Matematik A E2020
Uge 49, Forelæsning 1+2

Afsnit 14.1-4

Funktioner af flere variable:

Optimering med bibetingelser,

“Lagrange-metoden”

Lidt overblik

- **Først lidt om online eksamen**
  - Mere eksamensforberedelse næste uge!

<u>Stoffet denne uge (NB: 14.5-6 udgår af pensum):</u>

- **Optimering med bibetingelser!**

  En ekstrem vigtig type af optimeringsproblemer i økonomi, idet der i de fleste økonomiske modeller indgår forskellige økonomiske aktører, som antages at optimere givet deres muligheder/begrænsninger (fx forbruger med budgetbetingelse, virksomhed med teknologiske begrænsninger,…)

- **Lagrange-metoden** til løsning af optimeringsproblemer med bibetingelser (givet ved ligninger)
  - Fokus: Anvendelse af metoden på problemer med 2 variable, 1 bibetingelse

"Lagrange-metoden" (14.1)

Eksempler på optimering med bibet. i økonomi:

- Nyttemaksimeringsproblem for forbruger

$$\boxed{\max_{x,y} \; u(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad px + qy = m}$$

- Omkostningsminimeringsproblem for virksomhed
  - Ønsker at producere outputmængde y billigst muligt
  - Eneste inputs er arbejdskraft (L) og kapital (K)
  - Produktionsfunktion F(L,K)
  - w er pris på arbejdskraft, r er (leje)pris på kapital

$$\boxed{\min_{L,K} \; wL + rK \quad \text{under bibet.} \quad F(L,K) = y}$$

Generelt optimeringsproblem (2 var) med én bibet.:

$$\boxed{\max_{x,y} \left(\min_{x,y}\right) f(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad g(x,y) = c}$$

"Find ekstremumspunkter for $f(x,y)$ givet bibetingelsen $g(x,y) = c$ "

- Løsningsmetode, der virker i mange tilfælde:
  - Brug bibetingelsen til at isolere y og dermed udtrykke y som funktion af x (eller udtryk x som funktion af y)
  - Indsæt dette på y's plads i $f(x,y)$
  - Så har vi ekstremumsproblem med kun én variabel

Med denne metode har vi tidl. løst nyttemax-problemet:

$$\boxed{\max_{x,y>0} \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

Nu løsn. vha ny metode: **Lagrange-metoden!** (s. 535)

(i) Opstil *Lagrange-funktionen* $\mathcal{L}(x,y)$ med *Lagrange-multiplikatoren* λ

$$\mathcal{L}(x,y) = \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) - \lambda\left(px + qy - m\right)$$

(ii) Differentiér $\mathcal{L}(x,y)$ mht x og y

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = \frac{1}{3}\frac{1}{x} - \lambda p$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = \frac{2}{3}\frac{1}{y} - \lambda q$$

(iii) Opstil de tre *førsteordens-betingelser* (nødv. bet. for løsning!)

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = \frac{1}{3}\frac{1}{x} - \lambda p = 0$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = \frac{2}{3}\frac{1}{y} - \lambda q = 0$$

+ bibetingelsen: $px + qy = m$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0\right]$$

(iv) Løs de tre ligninger for de ubekendte x, y og λ

De tre førsteordensbetingelser:

$$\boxed{\frac{1}{3}\frac{1}{x} - \lambda p = 0 \qquad \frac{2}{3}\frac{1}{y} - \lambda q = 0 \qquad px + qy = m}$$

$\frac{1}{3}\frac{1}{x} = \lambda p$ $\qquad$ $\frac{2}{3}\frac{1}{y} = \lambda q$

$(\lambda \neq 0)$

$$\frac{\frac{2}{3}\frac{1}{y}}{\frac{1}{3}\frac{1}{x}} = \frac{\cancel{\lambda} q}{\cancel{\lambda} p} \Leftrightarrow 2\frac{x}{y} = \frac{q}{p} \Leftrightarrow \underline{x = \frac{1}{2}\frac{q}{p}y}$$

