1 Tre Korte Spørgsmål

(a) Forklar hvad det betyder, at en præferencerelation $\succeq$ er rationel. Giv et eksempel på en ikke rationel præferencerelation, og forklar hvorfor at den ikke er rationel.

Svar: Præferencerelationen $\succeq$ er rationel for forbrugsmulighedsområdet X, hvis den er:

i. Fuldstændig, dvs. $\forall A, B \in X : A \succeq B \vee B \succeq A$

ii. Transitiv, dvs. $\forall A, B, C \in X : A \succeq B \wedge B \succeq C \Rightarrow A \succeq C$

Ét eksempel på en ikke rationel præferencerelation i en verden med kun pærer og bananer er: »A foretrækkes svagt fremfor B, hvis A både indholder mindst lige så mange pærer som B og mindst lige så mange bananer som B«. Denne præferencerelation er ikke fuldstændig, da vi ikke altid har enten $A \succeq B$ eller $B \succeq A$.

(b) Betragt produktionsfunktionen $f(\ell, k) = \min\{\alpha\ell, \alpha k\}^\gamma$, $\alpha > 0$. For hvilke γ udviser produktionsfunktionen faldende skalaafkast?

Svar: Vi har

$$f(\lambda\ell, \lambda k) = \min\{\lambda\alpha\ell, \lambda\alpha k\}^\gamma = (\lambda \min\{\alpha\ell, \alpha k\})^\gamma = \lambda^\gamma f(\ell, k)$$

Produktionsfunktionen udviser faldende skalaafkast for $\gamma \in (0, 1)$ fordi

$$\forall \lambda > 1, \gamma \in (0, 1) : \ f(\lambda\ell, \lambda k) = \lambda^\gamma f(\ell, k) < \lambda f(\ell, k)$$

(c) Opskriv Slutsky-ligningen for ændringen i en forbrugers efterspørgsel efter vare i ved en marginal prisstigning på vare i. Antag, at indkomsten er eksogen. Forklar kort den økonomiske betydning af hvert enkelt led i ligningen.

Svar: Egenpris Slutsky-ligningen er

$$\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)}{\partial p_i}}_{\text{substitutionseffekt}} \underbrace{- \frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}{\partial I} x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}_{\text{indkomsteffekt}}$$

hvor $h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)$ er Hicks-efterspørgslen ved prisvektoren $\boldsymbol{p}$ og nytten $u^\star \equiv u(\boldsymbol{x}^\star(\boldsymbol{p}, I))$.

i. Substitutionseffekt: Efterspørgselsændringen grundet ændret relativ pris, men fasthold nytteniveau.

ii. Indkomsteffekt: Efterspørgselsændring grundet ændret købekraft (ændret realindkomst).

2 Forbrugerteori

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + 2x_2.$$

Forbrugsmulighedsområdet er $(x_1, x_2) \in (0, \infty) \times [0, \infty)$. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, I > 0$. Priser og indkomst måles i kr.

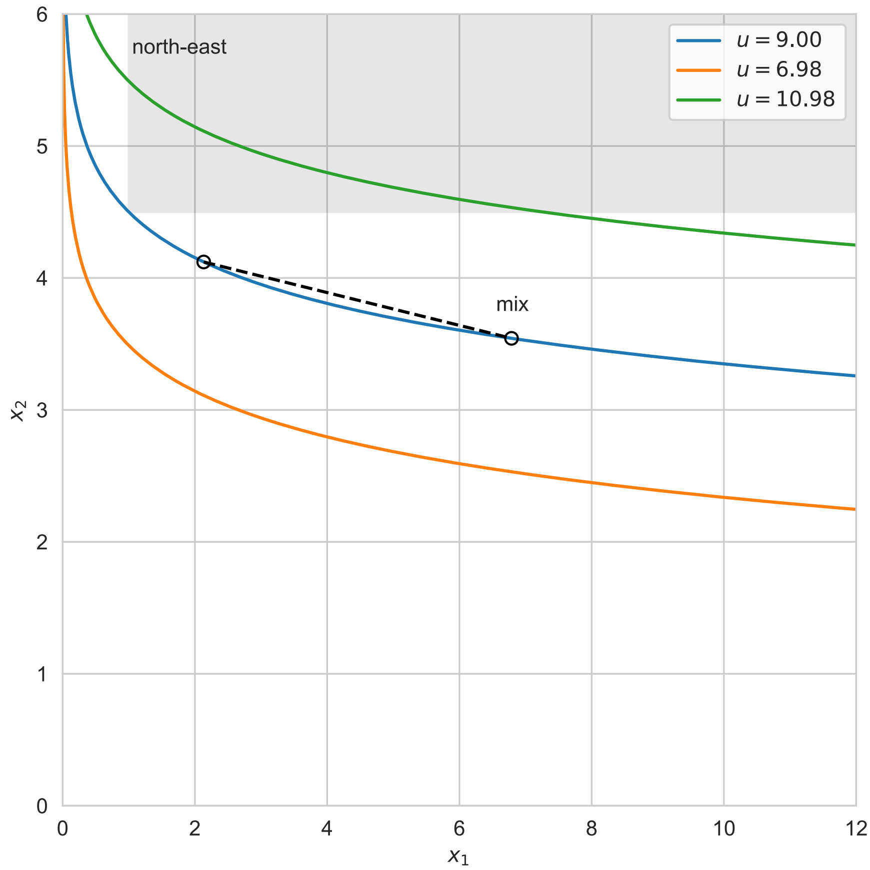
(a) Tegn indifferenskurverne og forklar om forbrugerens præferencer er monotone og/eller strengt konvekse

Svar: $u_0 = \ln x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{u_0 - \ln x_1}{2}$

- *Monotone:* Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde
- *Strengt konvekse:* Lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i det indre af den øvre konturmængde

Se Figur 1.

