{E}[G_I] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.5 \\ U^A(G_{II}) = \mathbb{E}[G_{II}] &= 1 \cdot 8.5 = 8.5 \\ U^A(G_{III}) = \mathbb{E}[G_{III}] &= 1 \cdot 6 \end{aligned}$$

Vi kan på baggrund af ovenstående konkludere forbruger A rangordner lotterierne som følger $G_I \sim G_{II} \succ G_{III}$. Vi kan herudover allerede nu konkludere, at forbruger B og C må strengt foretrække lotteri G_{II} frem for henholdsvis G_I og G_{III}. Argumentet for $G_{II} \succ G_{III}$ er, at den forventede værdi er størst for G_{II}, men risikoen er den samme (der er ikke nogen risiko i de to lotterier). Argumentet for $G_{II} \succ G_I$ er, at den forventede værdi er lige stor for de to lotterier, men risikoen er mindre ved G_{II}. Da B og C begge var risiko-averse ved vi, at de pådrager sig et nyttetab af risiko, hvorfor det er oplagt at $G_{II} \succ G_I$. Vi evaluerer for en god ordens skyld alle tre lotterier i forbruger B og C nyttefunktioner og sammenligner.

Forbruger B

$$\begin{aligned} U^B(G_I) &= \frac{1}{2} \cdot 1^{1/2} + \frac{1}{2} \cdot 16^{1/2} = 2.5 \\ U^B(G_{II}) &= 1 \cdot 8.5^{1/2} \approx 2.9 \\ U^B(G_{III}) &= 1 \cdot 6^{1/2} \approx 2.4 \end{aligned}$$

Forbruger C

$$\begin{aligned} U^C(G_I) &= \frac{1}{2} \cdot 1^{1/4} + \frac{1}{2} \cdot 16^{1/4} = 1.5 \\ U^C(G_{II}) &= 1 \cdot 8.5^{1/4} \approx 1.7 \\ U^C(G_{III}) &= 1 \cdot 6^{1/4} \approx 1.6 \end{aligned}$$

Heraf fremgår umiddelbart at forbruger B rangordner lotterierne $G_{II} \succ G_I \succ G_{III}$ mens forbruger C rangordner lotterierne $G_{II} \succ G_{III} \succ G_I$. Forskellen på de to forbrugere bunder naturligvis blot i at forbruger Bs risikoaversion er mindre end forbruger Cs (jf. Arrow-Pratt målet).

(d) Bestem sikkerhedsækvivalenten og risikopræmien for lotteri G_I for de tre forbrugere

Svar: Sikkerhedsækvivalenten $C(G)$ defineres som det sikre beløb forbrugeren ville være indifferent mellem at modtage ift. deltagelse i lotteriet.

$$u(C(G)) = U(G) \Leftrightarrow C(G) = u^{-1}(U(G))$$

Risikopræmien $RP(G)$ defineres som forskellen på sikkerhedsækvivalenten og den forventede værdi af lotterier.

$$RP(G) = E(G) - C(G)$$

Sikkerhedsækvialenten for forbruger A der var risikoneutral er naturligvis blot den forventede værdi at lotteriet. Herf følger umiddelbart at risikopræmien er 0.

$$C^A(G_I) = \mathbb{E}[G_I] = 8.5$$

Vi kan nu beregene sikkerhedsækvivalenten for de to risiko-averse forbrugere

$$\begin{aligned} C^B(G_I) &= 2.50^2 = 6.25 \\ C^C(G_I) &= 1.5^4 = 5.0625 \end{aligned}$$

Hvorfra vi kan beregne risikopræmien for de to forbrugeren ved G_I

$$\begin{aligned} RP^B(G_I) &= 8.5 - 6.25 = 2.25 \\ RP^c(G_I) &= 8.5 - 5.0625 = 3.4375 \end{aligned}$$

2 Forsikring

Gennemgang: Spørgsmål (a) gennemgås ved tavlen. Resten regnes selv.

En forbruger med Bernoulli-nyttefunktionen $u(x) = \ln(x)$ på forbrug/indkomst har grundlæggende en indkomst på x (målt i hele tusinde kroner; tkr.). Imidlertid er der en sandsynlighed på 1% for, at forbrugerens bil bliver stjålet. Dette vil medføre/svare til et indkomsttab på 200 (altså 200 tkr.). Et forsikringsselskab tilbyder en forsikring, hvor man kan vælge et beløb (forsikringssum) på K tkr., som udbetales i tilfælde af biltyveri. Det koster et beløb i forsikringspræmie, der er proportional med K (og som skal betales uanset om bil stjæles eller ej).

(a) Opstil forsikringsproblemet

Svar: Forbrugerens forsikringsproblem opstilles

$$\max_K 0.01 \ln(x - 200 + K - \gamma K) + 0.99 \ln(x - \gamma K)$$

(b) Opstil førsteordensbetingelsen (indre løsning) for optimal værdi af K

Svar: Førsteordensbetingelsen beregnes

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial K} &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{0.01(1-\gamma)}{x-200+(1-\gamma)K} - \frac{0.99\gamma}{x-\gamma K} &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{0.01(1-\gamma)}{x-200+(1-\gamma)K} &= \frac{0.99\gamma}{x-\gamma K} \Leftrightarrow \\
0.01(1-\gamma)(x-\gamma K) &= 0.99\gamma(x-200+(1-\gamma)K) \\
0.01(1-\gamma)x - 0.01(1-\gamma)\gamma K &= 0.99\gamma x - 198\gamma + 0.99(1-\gamma)\gamma K \\
0.01x - 0.01\gamma x + 198\gamma - 0.99\gamma x &= (1-\gamma)\gamma K \\
198\gamma - \gamma x + 0.01x &= (1-\gamma)\gamma K \\
K &= \frac{198\gamma - \gamma x + 0.01x}{(1-\gamma)\gamma}
\end{aligned}
$$

(c) Hvor stor en værdi af K skal forbrugeren vælge hvis forbrugerens indkomst er hhv. $x \in \{500, 1000\}$ og forsikringspræmien er $\{0.009K, 0.010K, 0.011K\}$. Kommentér.

Svar: Vi indsætter indkomster og forsikringspræmier i førsteordensbetingelsen for K

	$x = 500$	$x = 1000$
$\gamma = 0.009$	256	312
$\gamma = 0.01$	200	200
$\gamma = 0.011$	154	108

Vi bemærker at forbrugeren forsikrer sig fuldt ud det tilfælde hvor $\gamma = 0.01$ dvs. der hvor forsikringen er aktuarisk fair dvs. der hvor forsikringsselskabets indtægter er lig dets forventede udgifter. Dette er et generelt resultat for risikoaverse forbrugerer. Forsikringen er aktuarisk fair idet

$$
\begin{aligned}
\text{indtægter} &= \text{udgifter} \\
\gamma K &= \delta K \\
0.01K &= 0.01K \\
K &= K
\end{aligned}
$$

hvor $\delta = 0.01$ angiver sandsynligheden for cyklen bliver stjålet og forsikringsselskabet skal udbetale forsikringssummen. Ved »aktuarisk unfair« forsikring overforsikrer forbrugeren sig og »forbrugermæssig unfair« forsikring underforsikrer han sig.

3 Pensionsopsparing

Gennemgang: Spørgsmål (a)-(c) regnes selv. Regnes ved tavlen.

Fru Poulsen har en pensionsopsparing, der skal investeres i én af to ordninger. Hun har vNM-præferencer, der kan repræsenteres af Bernoulli-nyttefunktionen $\sqrt{x}$, hvor x er hendes slutformue målt i hele antal millioner kroner, når hun skal pensioneres. Bankrådgiveren stiller hende over for to alternativer:

A. Hvis hun vælger **obligationsordningen**, vil hun med 50 % sandsynlighed få en slutformue på 9 mio.kr. og med 50 % sandsynlighed 4 mio.kr.

B. Hvis hun vælger **aktieordningen**, vil hun med 66,7 % sandsynlighed få en slutformue på 1 mio.kr. og med 33,3 % sandsynlighed få en slutformue på 25 mio.kr.

Svar på følgende spørgsmål:

(a) Hvilket af de to alternativer vælger hun?

Svar: Vi evaluerer de to ordninger i Fru Poulsens nyttefunktion

$$\begin{aligned} \text{Obligationsordningen:} \quad u\left(\tfrac{1}{2} \circ 9, \tfrac{1}{2} \circ 4\right) &= \frac{1}{2}\sqrt{9} + \frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = 2.5 \\ \text{Aktieordningen:} \quad u\left(\tfrac{2}{3} \circ 1, \tfrac{1}{3} \circ 25\right) &= \frac{2}{3}\sqrt{1} + \frac{1}{3}\sqrt{25} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} \approx 2.33 \end{aligned}$$

Hvorfra det umiddelbart fremgår at Fru Poulsen foretrækker obligationsordningen.

(b) Hvilket alternativ ville en risiko neutral forbruger vælge?

Svar: En risikoneutral forbruger interesserer kun for den forventede slutformue (forbrugeren er altså upåvirket af risikoen/usikkerhed). Vi beregner nu den forventede slutformue for de to pensionsordninger.

$$\begin{aligned} \text{Obligationsordningen:} \quad \mathbb{E}\left[G^{obligation}\right] &= \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{13}{2} = 6.5 \\ \text{Aktieordningen:} \quad \mathbb{E}\left[G^{aktie}\right] &= \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 25 = \frac{27}{3} = 9 \end{aligned}$$

Hvorfra det umiddelbart fremgår at en risikoneutral forbruger foretrækker atkieordningen.

(c) Hvilket alternativ ville en risiko elskende forbruger vælge?

Svar: En risikoelskende forbruger drager nytte af påtaget risiko. Det er derfor helt oplagt, at en sådan forbruger vil foretrække aktieordningen, hvor både risikoen samt den forventede slutformue er højest.

(d) Findes der risiko averse forbrugerer, der vil vælge aktieordningen frem for obligationsordningen?

Svar: Ja. Da vi har netop har bestemt at en risikoneutral forbruger vil foretrække aktieordningen, følger det heraf, at der også eksisterer en risiko-avers forbruger der vil foretrække dette. Det kræver blot en mindre grad af risikoaversion (et numerisk mindre Arrow-Pratt mål). Dette kunne f.eks. være den risikoaverse investor $u(x) = x^{0.9}$

$$\begin{aligned} \text{Obligationsordningen:} \quad u\left(\tfrac{1}{2} \circ 9, \tfrac{1}{2} \circ 4\right) &= \frac{1}{2}9^{0.9} + \frac{1}{2}4^{0.9} \approx 5.4 \\ \text{Aktieordningen:} \quad u\left(\tfrac{2}{3} \circ 1, \tfrac{1}{3} \circ 25\right) &= \frac{2}{3}1^{0.9} + \frac{1}{3}25^{0.9} \approx 6.7 \end{aligned}$$

Der altså foretrækker aktieordningen.

4 Generel ligevægt (+)

Gennemgang: Regnes ved tavlen.

Betragt en bytteøkonomi med usikkerhed og én vare i to tilstande med sandsynlighed δ og $(1-\delta)$, hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved vNM-nyttefunktioner med Bernoulli-nyttefunktionen $\ln(x)$.

Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Der er privat ejendomsret i økonomien. A's initialbeholdning er (ω_1^A, ω_2^A), mens B's initialbeholdning er (ω_1^B, ω_2^B). Markederne er komplette og der er perfekt konkurrence. Priserne på vare 1 og 2 er p_1 og p_2.

(a) Løs forbruger A og B's forsikringsproblem

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles for forbruger j

$$\max_{x_1, x_2} \delta \ln x_1 + (1-\delta)\ln x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 \tag{4.1}$$

Bemærk, (i) at monotonicitet medfører $=$ i bibetingelsen, og (ii) at $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ er sikret af at begge goder er essentielle.

Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \delta \ln x_1 + (1-\delta)\ln x_2 + \lambda[p_1\omega_1 + p_2\omega_2 - p_1x_1 - p_2x_2] \tag{4.2}$$

og udlede førsteordensbetingelserne (FOC)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\delta}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta}{x_1} = \lambda p_1 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{1-\delta}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\delta}{x_2} = \lambda p_2 \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 \tag{4.5}$$

Vi deler nu (4.3) med (4.4) således at λ forsvinder, og vi kan udtrykke x_2 som en funktion af x_1

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\delta}{x_1}}{\frac{1-\delta}{x_2}} &= \frac{p_1\lambda}{p_2\lambda} \Leftrightarrow \\
\frac{\delta}{(1-\delta)}\frac{x_2}{x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \\
x_2 &= \frac{1-\delta}{\delta}\frac{p_1}{p_2}x_1 \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (4.6) i (4.5) (budgetlinjen) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned}
p_1x_1 + p_2\left(\frac{1-\delta}{\delta}\frac{p_1}{p_2}x_1\right) &= p_1\omega_1 + p_2\omega_2 \\
p_1x_1 + \frac{1-\delta}{\delta}p_1x_1 &= p_1\omega_1 + p_2\omega_2 \Leftrightarrow \\
\frac{1}{\delta}p_1x_1 &= p_1\omega_1 + p_2\omega_2 \Leftrightarrow \\
x_1^* &= \delta\frac{p_1\omega_1 + p_2\omega_2}{p_1} \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (4.6) i (4.7) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned}
x_2^* &= x_2^*(x_1^*, p_1, p_2) \\
&= \frac{1-\delta}{\delta}\frac{p_1}{p_2}\frac{aI}{p_1} \\
&= \frac{1-\delta}{\delta}\frac{p_1}{p_2}\delta\frac{p_1\omega_1 + p_2\omega_2}{p_1} \\
&= (1-\delta)\frac{p_1\omega_1 + p_2\omega_2}{p_2}
\end{aligned}$$

Altså er forbruger A og B optimale forsikring givet ved

$$\begin{aligned}
\left(x_1^{A*}, x_2^{A*}\right) &= \left(\delta\frac{p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A}{p_1}, (1-\delta)\frac{p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A}{p_2}\right) \\
\left(x_1^{B*}, x_2^{B*}\right) &= \left(\delta\frac{p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B}{p_1}, (1-\delta)\frac{p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B}{p_2}\right)
\end{aligned}$$

(b) Vis at $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\delta}{1-\delta}$ giver fuld forsikring, $x_1^{j\star}(p_1) = x_2^{j\star}(p_1)$

Svar: Vi sætter forbruget i de to tilstande lig hinanden for den repræsentative forbruger

$$\begin{aligned}
\delta\frac{p_1\omega_1+p_2\omega_2}{p_1} &= (1-\delta)\frac{p_1\omega_1+p_2\omega_2}{p_2} \Leftrightarrow \\
\frac{\delta}{p_1} &= \frac{1-\delta}{p_2} \Leftrightarrow \\
\frac{p_1}{p_2} &= \frac{\delta}{1-\delta}
\end{aligned}$$

Dermed vist.