Sæt ind i bibet: $p\left(\frac{1}{2}\frac{q}{p}y\right) + qy = m \Leftrightarrow \frac{3}{2}qy = m$

$$\Leftrightarrow \underline{y = \frac{2}{3}\frac{m}{q}}$$

$$\underline{x = \frac{1}{2}\frac{q}{p}\left(\frac{2}{3}\frac{m}{q}\right) = \frac{1}{3}\frac{m}{p}}$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{1}{3}\frac{m}{p}} = \lambda p \Leftrightarrow \underline{\lambda = \frac{1}{m}}$$

Lagrangemetoden er ofte en god metode til løsning af optimeringsproblemer med bibetingelser!

$$\boxed{\max_{x,y}\,(\min_{x,y})\ f(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad g(x,y) = c}$$

- Og den type af problemer støder vi ofte på i økonomi!

(NB: Metoden kan generaliseres til flere var. og flere bibet.)

For det generelle problem er Lagrange-funktionen:

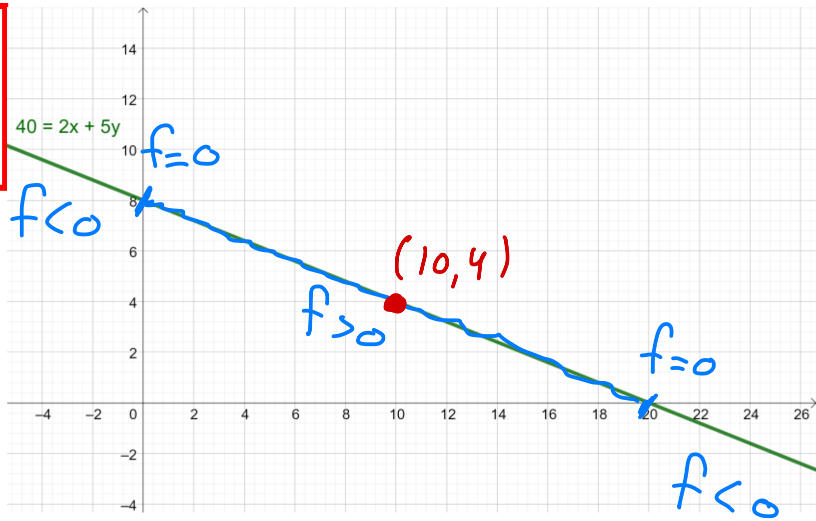
$$\boxed{\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)}$$

Nu: Prøv selv at bruge Lagrangemetoden!

Brug beskrivelse af metoden fra eksemplet fra før eller se s. 535 i bogen

Øvelse: Løs vha Lagrange-metoden

$$\max_{x,y} \; xy \quad \text{u.b.} \quad 2x + 5y = 40$$



- Opstil Lagrangefunktionen

$\mathcal{L}(x,y) = xy - \lambda(2x + 5y - 40)$

- Find den eneste mulige løsning til problemet vha førsteordensbet. ← (pingo.coactum.de, 185415)

$y - 2\lambda = 0, \quad x - 5\lambda = 0, \quad 2x + 5y = 40$

- Prøv at argumentere for, at problemet har en løsning (som så altså må være den fundne mulige løsning)

Fht $x \cdot y$ har max-pkt på det blå linjestykke (Ekstr. værdi sætn.)
Dette max-pkt må være max-pkt for $x \cdot y$ på hele linien.

$$\boxed{\max_{x,y} \; xy \quad \text{u.b.} \quad 2x + 5y = 40}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 2\lambda \\ x &= 5\lambda \end{aligned}\right\} \; y = \frac{2}{5}x$$

Sæt ind i bibetingelse: $2x + 5\cdot\frac{2}{5}x = 40 \iff$

$4x = 40 \iff \underline{x = 10}$

$$\underline{y = \frac{2}{5}\cdot 10 = 4}$$

$$\left(\lambda = \frac{4}{2} = 2\right)$$

Værdifkt og Lagrangemultiplikatoren (14.2)

$$\boxed{\max_{x,y} \cancel{(\min_{x,y})} f(x,y) \quad \text{u.b.} \quad g(x,y) = c}$$

- Løsning til problemet:

$$(x^*(c), y^*(c))$$

- Værdifunktion (ekstremumsværdi som fkt af c):

$$f^*(c) = f(x^*(c), y^*(c))$$

- Hvordan afhænger værdifunktion af c? [(14.2.2), s. 540]

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda(c)$$

Den værdi af λ, der sammen med $x^*(c)$ og $y^*(c)$ løser førsteordensbet.