Figure 1: Indifferenskurver



(b) Bestem hvilke af varerne som er essentielle for forbrugeren

Svar:

$$|MRS(x_1, x_2)| = \left|-\frac{MU_1}{MU_2}\right| = \left|-\frac{\frac{1}{x_1}}{2}\right| = \frac{1}{2x_1}$$

x_1 er essentiel da

$$\lim_{x_1 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \infty, \forall x_2 > 0$$

x_2 er *ikke* essentiel da

$$\lim_{x_2 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| > 0, \forall x_1 > 0$$

(c) Løs forbrugerens nyttemaksimeringsproblem vha. Lagrange.
Lav en grafisk illustration af løsningen.

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1,x_2} \ln x_1 + 2x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone, og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in (0,\infty) \times [0,\infty)$. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \ln x_1 + 2x_2 + \lambda[I - p_1x_1 - p_2x_2]$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) kan beregnes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \lambda p_1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow 2 = \lambda p_2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = I \tag{3}$$

Vi deler nu (1) med (2) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x_1} &= \frac{p_1\lambda}{p_2\lambda} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} &= \frac{p_1}{p_2}x_1 \Leftrightarrow \\ x_1^\star &= \frac{p_2}{2p_1} \end{aligned} \tag{4}$$

Vi indsætter nu (4) i (3) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned} p_1\left(\frac{p_2}{2p_1}\right) + p_2x_2 &= I \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}p_2 + p_2x_2 &= I \Leftrightarrow \\ x_2^\star &= \frac{I - \frac{1}{2}p_2}{p_2} \end{aligned} \tag{5}$$

Bemærk, at vi kun har en indre løsning hvis

$$x_2^\star > 0 \Leftrightarrow \frac{I - \frac{1}{2}p_2}{p_2} > 0 \Leftrightarrow I > \frac{1}{2}p_2 \tag{6}$$

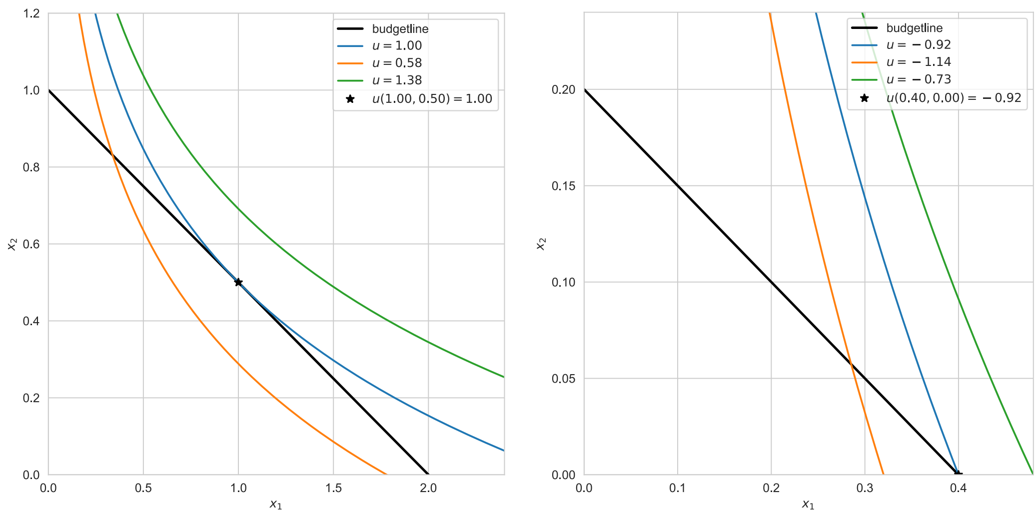
Løsningen er derfor

$$\boldsymbol{x}^\star(p_1,p_2,I)=\begin{cases}\left(\frac{p_2}{2p_1},\frac{I-\frac{1}{2}p_2}{p_2}\right) & \text{hvis } I>\frac{1}{2}p_2\\ \left(\frac{I}{p_1},0\right) & \text{hvis } I\leq\frac{1}{2}p_2\end{cases}\tag{7}$$

Se Figur 2.

Figure 2: Løsning

(a) Indre løsning (b) Randløsning



(d) Opstil forbrugerens udgiftsminimeringsproblem givet nytte u

Svar:

$$E(p_1,p_2,u)=\max_{x_1,x_2} p_1x_1+p_2x_2 \text{ u.b.b. } u(x_1,x_2)\geq u$$

Det kan vises, at forbrugerens Hicks-kompenserede efterspørgselsfunktion er

$$\boldsymbol{h}^\star(p_1,p_2,u)=(h_1^\star(p_1,p_2,u),h_2^\star(p_1,p_2,u))=\left(\frac{p_2}{2p_1},\frac{u-\ln\left(\frac{p_2}{2p_1}\right)}{2}\right).$$

Antag, at priserne i udgangspunktet er $p_1=\frac{1}{2}$ og $p_2=1$ og indkomsten er $I=10$. Regeringen forslår nu en afgiftsstigning, som vil forøge prisen på den første vare med 1 kr. til $p_1'=\frac{3}{2}$.

(e) Hvor meget ekstra skal forbrugeren mindst have i indkomst for at være stillet lige så godt efter afgiftsstigningen som før?