(c) Find et udtryk for p_1 i bytteøkonomiens Walras-ligevægt (med $p_2 = 1$ som numeraire)

Svar: Vi benytter betingelsen at tilstanden skal være mulig, normaliserer $p_2 = 1$ og betragter markedet for vare 2

$$\begin{aligned}
x_2^{A*}\left(p_1, 1, \omega_1^A, \omega_2^A\right) + x_2^{B*}\left(p_1, 1, \omega_1^B, \omega_2^B\right) &= \omega_2^A + \omega_2^B \Leftrightarrow \\
(1-\delta)\left(p_1\omega_1^A + \omega_2^A\right) + (1-\delta)\left(p_1\omega_1^B + \omega_2^B\right) &= \omega_2^A + \omega_2^B \Leftrightarrow \\
p_1\omega_1^A + \omega_2^A + p_1\omega_1^B + \omega_2^B &= \frac{\omega_2^A + \omega_2^B}{1-\delta} \Leftrightarrow \\
p_1\left(\omega_1^A + \omega_1^B\right) &= \frac{\omega_2^A + \omega_2^B}{1-\delta} - \left(\omega_2^A + \omega_2^B\right) \Leftrightarrow \\
p_1\left(\omega_1^A + \omega_1^B\right) &= \frac{\omega_2^A + \omega_2^B - \left(\omega_2^A + \omega_2^B\right)(1-\delta)}{1-\delta} \Leftrightarrow \\
p_1 &= \frac{\delta}{1-\delta}\frac{\omega_2^A + \omega_2^B}{\omega_1^A + \omega_1^B} \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

(d) Påvis at $\omega_1^A + \omega_1^B = \omega_2^A + \omega_2^B \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\delta}{1-\delta}$. Illustrér i en Edgeworth-boks og giv en fortolkning.

Svar: Vi normaliserer $p_2 = 1$. Vi ønskeder således at vise

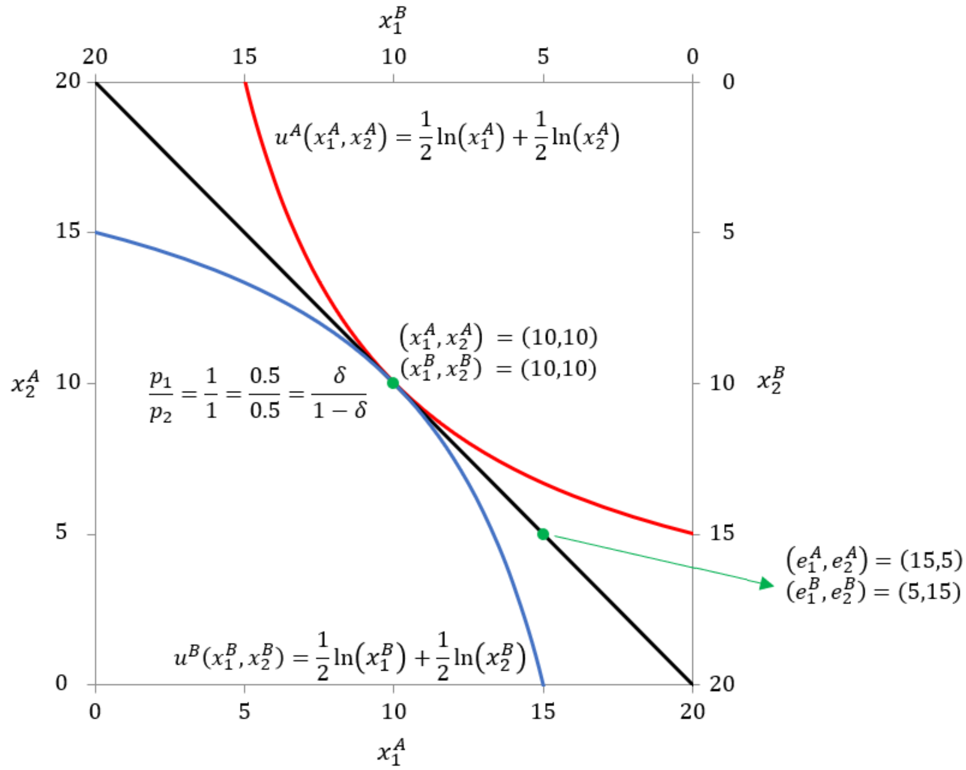
$$p_1 = \frac{\delta}{1-\delta}$$

Dette er analogt til $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\delta}{1-\delta}$. Vi benytter nu vores udtryk for p_1 i 4.8

$$p_1 = \frac{\delta}{1-\delta}\frac{\omega_2^A + \omega_2^B}{\omega_1^A + \omega_1^B}$$

Ved at benytte betingelsen $\omega_1^A + \omega_1^B = \omega_2^A + \omega_2^B \Leftrightarrow 1 = \frac{\omega_2^A+\omega_2^B}{\omega_1^A+\omega_1^B}$ fås det ønskede udtryk

$$p_1 = \frac{\delta}{1-\delta}$$



Da $\omega_1^A + \omega_1^B = \omega_2^A + \omega_2^B$ er der ingen aggregeret risiko i økonomien, og da vi har komplette markeder, vil der derfor være fuld forsikring (fuld risikodeling) i økonomien. Den relative pris vil samtidig være den aktuariske fair pris, altså den relative sandsynlig af de to tilstande. Hvis δ stiger er det mere sandsynligt, at vi ex post ender op i tilstand 1 og derfor vil prisen på at have mere af varen i denne tilstand stige, dvs. p_1 stiger.

(e) Påvis at $\omega_1^A + \omega_1^B > \omega_2^A + \omega_2^B \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} < \frac{\delta}{1-\delta}$. Illustrér i en Edgeworth-boks og giv en fortolkning.

Svar: Vi normaliserer $p_2 = 1$. Vi ønsker således at vise

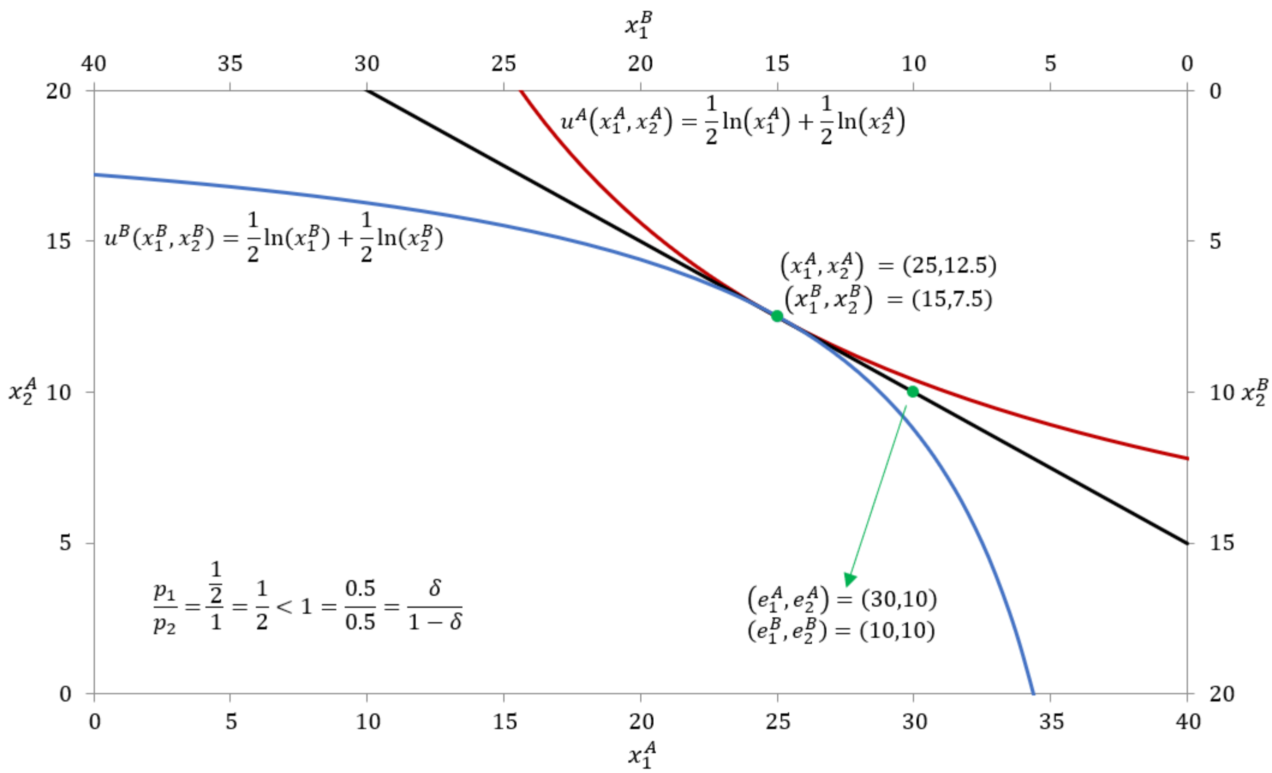
$$p_1 < \frac{\delta}{1-\delta}$$

Dette er analogt til $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\delta}{1-\delta}$. Vi benytter nu vores udtryk for p_1 i 4.8

$$p_1 = \frac{\delta}{1-\delta} \frac{\omega_2^A + \omega_2^B}{\omega_1^A + \omega_1^B}$$

Ved at benytte betingelsen $\omega_1^A + \omega_1^B > \omega_2^A + \omega_2^B \Leftrightarrow 1 > \frac{\omega_2^A + \omega_2^B}{\omega_1^A + \omega_1^B}$ fås det ønskede udtryk

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\delta}{1-\delta} \frac{\omega_2^A + \omega_2^B}{\omega_1^A + \omega_1^B} < \frac{\delta}{1-\delta} \Leftrightarrow \\
p_1 &< \frac{\delta}{1-\delta}
\end{aligned}
$$



Da $\omega_1^A + \omega_1^B > \omega_2^A + \omega_2^B$ har vi aggregeret risiko i økonomien, hvor der samlet set er mere af varen i tilstand 1 end i tilstand 2. Relativt til den aktuariske fair pris $p_1 = \frac{\delta}{1-\delta}$, bliver det mere værdifuldt at have mere af varen i tilstand 2 med det lave udbud. Derfor falder prisen på at have varen i tilstand 1 relativt, dvs. $p_1 < \frac{\delta}{1-\delta}$.

Afleveringsopgaven

Hr. Mortensen har en samlet formue på w kr. Han har vNM-præferencer, der kan repræsenteres af Bernoulli-nyttefunktionen $ln(x)$, hvor x er hans slutformue. Han har mulighed for at investere beløbet $z \geq 0$ i en investeringsordning, der med sandsynlighed 50 % giver et nettoafkast på $(\phi + k)$ pr. investeret krone, og med sandsynlighed 50 % giver et nettoafkast på $(\phi - k)$ pr. investeret krone, hvor $0 \leq \phi \leq k \leq \phi + 1$.

Resten af hans formue kommer til at stå på en bankkonto, der giver nettoafkastet 0. Han har tilsvarende også mulighed for at låne ubegrænset til en rente på 0.

(a) Find det optimale beløb z^* at investere.

Svar: Hr. Mortensen står overfor følgende situtation.

$$G = \left(\frac{1}{2} \circ w + (\phi + k)z, \frac{1}{2} \circ w + (\phi - k)z\right)$$

Vi kan herfra opstille Hr. Mortensens maksimeringsproblem

$$\max_z U(G; z) = \frac{1}{2} \ln (w + (\phi + k)z) + \frac{1}{2} \ln (w + (\phi - k)z)$$

Vi udleder nu førsteordensbetingelsen og bestemmer det optimale investeringsbeløb z^*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial z} &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{\phi + k}{2(w + (\phi + k)z)} + \frac{\phi - k}{2(w + (\phi - k)z)} &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{\phi + k}{w + (\phi + k)z} &= \frac{-(\phi - k)}{w + (\phi - k)z} \Leftrightarrow \\
(\phi + k)(w + (\phi - k)z) &= -(\phi - k)(w + (\phi + k)z) \Leftrightarrow \\
(\phi + k)w + \left(\phi^2 - k^2\right) z &= -(\phi - k)w - \left(\phi^2 - k^2\right) z \Leftrightarrow \\
2\left(\phi^2 - k^2\right) z &= -2\phi w \Leftrightarrow \\
z &= \frac{\phi w}{k^2 - \phi^2} \equiv z^*
\end{aligned}$$

Undersøg desuden, hvordan dette beløb afhænger af parametrene ϕ og k:

(b) Hvad sker der for $k \to \phi$? Kommentér.

Svar:

$$\lim_{k \to \phi} \frac{\phi w}{k^2 - \phi^2} = \infty$$

Når $k \to \phi$ går investeringsordninen mod følgende $G = \left(\frac{1}{2} \circ w + 2\phi z, \frac{1}{2} \circ w\right)$

$$\lim_{k \to \phi} \left(\frac{1}{2} \circ w + (\phi + k)z, \frac{1}{2} \circ w + (\phi - k)z\right) = \left(\frac{1}{2} \circ w + 2\phi z, \frac{1}{2} \circ w\right)$$

Vi bemærker her, at Hr. Mortensen i det dårlige scenarie ender ud med formuen w hvilket jo var hans oprindelige formue. Når $k \to \phi$ betyder det altså, at det dårligere scenarie svarer til hvis han blot undlod at investere. Men i det gode scenarie er der en positiv forventet nettogevinst (2ϕ per investeret krone). Hr. Mortensen påtager sig med andre ord ikke nogen reel risiko ved at indgå i investeringsordningen men øger blot sin forventede formue. Det er således oplagt at han vil ønske at investere så meget som muligt.

(c) Hvad sker der for $\phi \to 0$ Kommentér.