  - Lagrangemultiplikatoren giver vigtig info!

Eksempler: Nyttemax. og Omkostningsmin.

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

Løsn. fra tidl: $x^*(m) = \frac{1}{3}\frac{m}{p}, \quad y^*(m) = \frac{2}{3}\frac{m}{q} \quad \text{og} \quad \lambda(m) = \frac{1}{m}$

Værdifkt: $u^*(m) = u(x^*(m), y^*(m))$

Vi får så (approximativt): Ved en indkomst på m kr. vil 1 kr. ekstra øge forbrugerens nytte med $\lambda(m) = \frac{1}{m}$

$$\boxed{\min_{L,K} \ wL + rK \quad \text{under bibet.} \quad F(L,K) = y}$$

Antag vi har fundet løsn. vha Lagrange: $L^*(y), \quad K^*(y) \quad \text{og} \quad \lambda(y)$

$\lambda(y)$ fortæller os (approx.), hvor meget omkostningen vil stige, hvis virksomheden skal øge sit output med en enhed (fra y til $y+1$)

“Flere løsningskandidater” (14.3)

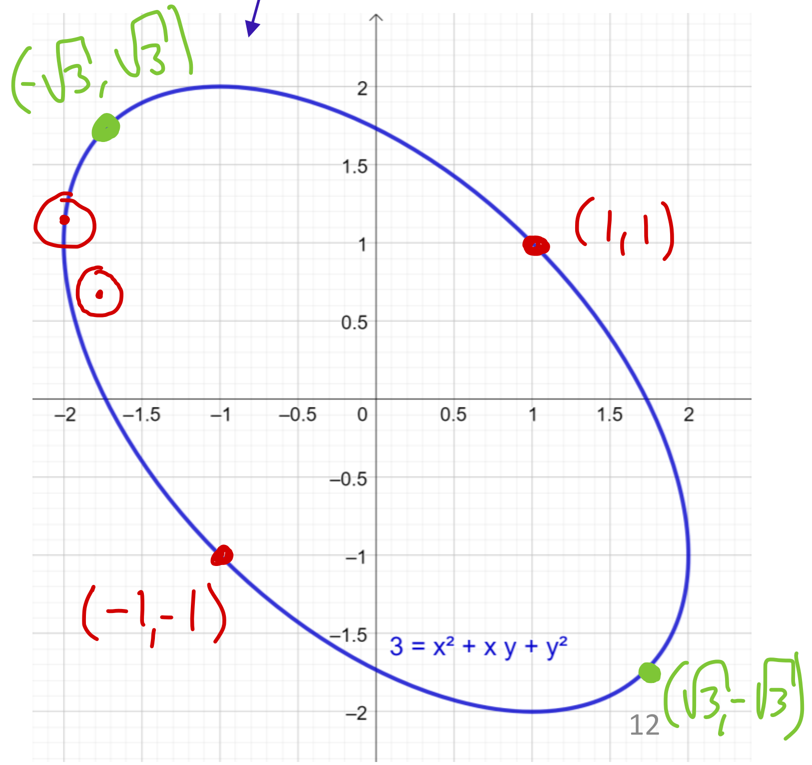
Betragt problemerne:

$$\boxed{\max_{x,y}\,(\min_{x,y})\; x^2 + y^2 \quad \text{u.b.} \quad x^2 + xy + y^2 = 3}$$

