Matematik A E2020
Uge 50, Forelæsning 1+2

Eksamensforberedelse!

Overblik og Info

- Denne uge: Tidligere eksamensopgaver
  - Januar og februar 2020 + opg 2 fra juni 2020
  - [Holdundervisning uge 51: Prøveeksamen december 2019]
- Diskussionstråd på Absalon til spm om eksamen
  - Spørgsmål om forelæsningsstof og eksamen i øvrigt
  - Spørg så kort og præcist som muligt
  - Jeg prøver at checke tråden en gang om dagen på hverdage, men forvent ikke lyn-hurtigt svar
  - Lukker fredag d. 18. dec kl 12.00
- Prøveeksamen + løsninger er på Absalon sammen med tidligere eksamenssæt
  - Tid til fælles feedback/diskussion til holdundervisning i uge 51

- **Husk: Kommunikation under en online hjemmeeksamen er ikke tilladt!!!**
  - Se afsnit i studiebesked om online eksamen: https://kunet.ku.dk/nyhedsrum/studiebeskeder/Sider/Information-om-vinterens-eksamener-p%C3%A5-%C3%98konomisk-Institut.aspx

Januar 2020

Opgave 1

% (a) Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable.
PGA ONLINE
Gør rede for definitionen af de første-ordens partielle afledede

$$f_1'(x, y) \quad \text{og} \quad f_2'(x, y)\,.$$

I resten af opgaven betragtes funktionen f givet ved

$$f(x, y) = 2x(1 + y^2) + x^2 \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Bestem $f_1'(x, y)$ og $f_2'(x, y)$. Fx: $f_1'(x,y) = 2(1+y^2) + 2x = 2 + 2x + 2y^2$

⊛ (c) Vis, at punktet $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ er et kritisk punkt for f.
Vis, at der ikke findes andre kritiske punkter.

(d) Bestem alle anden-ordens partielle afledede for f.
Opstil Hessematricen (*the Hessian matrix*) $f''(x, y)$.

(e) Afgør, om $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt (*saddle point*) for f.

⊛ (f) Bestem værdimængden for f.
Hint: Kig fx. på funktionsværdierne på linien $y = x$.

$$f(x,y) = 2x(1+y^2) + x^2 \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Vis, at punktet $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ er et kritisk punkt for f.
Vis, at der ikke findes andre kritiske punkter.

$f_1'(x,y) = 2 + 2x + 2y^2$ $\qquad$ $f_2'(x,y) = 2x(2y) + 0 = 4xy$

For at vise, at $(-1,0)$ er kritisk pkt, sættes ind i f_1' og f_2'!

$f_1'(-1,0) = 2 + 2(-1) + 2 \cdot 0^2 = 0$, $\quad f_2'(-1,0) = 4(-1) \cdot 0 = 0$

Altså er $(-1,0)$ et kritisk pkt.

De kritiske pkt. er løsningerne til ligningerne:

$f_1'(x,y) = 2 + 2x + 2y^2 = 0$ $\quad$ og $\quad$ $f_2'(x,y) = 4xy = 0$

Af anden lign. (og nulreglen) fås, at $x=0$ eller $y=0$.

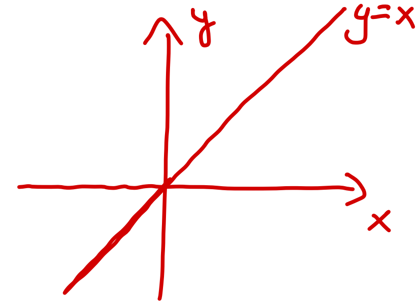
Hvis $x=0$ bliver første lign $2 + 2y^2 = 0$, som ikke har nogen løsn.

Hvis $y=0$ bliver første lign $2 + 2x = 0$, som giver $x = -1$.