Svar:

$$\lim_{\phi \to 0} \frac{\phi w}{k^2 - \phi^2} = 0$$

Vi kan beregne Hr. Mortensen forventede nettoindtjening ved investeringsordningen som følger

$$\mathbb{E}[G] - w = \frac{1}{2}\left(w + (\phi + k)z\right) + \frac{1}{2}\left(w + (\phi - k)z\right) - w = \frac{1}{2}(\phi + k)z + \frac{1}{2}(\phi - k)z = \phi z$$

ϕ er altså et udtryk for det forventede nettoafkast pr. investeret krone. Når nettoafkastet ved at investere går mod 0, betyder det, at den forventede gevinst ved at investere er 0. Det er oplagt at Hr. Mortensen som risikoavers forbruger i sådan tilfælde vil undlade at investere.

Ugeseddel 8: Forbrugeradfærd

– med svar –

Checkopgave

(a) Tænk over *Opgave 1, spørgsmål a* i *eksamen vinter 2020* (find på *Absalon* under *Filer/Eksamen*)

(b) Skim nøglebegrebslisterne for Ugeseddel 1-7

1 Eksamensopgaver

Gennemgang: Regn selv.

Regn alle opgaver i *eksamen vinter 2020* (find på *Absalon* under *Filer/Eksamen*) på nær

(a) Opgave 1, spørgsmål b

(b) Opgave 3

2 Begrebsquiz

Gennemgang: »Tænk/snak selv«.

(a) Sæt jer sammen 2-4 studerende

(b) Vælg på skift et *nøglebegreb* fra *Ugeseddel 1-7* som skal forklares

(c) Brug ca. 2 minutter på at skrive *stikord* til at forklare nøglebegrebet (*uden brug af hjælpemidler*)

(d) Snak om hvad nøglebegrebet betyder (*gerne med brug af hjælpemidler*)

Afleveringsopgaven

Betragt en bytteøkonomi med usikkerhed og én vare i to tilstande, der indtræffer med hhv. sandsynlighed δ og $1-\delta$, hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der begge kan repræsenteres ved von Neumann–Morgenstern nyttefunktionen givet ved

$$U^j(x_1, x_2) = \delta\sqrt{x_1} + (1-\delta)\sqrt{x_2},\ j \in \{A, B\}$$

Varen kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder i begge tilstande. Der er privat ejendomsret i økonomien. A's initialbeholdning er $(1,1)$ og B's initialbeholdning er $(2,3)$. Markederne er komplette og der er perfekt konkurrence. Priserne på vare 1 og 2 er $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$.

(a) Er der nogen tilstande på randen af Edgeworth-boksen, som er Pareto-stabile? Hvilke?

Svar: Hjørnerne $(x_1^A, x_2^A) = (0,0)$ og $(x_1^A, x_2^A) = (3,4)$ er altid Pareto-stabile.

Bemærk derudover først at

$$MRS^A(x_1^A, x_2^A) = \frac{\delta\frac{1}{2}\left(x_1^A\right)^{-\frac{1}{2}}}{(1-\delta)\frac{1}{2}\left(x_2^A\right)^{-\frac{1}{2}}}$$
$$MRS^B(x_1^B, x_2^B) = \frac{\delta\frac{1}{2}\left(x_1^B\right)^{-\frac{1}{2}}}{(1-\delta)\frac{1}{2}\left(x_2^B\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

og at den samlede initialbeholdning er $(1,1)+(2,3)=(3,4)$.

Vi kan udelukke Pareto-stabile tilstande med $x_1^A = 0$ og $x_2^A = 0$ da:

i. For $x \in (0,4]$: $\lim_{x_1^A \to 0, x_2^A \to x} MRS^A(x_1^A, x_2^A) = \infty$ og $\lim_{x_1^A \to 0, x_2^A \to x} MRS^B(3-x_1^A, 4-x_2^A) < \infty$.
Da $MRS^A > MRS^B$ vil der være Pareto-forbedrende bytter, hvor A *får* x_1 og *giver* x_2.

ii. For $x \in (0,3]$: $\lim_{x_2^A \to 0, x_1^A \to x} MRS^A(x_1^A, x_2^A) = 0$ og $\lim_{x_2^A \to 0, x_1^A \to x} MRS^B(3-x_1^A, 4-x_2^A) > 0$.
Da $MRS^A < MRS^B$ vil der være Pareto-forbedrende bytter, hvor A *giver* x_1 og *får* x_2.

Med en symmetrisk argumentation kan Pareto-stabile tilstande med $x_1^B = 0$ og $x_2^B = 0$ udelukkes.

Samlet set er der derfor *ingen andre tilstande på randen som er Pareto-stabile.*

(b) Hvilke betingelser skal gælde for alle *indre* Pareto-optimale tilstande?

Svar: Alle indre Pareto-optimale tilstande skal overholde

$$
\begin{aligned}
MRS^A(x_1^A, x_2^A) &= MRS^B(x_1^B, x_2^B) \\
\frac{\delta \frac{1}{2}\left(x_1^A\right)^{-\frac{1}{2}}}{(1-\delta)\frac{1}{2}\left(x_2^A\right)^{-\frac{1}{2}}} &= \frac{\delta \frac{1}{2}\left(x_1^B\right)^{-\frac{1}{2}}}{(1-\delta)\frac{1}{2}\left(x_2^B\right)^{-\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow \\
\left(\frac{x_2^A}{x_1^A}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{x_2^B}{x_1^B}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\
\frac{x_2^A}{x_1^A} &= \frac{x_2^B}{x_1^B}
\end{aligned}
$$

og derudover skal tilstanden være mulighed

$$
\begin{aligned}
x_1^A + x_1^B &= \omega_1^A + \omega_1^B = 3 \\
x_2^A + x_2^B &= \omega_2^A + \omega_2^B = 4
\end{aligned}
$$

(c) Er der nogen Pareto-stabile tilstande med fuld forsikring $x_1^A = x_2^A$ og $x_1^B = x_2^B$?

Svar: I de Pareto-stabile hjørner er der kun fuld forsikring for forbrugeren med forbrug $= (0,0)$, men ikke for forbrugeren med forbrug $= (3,4)$. Det kan derudover afvises, at $x_1^B = x_2^B$ i en *indre* Pareto optimal tilstand, da

$$
\frac{x_2^B}{x_1^B} = 1 \Rightarrow \frac{x_2^A}{x_1^A} = 1 \Leftrightarrow x_1^A = x_2^A
$$

hvilket ikke kan lade sig gøre, da det betyder

$$
\begin{aligned}
x_1^A + x_1^B &= x_2^A + x_2^B \Leftrightarrow \\
\omega_1^A + \omega_1^B &= \omega_2^A + \omega_2^B \Leftrightarrow \\
3 &= 4
\end{aligned}
$$

Der er *aggregeret risiko* i modellen, da der er mere af varen i tilstand 2 end i tilstand 1. Derfor kan to risikoaverse forbrugere ikke afdække hinandens risiko.

(d) Kan der være fuld forsikring i Walras-ligevægten?
Kunne du gøre det bedre end i Walras-ligevægten?
Svar:

i. 1. velfærdsteorem gælder da præferencerne er monotone, og siger at alle Walras-ligevægte er Pareto-stabile. Da der ikke er fuld forsikring i nogen Pareto-stabile tilstande kan der ikke være fuld forsikring i Walras-ligevægten.

ii. Om man kan gøre det »bedre« er et åbent spørgsmål. Walras-ligevægten vil stadig være Pareto-stabil, så det er ikke muligt at lave Pareto-forbedringer. Men hvis hensyn til lighed og retfærdighed inddrages kan omfordeling være hensigtsmæssigt.

Ugeseddel 9: Profitmaksimering
– med svar –

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber:

1. Teknologi (konveks, strengt konveks)
2. Produktionsfunktion (konkav, strengt konkav)
3. Produktionsmulighedsområde
4. Marginalprodukt og gennemsnitsprodukt
5. Skalaafkast
6. Isokvanter og TRS
7. Variable, faste og kvasi-faste produktionsfaktorer
8. Profit og dækningsbidrag
9. Profitmaksimering (inkl. produktions- og virksomhedsnedlukning)
10. Faktorefterspørgsel
11. Udbudsfunktion
12. »Law of Supply«

Færdigheder:

1. Bestemme konveksitet af teknologi
2. Bestemme skalaafkast for produktionsfunktioner
3. Bestemme konkavitet af produktionsfunktioner
4. Løse virksomhedens profitmaksimeringsproblem på kort sigt
5. Løse virksomhedens profitmaksimeringsproblem på langt sigt

Checkopgave

Betragt en virksomhed med produktionsfunktionen $f(\ell, k)$, hvor ℓ er arbejdskraft (løn $w > 0$) og k er kapital (lejepris $r > 0$). Output, y, kan sælges til prisen $p > 0$. Virksomheden er pristager på alle markeder.

(a) Opstil virksomhedens profitmaksimeringsproblem på langt sigt
Svar:

$$\pi(p, w, r) = \max_{\ell,k} pf(\ell, k) - w\ell - rk$$

(b) Giv et bud på virksomhedens profitmaksimeringsproblem på kort sigt.
Svar: Fx kan virksomheden måske ikke tilpasse kapitalapparatet på kort sigt.

$$\pi(p, w, r, \overline{k}) = \max_{\ell} pf(\ell, k) - w\ell - r\overline{k}$$

(c) Hvornår vil virksomheden vælge at producere på kort og langt sigt?
Svar: På langt sigt skal der være *positiv profit*

$$\pi > 0$$

På kort sigt skal der være et *positivt dækningsbidrag*

$$\overline{\pi} = pf(\ell, k) - w\ell > 0$$

1 Produktionsfunktioner

Gennemgang: Gennemgås ved tavlen for i. Ellers regnes der selv.

Betragt følgende produktionsfunktioner:

i. $f(\ell, k) = A\ell^a k^b \quad$ hvor $A, a, b > 0$

ii. $f(\ell, k) = a\ell + bk \quad$ hvor $a, b > 0$

iii. $f(\ell, k) = \min\{\ell, k\}$

iv. $f(\ell, k) = \min\{\ell + 2{\cdot}k, 2{\cdot}\ell + k\}$ [*kun hvis der er tid*]

Besvar følgende spørgsmål for én produktionsfunktion ad gangen:

(a) Hvilke parameterværdier giver hhv. stigende, konstant og aftagende skalaafkast?

(b) For hvilke parameterværdier er produktionsfunktionen (strengt) konkav?

(c) For hvilke parameterværdier er der aftagende marginalprodukt for input 1 og 2?

(d) Udregn TRS for de produktionsfunktioner, hvor dette er meningsfyldt.

(e) For hvilken parameterværdier er der numerisk aftagende TRS langs en isokvant?

i. Svar: $f(\ell, k) = A\ell^a k^b$ hvor $A, a, b > 0$

(a) Vi minder om følgende definition på henholdsvis stigende, konstant eller aftagende skalaafkast

$$\begin{aligned}
\text{stigende skalaafkast} &: \quad f(t\ell, \ell k) > tf(\ell, k),\ \forall t > 1 \\
\text{konstant skalaafkast} &: \quad f(t\ell, tk) = tf(\ell, k),\ \forall t > 0 \\
\text{aftagende skalaafkast} &: \quad f(t\ell, tk) < tf(\ell, k),\ \forall t > 1
\end{aligned}$$

Vi beregner nu for

$$f(t\ell, tk) = A(t\ell)^a(tk)^b = t^{a+b}A\ell^a k^b = t^{a+b}f(\ell, k)$$

Hvoraf umiddelbart følger at $f(\ell, k) = A\ell^a k^b$ udviser

i. stigende skalaafkast når $a + b > 1$

ii. konstant skalaafkast når $a + b = 1$

iii. aftagende skalaafkast når $a + b < 1$

(b) Produktionsfunktionen er homogen af grad $a + b$. Da de øvre konturmængder er konvekse (produktionsfunktionen er kvasi-konkav), følger det, at produktionsfunktionen er konkav når $a + b \leq 1$.

(c) Vi beregner marginalproduktet af de to input

$$\begin{aligned} MP_\ell = \frac{\partial f(\ell, k)}{\partial \ell} &= aA\ell^{a-1}k^b \\ MP_k = \frac{\partial f(\ell, k)}{\partial k} &= bA\ell^b k^{b-1} \end{aligned}$$

Vi beregner nu de afledte marginalprodukter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\ell, k)}{\partial l^2} &= a(a-1)A\ell^{a-2}k^b < 0 \quad \text{for } a < 1 \\ \frac{\partial^2 f(\ell, k)}{\partial k^2} &= b(b-1)A\ell^b k^{b-2} < 0 \quad \text{for } b < 1 \end{aligned}$$

(d) Det marginale transformationsforhold beregnes

$$TRS = -\frac{MP_\ell}{MP_k} = -\frac{aA\ell^{a-1}k^b}{bA\ell^b k^{b-1}} = -\frac{a}{b}\frac{k}{l}$$

(e) Vi differentierer TRS mht. l

$$\frac{\partial |TRS|}{\partial \ell} = -\frac{a}{b}\frac{k}{\ell^2} < 0$$

Hvoraf fremgår at TRS er numerisk aftagende langs isokvanten for alle parameterværdier $a, b > 0$

ii. Svar: $f(\ell, k) = a\ell + bk$ **hvor** $a, b > 0$

(a)
$$f(t\ell, tk) = at\ell + btk = t\,(a\ell + bk) = tf(\ell, k)$$

Hvoraf følger at $f(\ell, k) = a\ell + bk$ udviser konstant skalafkast for alle værdier af $a, b > 0$

(b) Da produktionsfunktionen har konstant skalaafkast er den homogen af grad 1. Da de øvre konturmængder er konvekse (produktionsfunktionen er kvasi-konkav), følger det, at produktionsfunktionen er konkav for alle værdier af $a, b > 0$.

(c) Vi beregner marginalproduktet af de to input

$$\begin{aligned} MP_\ell = \frac{\partial f(\ell, k)}{\partial \ell} &= a \\ MP_k = \frac{\partial f(\ell, k)}{\partial k} &= b \end{aligned}$$

Vi beregner nu de afledte marginalprodukter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\ell, k)}{\partial \ell^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f(\ell, k)}{\partial k^2} &= 0 \end{aligned}$$

(d) Det marginale transformationsforhold beregnes

$$TRS = -\frac{MP_\ell}{MP_k} = -\frac{a}{b}$$

(e) Vi differentierer TRS mht. ℓ
$$\frac{\partial |TRS|}{\partial \ell} = 0$$

Hvoraf fremgår at TRS er konstant langs isokvanten for alle paramterværdier $a, b > 0$

iii. Svar: $f(\ell,k) = \min\{\ell,k\}$

(a)

$$f(t\ell,tk) = \min\{t\ell,tk\} = t\min\{\ell,k\} = tf(\ell,k)$$

Hvoraf følger at $f(\ell,k) = \min\{\ell,k\}$ udviser konstant skalafkast.

