Matematik A E2020
Uge 47, Forelæsning 1

Afsnit 11.8, 12.6-7

Funktioner af flere variable:

Partielle elasticiteter,

homogene og homotetiske funktioner

BEMÆRK: FORELÆSNING ONSDAG KUN ONLINE!

Lidt overblik

- Partielle elasticiteter (11.8)
  - Generalisering af elasticitetsbegrebet til funktioner af flere variable

- Homogene og homotetiske funktioner (12.6-7)
  - Typer af funktioner, der ofte dukker op i økonomisk teori
  - Vi fokuserer mest på fkt af 2 variable, men generalisering til n variable er "lige ud ad landevejen"

- Fra næste forelæsning: Optimering/ekstremumsbestemmelse for funktioner af flere variable

- Husk prøveeksamen onsdag d. 2. dec.!!!
  - "Pensum": Stoffet i forelæsningsplanen til og med denne uge (uge 47).

Elasticitet, én variabel

(Afsnit 7.7, uge 41 forelæsning 2)

For en differentiabel funktion f med $f(x) \neq 0$ er elasticiteten mht x defineret ved:

$$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

Husk fortolkning: Elasticiteten giver os (approximativt) den procentvise ændring i funktionsværdien ved en ændring på 1% i x-værdien

NB:

- Differentialkvotienter: Absolutte ændringer
- Elasticiteter: Relative ændringer!

Partielle elasticiteter (11.8)

Lad $z = f(x, y)$ være funktion af to variable.
De partielle elasticiteter mht hhv x og y er (se (11.8.1), s. 437):

$$\boxed{\mathrm{El}_x\, z = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{El}_y\, z = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}}$$

Alternativ notation:

$$\mathrm{El}_x\, f(x,y) = \frac{x}{f(x,y)} f_1'(x,y) \quad \text{og} \quad \mathrm{El}_y\, f(x,y) = \frac{y}{f(x,y)} f_2'(x,y)$$

Fortolkning som tidligere!
(Men husk at y holdes fast, når vi finder El_x og omvendt)

Definitionen kan umiddelbart generaliseres til fkt af n variable

Bevis: $\ln(z) = \ln(f(e^{\ln x}, e^{\ln y}))$
Brug kædereglen

Formler, der kan være nyttige:

$$\boxed{\mathrm{El}_x\, z = \frac{\partial \ln(z)}{\partial \ln(x)} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{El}_y\, z = \frac{\partial \ln(z)}{\partial \ln(y)}}$$

(elasticiteter som (dobbelt-)logaritmiske afledede)

Eksempel: $z = f(x,y) = x^2 y^3 e^{x+y}$ $(x, y > 0)$

$$\ln(z) = \ln(x^2) + \ln(y^3) + \ln(e^{x+y}) = 2\ln(x) + 3\ln(y) + \underset{e^{\ln(x)}}{\overset{}{x}} + \underset{e^{\ln(y)}}{y}$$

$$\mathrm{El}_x\, z = \frac{\partial \ln(z)}{\partial \ln(x)} = 2 + 0 + e^{\ln(x)} + 0 = 2 + x$$

Prøv selv:

$$\mathrm{El}_y\, z = \frac{\partial \ln(z)}{\partial \ln(y)} = 0 + 3 + 0 + e^{\ln(y)} = 3 + y$$

+Udregn $\mathrm{El}_y\, z$ vha definitionen $\left(\mathrm{El}_y\, z = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

$$z = x^2 y^3 e^{x+y}$$

$$El_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\left(3y^2 e^{x+y} + y^3 e^{x+y}\right) = x^2 y^2 e^{x+y}(3+y)$$

$$El_y z = \frac{\cancel{y}}{\cancel{x^2 y^3 e^{x+y}}} \cdot \cancel{x^2 y^2 e^{x+y}}(3+y) = 3+y \quad \checkmark$$

Økonomisk eksempel

Efterspørgselsfunktion (vare i) for forbruger: $D_i(m, p_i, p_j)$

Indkomstelasticitet: $\mathrm{El}_m\, D_i = \dfrac{m}{D_i}\dfrac{\partial D_i}{\partial m}$

Egen-priselasticitet: $\mathrm{El}_{p_i}\, D_i = \dfrac{p_i}{D_i}\dfrac{\partial D_i}{\partial p_i}$

Kryds-priselasticitet: $\mathrm{El}_{p_j}\, D_i = \dfrac{p_j}{D_i}\dfrac{\partial D_i}{\partial p_j}$

Homogene fkt, 2 variable (12.6)

Lad $f(x,y)$ være funktion af to variable.

f siges at være homogen af grad k, hvis:

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y) \qquad \text{for alle } (x,y) \in D \text{ og } t > 0$$

Eksempler:

$f(x,y) = x + 2y + \sqrt{x^2+y^2}$

$$\underline{f(tx,ty)} = tx + 2(ty) + \sqrt{(tx)^2+(ty)^2} = tx + t2y + \sqrt{t^2(x^2+y^2)}$$

$$= tx + t2y + t\sqrt{x^2+y^2} = t\left(x+2y+\sqrt{x^2+y^2}\right) = \underline{tf(x,y)}$$

f Homogen af grad $k=1$.