Altså er $(-1,0)$ det eneste kritiske pkt.

$$f(x,y) = 2x(1+y^2) + x^2 \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(f) Bestem værdimængden for f.
Hint: Kig fx. på funktionsværdierne på linien $y = x$.



$f(x,x) = 2x(1+x^2) + x^2 = 2x^3 + x^2 + 2x$

Det er et 3.grads pol. med positiv koeff. foran 3.grads-leddet. Derfor har vi:

$f(x,x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$

$f(x,x) \to \infty$ for $x \to \infty$

Pga dette, og fordi $f(x,x)$ er kont., vil den antage alle reelle værdier. (Sætn. om mellemliggende værdier, cf sn. 7.10)

Dermed vil $f(x,y)$ også antage alle reelle værdier, dvs værdimgd. er: $\underline{R_f = \mathbb{R} \; (=(-\infty,\infty))}$

Opgave 2

(a) Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_1^4 (2x - 3\sqrt{x})\, dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 xe^{-x+1}\, dx\,.$$

(b) Udregn det ubestemte integral

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\, dx \qquad (\text{hvor } x > 0).$$

(c) Betragt det uegentlige integral (*improper integral*)

$$\int_0^\infty 6x^2 e^{-(x^3-1)}\, dx\,.$$

Vis, at dette integral konvergerer, og bestem dets værdi.

(b) Udregn det ubestemte integral

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx \quad (\text{hvor } x > 0).$$

Jeg bruger substitutionen $u = \ln(x)$.

Så er $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ og dermed er $du = \frac{1}{x}dx$.

Dermed fås:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int \ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + C,$$

hvor C er en arbitrær konstant.

(c) Betragt det uegentlige integral (*improper integral*)

$$\int_0^\infty 6x^2 e^{-(x^3-1)}\,dx\,.$$

Vis, at dette integral konvergerer, og bestem dets værdi.

For at vise at integralet konvergerer, skal vi vise at grænseværdien

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b 6x^2 e^{-(x^3-1)}\,dx \quad \text{eksisterer.}$$

Ved substitutionen $u = x^3 - 1$, $du = 3x^2\,dx$ fås:

$$\int_0^b 6x^2 e^{-(x^3-1)}\,dx = \int_{-1}^{b^3-1} 2e^{-u}\,du = \left[-2e^{-u}\right]_{-1}^{b^3-1}$$

$$= -2e^{-(b^3-1)} - \left(-2e^{-(-1)}\right) = \underbrace{-2e^{-(b^3-1)} + 2e^{1}}$$

$$\longrightarrow 0 + 2e = \underline{2e} \text{ for } b\to\infty$$

Altså konvergerer integralet og værdien er $\int_0^\infty 6x^2 e^{-(x^3-1)}\,dx = 2e$.

Opgave 3

(a) Betragt funktionen

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$.

⊛ (b) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \quad \text{og} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}.$$

÷ PGA ONLINE (c) Opskriv Middelværdisætningen (*The Mean Value Theorem*).
Forklar indholdet i sætningen. Lav gerne en figur til at støtte din forklaring.

⊛ (d) Lad $g(x)$ være en differentiabel funktion defineret på $\mathbb{R}$.
Antag $g(0) = 0$, og at der findes et $b > 0$, så $g(b) = b$.
Vis, at der findes et $x^* > 0$, så $g'(x^*) = 1$.

(b) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad \text{og} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}.$$

Begge grænseværdier er ubestemte former af typen $\frac{0}{0}$.

Jeg anvender derfor L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(1+x^2)\cdot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

(d) Lad $g(x)$ være en differentiabel funktion defineret på $\mathbb{R}$.
Antag $g(0) = 0$, og at der findes et $b > 0$, så $g(b) = b$.
Vis, at der findes et $x^* > 0$, så $g'(x^*) = 1$.

Jeg anvender Middelværdisætningen på funktionen $g(x)$ på intervallet $[0, b]$.

g er kont på $[0,b]$ og diff. på $(0,b)$, da den er diff. (og dermed kont.) på hele $\mathbb{R}$.