(b) Da produktionsfunktionen har konstant skalaafkast er den homogen af grad 1. Da de øvre konturmængder er konvekse (produktionsfunktionen er kvasi-konkav), følger det, at produktionsfunktionen er konkav.

(c) Marginalprodukterne er ikke veldefinerede for de to input. Kan løst defineres som

$$\begin{aligned} MP_\ell &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } \ell < k \\ 0 & \text{hvis } \ell \geq k \end{cases} \\ MP_k &= \begin{cases} 0 & \text{hvis } \ell \leq k \\ 1 & \text{hvis } \ell < k \end{cases} \end{aligned}$$

Marginalprodukterne er ikke veldefinerede. Men løst sagt ja, fra 1 til 0.

(d) TRS er ikke veldefineret men kan delvist og løst defineres som:

$$TRS = \begin{cases} -\infty & \text{hvis } \ell < k \\ 0 & \text{hvis } \ell > k \end{cases}$$

(e) Ikke veldefineret. Men løst sagt ja, fra ∞ til 0.

iv. Svar: $f(\ell,k) = \min\{\ell+2k, 2\ell+k\}$

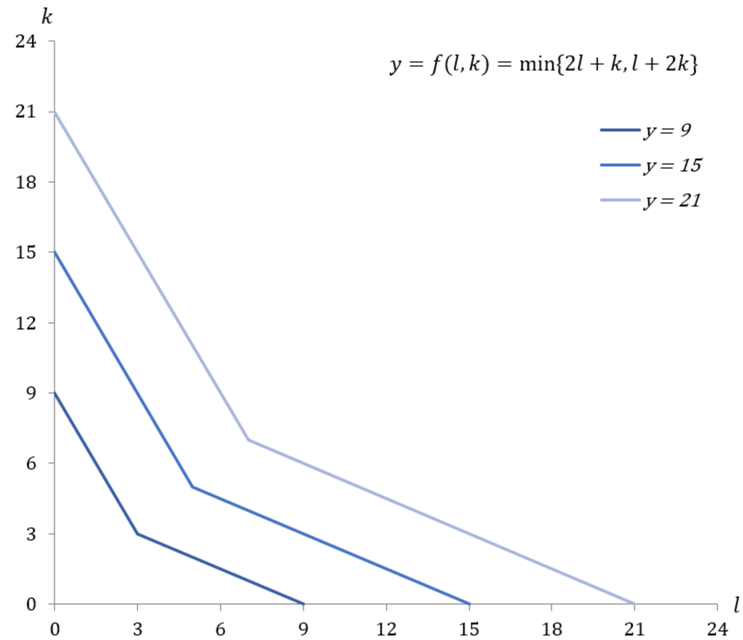
(a)

$$f(t\ell,tk) = \min\{t\ell+2tk, 2t\ell+tk\} = t\min\{\ell+2k, 2\ell+k\} = tf(\ell,k)$$

Hvoraf følger at $f(\ell,k) = \min\{\ell+2k, 2\ell+k\}$ udviser konstant skalafkast.

(b) Vi illustrerer isokvanterne ved at bemærke

$$\begin{aligned} f(\ell,k) &= \min\{\ell+2k, 2\ell+k\} \\ &= \begin{cases} \ell+2k & \text{hvis } k < \ell \\ 2\ell+k & \text{hvis } k \geq \ell \end{cases} \end{aligned}$$



Da produktionsfunktionen har konstant skalaafkast er den homogen af grad 1. Da de øvre konturmængder er konvekse, følger det at produktionsfunktionen er konkav.

(c) Marginalprodukterne er ikke veldefinerede for de to input. Kan løst defineres som

$$MP_\ell = \begin{cases} 2 & \text{hvis } \ell < k \\ 1 & \text{hvis } \ell \geq k \end{cases}$$

$$MP_k = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \ell \leq k \\ 2 & \text{hvis } \ell > k \end{cases}$$

Marginalprodukterne er ikke veldefinerede. Men løst sagt ja, fra 2 til 1.

(d) TRS er ikke veldefineret, men kan delvist og løst defineres som:

$$TRS = \begin{cases} -2 & \text{hvis } \ell < k \\ -\frac{1}{2} & \text{hvis } \ell > k \end{cases}$$

(e) Ikke veldefineret. Men løst sagt ja, fra 2 til $\frac{1}{2}$.

2 Profitmaksimering

Gennemgang: Regnes selv for produktionsfunktion i.
Gennemgås ved tavlen for produktionsfunktion ii. og iii.

Betragt de tre første typer af produktionsfunktioner fra spørgsmål 1:

i) men kun i det tilfælde hvor $a + b < 1$
ii)
iii)

Lad prissystemet være givet ved (p, w, r).
Og besvar følgende for hver af produktionsfunktionerne:

(a) Løs profitmaksimeringsproblemet for et givent prissystem (w, r, p)

(b) Udled den outputbetingede efterspørgselsfunktion efter arbejdskraft, når mængden af kapitalapparat er konstant. Giv en fortolkning.

i. Svar: $f(\ell, k) = A\ell^a k^b$ hvor $A, a, b > 0,\ a + b < 1$

(a) Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{\ell,k,y} \ \pi = py - w\ell - rk \quad \text{u.b.b.} \quad A\ell^a k^b = y \tag{2.1}$$

$$\max_{\ell,k} \ \pi = pA\ell^a k^b - w\ell - rk \tag{2.2}$$

Vi kan nu udlede førsteordensbetingelserne (FOC)

$$\frac{\partial \pi}{\partial \ell} = paA\ell^{a-1}k^b - w = 0 \Leftrightarrow paA\ell^{a-1}k^b = w \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = pbA\ell^a k^{b-1} - r = 0 \Leftrightarrow pbA\ell^a k^{b-1} = r \tag{2.4}$$

Vi deler nu (2.3) med (2.4) således at vi kan udtrykke k som en funktion af l

$$\frac{paA\ell^{a-1}k^b}{pbA\ell^a k^{b-1}} = \frac{w}{r} \Leftrightarrow$$

$$\frac{k}{\ell} = \frac{b}{a}\frac{w}{r} \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{b}{a}\frac{w}{r}\ell \tag{2.5}$$

Vi indsætter nu (2.5) i (2.3) og udleder den profitmaksimerende efterspørgsel efter ℓ

$$
\begin{aligned}
paA\ell^{a-1}k^b &= w \Leftrightarrow \\
paA\ell^{a-1}\left(\frac{b}{a}\frac{w}{r}l\right)^b &= w \Leftrightarrow \\
paA\ell^{a+b-1}\frac{b^b}{a^b}\frac{w^b}{r^b} &= w \Leftrightarrow \\
\ell^{a+b-1} &= \frac{a^b r^b w}{paAb^b w^b} \Leftrightarrow \\
\ell^{a+b-1} &= \frac{r^b w^{1-b}}{pAa^{1-b}b^b} \Leftrightarrow \\
\ell &= \left(\frac{r^b w^{1-b}}{pAa^{1-b}b^b}\right)^{\frac{1}{a+b-1}} \Leftrightarrow \\
\ell^*(w,r,p) &= \left(\frac{pAa^{1-b}b^b}{r^b w^{1-b}}\right)^{\frac{1}{1-a-b}} \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Vi indsætter nu (2.6) i (2.5) og udleder det optimale forbrug af k

$$
\begin{aligned}
k^* &= k^*(w,r,p) \\
&= \frac{b}{a}\frac{w}{r}\ell^* \\
&= \frac{b}{a}\frac{w}{r}\left(\frac{pAa^{1-b}b^b}{r^b w^{1-b}}\right)^{\frac{1}{1-a-b}} \\
&= \left(\frac{b^{1-a-b}w^{1-a-b}pAa^{1-b}b^b}{a^{1-a-b}r^{1-a-b}r^b w^{1-b}}\right)^{\frac{1}{1-a-b}} \\
&= \left(\frac{pAa^a b^{1-a}}{r^{1-a}w^a}\right)^{\frac{1}{1-a-b}} \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

(b) Det fremgår umiddelbart af produktionsfunktionen $f(\ell,k) = A\ell^a k^b = y$ at der for et fast kapitalapparat $\bar{k}$ kun er et enkelt niveau af arbejdskraft ℓ der understøtter produktionen af y

$$
\begin{aligned}
A\ell^a\bar{k}^b &= y \Leftrightarrow \\
\ell^a &= \frac{y}{A\bar{k}^b} \Leftrightarrow \\
\ell &= \left(\frac{y}{A\bar{k}^b}\right)^{\frac{1}{a}}
\end{aligned}
$$

Når kapitalapparatet er fast skal al det ekstra output komme fra øget arbejdsinput. En antagelse om at kapitalapparatet er fast kan forsvares med at det tager tider at udvide kapitalapparatet og at det derfor er konstant på kort sigt.

ii. Svar: $f(\ell, k) = a\ell + bk$ **hvor** $a, b > 0$

(a) Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{\ell,k,y} \pi = py - w\ell - rk \quad \text{u.b.b.} \quad a\ell + bk = y \tag{2.8}$$

$$\max_{\ell,k} \pi = p(a\ell + bk) - w\ell - rk \tag{2.9}$$

Vi kan nu udlede førsteordensbetingelserne (FOC)

$$\frac{\partial \pi}{\partial \ell} = pa - w = 0 \Leftrightarrow pa = w \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = pb - r = 0 \Leftrightarrow pb = r \tag{2.11}$$

Da produktionsfunktionen udviser konstant skalaafkast og marginalomkostninger er konstante fremgår umiddelbart at efterspørgselsfunktionerne kun er veldefinerede for henholdsvis $pa \leq w$ og $pb \leq r$.

$$\begin{aligned} \ell^*(w, r, p) &\in \begin{cases} [0, \infty[& \text{hvis } pa = w \\ \{0\} & \text{hvis } pa < w \end{cases} \\ k^*(w, r, p) &\in \begin{cases} [0, \infty[& \text{hvis } pb = r \\ \{0\} & \text{hvis } pa < r \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Det fremgår umiddelbart af produktionsfunktionen $f\ell, k) = a\ell + bk = x$ at der for et fast kapitalapparat $\bar{k}$ kun er et enkelt niveau af arbejdskraft l der understøtter produktionen af x

$$\begin{aligned} a\ell + b\bar{k} &= y \Leftrightarrow \\ a\ell &= y - b\bar{k} \Leftrightarrow \\ \ell &= \frac{y - b\bar{k}}{a} \end{aligned}$$

ii. Svar: $f(\ell, k) = \min\{\ell, k\}$

(a) Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{\ell,k,y} \pi = py - w\ell - rk \quad \text{u.b.b.} \quad \min\{\ell, k\} = y \tag{2.12}$$

$$\max_{\ell,k} \pi = p\min\{\ell, k\} - w\ell - rk \tag{2.13}$$

Det er oplagt profitmaksimerende at sætte $\ell = k$

$$\begin{aligned} \max_{\ell} \pi &= p\min\{\ell, \ell\} - w\ell - r\ell \\ \max_{\ell} \pi &= p\ell - w\ell - r\ell \\ \max_{\ell} \pi &= \ell(p - w - r) \end{aligned}$$

Da produktionsfunktionen udviser konstant skalaafkast og marginalomkostninger er konstante fremgår umiddelbart at efterspørgselsfunktionerne kun er veldefinerede for henholdsvis $p \leq w + r$.

$$(\ell^*(w, r, p), k^*(w, r, p)) \in \begin{cases} \left\{(\ell, k) \in \mathbb{R}^2_+ \mid \ell = k\right\} & \text{hvis } p = w + r \\ \{(0, 0)\} & \text{hvis } p < w + r \end{cases}$$

(b) Det er oplagt omkostningsminimerende at sætte $\ell = k$. For et fast kapitalapparat $\bar{k}$ er det omkostningsminimerende niveau af arbejdskraft l der understøtter produktionen af x derfor givet ved

$$\begin{aligned} \min\{\bar{k}, \bar{k}\} &= y \Leftrightarrow \\ \bar{k} &= y \Rightarrow \\ \ell(\bar{k}, x) &= y \end{aligned}$$

3 Forskellen på kort og langt sigt

Gennemgang: Regn selv.

Betragt chokoladefabrikken Mums, der bruger arbejdskraft og kapital som inputs og har produktionsfunktionen $y = f(\ell, k) = \ell^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}}$, hvor y er output af chokolade, der sælges til prisen p. Arbejdskraft koster w (løn) og kapital koster r (lejepris).

(a) Udled virksomhedens ønskede udbud af chokolade samt dens efterspørgsel efter arbejdskraft og kapital som funktioner af prissystemet (p, w, r)

Svar: Profitmaksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{\ell,k,y} \pi = py - w\ell - rk \quad \text{u.b.b.} \quad \ell^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}} = y \tag{3.1}$$

$$\max_{\ell,k} \pi = p\ell^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}} - w\ell - rk \tag{3.2}$$

Vi kan nu udlede førsteordensbetingelserne (FOC)

$$\frac{\partial \pi}{\partial \ell} = \frac{1}{3}p\ell^{-\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{3}} - w = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}p\ell^{-\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{3}} = w \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = \frac{1}{3}p\ell^{\frac{1}{3}}k^{-\frac{2}{3}} - r = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}p\ell^{\frac{1}{3}}k^{-\frac{2}{3}} = r \tag{3.4}$$

Vi deler nu (3.3) med (3.4) således at vi kan udtrykke k som en funktion af l

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{3}p\ell^{-\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}p\ell^{\frac{1}{3}}k^{-\frac{2}{3}}} &= \frac{w}{r} \Leftrightarrow \\
\frac{k}{\ell} &= \frac{w}{r} \Leftrightarrow \\
k &= \frac{w}{r}\ell
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Vi indsætter nu (3.5) i (3.3) og udleder den profitmaksimerende efterspørgsel efter ℓ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}p\ell^{-\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{3}} &= w \Leftrightarrow \\
\frac{1}{3}p\ell^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{w}{r}\ell\right)^{\frac{1}{3}} &= w \Leftrightarrow \\
\frac{1}{3}p\ell^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{3}} &= w \Leftrightarrow \\
\frac{1}{3^3}p^3\ell^{-1}\frac{w}{r} &= w^3 \Leftrightarrow \\
\ell^{-1} &= \frac{3^3rw^2}{p^3} \Leftrightarrow \\
\ell &= \frac{p^3}{3^3w^2r} \equiv \ell^*(p,w,r)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Vi indsætter nu (3.6) i (3.5) og udleder det optimale forbrug af k

$$\begin{aligned}
k &= \frac{w}{r}\ell^*(p,w,r) \\
&= \frac{w}{r}\frac{p^3}{3^3rw^2} \\
&= \frac{p^3}{3^3wr^2} \equiv k^*(p,w,r)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Dvs.

$$\begin{aligned}
y^*(p,w,r) &= f(k^*(p,w,r), \ell^*(p,w,r)) \qquad (3.8) \\
&= \left(\frac{p^3}{3^3wr^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p^3}{3^3w^2r}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{p^2}{9wr}
\end{aligned}$$

Afleveringsopgave

Betragt chokoladefabrikken Mums fra opgave 3.