Svar:

i. Marshall efterspørgslen ved de *gamle* priser er $(x_1^\star, x_2^\star) = (1, 9.5)$ og giver nytte $u^\star = \ln(1) + 2 \cdot 9.5 = 19$

ii. Hicks efterspørgslen ved de *nye* priser og det gamle nytteniveau er

$$\begin{aligned}(h_1^\star, h_2^\star) = \boldsymbol{h}^\star(p_1', p_2, u^\star) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{19 - \ln\left(\frac{1}{2\frac{3}{2}}\right)}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{19 + \ln(3)}{2}\right) \\ &\approx \left(\frac{1}{3}, 10.05\right)\end{aligned}$$

og medfører en udgift på

$$E(p_1', p_2, u^\star) = p_1' h_1^\star + p_2 h_2^\star \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{19 + \ln(3)}{2} \approx 10.55$$

iii. Forbrugerens påkrævede kompensation er derfor

$$CV = E(p_1', p_2, u^\star) - I \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{19 + \ln(3)}{2} - 10 = \frac{\ln(3)}{2} \approx 0.55$$

3 Produktion

Betragt en virksomhed der producerer et output ved hjælp af to inputs, arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$x = f(\ell, k) = \sqrt{\min\{2\ell, k\}},$$

hvor x er mængden af output, ℓ er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital. Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogent givne.

(a) Opstil virksomhedens omkostningsminimeringsproblem

Svar:

$$C(x, w, r) = \min_{\ell,k} w\ell + rk \text{ u.b.b. } f(\ell, k) = x$$

(b) Løs virksomhedens omkostningsminimeringsproblem

Svar: Vi har oplagt at $k = 2\ell$, da virksomheden ellers køber input som ikke øger output. Videre får vi, at for at producere x kræves $2\ell = k = x^2$. Heraf følger

$$\begin{aligned} l_b^\star(x, w, r) &= \frac{1}{2}x^2 \\ k_b^\star(x, w, r) &= x^2 \\ C(x, w, r) &= w\frac{1}{2}x^2 + rx^2 = \left(\frac{1}{2}w + r\right)x^2 \end{aligned}$$

(c) Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem indirekte ved at bruge omkostningsfunktionen

Svar: Virksomhedens profitmaksimeringsproblem bliver

$$\Pi = \max_x px - C(x, w, r) = \max_x px - \left(\frac{1}{2}w + r\right)x^2$$

Det giver førsteordensbetingelsen

$$p - \frac{\partial C(x, w, r)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow p = 2\left(\frac{1}{2}w + r\right)x \Leftrightarrow x^\star(p, w, r) = \frac{p}{w + 2r}$$

med

$$l(x, w, r) = l_b(x^\star, w, r) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{w + 2r}\right)^2$$

$$k(x, w, r) = k_b(x^\star, w, r) = \left(\frac{p}{w + 2r}\right)^2$$

Bemærk, at profitten er positiv da

$$\Pi = px^\star - \left(\frac{1}{2}w + r\right)(x^\star)^2 = \frac{p^2}{w+2r} - \frac{\frac{1}{2}p^2}{w+2r} = \frac{\frac{1}{2}p^2}{w+2r} > 0$$

Bemærk yderligere, at vi har fundet et maksimum da andenordensbetingelsen er opfyldt

$$\frac{\partial^2[px - C(x,w,r)]}{\partial x^2} = -(w+2r) < 0$$

4 Generel Ligevægt: Produktionsøkonomi

Betragt en produktionsøkonomi med to aktører, én virksomhed og én forbruger, og to forbrugsgoder, fritid f og en generisk forbrugsvare x. Antag, at der eksisterer en produktionsteknologi,

$$y = g(\ell) = \begin{cases} 0 & \ell < 2 \\ \ell - 2 & \ell \geq 2, \end{cases}$$

hvor ℓ input ef arbejdskraft og y er output af den generiske forbrugsvare. Forbrugeren ejer virksomheden, har initialbeholdning $(L, e) \in \mathbb{R}^2_+$, og maksimerer nyttefunktionen

$$u(L - \ell, x) = u(f, x) = \sqrt{f} + \frac{1}{2}x.$$

Antag, at der er fuldkommen konkurrence på både arbejdsmarkedet og varemarkedet.

Lad prisen på forbrugsvaren være givet ved p, lønnen givet ved w, og virksomhedens profit givet ved Π.

Antag at $L = 9$ og $e = 0$.

(a) Hvad er forbrugerens nytte, hvis han ikke havde adgang til nogen produktionsteknologi?

Svar: $u(L, 0) = u(9, 0) = \sqrt{9} = 3$

(b) Find den Pareto optimale allokering

Svar: Planlægningsproblemet er

$$U = \max_{\ell \in [2,L]} u(L - \ell, \ell - 2) = \max_{\ell \in [2,L]} \sqrt{9 - \ell} + \frac{1}{2}(\ell - 2)$$

så FOC bliver

$$-\frac{1}{2\sqrt{9 - \ell}} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \ell^{PO} = 8 \Rightarrow U = \sqrt{9 - 8} + \frac{1}{2}(8 - 2) = 4$$

Randløsningerne giver nytte

$$u(0, 9 - 2) = \sqrt{0} + \frac{1}{2} \cdot 7 = 3.5$$
$$u(9, 0) = \sqrt{9} + \frac{1}{2} \cdot 0 = 3$$

Dvs. at den Pareto optimale allokering er

$$(\ell^{PO}, y^{PO}, f^{PO}, x^{PO}) = (8, 6, 1, 6)$$

(c) Find virksomhedens omkostningsfunktion givet w

Svar: Virksomhedens omkostningsfunktion er

$$C(x, w) = wl_b^\star(x) = w\,(x + 2)$$

(d) Kan den Pareto optimale allokering implementeres som en Walras-ligevægt?

Svar: Nej. Virksomhedens profit er givet ved

$$\Pi = px - C(x, w) = px - w\,(x + 2) = (p - w)x - 2w$$

Hvis $p \leq w$ er profitten negativ, så virksomheden vil ikke producere noget. Hvis $p > w$ vil virksomheden producerer uendeligt meget.