Bemærk:
Her kan vi ikke isolere y (eller x) i bibetingelsen

-> Vi er tvunget til at bruge **Lagrange-metoden**

Løsninger eksisterer!
(Ekstremværdisætningen)



$$\max_{x,y} \left(\min_{x,y}\right) x^2 + y^2 \quad \text{u.b.} \quad x^2 + xy + y^2 = 3$$

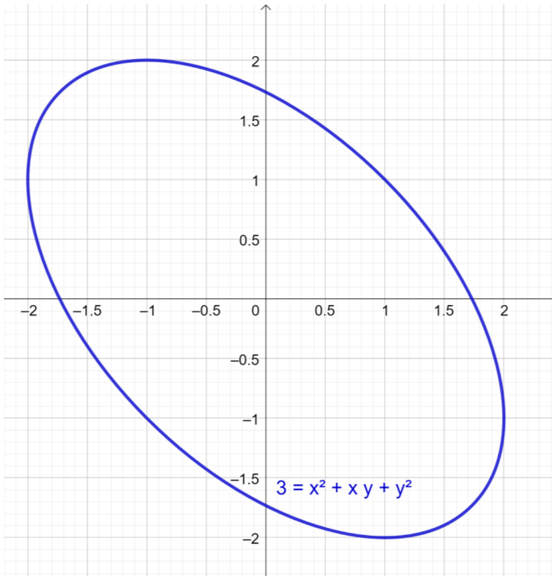
$$\mathcal{L}(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3)$$

FOCs:

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = 2x - \lambda(2x + y) = 0$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = 2y - \lambda(x + 2y) = 0$$

(+ bibetingelsen!)



Træk anden FOC fra den første:

$$2x - 2y - \lambda(2x + y - x - 2y) = 2(x-y) - \lambda(x-y)$$

$$= (2-\lambda)(x-y) = 0$$

Nulreglen: ② $\lambda = 2$ eller ① $x = y$

① Sæt ind i bibet: $x^2 + x \cdot x + x^2 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Dvs 2 løsn: $(1,1)$ og $(-1,-1)$

$$\max_{x,y} \left(\min_{x,y}\right) x^2 + y^2 \quad \text{u.b.} \quad x^2 + xy + y^2 = 3$$

(2) $\lambda = 2$. Sæt ind i første FOC: $2x - 2\cdot(2x+y) = 0$

$\Leftrightarrow -2x - 2y = 0 \Leftrightarrow \underline{y = -x}$

Sæt ind i bibet: $x^2 + x(-x) + (-x)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Dvs 2 løsninger: $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ og $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Ialt 4 løsninger til FOCs!

CHECK Funktionsværdier i disse punkter:

$f(1,1) = f(-1,-1) = 2$

$f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6$

Min-pkt: $(1,1)$ og $(-1,-1)$

Max-pkt: $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ og $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Lidt om teorien bag Lagrange-met. (14.4)

$$\max_{x,y} \, (\min_{x,y}) \; f(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad g(x,y) = c$$

Lagrange's sætning (Theorem 14.4.1, s. 547)

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad f, g være C^1-funktioner på A

Lad (x_0, y_0) være et indre pkt i A og et lokalt ekstremumspunkt for $f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = c$

Antag $g_1'(x_0, y_0)$ og $g_2'(x_0, y_0)$ ikke begge er lig 0

Da findes entydigt tal λ, så (x_0, y_0) opfylder førsteordensbetingelserne:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1'(x,y) &= f_1'(x,y) - \lambda g_1'(x,y) = 0 \quad \text{og} \\ \mathcal{L}_2'(x,y) &= f_2'(x,y) - \lambda g_2'(x,y) = 0 \end{aligned}$$

Kort bevis-skitse (se "An Analytic Argument", s. 546-7):

Antag det betingede ekstr.-pkt opfylder $g_2'(x_0, y_0) \neq 0$

Så definerer $g(x, y) = c$ implicit funktion $y = h(x)$ i omegn af (x_0, y_0)

(Se afsnit 12.3, uge 46 forel. 2)