Således eksisterer $x^* \in (0,b)$ så

$$\underline{\frac{g(b)-g(0)}{b-0} = g'(x^*)}$$

Da $g(b)=b$ og $g(0)=0$ er $\underline{\frac{g(b)-g(0)}{b-0}} = \frac{b-0}{b-0} = \frac{b}{b} = \underline{1}$

Altså har vi $g'(x^*) = 1$.
(og $x^* > 0$ da $x^* \in (0,b)$).

Februar 2020 (opg 1+2)

Opgave 1

Betragt funktionen f af to variable, der er givet ved forskriften

$$f(x,y) = 4\ln(xy) - 2x^2 - 2y \quad \text{for alle } x > 0 \text{ og } y > 0.$$

f er altså defineret på mængden $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ og } y > 0\}$.

(a) Bestem $f_1'(x,y)$ og $f_2'(x,y)$.

(b) f har ét kritisk punkt. Bestem dette.

(c) Bestem alle anden-ordens partielle afledede for f.

* (d) Vis, at det kritiske punkt fra (b) er et globalt maksimumspunkt for f.

* (e) Betragt ligningen

$$f(x,y) = -9\,.$$

Vis, at punktet $(2, \frac{1}{2})$ er en løsning til denne ligning.
I en omegn af $(2, \frac{1}{2})$ definerer ligningen y som en implicit given funktion $y = g(x)$ af x. Bestem $g'(2)$, altså differentialkvotienten y' i punktet $(2, \frac{1}{2})$.

$$f(x,y) = 4\ln(xy) - 2x^2 - 2y \quad \text{for alle } x > 0 \text{ og } y > 0.$$

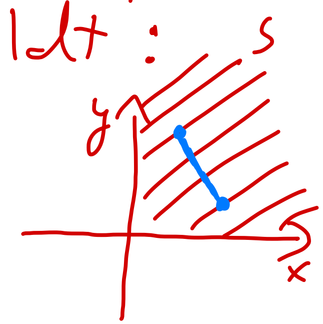
[(c) Bestem alle anden-ordens partielle afledede for f.]

(d) Vis, at det kritiske punkt fra (b) er et globalt maksimumspunkt for f.

krit. pkt: $(1,2)$

$f''_{11}(x,y) = -4x^{-2} - 4$, $f''_{22}(x,y) = -4y^{-2}$, $f''_{12}(x,y) = f''_{21}(x,y) = 0$

Jeg viser, at de tilstrækkelige bet. for at det krit. pkt $(1,2)$ er et (globalt) max-pkt fra Afsn. 13.2 er opfyldt:



- Def. mgd $S = \{(x,y) : x, y > 0\}$ er konveks, da liniestykket ml. to vilk. pkt fra S også ligger i S
- Derudover gælder:

$f''_{11}(x,y) = -4x^{-2} - 4 < 0$ $\qquad$ $f''_{22}(x,y) = -4y^{-2} < 0$

$$f''_{11}(x,y) f''_{22}(x,y) - \left(f''_{12}(x,y)\right)^2 = (-4x^{-2} - 4)(-4y^{-2}) - 0^2 = (-4)^2(x^{-2}+1)y^{-2}$$

$$= 16(x^{-2}+1)y^{-2} > 0$$

for alle $(x,y) \in S$.

Altså er det krit. pkt $(1,2)$ et (globalt) max-pkt.

$$f(x,y) = 4\ln(xy) - 2x^2 - 2y \quad \text{for alle } x > 0 \text{ og } y > 0.$$

$f_1'(x,y) = \frac{4}{x} - 4x$

$f_2'(x,y) = \frac{4}{y} - 2$

(e) Betragt ligningen

$$f(x,y) = -9\,.$$

Vis, at punktet $(2, \frac{1}{2})$ er en løsning til denne ligning.