(e) Diskutér dine resultater i forhold til 2. velfærdsteorem

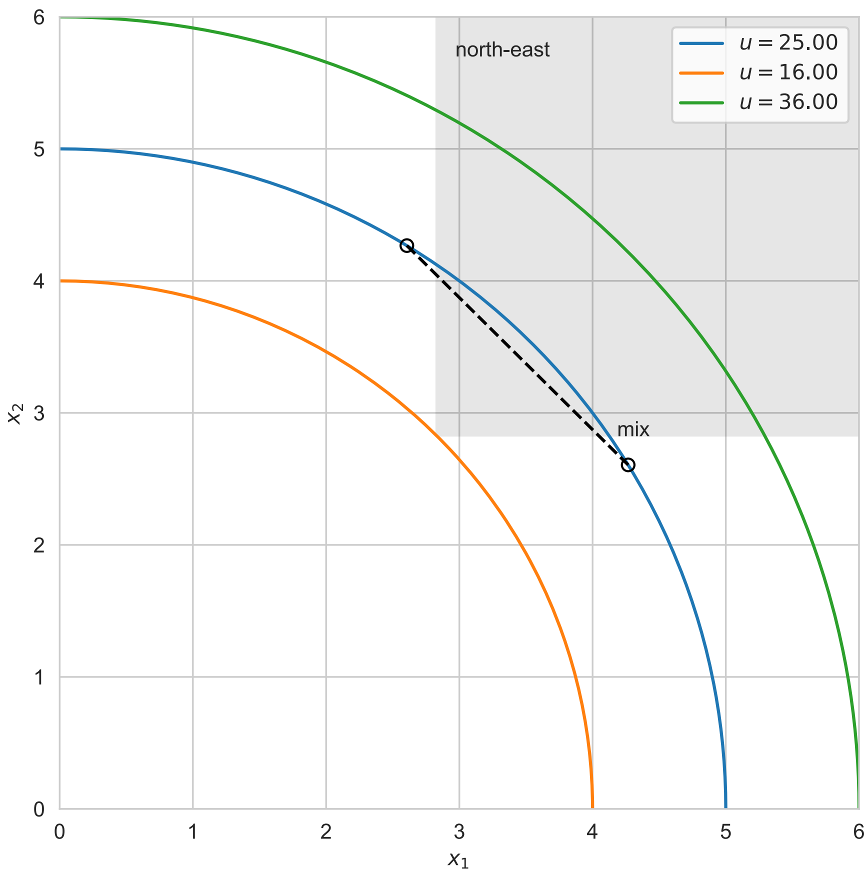
Svar: 2. velfærdsteorem siger, at enhver Pareto optimal allokering kan implementeres som en Walras-ligevægt, hvis forbrugerens præferencer er strengt konvekse og virksomhedens produktionsfunktion er strengt konkav. Disse betingelser er ikke opfyldt i denne opgave, da produktionsfunktionen ikke er konkav.

1 Tre Korte Spørgsmål

(a) Tegn indifferenskurverne for en præferencerelation som er monoton, men ikke konveks.

Svar: Se Figur 1.

Figure 1: Indifferenskurver



- *Monoton:* Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde. Overholdt.
- *Konveks:* Lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i den øvre konturmængde. Ikke overholdt.

(b) Lad G være et lotteri der giver X kr. med sandsynlighed π og ellers giver Y kr. med sandsynlighed $1 - \pi$,

$$G = (\pi \circ X, (1 - \pi) \circ Y).$$

Antag, at investoren har von Neumann–Morgenstern præferencer med en Bernoullli nyttefunktion $u(x)$ over penge. Forklar kort begreberne forventet værdi, forventet nytte, sikkerhedsækvivalent og risikopræmie.

Svar:

i. Forventet værdi: $E[G] = \pi X + (1 - \pi)Y$

ii. Forventet nytte: $U[G] = \pi u(X) + (1 - \pi)u(Y)$

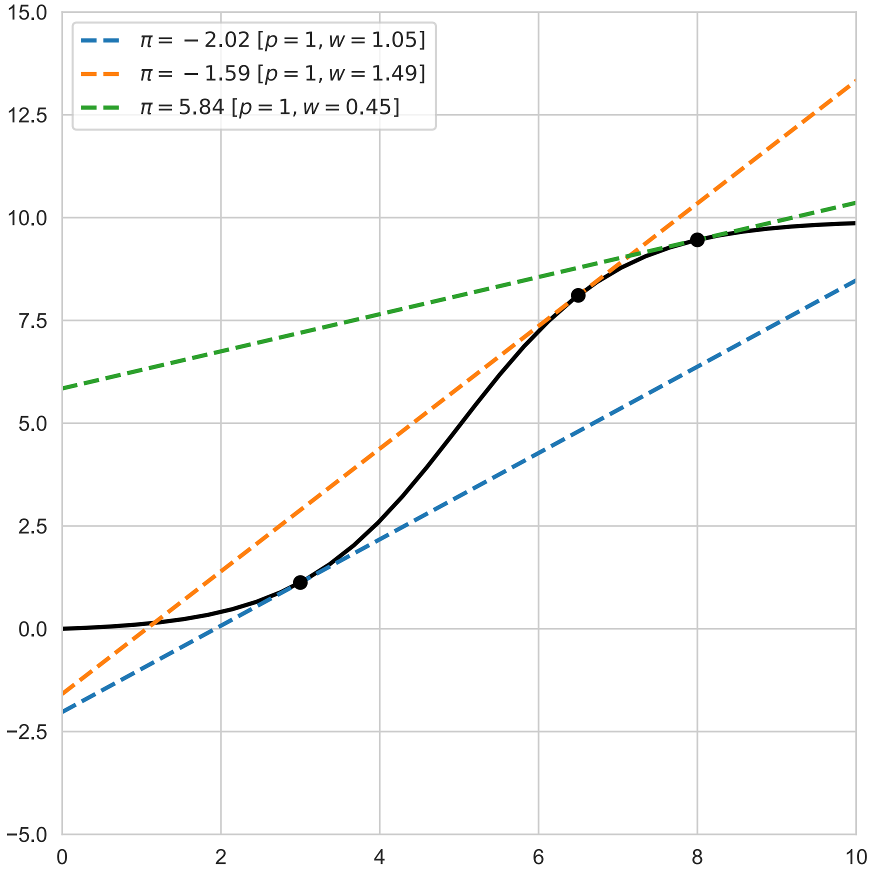
iii. Sikkerhedsækvivalent: $u(C(G)) = U(G) \Leftrightarrow C(G) = u^{-1}(U(G))$