(a) Betragt et udgangspunkt, hvor vi har $p^* = 6$, $w^* = 1$ og $r^* = 1$. Vi antager, at dette har været tilfældet i længere tid, sådan at Mums har kunnet tilpasse sit kapitalapparat. Hvor stort er virksomhedens kapitalapparat, og hvor stor er beskæftigelsen? Hvor meget chokolade produceres, og hvor stor er profitten?

Svar: Vi benytter løsningerne fra opgave 3 og får

$$\begin{aligned}
\ell^*(6,1,1) &= \frac{6^3}{3^3 \cdot 1^2 \cdot 1} = 2^3 = 8 \\
k^*(6,1,1) &= \frac{6^3}{3^3 \cdot 1 \cdot 1^2} = 2^3 = 8 \\
y^*(6,1,1) &= \frac{6^2}{9} = 4 \\
\pi^*(6,1,1) &= py^* - w\ell^* - rk^* \\
&= 6 \cdot 4 - 1 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = 24 - 16 = 8
\end{aligned}$$

Bemærk, at da både arbejdskraft og kapital koster det samme, og har samme eksponenter i produktionsfunktionen, bruges der lige meget af begge produktionsfaktorer.

(b) Nu fordobles lønnen, til $w = 2$. Hvad sker der med beskæftigelse, kapitalapparat, produktion og profit på kort sigt – og hvad på langt sigt?

Svar: *På kort sigt er profitmaksimeringsproblemet*

$$\max_{\ell} p\ell^{\frac{1}{3}}\overline{k}^{\frac{1}{3}} - w\ell - r\overline{k}$$

Fra førsteordensbetingelsen for arbejdskraft fås

$$p\frac{1}{3}\ell^{-\frac{2}{3}}\overline{k}^{\frac{1}{3}} - w = 0 \Leftrightarrow \ell^*_{\overline{k}}(p,w,\overline{k}) = \left(\frac{p}{3w}\right)^{\frac{3}{2}} \overline{k}^{\frac{1}{2}}$$

Det giver også produktionen

$$y^*_{\overline{k}}(p,w,\overline{k}) = \left(\left(\frac{p}{3w}\right)^{\frac{3}{2}} \overline{k}^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \overline{k}^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{p\overline{k}}{3w}}$$

og profitten

$$\pi^*_{\overline{k}}(p,w,\overline{k},r) = py^*_{\overline{k}} - w\ell^*_{\overline{k}} - r\overline{k}$$

På *kort sigt* har vi et fald i produktion, beskæftigelse og profit

$$
\begin{aligned}
y^*_{\bar{k}}(6,2,8) &= \sqrt{\frac{6\cdot 8}{3\cdot 2}} = \sqrt{8} \approx 2.8\\
\ell^*_{\bar{k}}(6,2,8) &= \left(\frac{6}{3\cdot 2}\right)^{\frac{3}{2}} 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} \approx 2.8\\
\pi^*_{\bar{k}}(6,2,8,1) &= 6\cdot\sqrt{8} - 2\cdot\sqrt{8} - 1\cdot 8 = 4\sqrt{8} - 8 \approx 3.3
\end{aligned}
$$

På *langt sigt* har vi et yderligere fald i både produktion og beskæftigelse, men et mindre fald i profitten

$$
\begin{aligned}
\ell^*(6,2,1) &= \frac{6^3}{3^3\cdot 2^2\cdot 1} = \frac{2^3}{2^2} = 2\\
k^*(6,2,1) &= \frac{6^3}{3^3\cdot 2\cdot 1^2} = 2^2 = 4\\
y^*(6,2,1) &= \frac{6^2}{9\cdot 2\cdot 1} = 2\\
\pi^*(6,2,1) &= 6\cdot 2 - 2\cdot 2 - 1\cdot 4 = 12 - 8 = 4
\end{aligned}
$$

Bemærk, at produktionen nu er blevet relativt mere *kapitalintensiv.*

(c) Antag, at lønnen er uændret, $w^* = 1$, mens kapitalomkostningen fordobles til $r = 2$. Hvad sker der med beskæftigelse, kapitalapparat, produktion og profit på kort sigt – og hvad på langt sigt?

Svar: På *kort sigt* har vi uændret produktion og beskæftigelse, men profitten falder til 0 pga. den dyrere kapital:

$$
\begin{aligned}
y^*_{\bar{k}}(6,1,8) &= \sqrt{\frac{6\cdot 8}{3\cdot 1}} = \sqrt{16} = 4\\
\ell^*_{\bar{k}}(6,1,8) &= \left(\frac{6}{3\cdot 1}\right)^{\frac{3}{2}} 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}8^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}}8^{\frac{1}{2}} = 8\\
\pi^*_{\bar{k}}(6,2,8,1) &= 6\cdot 4 - 1\cdot 8 - 2\cdot 8 = 0
\end{aligned}
$$

På *langt sigt* har vi det samme fald i produktion, beskæftigelse og profit, som i opgave (b), men med en mere *arbejdskraftintensiv* produktion, da det nu er den billige produktionsfaktor:

$$
\begin{aligned}
\ell^*(6,1,2) &= \frac{6^3}{3^3\cdot 1^2\cdot 2} = \frac{3^3\cdot 2^3}{3^3\cdot 2} = 2^2 = 4\\
k^*(6,1,2) &= \frac{6^3}{3^3\cdot 1\cdot 2^2} = \frac{3^3\cdot 2^3}{3^3\cdot 2^2} = 2 = 2\\
y^*(6,1,2) &= \frac{6^2}{9\cdot 1\cdot 2} = 2\\
\pi^*(6,1,2) &= 6\cdot 2 - 1\cdot 4 - 2\cdot 2 = 12 - 8 = 4
\end{aligned}
$$

(d) Antag, at løn og kapitalomkostning er uændret, mens chokoladeprisen fordobles til $p = 12$. Hvad sker der med beskæftigelse, kapitalapparat, produktion og profit på kort sigt – og hvad på langt sigt?

Svar: På kort sigt stiger produktion, beskæftigelse og profit

$$
\begin{aligned}
y^*_{\bar{k}}(12,1,8) &= \sqrt{\frac{12 \cdot 8}{3}} = \sqrt{32} \approx 5.7 \\
\ell^*_{\bar{k}}(12,1,8) &= \left(\frac{12}{3 \cdot 1}\right)^{\frac{3}{2}} 8^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{2}} 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} = 8^{\frac{3}{2}} \approx 22.6 \\
\pi^*_{\bar{k}}(12,1,8) &= 12 \cdot \sqrt{32} - 1 \cdot 8^{\frac{3}{2}} - 1 \cdot 8 = 37.3
\end{aligned}
$$

På langt sigt stiger produktion, beskæftigelse og profit ydermere

$$
\begin{aligned}
\ell^*(12,1,1) &= \frac{12^3}{3^3 \cdot 1^2 \cdot 1} = 4^3 = 64 \\
k^*(12,1,1) &= \frac{12^3}{3^3 \cdot 1 \cdot 1^2} = 4^3 = 64 \\
y^*(12,1,1) &= \frac{12^2}{9 \cdot 1 \cdot 1} = 16 \\
\pi^*(12,1,1) &= 12 \cdot 16 - 1 \cdot 64 - 1 \cdot 64 = 192 - 128 = 64
\end{aligned}
$$

Bemærk, at der bruges endnu mere arbejdskraft på langt sigt end på kort sigt. De to produktionsfaktorer er derfor relativt komplementære.

Ugeseddel 10: Omkostningsminimering

– med svar –

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber

1. Omkostningsfunktion
2. Betinget faktorefterspørgsel
3. Gennemsnitlige omkostninger
4. Marginale omkostninger
5. Faste og kvasi-faste omkostninger
6. Sunkne omkostninger
7. Substituerbarhed

Færdigheder

1. Løse profitmaksimeringsproblem på kort sigt indirekte gennem omkostningsminimering
2. Løse profitmaksimeringsproblem på langt sigt indirekte gennem omkostningsminimering
3. Analysere effekten af prisændringer på kort og langt sigt
4. Analysere effekten af faktorprisændringer på kort og langt sigt

Checkopgave

Betragt en virksomhed med produktionsfunktionen $f(\ell, k)$, hvor ℓ er arbejdskraft (løn $w > 0$) og k er kapital (lejepris $r > 0$). Output, y, kan sælges til prisen $p > 0$. Virksomheden er pristager på alle markeder.

(a) Opstil virksomhedens omkostningsminimeringsproblem
Svar:
$$C(y, w, r) = \min_{\ell,k} w\ell + rk \text{ u.b.b. } f(\ell, k) = y$$

(b) Opstil virksomhedens profitmaksimeringsproblem indirekte ud fra omkostningsfunktionen?
Svar:
$$\pi(p) = \max_{y} py - C(y)$$

1 Omkostningsminimering

Gennemgang: Regnes selve.

Betragt produktionsfunktionen

$$f(\ell, k) = \sqrt{\min\{\ell, k\}}$$

Lad prissystemet være givet ved (p, w, r).

(a) Opstil virksomhedens omkostningsminimeringsproblem

Svar:

$$C(y, w, r) = \min_{\ell,k} w\ell + rk, \text{ u.b.b. } f(\ell, k) = y$$

(b) Løs virksomhedens omkostningsminimeringsproblem

Svar: Vi har oplagt at $\ell = k$, da virksomheden ellers køber input som ikke øger output. Videre får vi at for at producere x kræves $\ell = k = y^2$. Heraf følger

$$\begin{aligned} \ell_b^*(y, w, r) &= y^2 \\ k_b^*(y, w, r) &= y^2 \\ C(y, w, r) &= wx^2 + ry^2 = (w + r)y^2 \end{aligned}$$

(c) Er gennemsnitsomkostningerne faldende, konstante eller stigende?
Hvad er sammenhængen med skalaafkastet?

Svar: *Gennemsnitsomkostningerne er stigende* i y

$$AC(y) = \frac{C(y)}{y} = (w + r)y$$

Det skyldes, at der er *faldende skalaafkast*

$$f(\lambda\ell, \lambda k) = \sqrt{\min\{\lambda\ell, \lambda k\}} = \lambda^{\frac{1}{2}} f(\ell, k) < \lambda f(\ell, k)$$

(d) Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem indirekte vha. omkostningsminimeringsfunktionen

Svar: Virksomhedens profitmaksimeringsproblem bliver

$$\max_x \Pi(p, w, r, y) = \max_x py - C(y, w, r) = \max_x py - (w + r)y^2$$

Det giver første ordensbetingelsen

$$p - \frac{\partial C(y, w, r)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow p = 2(w + r)y \Leftrightarrow y^*(p, w, r) = \frac{p}{2(w + r)}$$

med

$$\ell(y,w,r) = \ell_b(y^*,w,r) = \left(\frac{p}{2(w+r)}\right)^2$$
$$k(y,w,r) = k_b(y^*,w,r) = \left(\frac{p}{2(w+r)}\right)^2$$

Bemærk, at profitten er positiv da

$$\pi(p,w,r,y^*) = py - (w+r)y^2 = \frac{p^2}{2(w+r)} - \frac{p^2}{4(w+r)} = \frac{p^2}{4(w+r)}$$

Bemærk yderligere, at vi har fundet et maksimum da orden ordensbetingelsen er opfyldt

$$\frac{\partial^2 \pi(p,w,r,y^*)}{\partial y^2} = -2(w+r) < 0$$

Tilsvarende: Vi har at marginalomkostningerne er stigende i y^*da

$$\frac{\partial C(y,w,r)}{\partial y} = 2(w+r) > 0$$

2 Forskellen på kort og langt sigt

Gennemgang: Regnes selv.

Betragt igen chokoladefabrikken Mums, der bruger arbejdskraft og kapital som inputs og har produktionsfunktionen $y = f(\ell,k) = \ell^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}}$, hvor y er output af chokolade, der sælges til prisen p. Arbejdskraft koster w (løn) og kapital koster r (lejepris).

