Matematik A E2020
Uge 43, Forelæsning 1

Afsnit 7.11 og 10.1-4

Følger, (uendelige) rækker, rentetilskrivning

Overblik

- I dag:
  - Følger og rækker (7.11 og 10.4)
  - Lidt om rentetilskrivning (10.1-2) [NB: 10.3 kommer onsdag]

- Onsdag:
  - Kort om eksamen
  - Nutidsværdi og annuiteter (10.3,5,6)
  - Differensligninger (10.8)

- Næste uge (44): Integralregning (kap 9)!

Følger/"sequences" (7.11)

En (tal)følge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (eller bare $\{s_n\}$) består af reelle tal:

$$\boxed{s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ \ldots}$$

Kan opfattes som funktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, idet vi lader $s(1) = s_1$, $s(2) = s_2$, etc.

Alternativ notation: $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eller bare (s_n)

Eksempler:

$s_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$s_n = (-1)^n$ $\quad -1, 1, -1, 1, \ldots$

$s_1 = 1$, $s_2 = 1$ og $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ for alle $n \geq 3$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

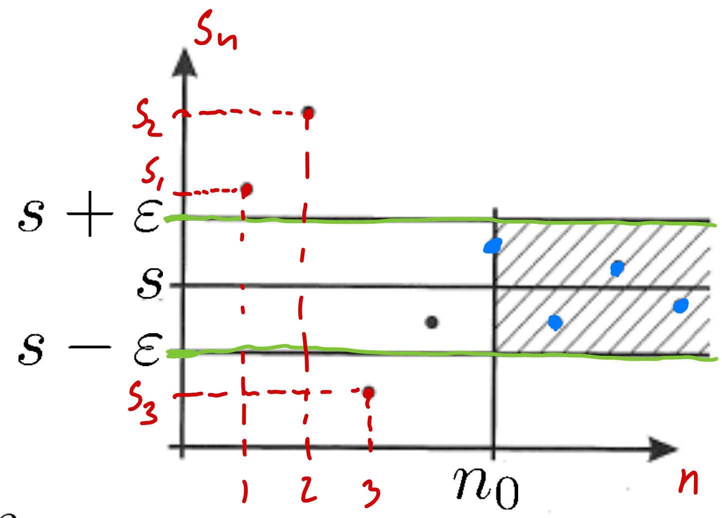
Konvergens af følger

Løs definition:

En følge $\{s_n\}$ er konvergent med grænseværdien $s \in \mathbb{R}$, hvis følgens elementer "efterhånden er vilkårligt tæt på s".
Så skriver vi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} s_n = s}$$

$$(\text{eller } s_n \to s \quad \text{for} \quad n \to \infty)$$



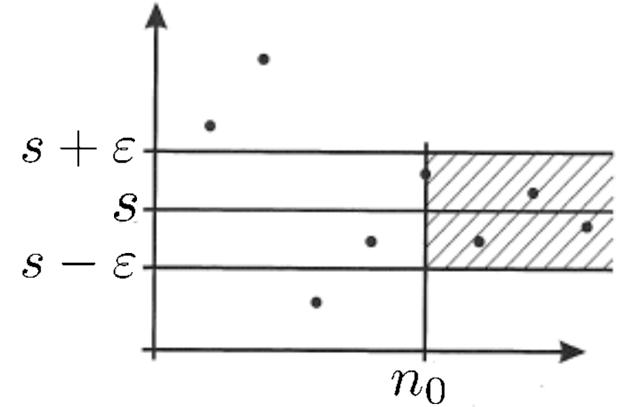
Præcis definition:

For alle $\varepsilon > 0$ findes $n_0 \in \mathbb{N}$ så

$$|s_n - s| < \varepsilon \text{ for alle } n > n_0$$

Bemærk analogien til definitionen af $\lim_{x\to a} f(x) = A$

Eksempler



$$s_n = \frac{1}{n}$$

$|s_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$

Denne følge konvergerer mod 0 ($\lim_{n\to\infty} s_n = 0$), da $\frac{1}{n}$ kan gøres vilk. lille ved at gøre n stor.

$$s_n = (-1)^n$$

$-1, 1, -1, 1, \ldots$

Ikke konv! (Da den "hopper" ml. -1 og 1)

Uendelige rækker/"infinite series" (10.4)

En uendelige række er (løst sagt!) en uendelig sum af reelle tal:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Giver det mening med en sådan uendelig sum?

Lad os - på løsagtigt grundlag - overveje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

$$= 0{,}1111\dots = \frac{1}{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \quad ?$$

[Faktisk: $\frac{\pi^2}{6}$]

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

"$= \infty$"

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

$\overset{?}{=} 0$ $\quad$ $\overset{?}{=} -1$ $\quad$?

Afsnitsfølgen og konvergens

For en uendelige række $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

består *afsnitsfølgen* $\{s_n\}$ af "partial-summerne"

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\text{(Dvs. } s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots)$$

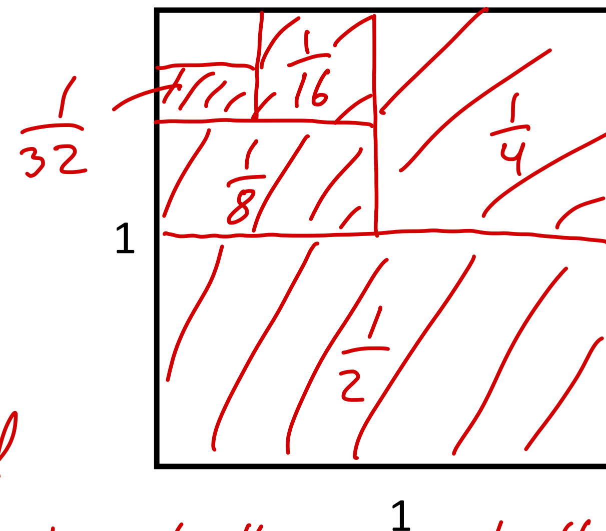
Hvis afsnitsfølgen $\{s_n\}$ er konvergent med $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, så siges den uendelige række at være konvergent med sum s:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s \quad (= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i)$$

Eksempler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$= 1$$



Når vi tager flere og flere led med i summen, bliver kvadratet tættere og tættere på udfyldt.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Afsnitsfølgen: $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = -1$, $s_4 = 0$, ...

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{hvis } n \text{ ulige} \\ 0 & \text{hvis } n \text{ lige} \end{cases}$$

Afsnitsflg er ikke konv, så <u>rækken er ikke konv!</u>

Vigtigt og nyttigt resultat, (10.4.8) s. 387:

Hvis den uendelige række $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ er konvergent, så gælder:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Bevis:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} s - s = 0$$

Geometriske rækker (potensrækker)

(Uendelig) Geometrisk række ($a, k \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots$$

(Bemærk: $\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ak^n$)

Eksempler:

$a = 1$

$k = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \quad (= 2)$$

$a = 1$

$k = \frac{1}{10}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{10})^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots \quad (= \frac{10}{9})$$

Konvergens og sum af uendelig geom. række, (10.4.5) s.386:

Den geometriske række $\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1}$

er konvergent hvis og kun hvis $|k| < 1$, og så er summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = \frac{a}{1-k}$$

Eksempler fra før:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \checkmark$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{10})^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} \checkmark$$

Øvelse

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ak^n = \frac{a}{1-k} \quad (\text{for } |k| < 1)}$$

Bestem summen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \dots$$

pingo.coactum.de
(185415)

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2}{5^{n-1}} = 2\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, \text{ dvs } \underline{a=2}, \ \underline{k=\frac{1}{5}}$$

Endelig geometrisk række

Sum af endelig geom. række (10.4.3) s.384:
For alle reelle tal a og $k \neq 1$ gælder:

$$\sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Bevis: Lad $s_n = \sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1}$.

$$k s_n = ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} + ak^n$$

$$s_n(k-1) = k s_n - s_n = ak^n - a = a(k^n - 1)$$

Heraf:

$$s_n = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}$$

$\square$

Den geometriske række $\sum_{i=1}^{\infty} ak^{i-1}$

er konvergent hvis og kun hvis $|k| < 1$, og så er summen

$$\sum_{i=1}^{\infty} ak^{i-1} = \frac{a}{1-k}$$

Bevis: Det n'te led i afsnitsfølgen er (for $k \neq 1$)

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Hvis $|k|<1$ vil $k^n \to 0$ når $n \to \infty$.

Dvs når $|k|<1$ vil $s_n \longrightarrow a \cdot \frac{-1}{k-1} = \frac{a}{1-k}$

Hvis $|k| \geq 1$ (og $k \neq 1$) er k^n ikke konv. !

Dvs når $|k| \geq 1$ (og $k \neq 1$) er $\{s_n\}$ ikke konv !

$k=1$: $\sum a k^{i-1} = a + a + a + \ldots$, ikke konv. (for $a \neq 0$)

Rentetilskrivning (10.1-2)

Et beløb S_0 indsættes i banken til en årlig rente r.
Ved årlig rentetilskrivning er beløbet efter et år så vokset til:

$$S_0(1+r)$$

Hvis der tilskrives renter n gange om året (n årlige *terminer*)
er *terminsrenten* $\frac{r}{n}$ og det oprindelige beløb S_0
er så efter en termin blevet til:

$$S_0(1+\frac{r}{n})$$

Efter et år er beløbet blevet til:

$$S_0(1+\frac{r}{n})^n$$

Og efter t år er beløbet blevet til:

$$S_0(1+\frac{r}{n})^{nt}$$

Ved n årlige rentetilskrivninger er den *effektive årlige rente* R givet ved ((10.1.2), s. 377):

$$(1+R) = (1+\frac{r}{n})^n$$

Det kan vises (exercise 10.2.6, ektra udfordring til uge 44) at $(1+\frac{r}{n})^n$ er voksende i n.

Derfor: Jo flere årlige rentetilskrivinger, jo højere effektiv rente!

Kontinuert rentetilskrivning

Beløb S_0 er efter et år med n rentetilskrivninger blevet til:

$$S_0(1+\tfrac{r}{n})^n$$

Hvad sker der i grænsen $n \to \infty$? ("kontinuert rentetilskrivning")

Idet vi sætter $h = \frac{r}{n}$ får vi:

$$(1+\frac{r}{n})^n = (1+h)^{\frac{1}{h}\cdot r} = \left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^r$$

Når $n \to \infty$ vil $h \to 0$. Derfor:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n = \left[\underbrace{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}}_{=e}\right]^r = [e]^r = e^r$$

Vigtig grænseværdi, se næste slide!

Beløb S_0 er efter et år med kontinuert rentetilskrivning altså blevet til:

$$S_0 e^r$$

Efter t år: $S_0(e^r)^t = S_0 e^{rt}$

Kont. rentetilskr: Højeste eff. rente!

En vigtig grænseværdi [(6.11.4), s.216)]:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e}$$

Bevis: Lad $g(x) = \ln(x)$.

$$\ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right) = \frac{1}{h}\ln(1+h) = \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$$

$$= \frac{g(1+h) - g(1)}{h} \xrightarrow{h\to 0} g'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\underline{(1+h)^{\frac{1}{h}}} = e^{\ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)} \underline{\xrightarrow{h\to 0}} e^{1} = \underline{e}$$

$\square$