iv. Risikopræmie: $RP(G) = E(G) - C(G)$

(c) Betragt en virksomhed der producerer et output, $y = f(\ell)$, udelukkende ved hjælp af arbejdskraft, ℓ. Antag, at der er perfekt konkurrence både på arbejdsmarkedet (hvor lønnen er w) og på virksomhedens outputmarked (hvor prisen er p). Illustrér grafisk en situation, hvor førsteordensbetingelsen er overholdt, men profitten er negativ. Hvilken antagelse på $f(\ell)$ sikrer, at førsteordensbetingelsen er både nødvendig og tilstrækkelig?

Svar: Se Figur 2. Førsteordensbetingelsen er overholdt i alle tre punkter, men profitten er negativ i to af dem. Førsteordensbetingelsen er både nødvendig og tilstrækkelig, hvis f er strengt konkav.

Figure 2: Produktionsfunktion



2 Forbrugerteori

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2).$$

Forbrugsmulighedsområdet er $(x_1, x_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$. Priser måles i kr. Forbrugerens initialbeholdning er $(e_1, e_2) = (10, 0)$.

(a) Forklar hvorfor at forbrugerens efterspørgsel må være givet ved

$$\begin{aligned} x_1^\star(p_1, p_2, e_1, e_2) &= \frac{1}{2}\frac{p_1 e_1 + p_2 e_2}{p_1} \\ x_2^\star(p_1, p_2, e_1, e_2) &= \frac{1}{2}\frac{p_1 e_1 + p_2 e_2}{p_2} \end{aligned}$$

givet at forbrugere med nyttefunktion $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ har efterspørgsel

$$\begin{aligned} x_1^\star(p_1, p_2, e_1, e_2) &= \frac{a}{a+b}\frac{p_1 e_1 + p_2 e_2}{p_1} \\ x_2^\star(p_1, p_2, e_1, e_2) &= \frac{a}{a+b}\frac{p_1 e_1 + p_2 e_2}{p_2} \end{aligned}$$

I udgangspunktet er priserne $p_1 = p_2 = 1$.
Prisen på vare 1 stiger nu til $p_1' = 2$.

(b) Find den samlede effekt af prisstigningen på forbrugerens efterspørgsel
Svar: Vi indsætter nu $(e_1, e_2) = (10, 0)$ og $p_1 = p_2 = 1$ for at beregne det optimale forbrug under de oprindelige priser

$$\begin{aligned} x_1^\star &= \frac{1}{2}\frac{1 \cdot 10 + 1 \cdot 0}{1} = 5 \\ x_2^\star &= \frac{1}{2}\frac{1 \cdot 10 + 1 \cdot 0}{1} = 5 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $A = (5, 5)$.

Vi indsætter nu $(e_1, e_2) = (10, 0)$, $p_1 = 2$ og $p_2 = 1$ for at beregne det optimale forbrug under de nye priser

$$\begin{aligned} x_1^\star &= \frac{1}{2}\frac{2 \cdot 10 + 1 \cdot 0}{2} = 5 \\ x_2^\star &= \frac{1}{2}\frac{2 \cdot 10 + 1 \cdot 0}{1} = 10 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $C_2 = (5, 10)$.

Vi kan herfra umiddelbart beregne den samlede effekt af prisstigningen som $C_2 - A$

$$\text{Samlet effekt: } C_2 - A : (5, 10) - (5, 5) \quad = \quad (0, 5)$$

(c) Find den Hicks-kompenserede efterspørgselsfunktion
Svar: Udgiftsminimeringsproblemet opstilles:

$$\min_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad \ln(x_1) + \ln(x_2) = u \tag{1}$$

Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda[u - \ln(x_1) - \ln(x_2)] \tag{2}$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne for et indre optimum kan beregnes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \frac{1}{x_1} = 0 \Leftrightarrow p_1 x_1 = \lambda \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \frac{1}{x_2} = 0 \Leftrightarrow p_2 x_2 = \lambda \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u - \ln(x_1) - \ln(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = e^u \tag{5}$$

Vi deler nu (3) med (4)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda} &= \frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} \Leftrightarrow \\ x_2 &= \frac{p_1}{p_2} x_1 \end{aligned} \tag{6}$$

Vi indsætter nu (6) i (5) og udleder x_1

$$\begin{aligned} x_1 \frac{p_1}{p_2} x_1 &= e^u \Leftrightarrow \\ \frac{p_1}{p_2} x_1^2 &= e^u \Leftrightarrow \\ x_1 &= \sqrt{\frac{p_2}{p_1} e^u} \equiv h_1^\star(p_1, p_2, u) \end{aligned} \tag{7}$$

Vi indsætter nu (7) i (6) og udleder x_2

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{p_1}{p_2} \sqrt{\frac{p_2}{p_1} e^u} \\ &= \sqrt{\frac{p_1}{p_2} e^u} \equiv h_2^\star(p_1, p_2, u) \end{aligned} \tag{8}$$

(d) Beregn substitutions- og indkomsteffekterne (både ren indkomsteffekt og formueeffekt) for prisændringen analyseret i spørgsmål (b)

Svar: Vi beregner nu nytten af det initiale forbrug

$$u^\star = u(5,5) = \ln(5) + \ln(5) = \ln(25)$$

Vi indsætter nu nye priser og oprindelig nytte ($p_1 = 2, p_2 = 1, u^* = \ln 25$) i henholdsvis (7) og (8) og beregner det kompenserede forbrug (Hicks-forbruget)

$$\begin{aligned} h_1^\star(5,1,25) &= \sqrt{\frac{1}{2}e^{\ln(25)}} = \sqrt{\frac{25}{2}} \approx 3.54 \\ h_2^\star(5,1,25) &= \sqrt{2e^{\ln(25)}} = \sqrt{50} \approx 7.07 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $B = (3.54, 7.07)$.

Vi kan nu beregne substitutionseffekten af $B - A$ og indkomsteffekten som $C_2 - B$

$$\begin{aligned} \text{substitutionseffekt: } B - A : \left(\sqrt{\frac{25}{2}}, \sqrt{50}\right) - (5,5) &\approx (-1.46, 2.07) \\ \text{samlet indkomsteffekt: } C_2 - B : (5,10) - \left(\sqrt{\frac{25}{2}}, \sqrt{50})\right) &\approx (1.46, 2.93) \end{aligned}$$

Vi beregner nu hvilket forbrug forbrugeren havde valgt under de nye priser, såfremt værdien af hans initialbeholdning ikke havde ændret sig (fra 10):

$$\begin{aligned} x_1^\star &= \frac{1}{2}\frac{10}{2} = \frac{5}{2} \\ x_2^\star &= \frac{1}{2}\frac{10}{1} = 5 \end{aligned}$$

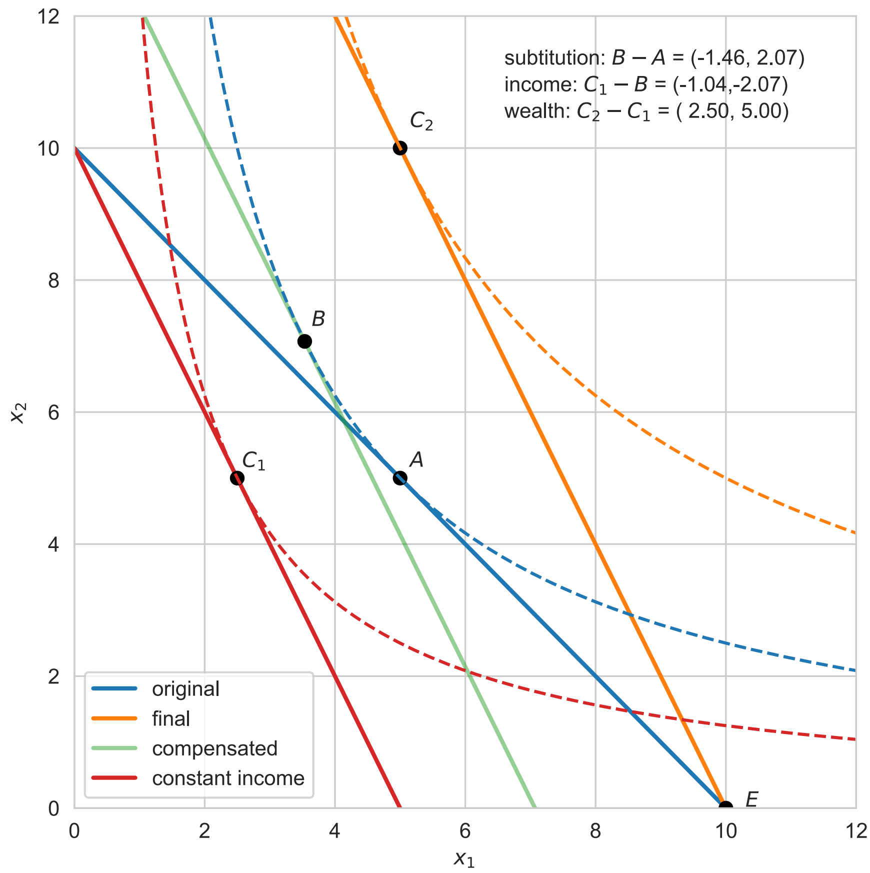
Vi kalder dette forbrugsbundt $C_1 = (\frac{5}{2}, 5)$.

Vi kan nu dele indkomsteffekten op i henholdsvis ren indkomsteffekt $C_1 - B$ og formueeffekt som $C_2 - C_1$ grundet prisstigningen

$$\begin{aligned} \text{ren indkomsteffekt: } C_1 - B : \left(\frac{5}{2}, 5\right) - \left(\sqrt{\frac{25}{2}}, \sqrt{50}\right) &\approx (-1.04, -2.07) \\ \text{formueeffekt: } C_2 - C_1 : (5,10) - \left(\frac{5}{2}, 5\right) &= (2.5, 5) \end{aligned}$$

(e) Lav en grafisk illustration af dine resultater
Svar: Se Figur 3.

Figure 3: Slutsky



3 Produktion og Partiel Ligevægt

Antag, at alle virksomheder på et marked har en produktionsteknologi, der er beskrevet ved produktionsfunktionen $f(\ell, k) = (\min\{3\ell, k\})^{\frac{1}{3}}$. Prisen på arbejdskraft er $w = 3$, prisen på kapital er $r = 1$, og hver virksomhed har tilbagevendende faste omkostninger på 500. Det oplyses yderligere, at markedet er karakteriseret ved fuldkommen konkurrence.