(a) Find ud fra omkostningsminimering for en given outputmængde y, udtryk for virksomhedens betingede efterspørgsel efter arbejdskraft og kapital som funktioner af (y,w,r)

Svar: Minimeringsproblemet opstilles

$$\min_{\ell,k} \; w\ell + rk \quad \text{u.b.b.} \quad \ell^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}} = y \tag{2.1}$$

Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(\ell,k,\lambda) = w\ell + rk + \lambda[y - \ell^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}}] \tag{2.2}$$

og udlede førsteordensbetingelserne (FOC)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} = w - \frac{1}{3}\lambda\ell^{-\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\lambda\ell^{-\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{3}} = w \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = r - \frac{1}{3}\lambda\ell^{\frac{1}{3}}k^{-\frac{2}{3}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\lambda\ell^{\frac{1}{3}}k^{-\frac{2}{3}} = r \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x - \ell^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow \ell^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}} = y \tag{2.5}$$

Vi deler nu (2.3) med (2.4) således at λ forsvinder, og vi kan udtrykke k som en funktion af ℓ

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{3}\lambda\ell^{-\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}\lambda\ell^{\frac{1}{3}}k^{-\frac{2}{3}}} &= \frac{w}{r} \Leftrightarrow \\
\frac{k}{\ell} &= \frac{w}{r} \Leftrightarrow \\
k &= \frac{w}{r}\ell \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (2.6) i (2.5) og udleder den omkostningsminimerende efterspørgsel efter ℓ

$$\begin{aligned}
\ell^{\frac{1}{3}}(\frac{w}{r}\ell)^{\frac{1}{3}} &= x \Leftrightarrow \\
\ell^2\frac{w}{r} &= y^3 \Leftrightarrow \\
\ell &= \frac{r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}} \equiv \ell_b^*(y,w,r) \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (2.7) i (2.6) og udleder den omkostningsminimerende efterspørgsel efter ℓ

$$\begin{aligned}
k &= \frac{w}{r}\frac{r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{w^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \equiv k_b^*(y,w,r) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

(b) Find ud fra a) et udtryk for virksomhedens marginale omkostninger og derefter den (langsigtede) udbudskurve, dvs. det ønskede udbud som funktion af prissystemet (p,w,r)

Svar: Vi udleder virksomhedens omkostningsfunktion $C(y,w,r)$

$$\begin{aligned}
C(y,w,r) &= w\ell^*(w,r,y) + rk^*(w,r,y) \\
&= w\frac{r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}} + r\frac{w^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \\
&= w^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + w^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} \\
&= 2w^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Fra hvilken vi kan beregne virksomhedens marginale omkostninger $MC(y)$

$$MC(y) = \frac{\partial C(y,w,r)}{\partial y} = 3w^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

Vi opstiller nu virksomhedens optimeringsproblem som funktion af udbuddet

$$\max_{y} \ \pi = py - C(y)$$

Fra hvilken vi beregner førsteordensbetingelsen (FOC)

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi}{dy} &= 0 \Leftrightarrow \\
p - MC(y,w,r) &= 0 \Leftrightarrow \\
p &= MC(y,w,r) \Leftrightarrow \\
p &= 3w^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\
y^{\frac{1}{2}} &= \frac{p}{3w^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}} \\
y &= \frac{p^2}{9wr} \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Virksomheden vil på langt sigt kun producere såfremt profitten er svagt positiv dvs. $\pi \geq 0 \Leftrightarrow py - C(y) \geq 0 \Leftrightarrow p \geq \frac{C(y)}{x} = AC(y)$. Da $p = MC(y)$ er udbuddet altså de produktionsniveauer givet ved (2.9) der gør at $MC(y) \geq AC(y)$ er overholdt. Vi beregner nu $AC(y)$

$$AC(y) = \frac{C(y)}{y} = \frac{2w^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{y} = 2w^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

Heraf fremgår det dog umiddelbart at $MC(x) \geq AC(x)$ for alle x. Virksomhedens udbud er derfor givet ved hele $x = \frac{p^2}{9wr}$ og dens udbudskurve givet ved det inverse udbud $p = 3\sqrt{wry}$.

(c) Find et udtryk for virksomhedens efterspørgsel efter arbejdskraft og kapital ved brug af virksomhedens udbudskurve

Svar: Vi indsætter (2.9) i de betingede inputefterspørgselsfunktioner (2.7) og (2.8)

$$\begin{aligned}
\ell^*(p,w,r) &= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{p^2}{9wr}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}}\frac{p^3}{3^3w^{\frac{3}{2}}r^{\frac{3}{2}}} = \frac{p^3}{3^3w^2r} \\
k^*(p,w,r) &= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{p^2}{9wr}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{w^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{p^3}{3^3w^{\frac{3}{2}}r^{\frac{3}{2}}} = \frac{p^3}{3^3wr^2}
\end{aligned}$$

(d) Betragt nu en verden, hvor virksomheden på kort sigt er låst fast til en bestemt mængde kapital, $\bar{k}$. Find et udtryk for virksomhedens de kortsigtede økonomiske omkostninger, når den skal producere mængden y billigst muligt? Identificer ud fra de kortsigtede marginalomkostninger dens ønskede udbud af chokolade samt efterspørgsel efter arbejdskraft, som funktioner af $(w, r, p, \bar{k})$

Svar: Det fremgår umiddelbart af produktionsfunktionen $f(\ell,k) = \ell^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}} = y$ at der for et fast kapitalapparat $\bar{k}$ kun er et enkelt niveau af arbejdskraft ℓ der understøtter en produktion på x

$$\begin{aligned}
\ell^{\frac{1}{3}}\bar{k}^{\frac{1}{3}} &= y \Leftrightarrow \\
\ell^{\frac{1}{3}} &= \frac{y}{\bar{k}^{\frac{1}{3}}} \Leftrightarrow \\
\ell_b^{SR*}(w,\bar{k}) &= \frac{y^3}{\bar{k}}
\end{aligned}$$

Virksomhedens kortsigtede variable omkostninger er derfor givet ved

$$C^{SR}(y) = w\frac{y^3}{\bar{k}} = \frac{wy^3}{\bar{k}}$$

Virksomhedens kortsigtede marginalomkostninger er derfor givet ved

$$MC^{SR}(y) = \frac{dC_{SR}(x)}{dy} = \frac{3wy^2}{\bar{k}}$$

Virksomhedens førsteordensbetingelse på kort sigt er givet ved $MC^{SR}(y) = p$. Vi benytter nu dette til at udlede virksomhedens udbud på kort sigt

$$\begin{aligned}
MC^{SR}(y) &= p \Leftrightarrow \\
\frac{3wy^2}{\bar{k}} &= p \\
x &= \sqrt{\frac{p\bar{k}}{3w}} \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Virksomheden vil på kort sigt kun producere såfremt dækningsbidraget er svagt positivt dvs. $py - C^{SR}(y) \geq 0 \Leftrightarrow py \geq C^{SR}(y) \Leftrightarrow p \geq \frac{C^{SR}(y)}{y} = AC^{SR}(y)$. Da $p = MC^{SR}(y)$ er det kortsigtede udbud altså de produktionsniveauer givet ved (2.10) der gør at $MC^{SR}(y) \geq AC^{SR}(y)$ er overholdt. Vi beregner nu $AC^{SR}(y)$

$$AC^{SR}(y) = \frac{C^{SR}(y)}{y} = \frac{\frac{wy^3}{\bar{k}}}{y} = \frac{wy^2}{\bar{k}}$$

Heraf fremgår det dog umiddelbart at $MC^{SR}(y) \geq AC^{SR}(y)$ for alle y. Virksomhedens kortsigtede udbud er derfor givet ved hele $y^*_{\bar{k}}(p,w,\bar{k}) = \sqrt{\frac{p\bar{k}}{3w}}$ og dens udbudskurve givet ved det inverse udbud $p^*(y,w,\bar{k}) = \frac{3wy^2}{\bar{k}}$.

3 Quasi-faste omkostninger

Gennemgang: Regnes selv.

Betragt en virksomhed der producerer et output ved hjælp af to inputs, arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$y = f(\ell, k) = (\min\{\ell, 2k\})^{\frac{1}{2}},$$

hvor y er mængden af output, ℓ er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital. Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogent givne.

Det kan vises, at virksomhedens omkostningsfunktion bliver

$$C(y, w, r) = \left(w + \frac{r}{2}\right) y^2$$

(a) Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem indirekte ved at bruge omkostningsfunktionen og find profitten.

Svar: Virksomhedens profitmaksimeringsproblem bliver

$$\Pi^\star(p, w, r) = \max_y py - C(y, w, r) = \max_y py - \left(w + \frac{r}{2}\right) y^2$$

Det giver *førsteordensbetingelsen* (FOC)

$$p - \frac{\partial C(y, w, r)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow p = (2w + r)\, y \Leftrightarrow y^\star(p, w, r) = \frac{\frac{1}{2}p}{w + \frac{r}{2}}$$

Bemærk, at *profitten er positiv* da

$$\Pi^\star(p, w, r) = py^\star - \left(w + \frac{r}{2}\right)(x^\star)^2 = \frac{\frac{1}{2}p^2}{w + \frac{r}{2}} - \frac{\frac{1}{4}p^2}{w + \frac{r}{2}} = \frac{\frac{1}{4}p^2}{w + \frac{1}{2}r} > 0$$

Bemærk yderligere, at vi har fundet et maksimum, da *andenordensbetingelsen* (SOC) altid er opfyldt

$$\frac{\partial^2[py - C(x, w, r)]}{\partial y^2} = -(2w + r) < 0$$

Antag, at virksomheden yderligere også har langsigtede faste omkostninger $QFC > 0$, som skal betales når produktionen er positiv.

(b) Hvad er det maksimale niveau af QFC, hvor virksomheden ikke vil lukke ned givet p, w og r?

Svar: De quasi-faste omkostninger skal nu trækkes fra i profitten, men påvirker ikke virksomhedens valg af faktorinput. Virksomheden vil ikke lukke ned så længe profitten ikke er negativ, dvs.

$$\Pi = \frac{\frac{1}{4}p^2}{w + \frac{1}{2}r} - QFC \geq 0 \Leftrightarrow QFC \leq \frac{\frac{1}{4}p^2}{w + \frac{1}{2}r}$$

4 Omkostningskurver

$$C(y) = 10y^2 + 1000$$

(a) Find virksomhedens udbudskurve og illustrere den grafisk sammen med $MC(y)$ og $AC(y)$
Svar: Vi løser først virksomhedens indirekte profitmaksimeringsproblem

$$\max_y py - C(y) \Rightarrow p = MC(y) \leftrightarrow p = 20y \Leftrightarrow y = p/20$$

Dernæst tjekker vi hvornår, at profitten er positiv

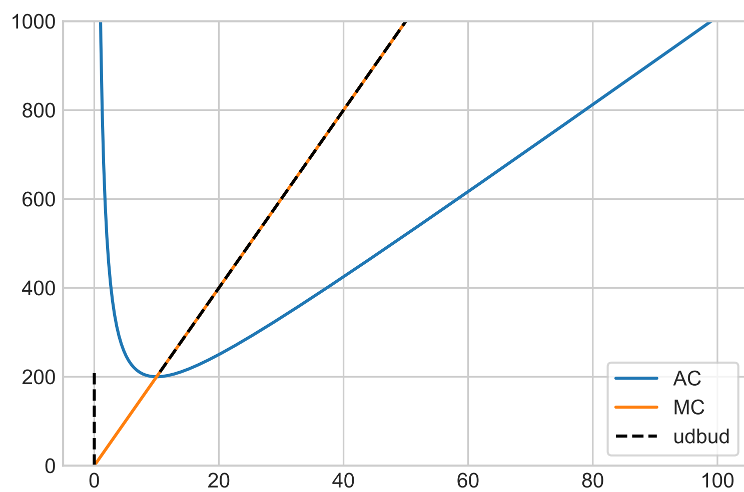
$$py - C(y^2) > 0 \Leftrightarrow p^2/20 - 10 \cdot p^2/20^2 - 1000 > 0 \Leftrightarrow 10p^2 > 4 \cdot 10^5 \Leftrightarrow p > \sqrt{4 \cdot 10^4} = 200$$

Samlet giver de udbudsfunktionen

$$y^\star(p) = \begin{cases} 0 & \text{for } p \in [0, 200) \\ p/20 & \text{for } p \in [200, \infty) \end{cases}$$

Se illustrationen i Figur 1.

Figur 1: Illustration af omkostningskurver og udbudskurve



Afleveringsopgaven

Betragt følgende Cobb-Douglas produktionsfunktion

$$f(\ell, k) = \ell^a k^b \quad \text{for } a > 0, b > 0$$

Lad prissystemet være givet ved (p, w, r).

(a) Vis at løsningen til omkostningsminimeringsproblemet kan skrives

$$C(y, w, r) = \chi \cdot y^{\frac{1}{a+b}}$$

hvor χ er en konstant, der vil afhænge af w, r, a og b.

Svar: Minimeringsproblemet opstilles

$$\min_{\ell,k} \; w\ell + rk \quad \text{u.b.b.} \quad \ell^a k^b = x \tag{4.1}$$

Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(\ell, k, \lambda) = wl + rk + \lambda[x - A\ell^a k^b] \tag{4.2}$$

og udlede førsteordensbetingelserne (FOC)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} = w - \lambda a \ell^{a-1} k^b = 0 \Leftrightarrow \lambda a \ell^{a-1} k^b = w \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = r - \lambda b \ell^a k^{b-1} = 0 \Leftrightarrow \lambda b \ell^a k^{b-1} = r \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x - l^a k^b = 0 \Leftrightarrow l^a k^b = y \tag{4.5}$$

Vi deler nu (4.3) med (4.4) således at λ forsvinder, og vi kan udtrykke k som en funktion af ℓ

$$\begin{aligned} \frac{\lambda a \ell^{a-1} k^b}{\lambda b \ell^a k^{b-1}} &= \frac{w}{r} \Leftrightarrow \\ \frac{a}{b} \frac{k}{\ell} &= \frac{w}{r} \Leftrightarrow \\ k &= \frac{b}{a} \frac{w}{r} \ell \end{aligned} \tag{4.6}$$

Vi indsætter nu (4.6) i (4.5) og udleder den omkostningsminimerende efterspørgsel efter ℓ

$$\begin{aligned}
\ell^a k^b &= y \Leftrightarrow \\
\ell^a \left(\frac{b}{a} \frac{w}{r} \ell \right)^b &= y \Leftrightarrow \\
\ell^{a+b} \left(\frac{b}{a} \frac{w}{r} \right)^b &= y \Leftrightarrow \\
\ell^{a+b} &= \left(\frac{b}{a} \frac{w}{r} \right)^{-b} x \\
\ell_b^*(y, w, r) &= y^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{ar}{bw} \right)^{\frac{b}{a+b}} \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (4.7) i (4.6) og udleder den omkostningsminimerende efterspørgsel efter k

$$\begin{aligned}
k_b^*(w, r, y) &= \frac{b}{a} \frac{w}{r} y^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{ar}{bw} \right)^{\frac{b}{a+b}} \\
&= \left(\frac{ar}{bw} \right)^{-1} y^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{ar}{bw} \right)^{\frac{b}{a+b}} \\
&= y^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{ar}{bw} \right)^{-\frac{a}{a+b}} \\
&= y^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{bw}{ar} \right)^{\frac{a}{a+b}}
\end{aligned}$$

Omkostningsfunktionen er et givet ved

$$\begin{aligned}
C(y, w, r) &= w\ell_b^*(y, w, r) + rk_b^*(w, r, y) \\
&= wy^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{ar}{bw} \right)^{\frac{a}{a+b}} + ry^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{bw}{ar} \right)^{\frac{a}{a+b}} \\
&= \chi y^{\frac{1}{a+b}}
\end{aligned}$$

hvor

$$\chi \equiv w \left(\frac{ar}{bw} \right)^{\frac{b}{a+b}} + r \left(\frac{bw}{ar} \right)^{\frac{a}{a+b}}$$

(b) Løs profitmaksimeringsproblemet indirekte vha. omkostningsfunktionen

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_y py - C(y, w, r)$$

Vi kan nu udlede førsteordensbetingelsen (FOC)

$$p - MC(y,w,r) = 0 \Leftrightarrow MC(y,w,r) = p \tag{4.8}$$

Vi beregner derfor virksomhedens marginale omkostninger

$$MC(y) = \frac{\partial C(y,w,r)}{\partial y} = \frac{\chi}{a+b} y^{\frac{1-(a+b)}{a+b}}$$

Og ved at bruge førsteordensbetingelsen 4.8 fås virksomhedens profitmaksimerende produktion

$$\begin{aligned}
\frac{\chi}{a+b} y^{\frac{1}{a+b}-1} &= p \Leftrightarrow \\
y^{\frac{1-(a+b)}{a+b}} &= \frac{p(a+b)}{\chi} \Leftrightarrow \\
y^*(p,w,r) &= \left(\frac{p(a+b)}{\chi}\right)^{\frac{a+b}{1-(a+b)}}
\end{aligned}$$

(c) Er profitfunktionen (strengt) konkav? Er vi sikre på at have fundet et unikt maksimum? Hvilken betingelsen på $a+b$ skal gælde for at vi er sikre på at have fundet et maksimum?