Betragt så flg funktion af én variabel:

$$k(x) = f(x, h(x))$$

x_0 er ekstremumspunkt for $k(x)$

(da (x_0, y_0) er ekstremumspunkt for $f(x, y)$
under bibetingelsen $g(x, y) = c$)

Derfor må vi have:

$$k'(x_0) = 0$$

Vha kæderegel og implicit differentiation følger
de ønskede førsteordensbetingelser af denne betingelse

Eksamensopg: Opg 3 februar 2020

Opgave 3

Betragt følgende optimeringsproblem med én bibetingelse:

$$\max_{x,y} \; 2x + y \quad \text{under bibetingelsen} \quad x^2 + y^2 = 20\,.$$

(a) Opskriv Lagrangefunktionen $\mathcal{L}(x, y)$ for dette problem, og opstil de tre førsteordens-betingelser.

$(x, y, \lambda) = (4, 2, \frac{1}{4})$

(b) Bestem de to løsninger til førsteordensbetingelserne. $(x, y, \lambda) = (-4, -2, -\frac{1}{4})$

(c) Brug ekstremværdisætningen (*The Extreme Value Theorem*) til at redegøre for, at der findes en løsning til optimeringsproblemet.

Bestem den entydige løsning til problemet og den tilhørende maksimumsværdi.

a) $\mathcal{L}(x,y) = 2x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 20)$

FOCs: $\mathcal{L}_1'(x,y) = 2 - \lambda \cdot 2x = 0$, dvs. $\underline{2\lambda x = 2}$

$\mathcal{L}_2'(x,y) = 1 - \lambda \cdot 2y = 0$, dvs. $\underline{2\lambda y = 1}$

Bibetingelsen: $\underline{x^2 + y^2 = 20}$

$$\max_{x,y}\ 2x+y \quad \text{under bibetingelsen} \quad x^2+y^2=20\,.$$

b) Af første FOC ses, at $\lambda \neq 0$

Derfor får vi af de to første FOCs: $x=\frac{1}{\lambda}$, $y=\frac{1}{2\lambda}$

Sæt ind i bibet.: $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2=20 \iff 4+1=20\cdot 4\lambda^2$

$\iff \lambda^2=\frac{5}{80}=\frac{1}{16}$

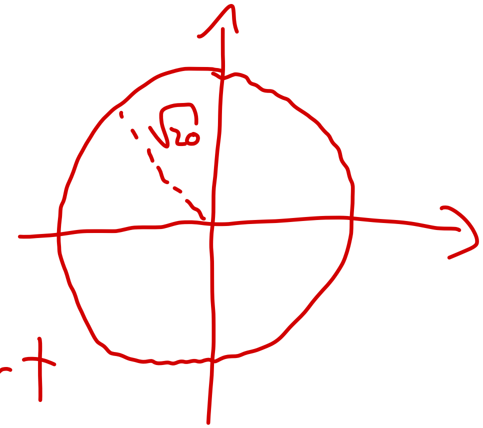
$\iff \underline{\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{16}}=\pm\frac{1}{4}}$

Så fås x og y: $\underline{x=\frac{1}{\lambda}=\pm 4}$ og $\underline{y=\frac{1}{2\lambda}=\pm 2}$

Altså 2 løsninger: $(x,y,\lambda)=(4,2,\frac{1}{4})$ og
$\underline{(x,y,\lambda)=(-4,-2,-\frac{1}{4})}$

$$\max_{x,y}\ 2x+y \quad \text{under bibetingelsen} \quad x^2+y^2=20\,.$$

c) Mængden vi maksimerer på er en cirkel med centrum $(0,0)$ og radius $\sqrt{20}$.



Det er en kompakt mgd. (afsl. og begr.)

Fkt $f(x,y)=2x+y$ er kontinuert

Altså har f et max-pkt på mængden iflg ekstremværdisætn.

Dette max-pkt må opfylde FOCs.

$f(4,2)=10$

$f(-4,-2)=-10$

Altså er vores max-pkt $\underline{(x,y)=(4,2)}$

Max-værdien er $\underline{f(4,2)=10}$

Eksamensopgaven grafisk: