Matematik A E2020
Uge 40, Forelæsning 1

Afsnit 8.1-8.5

Optimering (1 variabel)

Middelværdisætningen

Overblik

- Dagens stof:
  - 8.1: (Globale) ekstremumspunkter, nødvendig førsteordensbetingelse
  - 8.2: Simple tests til bestemmelse af ekstremumspunkter
  - 8.4: "Ekstremværdisætningen" – ekstremumspunkter på afsluttet, begrænset interval

    "Middelværdisætningen"
  - 8.3+5: Diverse økonomiske eksempler (læs selv)

- Næste gang (onsdag):
  - 8.6: Lokale ekstremumspunkter (herunder tests)
  - 8.7: Vendetangenter, mere om konkave/konvekse fkt
  - Et nyttemaksimeringsproblem!

(Globale) Ekstremumspunkter (8.1)

Lad $f : D \to \mathbb{R}$

$c \in D$ er et **maximumspunkt** for f hvis (og kun hvis)

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{for alle } x \in D.$$

$f(c)$ kaldes **maksimumsværdien** for f.

$d \in D$ er et **minimumspunkt** for f hvis (og kun hvis)

$$f(d) \leq f(x) \quad \text{for alle } x \in D.$$

$f(d)$ kaldes **minimumsværdien** for f.

Eksempel: $f(x) = e^{2x} - 2e^x - 3$, hvor $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = (e^x)^2 - 2e^x + 1 - 4 = (e^x - 1)^2 - 4 \geq -4$

$f(0) = -4$. Altså må $x=0$ være min-pkt (og det eneste).

$f(x) \to \infty$ når $x \to \infty$. Derfor ingen max-pkt.

Nødv. Førsteordensbetingelse/FOC

Lad $f : I \to \mathbb{R}$, hvor I er interval.

$x \in I$ er et **indre punkt**, hvis det ikke er et endepunkt.

Antag f er differentiabel.

$c \in I$ er et **kritisk punkt**/stationært punkt, hvis $f'(c) = 0$.

Sætning (8.1.1):
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være differentiabel og c være et indre punkt i I.
Hvis c er et ekstremumspunkt (maksimum eller minimum),
så er det et kritisk punkt:

$$f'(c) = 0 \quad \text{(Førsteordensbetingelse/FOC)}$$

Bevis: Antag c er et maksimumspunkt...

$f(c) \geq f(c+h)$, dvs $f(c+h) - f(c) \leq 0$ for alle h

For $h > 0$: $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

For $h < 0$: $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

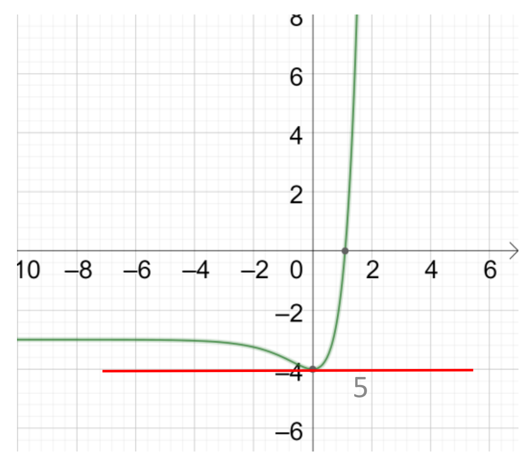
Altså er $f'(c) = 0$ $\square$

Eksempel (igen): $f(x) = e^{2x} - 2e^x - 3$, hvor $x \in \mathbb{R}$

CHECK at $x=0$ er kritisk pkt.

$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$

$f'(0) = 2e^0 - 2e^0 = 0$ ✓



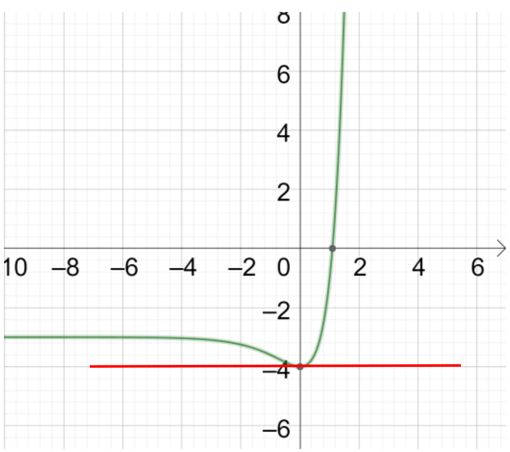
Simpel test for ekstr.-pkt (8.2)

Sætning (8.2.1):
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være diff. og c være et (indre) kritisk pkt.

Hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x < c$ og $f'(x) \leq 0$ for alle $x > c$, så er c et maksimumspunkt.

Hvis $f'(x) \leq 0$ for alle $x < c$ og $f'(x) \geq 0$ for alle $x > c$, så er c et minimumspunkt.

$f(x) = e^{2x} - 2e^x - 3$



$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$

$$\begin{cases} < 0 \text{ for } x < 0 \ (e^x < 1) \\ > 0 \text{ for } x > 0 \ (e^x > 1) \end{cases}$$

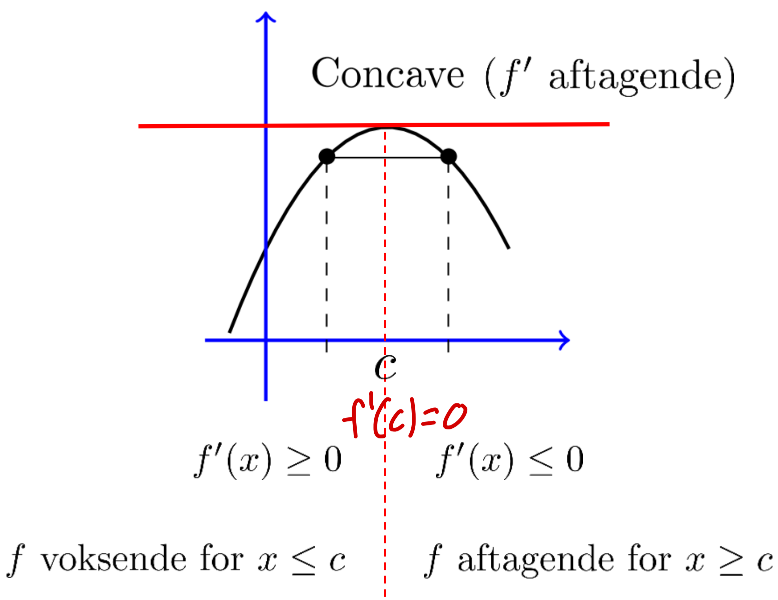
Altså er $x = 0$ et min-pkt.

Konvekse/konkave fkt

Sætning (8.2.2):
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være diff. og c være et (indre) kritisk pkt.

Hvis f er konkav ($f''(x) \leq 0$), så er c et maksimumspunkt.

Hvis f er konveks ($f''(x) \geq 0$), så er c et minimumspunkt.



Ekstremværdisætningen (8.4)

Ekstremværdisætningen (8.4.1):

En kontinuert funktion f på et afsluttet begrænset interval $[a, b]$ har et maksimumspunkt og et minimumspunkt.

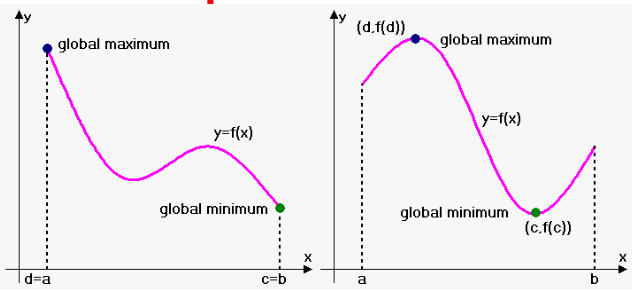
Der findes altså $c, d \in [a, b]$ så:

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \quad \text{for alle } x \in [a, b].$$

For en differentiabel fkt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kan vi finde alle ekstremumspunkter ved at "lede" blandt:

1) alle kritiske punkter for f i (a, b)

2) endepunkterne a og b



Øvelse

Find alle ekstremumspunkter for funktionen $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ på hvert af følgende intervaller: $[-2,1]$ og $[1,2]$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2+2)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Kritiske pkt: $\underline{x=0}$ $\quad \left(f(0) = \frac{2}{1} = 2\right)$

$[-2,1]$: $f(-2) = \frac{6}{5}$ $\quad$ $x=-2$ er min-pkt

$f(1) = \frac{3}{2}$ $\quad$ $x=0$ er max.pkt

$[1,2]$: $f(2) = \frac{6}{5}$ $\quad$ $x=2$ er min-pkt

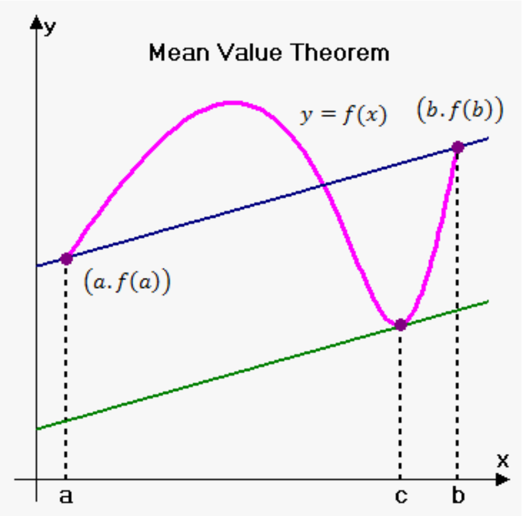
$f(1) = \frac{3}{2}$ $\quad$ $x=1$ er max-pkt.

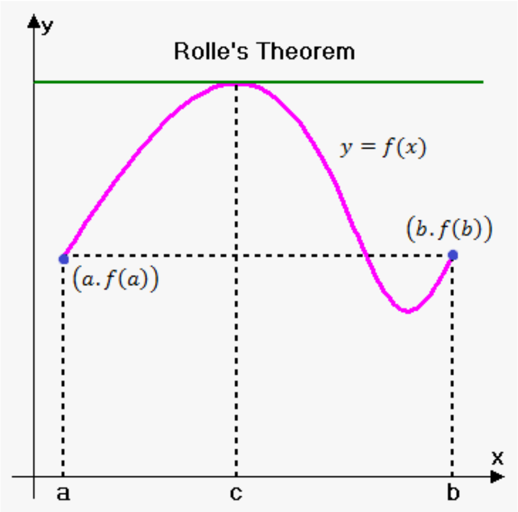
Middelværdisætningen (s. 297-9)

Middelværdisætningen (8.4.2):
Lad f være en funktion, der er kontinuert på det afsluttede og begrænsede interval $[a, b]$ og differentiabel på det åbne interval (a, b).

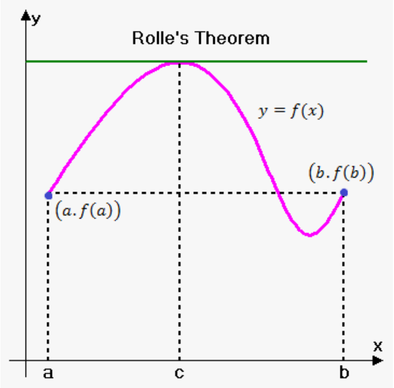
Så findes (mindst) et $x^* \in (a, b)$ så:

$$f'(x^*) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$





Rolles sætning:
Lad g være en fkt, der er kontinuert på $[a, b]$, differentiabel på (a, b) og opfylder $g(a) = g(b)$.
Så findes et $x^* \in (a, b)$ så $g'(x^*) = 0$



Bevis: Huis g er konstant er udsagnet trivielt

Huis g ikke er konstant findes $x \in (a, b)$ så
1) $g(x) > g(a) = g(b)$ eller 2) $g(x) < g(a) = g(b)$

Huis 1): Så er max-pkt for g på $[a, b]$ ikke et af endepkt.

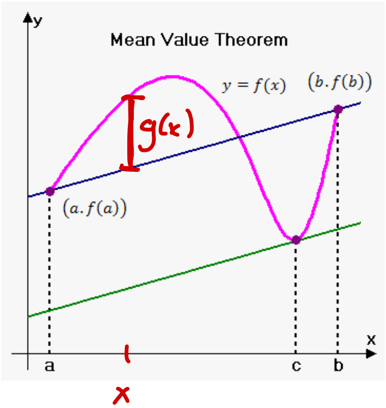
Lad $x^* \in (a, b)$ være et max-pkt (eksisterer pga ekstremværdisætn

Så må $g'(x^*) = 0$. (FOC)

Huis 2): Tilsv., kig på min-pkt

$\square$

Bevis for Middelværdisætn. vha Rolles sætning:



Lad f opfylde antagelserne i MVS.

Definér g på $[a,b]$:

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right)$$

$g(a) = g(b) = 0$ og g er kont på $[a,b]$ og diff på (a,b), da f er.

ROLLE: Der findes $x^* \in (a,b)$ så $g'(x^*) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dvs $f'(x^*) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, altså $f'(x^*) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\square$

Påstand fra afsnit 6.3 (uge 39 forelæsning 1):

$f'(x) \geq 0$ for alle x i interval I $\quad\Leftrightarrow\quad$ f er voksende i I

Implikationen $\Rightarrow$ kan nu bevises vha. Middelværdisætningen:

Antag $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in I$

Vis: f voksende, dvs $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Lad $x_1 < x_2$

Brug MVS på $[x_1, x_2]$:

Der findes $x^* \in (x_1, x_2)$ så

$$f'(x^*) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Da $f'(x^*) \geq 0$ (pr. antagelse) må vi have:

$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, altså $f(x_2) \geq f(x_1)$ $\square$

Øvelse

Betragt funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet $[0, 4]$.
Find $x^* \in (0, 4)$ så:

$$f'(x^*) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0}$$

(pingo.coactum.de, 185415)

(MVS sikrer, at et sådant x^* eksisterer, men hjælper os ikke med at finde det)

Da $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ bliver ligningen:

$$\frac{1}{2\sqrt{x^*}} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Heraf fås $\sqrt{x^*} = 1$, altså $\underline{x^* = 1}$.

Extra: Gør det tilsvarende for $g(x) = \ln(2x)$ på intervallet $[1, e]$.

$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$, så ligningen bliver:

$$\frac{1}{x^*} = \frac{\ln(2e) - \ln(2 \cdot 1)}{e-1} = \frac{\ln(2) + \ln(e) - \ln(2)}{e-1}$$

$$= \frac{1}{e-1}$$

Heraf fås umiddelbart $\underline{x^* = e-1}$