Svar: Nej. Vi skal derfor sikre os at profitfunktionen er globalt strengt konkav. Vi beregner derfor andenordensbetingelsen

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial MC(y)}{\partial y} = -\frac{1-(a+b)}{a+b} \underbrace{\frac{\chi}{a+b} y^{\frac{1-2(a+b)}{a+b}}}_{>0} < 0$$

Hvoraf det fremgår at den bestemte produktion er et maksimum hvis og kun hvis

$$-\frac{1-(a+b)}{a+b} < 0 \Leftrightarrow (a+b) - 1 < 0 \Leftrightarrow a+b < 1$$

Bemærk at denne betingelse er ensbetydende med at funktionen skal udvise aftagende skalaafkast.

Ugeseddel 11: Industriudbud

– med svar –

Nøglebegreber og -færdigheder

Begreber

1. Markedsefterspørgsel
2. Markedsudbudskurve (kort og langt sigt)
3. Partiel ligevægt
4. Ligevægtspris
5. Minimale gennemsnitsomkostninger
6. Oprette og lukke virksomheder (entry/exit)
7. Knaphedsrente (economic rent)
8. Kunstig knaphedsrente
9. Knaphedsrentejagt (rent seeking)

Færdigheder

1. Finde markedsefterspørgselskurven
2. Finde markedsudbudskurven på kort sigt
3. Finde den minimale gennemsnitsomkostning
4. Finde den langsigtede ligevægtspris
5. Finde antallet af virksomheder i den langsigtede ligevægt
6. Finde forbruger- og producentoverskud

Checkopgave

Betragt et marked hvor alle virksomhederne har omkostningsfunktionen $C(y)$, hvor y er produktionsniveauet.

(a) Forklar hvordan man finder det produktionsniveau som giver de minimale gennemsnitlige omkostninger
Svar: Udregn $AC(y)$ og find minimum ved at løse FOC

$$\frac{dAC(y)}{dy} = 0$$

Tjek at SOC for minimum er overholdt

$$\frac{d^2AC(y)}{dy^2} \geq 0$$

(b) Forklar hvorfor alle virksomheder på langt sigt vil have det produktionsniveau som giver de minimale gennemsnitlige omkostninger
Svar:

i. Husk at profitten kan skrives: $\pi = (p - AC(y))y$.

ii. Vi kan udelukke $p < \min_y AC(y)$, da alle virksomheder så ville have negativ profit $\pi < 0$. Alle virksomheder ville gå ud af markedet (»exit«).

iii. Hvis $p > \min_y AC(y)$ så kan en virksomhed tjene positiv profit ved at producere

$$\underline{y} = \arg\min_y AC(y)$$

da $\pi = p\underline{y} - AC(\underline{y}) = (p - AC(\underline{y}))\underline{y} > 0$. Nye virksomheder vil derfor træde ind på markedet (»entry«). Det vil føre til et højere samlet produktionsniveau, og derfor lavere pris.

1 Partiel ligevægt

Gennemgang: Regn selv.

Antag, at alle virksomheder på et marked har en produktionsteknologi, der er beskrevet ved produktionsfunktionen $f(\ell, k) = (\min\{\ell, 4k\})^{\frac{1}{2}}$. Prisen på arbejdskraft, lønnen, er $w = 2$, prisen på kapital er $r = 4$, og hver virksomhed har kvasi-faste omkostninger på 300, som kun kan undgås ved på langt sigt at lukke virksomheden. Det oplyses yderligere, at alle markeder er karakteriseret ved fuldkommen konkurrence.

(a) Vis at den langsigtede gennemsnitlige omkostningsfunktion ved positiv produktion for hver virksomhed er

$$AC(y) = 3y + \frac{300}{y}$$

Svar: Minimeringsproblemet opstilles:

$$\min_{\ell,k} \; w\ell + rk + \mathbf{1}_{\{y>0\}}QFC \quad \text{u.b.b.} \quad (\min\{\ell, 4k\})^{\frac{1}{2}} = y \tag{1.1}$$

Det er oplagt omkostningsminimerende at sætte $\ell = 4k$. Dette indsættes nu i bibetingelsen, hvormed fås den omkostningsminimerende efterspørgsel efter arbejdskraft ved produktion af x

$$\begin{aligned} (\min\{\ell, \ell\})^{\frac{1}{2}} &= y \Leftrightarrow \\ \ell^{\frac{1}{2}} &= y \Leftrightarrow \\ \ell &= y^2 \Leftrightarrow \end{aligned} \tag{1.2}$$

Vi indsætter nu (1.2) i $\ell = 4k$ og udleder den omkostningsminimerende efterspørgsel efter kapital ved produktion af x

$$\begin{aligned} 4k &= y^2 \Leftrightarrow \\ k &= \frac{y^2}{4} \end{aligned}$$

Vi kan nu udlede den langsigtede omkostningsfunktion (for generelle omkostningsniveauer)

$$C(y) = wy^2 + r\frac{y^2}{4} + QFC$$

For de givne priser og kvasi-faste omkostninger fås dermed

$$C(y) = 2y^2 + 4\frac{x^2}{4} + 300 = 3y^2 + 300$$

De gennemsnitlige langsigtede omkostninger kan herfra umiddelbart bestemmes

$$AC(y) = \frac{C(y)}{y} = \frac{3y^2 + 300}{y} = 3y + \frac{300}{y}$$

(b) Hvor meget producerer hver virksomhed i langsigts-ligevægten?

Svar: Da virksomhederne producerer i minimum af $AC(y)$ fås

$$\frac{dAC(y)}{dy} = 3 - \frac{300}{y^2} = 0 \Leftrightarrow 3 = \frac{300}{y^2} \Leftrightarrow \underline{y} = 10$$

Vi tjekker at dette punkt rent faktisk er et minimum

$$\frac{d^2AC(y)}{dy^2} = \frac{600}{y^3} > 0$$

Vi har desuden $\ell^\star = \underline{y}^2 = 100$ og $4k^\star = \underline{y}^2 \Leftrightarrow k^\star = 25$.

(c) Hvad er den langsigtede ligevægtspris på output?

Svar: Da markedet er karakteriseret ved fuldkommen konkurrence må gælde at $p = AC(\underline{y})$. Vi kan derfor beregne markedsprisen

$$\begin{aligned} p &= AC(10) \Leftrightarrow \\ p &= 3 \cdot 10 + \frac{300}{10} \Leftrightarrow \\ p &= 60 \end{aligned}$$

(d) Antag at markedsefterspørgslen er givet ved $D(p) = 1000 - 10p$. Hvor mange virksomheder er der på markedet i langsigts-ligevægten?

Svar: Ved at indsætte markedsprisen i markedsefterspørgslen kan vi umiddelbart beregne den efterspurgte mængde.

$$D(60) = 1000 - 10 \cdot 60 = 400$$

I ligevægt er udbud naturligvis lig efterspørgsel og ved at benytte at hver enkelt virksomhed stadig producerer 10, kan antallet af virksomheder nu beregnes

$$J = \frac{D(60)}{\underline{y}} = \frac{400}{10} = 40$$

(e) Antag at markedet er i langsigts-ligevægten. Udled kort sigts omkostningsfunktionen for hver virksomhed (hvor du antager, at arbejdskraft er variabel, mens kapital er fast på kort sigt).

Svar: Det betingede arbejdskraft udbud bliver

$$\left(\min\{\ell, 4\overline{k}\}\right)^{\frac{1}{2}} = y \Leftrightarrow \ell_b^\star(y) = y^2 \text{ for } y < 2\overline{k}^{\frac{1}{2}} = 10$$

og omkostningerne derfor

$$C^{SR}(y) = w\ell + r\overline{k} + FC = 2y^2 + r\overline{k} + FC \quad \text{for } y \leq 10$$

(f) Antag nu, at efterspørgslen falder til $D^{\text{ny}}(p) = 700 - 10p$. Hvad sker der med outputprisen på kort sigt? Hvad sker der med antallet af virksomheder på markedet på langt sigt?

Svar: Vi beregner virksomhedernes kortsigtede marginalomkostninger

$$MC^{SR}(y) = \frac{dC^{SR}(y)}{dy} = 4y$$

Vi benytter at virsomhedens førsteordensbetingelse på kort sigt er givet ved $MC^{SR}(y) = p$ til at beregne den enkelte virksomheds udbud

$$4y = p \Leftrightarrow y = \frac{p}{4}$$

Da virksomheden ikke er i stand til at produceret mere end 10 enheder på kort sigt, er dens udbud derfor givet ved

$$y^{\star SR}(p) = \begin{cases} \frac{p}{4} & \text{for } p \leq 40 \\ 10 & \text{for } p > 40 \end{cases}$$

Vi minder om at der var 40 identiske virksomheder på markedet. Vi kan derfor beregne markedsudbuddet.

$$S(p) = 40y^{\star SR}(p) = \begin{cases} 10p & \text{for } p \leq 40 \\ 400 & \text{for } p > 40 \end{cases}$$

Vi benytter at der i ligevægt må gælde at udbud er lig efterspørgsel.

$$\begin{aligned} \text{For } p \leq 40 &: \quad 10p = 700 - 10p \Leftrightarrow p = 35 \\ \text{For } p > 40 &: \quad 400 = 700 - 10p \Leftrightarrow p = 30 \end{aligned}$$

Da $p = 30$ oplagt ikke er løsning grundet modstriden er den kortsigtede markedspris $p = 35$.

På langt sigt: Virksomheden producerer stadig i minimum af $AC(y)$ der jo ikke har ændret sig. På langt sigt stiger den enkelte virksomheds produktion derfor til 10 igen og markedsprisen stiger (tilbage) til 60 . Ved at indsætte markedsprisen i den nye markedsefterspørgsel kan vi nu umiddelbart beregne den efterspurgte mængde.

$$D^{\text{ny}}(60) = 700 - 10 \cdot 60 = 100$$

I ligevægt er udbud naturligvis lig efterspørgsel og ved at benytte at hver enkelt virksomhed stadig producerer 10, kan antallet af virksomheder nu beregnes

$$J = \frac{D'(60)}{\underline{y}} = \frac{100}{10} = 10$$

2 Knaphedsrente

Gennemgang: Regn selv i (a) og (b), herefter på tavlen.

Vi betragt et marked, hvor enhver kan oprette en virksomhed med omkostningsfunktionen

$$C(y) = \frac{1}{2}y^3 + \mathbf{1}_{\{y>0\}}1000$$

Markedsefterspørgslen er

$$D(p) = 600 - 2p$$

(a) Hvad er hhv. ligevægtsprisen, antallet af virksomheder og deres produktionsniveau på langt sigt?

Svar: Vi har gnm. omkostningerne

$$AC(y) = \frac{1}{2}y^2 + \mathbf{1}_{\{y>0\}}\frac{1000}{y}$$

og derfor er produktionsniveauet for hver virksomhed

$$\frac{dAC(y)}{dy} = 0 \Leftrightarrow y - \frac{1000}{y^2} = 0 \Leftrightarrow y^3 = 1000 \Leftrightarrow \underline{y} = 10$$

Bemærk desuden at det er et minimum da

$$\frac{d^2AC(y)}{d^2y} = 1 > 0$$

Prisen bliver

$$p^* = AC(\underline{y}) = 50 + 100 = 150$$

Og antallet af virksomheder er

$$J = \frac{D(p^*)}{\underline{y}} = \frac{600 - 2 \cdot 150}{10} = 30$$

(b) Antag at akkurat én virksomhed kan producere på et særligt fordelagtig sted, hvor der ikke er nogen kvasi-faste omkostninger overhovedet. Hvad vil en udlejer kunne udleje dette sted til?

Svar: Virksomheden der lejer stedet vil have omkostningsfunktionen

$$\tilde{C}(y) = \frac{1}{2}y^3$$

Ved $p = 150$ vil virksomheden stadig udbyde 10 da

$$\widetilde{MC}(y) = \frac{3}{2}y^2 \Rightarrow \widetilde{MC}(\underline{y}) = 150 = p^*$$

Umiddelbart bliver profitten derfor

$$\pi = 150 \cdot 10 - \frac{1}{2}10^3 = 1000$$

Ejeren af stedet vil derfor sætte lejen til 1000 og »opsuge al profitten«.

(c) Sammenkæd dine resultater med begrebet *knaphedsrente* (economic rent).