I en omegn af $(2, \frac{1}{2})$ definerer ligningen y som en implicit given funktion $y = g(x)$ af x. Bestem $g'(2)$, altså differentialkvotienten y' i punktet $(2, \frac{1}{2})$.

$\underline{f(2,\frac{1}{2})} = 4\ln(2\cdot\frac{1}{2}) - 2\cdot 2^2 - 2\cdot\frac{1}{2} = 4\ln(1) - 8 - 1 = \underline{-9}$

Altså er $(2,\frac{1}{2})$ løsn. til ligningen $f(x,y) = -9$.

For den implicit givne fkt har vi flg formel for y':
(afsn. 12.3)

fra spm (a)

$$\underline{y'} = -\frac{f_1'(2,\frac{1}{2})}{f_2'(2,\frac{1}{2})} = -\frac{\frac{4}{2} - 4\cdot 2}{\frac{4}{\frac{1}{2}} - 2} = -\frac{-6}{6} = \frac{6}{6} = \underline{1}$$

Altså er $\underline{g'(2) = y' = 1}$

[Alternativt: Implicit diff. som i afsn. 7.1, isolér y', indsæt $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$.]

Opgave 2

Lad f og g være differentiable funktioner af én variabel defineret på hele $\mathbb{R}$. Antag, at $g(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

%

PGA ONLINE

(a) Betragt funktionen $\frac{f}{g}$ givet ved

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Opskriv formlen for differentialkvotienten $(\frac{f}{g})'(x)$ (*kvotientreglen*).

* (b) Vis, at funktionen $\frac{f}{g}$ er voksende på $\mathbb{R}$ hvis og kun hvis

$$f'(x)g(x) \geq f(x)g'(x) \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

(*)(c) Vis, at funktionen $h(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ er voksende på $\mathbb{R}$.

* (d) Betragt funktionen k givet ved

$$k(x) = \frac{x}{e^x} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bestem Taylor-polynomiet af anden orden for k omkring punktet $x = 0$.

(e) Betragt igen funktionen k fra (d). Udregn det ubestemte integral

$$\int k(x)\,dx. = \int x \cdot e^{-x}\,dx \text{ , partiel integration.}$$

(b) Vis, at funktionen $\frac{f}{g}$ er voksende på $\mathbb{R}$ hvis og kun hvis

$$f'(x)g(x) \geq f(x)g'(x) \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

(c) Vis, at funktionen $h(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ er voksende på $\mathbb{R}$.

(b) $\frac{f}{g}$ er voksende hvis og kun hvis $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ (afsn. 6.3)

Kvotientreglen: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Nævneren er altid strengt positiv, så $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \geq 0$ hvis og kun hvis $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \geq 0$.

Altså har vi, at $\frac{f}{g}$ er voksende hvis og kun hvis

$$f'(x)g(x) \geq f(x)g'(x) \text{ for alle } x \in \mathbb{R}.$$

(c) Brug resultatet fra (b) med $f(x) = e^x$ og $g(x) = x^2+1$.

$f'(x)g(x) = e^x(x^2+1)$, $f(x)g'(x) = e^x \cdot 2x$.

Det er nok at vise, at $x^2+1 \geq 2x$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Det følger af $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) Betragt funktionen k givet ved

$$k(x) = \frac{x}{e^x} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bestem Taylor-polynomiet af anden orden for k omkring punktet $x = 0$.

Taylor-polynomiet af orden 2 omkring $x=0$ er:
(afsn. 7.5)

$$P_2(x) = k(0) + k'(0)\cdot x + \frac{k''(0)}{2}x^2$$

Vi bestemmer k' og k'' (vha. kvotientreglen):

$$k'(x) = \frac{1\cdot e^x - x\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x} \quad \left(=(1-x)e^{-x}\right)$$

$$k''(x) = \frac{(-1)\cdot e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{(x-2)e^x}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x} \quad \left(=(x-2)e^{-x}\right)$$

Heraf fås: $k(0) = \frac{0}{1} = 0$, $k'(0) = \frac{1}{1} = 1$, $k''(0) = \frac{-2}{1} = -2$

Altså har vi:

$$\underline{P_2(x) = 0 + 1\cdot x + \frac{-2}{2}\cdot x^2 = x - x^2}$$

Juni 2020 opg 2

Opgave 2

Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x} - 1)^n = 4 + 4 \cdot (e^{2x} - 1) + 4 \cdot (e^{2x} - 1)^2 + 4 \cdot (e^{2x} - 1)^3 + \cdots$$

hvor x er en reel konstant.

* 1) Vis, at den uendelige række er konvergent, hvis og kun hvis

$$x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

* 2) Bestem en forskrift for sumfunktionen f, der er givet ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x} - 1)^n \quad \text{for alle} \quad x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

* 3) Vis, at f er strengt voksende i definitionsmængden, og find værdimængden for f.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x} - 1)^n = 4 + 4 \cdot (e^{2x} - 1) + 4 \cdot (e^{2x} - 1)^2 + 4 \cdot (e^{2x} - 1)^3 + \cdots$$

1) Vis, at den uendelige række er konvergent, hvis og kun hvis

$$x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

Rækken er en (uendelig) geometrisk række med $a = 4$ og $k = e^{2x} - 1$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x}-1)^{n-1} \right]$

En geom. række er konvergent netop hvis $|k| < 1$.

Her er $k = e^{2x} - 1 > -1$ for alle $x \in \mathbb{R}$, så rækken er konvergent netop hvis $\underline{e^{2x} - 1 < 1}$.

Det er ekvivalent med $e^{2x} < 2$

$\Leftrightarrow \quad 2x < \ln(2)$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x < \frac{1}{2} \ln(2)}$

Altså er rækken konv. hvis og kun hvis $x < \frac{1}{2} \ln(2)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x}-1)^n = 4 + 4 \cdot (e^{2x}-1) + 4 \cdot (e^{2x}-1)^2 + 4 \cdot (e^{2x}-1)^3 + \cdots$$

2) Bestem en forskrift for sumfunktionen f, der er givet ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x}-1)^n \quad \text{for alle} \quad x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

Summen af en konv. geom. række er $\frac{a}{1-k}$.

Med $a=4$ og $k=e^{2x}-1$ får vi:

$$f(x) = \frac{4}{1-(e^{2x}-1)} = \frac{4}{2-e^{2x}} \quad \text{for alle } x < \tfrac{1}{2}\ln(2).$$

(3) $f(x) = \dfrac{4}{2-e^{2x}}$ for $x < \frac{1}{2}\ln(2)$

$$f'(x) = \frac{0\cdot(2-e^{2x}) - 4(-2e^{2x})}{(2-e^{2x})^2} = \frac{8e^{2x}}{(2-e^{2x})^2} > 0$$

kvotientreglen

Altså er f strengt voksende. (For $x < \frac{1}{2}\ln(2)$ er $e^{2x} < e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln(2)} = e^{\ln(2)} = 2$, derfor er $2-e^{2x} > 0$, og dermed $(2-e^{2x})^2 > 0$)

Når $x \to -\infty$ vil $e^{2x} \to 0^+$ og derfor vil $f(x) = \dfrac{4}{2-e^{2x}} \to 2^+$

Altså vil $\underline{f(x) > 2}$ for alle $x < \frac{1}{2}\ln(2)$ (da f er str. voks.)

Når $x \to \frac{1}{2}\ln(2)^-$ vil $e^{2x} \to e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln(2)} = e^{\ln(2)} = 2^-$ og derfor vil $\underline{f(x) = \dfrac{4}{2-e^{2x}} \longrightarrow \infty}$

Da f er kont bliver værdimængd så $R_f = (2, \infty)$.