$F(L,K) = AL^aK^b \qquad (a,b>0)$

$$\underline{F(tL,tK)} = A(tL)^a(tK)^b = \ldots = t^{a+b}(AL^aK^b) = \underline{t^{a+b}F(L,K)}$$

F er homogen af grad $k = a+b$.

Eulers sætning (Thm 12.6.1, s. 464):

$f(x, y)$ er homogen af grad k hvis og kun hvis

$$x f_1'(x, y) + y f_2'(x, y) = k f(x, y) \quad \text{for alle } (x, y) \in D$$

Vi viser: Hvis f homogen af grad k, så $x f_1'(x, y) + y f_2'(x, y) = k f(x, y)$

Lad $(x, y) \in D$. Da har vi for alle $t > 0$:

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

Kæderegel!!

Differentiér begge sider mht t:

$$x f_1'(tx, ty) + y f_2'(tx, ty) = k t^{k-1} f(x, y) \qquad t > 0$$

Sæt $t = 1$:

$$x f_1'(x, y) + y f_2'(x, y) = k f(x, y)$$

NB: Se også egensk. for homogen fkt i (12.6.3-5), s. 464-5

Især: $f_i'(x, y)$ homogen af grad $k - 1$

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y)$$

$$xf_1'(x,y) + yf_2'(x,y) = kf(x,y)$$

Øvelser:

1) Vis, at nedenstående fkt er homogen, og bestem homogenitetsgraden k
(en del af opgave 1, spm 2 fra eksamen juni 2019)

pingo.coactum.de
(185415)

$$f(x,y) = \frac{2x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x}}{x^2+2y^2} \qquad (\text{hvor } x, y > 0)$$

$$\underline{f(tx,ty)} = \frac{2(tx)\sqrt{ty} - 3(ty)\sqrt{tx}}{(tx)^2 + 2(ty)^2} = \frac{2tx\sqrt{t}\sqrt{y} - 3ty\sqrt{t}\sqrt{x}}{t^2x^2 + 2t^2y^2}$$

$$= \frac{t\sqrt{t}(2x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x})}{t^2(x^2+2y^2)} = \underline{t^{-\frac{1}{2}} f(x,y)} \qquad \underline{\underline{k = -\frac{1}{2}}}$$

2) (Hvis tid!) Verificér, at ligningen i Eulers sætning gælder for

$$f(x,y) = x + 2y + \sqrt{x^2+y^2} \qquad (\text{slide 7: homogen af grad } k = 1)$$

$$f_1'(x,y) = 1 + 2x\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_2'(x,y) = 2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$xf_1' + yf_2' = x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + y\left(2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= x + 2y + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

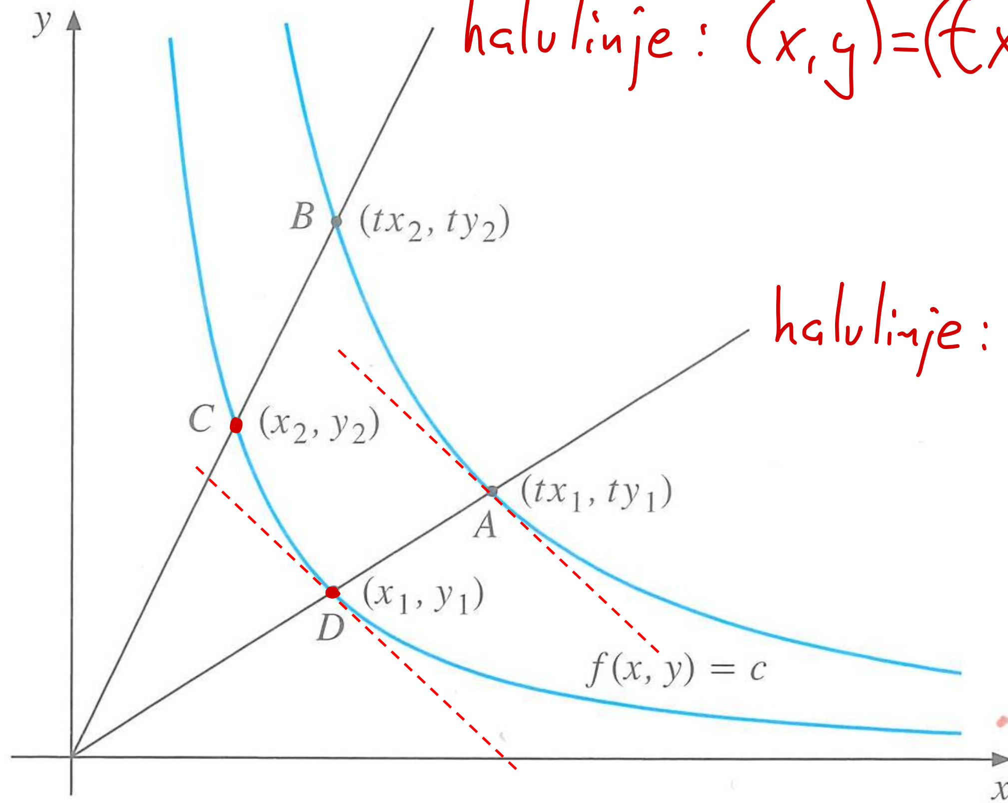
$$= x + 2y + \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= f(x,y)$$

Homogene funktioner og niveau-kurver (s. 466-7)

$f(x,y)$ homogen af grad k.

halvlinje: $(x,y)=(tx_2,ty_2)$, $t>0$



halvlinje: $(x,y)=(tx_1,ty_1)$, $t>0$

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2) \Rightarrow f(tx_1,ty_1)=t^k f(x_1,y_1)=t^k f(x_2,y_2)=f(tx_2,ty_2)$$

f_1' og f_2' homog. af grad $k-1$.

Hældning på niveau-kurver er den samme langs halvlinie fra $(0,0)$

$$\text{hældn i } A = -\frac{f_1'(tx_1,ty_1)}{f_2'(tx_1,ty_1)} = -\frac{\cancel{t^{k-1}} f_1'(x_1,y_1)}{\cancel{t^{k-1}} f_2'(x_1,y_1)} = -\frac{f_1'(x_1,y_1)}{f_2'(x_1,y_1)} = \text{hældn. i } D.$$

Homog. og homotetiske fkt (12.7)

Definition af homogene fkt kan umiddelbart udvides til n variable:

$$\boxed{f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{for alle } (x_1, \ldots, x_n) \in D \text{ og } t > 0}$$

Teknisk detalje:

Definitionsmængden for en homogen funktion skal være en *kegle*

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ er en *kegle* hvis

$$(x_1, \ldots, x_n) \in D \quad \Rightarrow \quad (tx_1, \ldots, tx_n) \in D \ \text{ for alle } t > 0$$

Eulers sætning, n variable (Thm 12.7.1, s. 469):

$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$ er homogen af grad k hvis og kun hvis

$$x_1 f_1'(\mathbf{x}) + \ldots + x_n f_n'(\mathbf{x}) = k f(\mathbf{x}) \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in D$$

Homotetiske funktioner

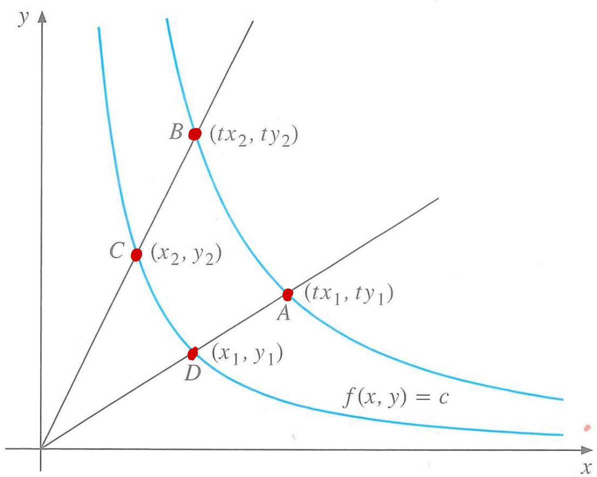
NB: Vi fokuserer på fkt af 2 variable, men alt kan generaliseres til n variable

Lad $f(x, y)$ være fkt defineret på kegle $K \subseteq \mathbb{R}^2$

f siges at være *homotetisk* hvis (for alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$):

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \quad \Rightarrow \quad f(tx_1, ty_1) = f(tx_2, ty_2) \text{ for alle } t > 0$$

Grafisk:



Hvis f er homogen, så er f homotetisk

Sætning (Thm 12.7.2, s. 472):

Lad $f(x, y)$ være en homogen fkt (af vilkårlig grad k).
Lad $H(z)$ være en strengt voksende fkt af én variabel.
Så er den sammensatte funktion $F(x, y) = H(f(x, y))$ homotetisk.

Eksempel: $F(x, y) = xy + 1$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ er homotetisk, men ikke homogen

$f(x,y) = xy$ homogen af grad $k=2$

$H(z) = z+1$ strengt voksende

Af sætningen: $\underbrace{H(f(x,y))}_{= F(x,y)} = H(xy) = xy+1$ homotetisk

$F(tx, ty) = (tx)(ty) + 1 = t^2 xy + 1 \neq t^k(xy+1)$

Altså er F <u>ikke</u> homogen !