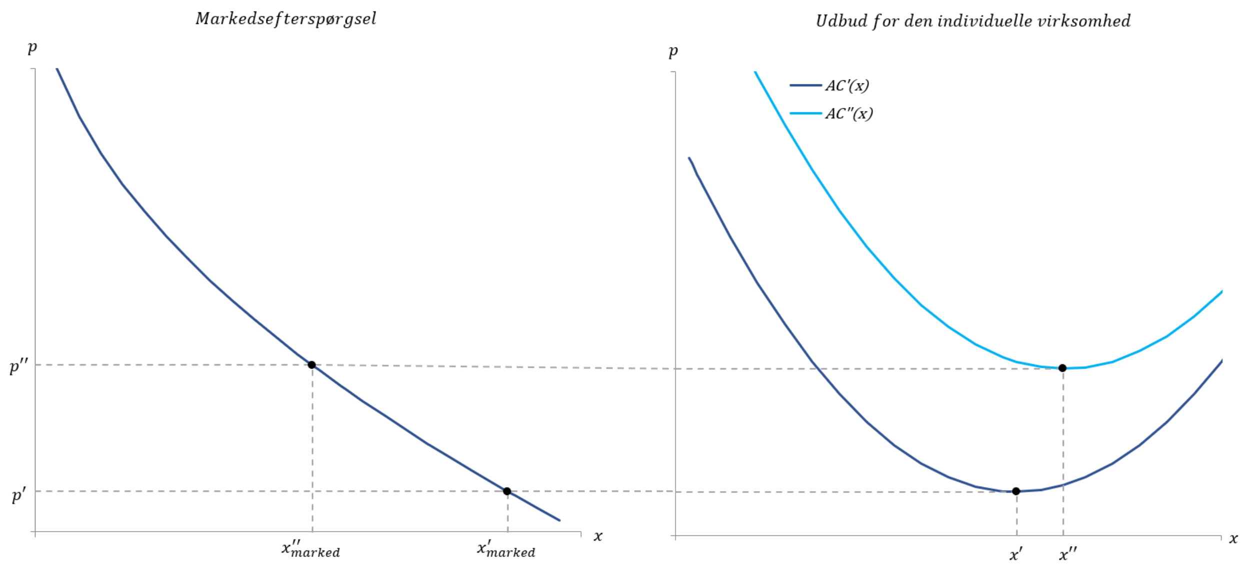
Svar: Ejeren af stedet, hvor det er ekstra effektivt at producere, ejer en ressource, som er absolut knap på samfundsplan (ikke kan produceres). Hun scorer derfor en knaphedsrente. Helt præcist er en knaphedsrente betaling til en produktionsfaktor udover det minimum, som der kræves for at produktionsfaktoren udbydes.

3 Licens

Gennemgang: Gennemgås ved tavlen.

Sandt eller falsk: En stigning i en licens - hvilket er en langsigts gentaget omkostning - fører til et fald i antallet af virksomheder, der konkurrerer på et marked præget af perfekt konkurrence og med »free entry«.

Svar: Sandt. En stigning i en langsigts gentaget omkostning medfører en stigning i de gennemsnitlige langsigtede omkostninger (fra $AC'(x)$ til $AC''(x)$) på illustrationen). Da det er en fast omkostning må der gælde at de nye gennemsnitsomkostninger nærmer sig de gamle som produktionen stiger ($AC''(x) \to AC'(x)$ for $x \to \infty$). Denne forskydning betyder at den omkostningsminimerende produktion nu stiger for den enkelte virksomhed. Gennemsnitsomkostningerne er dog ligeledes steget. Dette vil i begyndelsen betyde at virksomhederne der før producerede hvor $p' = AC'(x')$, nu producerer med negativ profit $p' < AC''(x'')$. Virksomhederne begynder derfor at lukke produktionen, hvilket sænker markedsudbuddet og presser prisen op indtil $p = AC''(x'') = p''$. Bemærk da prisen er steget må den markedsefterspørgslen og dermed den aggregerede produktion være faldet. Hvis den aggregerede produktion er faldet og den enkelte virksomhed producerer mere, må antallet af virksomheder på markedet være faldet.



4 Engansrefusion

Gennemgang: Gennemgås ved tavlen.

Sandt eller falsk: Antag at regeringen indfører en en-gangs refusion af alle skatter, der er betalt af virksomhederne på et marked sidste år. Dette fører til et fald i output prisen på dette marked.

Svar: Falsk.

Virksomheden kan ikke gøre noget for at påvirke refusionen. Refusionen er derfor ikke en økonomisk indtægt (pendant til økonomisk omkostning). Virksomhedens optimale adfærd herunder produktion efter refusionen er derfor den samme som før refusionen, hvorfor der ikke sker noget med hverken produktion eller outputpris.

5 Kort og langt sigt (+)

Gennemgang: Regn selv.

Markedet for herrecykler er præget af perfekt konkurrence. Alle, der overvejer at etablere en virksomhed i branchen, har adgang til samme teknologi. Med tid til at tilpasse kapitalapparatet til en optimal størrelse ift. en ønsket produktion på y, er de lavest mulige langsigtsomkostninger givet ved

$$C(y) = 0.01 \cdot y^3 - 40 \cdot y^2 + 45.000 \cdot y$$

Der kan frit oprettes og lukkes virksomheder«; dog tager det nogen tid at etablere nye eller afvikle eksisterende virksomheder. På markedet er efterspørgslen efter herrecykler givet ved funktionen

$$D(p) = \begin{cases} 100000 - 10p & \text{hvis } p \leq 10000 \\ 0 & \text{hvis } p \leq 10000 \end{cases}$$

hvor p er stykprisen for en herrecykel.

(a) Hvad er den langsigtede ligevægtspris på en cykel?
Svar: De gennemsnitlige omkostninger er

$$AC(y) = \frac{C(y)}{y} = 0.01 \cdot y^2 - 40y + 45.000 = 0.01(y - 2000)^2 + 5000$$

Antagelsen om at der kan frit oprettes og lukkes virksomhederbetyder, at ingen virksomhed kan tjene profit og den langsigtede ligevægtspris må derfor være i minimum af de gennemsnitlige omkostninger,

$$\underline{y} = \arg\min_y AC(y) = 2000$$

Og den langsigtede ligevægtspris bliver

$$p^{LR} = AC(\underline{y}) = 5000$$

(b) Hvor mange cykler producerer hver virskomhed på langt sigt?

Svar: $\underline{y} = 2000$

(c) Hvor mange virksomheder vil være aktive på markedet på langt sigt?
Svar: Markedsefterspørgslen er

$$D(5000) = 50000$$

Antallet af virksomheder er derfor

$$J^{LR} = \frac{D(p^{LR})}{\underline{y}} = 25$$

Antag, at efterspørgslen efter herrecykler forøges og at det er nødvendigt at skelne mellem følgende tre tidshorisonter:

- På *kort* sigt kan de etablerede virksomheder ikke ændre kapitalapparat og ingen nye virksomheder kan nå at etablere sig.

- På *mellemlangt* sigt kan de etablerede virksomheder forøge eller reducere deres kapitalapparat, mens det ikke er muligt for nye virksomheder at nå at etablere sig.

- På *langt* sigt er det muligt for nye virksomheder at etablere sig på markedet

(d) Hvad vil der da kvalitativt ske med de i a)-c) nævnte størrelser på kort hhv. mellemlangt hhv. langt sigt? Lav en illustration af dit svar.

Svar:

i. **Kort sigt:** Virksomhedernes udbudskurve vil være den del af den kortsigtede MC-kurven som er stigende og ligger over kortsigtede AC-kurven. Markedsudbudskurven vil derfor være stigende.

   i. **Pris:** Stiger
   ii. **Produktion per virksomhed:** Stiger
   iii. **Antal virksomheder:** Uændret (per definition)

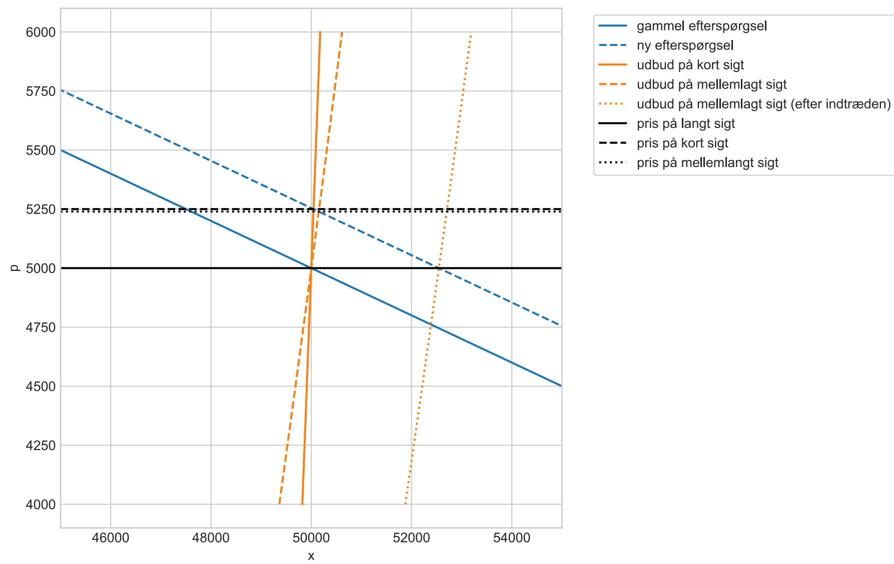
ii. **Mellemlangt sigt:** Virksomhedernes udbudskurve vil være den del af den MC-kurven som er stigende og ligger over AC-kurven. MC-kurven vil være fladere end den kortsigtede MC-kurve, da virksomheden kan sænke sine omkostninger ved at tilpasse sig kapitalapparatet, Markedsudbudskurven vil derfor også være fladere, men stadig stigende.

   i. **Pris:** Falder relativt til det helt kort sigt
   ii. **Produktion per virksomhed:** Stiger relativt til det helt kort sigt (bevægelse langs eftersørgselskurven)
   iii. **Antal virksomheder:** Uændret (per definition)

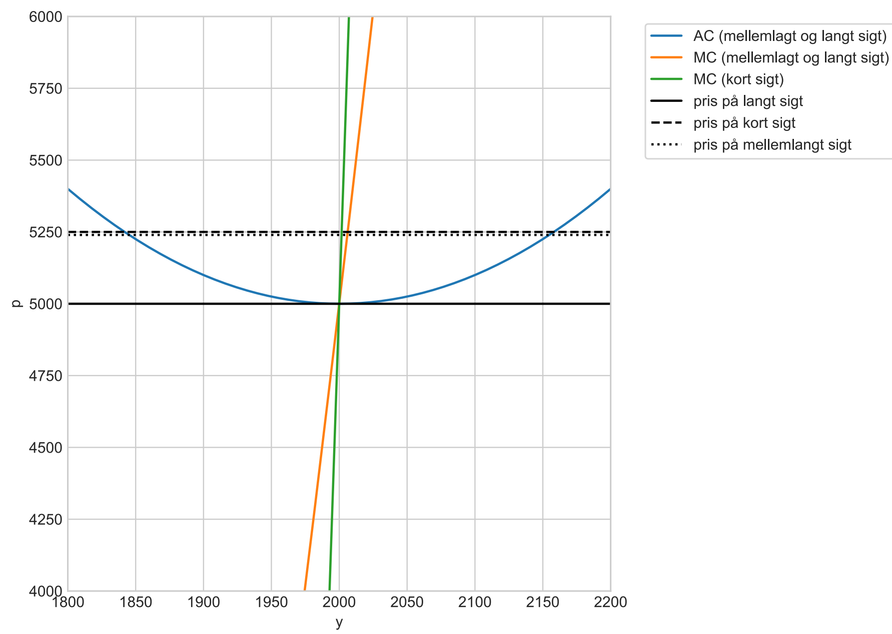
iii. **Langt sigt:** Antallet af virksomheder tager den fulde tilpasning, da al profit vil blive konkurreret væk (jf. spørgsmål a) og prisen vil fortsat være givet ved bunden af AC-kurven (som er uændret). Da produktionen per virksomheden også er uændret, men efterspørgslen er større, vil antallet af virksomheder stige.

Se Figur 1 for en illustration af, hvad der sker på markedet. Se Figur 2 for en illustration af, hvad der sker for den enkelte virksomhed.

Figur 1: Markedet



Figur 2: Virksomheden



Afleveringsopgave

Betragt markedet for revision der antages at være karakteriseret ved perfekt konkurrence. Hver (potentiel) virksomhed har en produktionsteknologi der udmønter sig i følgende langsigtede gennemsnitlige totale omkostninger

$$AC(y) = (y - 10)^4 + 50$$

Herudover oplyses det at efterpørgselssiden er karakterisret ved følgende

$$D(p) = 2000 - 10p$$

(a) Find langsigtsligevægten i denne økonomi: Markedspris, antal aktive virksomheder, produktion pr. virksomhed, profit pr. virksomhed og markedsudbud (aggregeret produktion)

Svar: Virksomheden producerer i minimum af $AC(x)$

$$\frac{dAC(y)}{dy} = 4(y - 10) = 0 \Leftrightarrow \underline{y} = 10$$

og vi har fundet et minimum da

$$\frac{d^2AC(y)}{dy^2} = 12(y - 10)^2 \geq 0$$

Under fuldkommen konkurrence må gælde $AC(y) = p$. Vi bestemmer derfor markedsprisen

$$AC(10) = p \Leftrightarrow (10 - 10)^2 + 50 = p \Leftrightarrow p = 50$$

Vi kan nu bestemme markedsefterspørgslen

$$D(50) = 2000 - 50 \cdot 100 = 1500$$

Hvorfra antallet af virksomheder på markedet kan bestemmes

$$J = \frac{D(50)}{\underline{y}} = \frac{1500}{10} = 150$$

Antag at der udvikles en ny software til bogføring. Denne software giver anledning til følgende nye langsigtede gennemsnitlige totale omkostninger, nærmere bestemt

$$AC(y) = (y - 10)^2 + 40$$

(b) Hvad sker der på langt sigt med markedspris, antal aktive virksomheder, produktion pr. virksomhed, profit pr. virksomhed og markedsudbud?

Svar: Virksomheden producerer i minimum af $AC(x)$

$$\frac{dAC(x)}{dx} = 4(x - 10) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Vi tjekker at dette rent faktisk er et minimum

$$\frac{d^2AC(x)}{dx^2} = 4 > 0$$

Under fuldkommen komkurrence må gælde $AC(x) = p$. Vi bestemmer derfor markedsprisen

$$AC(10) = p \Leftrightarrow (10 - 10)^2 + 40 = p \Leftrightarrow p = 40$$

Vi kan nu bestemme markedsefterspørgslen

$$D(40) = 2000 - 10 \cdot 40 = 1600$$

Hvorfra antallet af virksomheder på markedet kan bestemmes

$$J = \frac{D(40)}{\underline{y}} = \frac{1600}{10} = 160$$