(a) Udled den langsigtede omkostningsfunktion for hver virksomhed

Svar: Minimeringsproblemet opstilles.

$$\min_{\ell,k} \; w\ell + rk + FC \quad \text{u.b.b.} \quad (\min\{3\ell, k\})^{\frac{1}{3}} = x \tag{9}$$

Det er oplagt omkostningsminimerende at sætte $k = 3\ell$. Dette indsættes nu i bibetingelsen, hvormed fås den omkostningsminimerende efterspørgsel efter kapital ved produktion af x

$$\begin{aligned} (\min\{k, k\})^{\frac{1}{3}} &= x \Leftrightarrow \\ k^{\frac{1}{3}} &= x \Leftrightarrow \\ k &= x^3 \Leftrightarrow \end{aligned} \tag{10}$$

Vi indsætter nu (10) i $k = 3\ell$ og udleder den omkostningsminimerende efterspørgsel efter arbejdskraft ved produktion af x

$$\begin{aligned} 3\ell &= x^3 \Leftrightarrow \\ \ell &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Vi kan nu udlede den langsigtede omkostningsfunktion

$$C(x) = w\frac{x^3}{3} + rx^3 + FC$$

For de givne omkosningsniveuaer fås dermed

$$C(x) = x^3 + x^3 + 500 = 2x^3 + 500$$

(b) Hvor meget producerer hver virksomhed i langsigtsligevægten?

Svar:

Grundet fuldkommen konkurrence vil al profit blive konkurreneret væk og alle virksomheder producerer i minimum af $AC(x)$.

Den gennemsnitlige omkostningsfunktion på langt sigt er givet ved

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x^3 + 500}{x} = 2x^2 + \frac{500}{x}$$

Hver virksomheder producerer derfor

$$\frac{\partial AC(x)}{\partial x} = 4x - \frac{500}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{500}{x^3} \Leftrightarrow \underline{x} = 5$$

Vi tjekker, at dette punkt rent faktisk er et minimum

$$\frac{\partial^2 AC(x)}{\partial x^2} = 4 + \frac{1000}{x^3} > 0$$

(c) Hvad er den langsigtede ligevægtspris på output?

Svar: Da markedet er karakteriseret ved fuldkommen konkurrence må det gælde at $p = AC(\underline{x})$. Vi kan derfor beregne markedsprisen fra

$$\begin{aligned} p &= AC(5) \Leftrightarrow \\ p &= 2 \cdot 5^2 + \frac{500}{5} \Leftrightarrow \\ p &= 150 \end{aligned}$$

Antag, at markedsefterspørgslen er givet ved

$$D^M(p) = \begin{cases} 2000 - 10p & \text{hvis } p \leq 200 \\ 0 & \text{hvis } p > 200. \end{cases}$$

(d) Hvor mange virksomheder er der på markedet i langsigtsligevægten?

Svar: Ved at indsætte markedsprisen i markedsefterspørgslen kan vi umiddelbart beregne den efterspurgte mængde.

$$D^M(150) = 2000 - 10 \cdot 150 = 500$$

I ligevægt er udbud naturligvis lig efterspørgsel og ved at benytte at hver enkelt virksomhed stadig producerer 5, kan antallet af virksomheder nu beregnes

$$J = \frac{D^M(150)}{\underline{x}} = \frac{500}{5} = 100$$

(e) Hvad er henholdsvis forbrugeroverskuddet og producentoverskuddet på langt sigt?

Svar: Forbrugeroverskuddet er

$$\begin{aligned} CS^{SR} &= \int_{p^{SR}}^{\infty} D^M(p)dp \\ &= \int_{p^{SR}}^{200} D^M(p)dp \\ &= \frac{1}{2}(200-150)\cdot 500 = 12500 \end{aligned}$$

Producentoverskuddet er nul, da virksomhedens profit er nul

$$\Pi = p\underline{x} - AC(\underline{x})\underline{x} = [p - AC(\underline{x})]\underline{x} = 0 \cdot \underline{x} = 0$$

4 Generel Ligevægt: Bytteøkonomi

Betragt en bytteøkonomi med to varer hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionerne:

$$u^A(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

og

$$u^B(x_1, x_2) = 4\ln(x_1) + x_2$$

Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Der er privat ejendomsret i økonomien. A's initialbeholdning er (e_1^A, e_2^A), mens B's initialbeholdning er (e_1^B, e_2^B). Der findes markeder for begge varer med fuldkommen konkurrence. Priserne er givet ved $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$.

Ved eksogen indkomst kan forbruger A's og B's efterspørgselsfunktioner vises at være givet ved

$$\boldsymbol{x}^{A\star}(p_1, p_2, I) = \left(\frac{1}{2}\frac{I}{p_1}, \frac{1}{2}\frac{I}{p_2}\right)$$

og

$$\boldsymbol{x}^{B\star}(p_1, p_2, I) = \left(\frac{4p_2}{p_1}, \frac{I - 4p_2}{p_2}\right)$$

(a) Definér begrebet Walras-ligevægt for en bytteøkonomi

Svar: I en bytteøkonomi med privat ejendomsret og to goder er en Walras-ligevægt karakteriseret ved en prissystem, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$, og en tilstand $(\boldsymbol{x}^{A\star}, \boldsymbol{x}^{B\star}) = ((x_1^{A\star}, x_2^{A\star}), (x_1^{B\star}, x_2^{B\star}))$, hvor

i. *Udbud = efterspørgsel* for begge varer

$$\begin{aligned} x_1^{A\star}\left(p_1, p_2, e_1^A, e_2^A\right) + x_1^{B\star}\left(p_1, p_2, e_1^B, e_2^B\right) &= \bar{e}_1 = e_1^A + e_1^B \\ x_2^{A\star}\left(p_1, p_2, e_1^A, e_2^A\right) + x_2^{B\star}\left(p_1, p_2, e_1^B, e_2^B\right) &= \bar{e}_2 = e_2^A + e_2^B \end{aligned}$$

ii. $x_1^{A\star}$,$x_2^{A\star}$,$x_1^{B\star}$ og $x_2^{B\star}$ er de *optimale efterspørgselsfunktioner* givet priserne

Antag videre, at A's initialbeholdning er $(2, 12)$, mens B's initialbeholdning er $(4, 2)$.

(b) Find Walras-ligevægten for denne specifikke bytteøkonomi med $p_2 = 1$ som numeraire, dvs. find ligevægtspriserne og ligevægtsallokeringen

Svar: Indkomsterne bliver

$$\begin{aligned} I^A &= 2p_1 + 12 \\ I^B &= 4p_1 + 2 \end{aligned}$$

Det nyttemaksimerende forbrug af x_2 for de to forbrugere bliver dermed

$$\begin{aligned} x_2^{A*}\left(p_1, 1, e_1^A, e_2^A\right) &= \frac{1}{2}\left[2p_1 + 12\right] = p_1 + 6 \\ x_2^{B*}\left(p_1, 1, e_1^B, e_2^B\right) &= \left[4p_1 + 2 - 4\right] = 4p_1 - 2 \end{aligned}$$

Vi clear markedet for x_2

$$\begin{aligned} x_2^{A\star}(p_1, 1, 2, 12) + x_2^{B\star}(p_1, 1, 4, 2) &= 12 + 2 \\ p_1 + 6 + 4p_1 - 2 &= 14 \\ 5p_1 &= 10 \\ p_1 &= 2 \end{aligned}$$

Bemærk, at Walras' lov sikrer disse priser også clearer markedet for x_1. Ligevægtspriserne er derfor $(p_1, p_2) = (2, 1)$, mens ligevægtsallokeringen er

$$\begin{aligned} x_1^{A\star}(2, 1, 2, 12) &= 4 \\ x_2^{A\star}(2, 1, 2, 12) &= 8 \\ x_1^{B\star}(2, 1, 4, 2) &= 2 \\ x_1^{B\star}(2, 1, 4, 2) &= 6 \end{aligned}$$

som vi umiddelbart ser er en mulig tilstand.

(c) Forklar hvad 1. velfærdsteorem betyder

Svar: Første velfærdsteorem siger, at i en økonomi, hvor alle forbrugere har monotont voksende præferencer, vil en økonomisk tilstand hørende til en Walras-ligevægt (generel markedsligevægt under perfekt konkurrence, dvs. alle forbrugere har nyttemaksimeret, alle virksomheder profitmaksimeret, og der er balance mellem forbrug og produktion) være efficient/Pareto-optimal.

(d) Opstil en samfundsplanlæggers problem når hun skal maksimere B's nytte, mens hun sikrer at A får nytte $\underline{u}^A$. Diskutér sammenhængen mellem samfundsplanlæggerens problem og kontraktkurven.

Svar: Vi opstiller nu samfundsplanlæggerens problem

$$\begin{aligned} U(\underline{u}^A) &= \max_{x_1^B, x_2^B} 4\ln(x_1^B) + x_2^B \\ &\text{u.b.b.} \\ x_1^A x_2^A &= \underline{u}^A \\ x_1^A + x_1^B &= e_1^A + e_1^B = \overline{e}_1 \\ x_2^A + x_2^B &= e_1^A + e_1^B = \overline{e}_2 \end{aligned}$$

Skriv løsningen som en funktion af $\underline{u}^A$ som $x_1^{B\bullet}(\underline{u}^A)$ og $x_2^{B\bullet}(\underline{u}^A)$.
Vi har, at A's nytte ligger i intervallet

$$[0, u^A(\overline{e}_1, \overline{e}_2)] = [0, u^A(6, 14)] = [0, 84].$$

Kontraktkurven er givet ved

$$\left\{(x_1^A, x_2^A) \mid \exists \underline{u}^A \in [0, 84], x_1^A - \overline{e}_1 = x_1^{B\bullet}(\underline{u}^A), x_2^A - \overline{e}_2 = x_2^{B\bullet}(\underline{u}^A)\right\}$$

En mere løs beskrivelse af kontraktkurven accepteres også.

1 Tre Korte Spørgsmål

(a) Er det sandt at efterspørgslen efter et Giffengode altid falder når forbrugerens indkomst stiger? Diskutér spørgsmålet i relation til Slutsky-ligningen.

Svar: Sandt. Egenpris Slutsky-ligningen er

$$\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)}{\partial p_i}}_{\text{substitutionseffekt}} \underbrace{- \frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}{\partial I} x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}_{\text{indkomsteffekt}}$$

hvor $h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)$ er Hicks-efterspørgslen ved prisvektoren $\boldsymbol{p}$ og nytten $u^\star \equiv u(\boldsymbol{x}^\star(\boldsymbol{p}, I))$. For et Giffen-gode gælder det at efterspørgslen er stigende i prisen, $\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},I)}{\partial p_i} > 0$. Da substitutionseffekten altid er negativ, kan den samlede effekt kun være positiv, hvis indkomsteffekten er positiv (og numerisk større end substitutionseffekten). Det kræver $\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},I)}{\partial I} < 0$.

(b) Betragt lotterierne $G_A = (0.5 \circ 4, 0.5 \circ 16)$ og $G_B = (1 \circ 9.5)$, og en forbruger der har præferencer, som kan repræsenteres ved en von Neumann–Morgenstern nyttefunktion med Bernoullli-nyttefunktion $u(x) = \sqrt{x}$ over penge. Hvilket af lotteriene foretrækker forbrugeren? Forklar kort hvorfor.

Svar: Forbrugeren fortrækker G_B, da det giver den højeste nytte

$$U(G_A) = 0.5\sqrt{4} + 0.5\sqrt{16} = 0.5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 4 = 3 < U(G_B) = \sqrt{9.5}$$

Forklaringen er, at forbrugeren er risiko-avers, da $\sqrt{x}$ er en konkav funktion. Den forventede værdi af G_A er 10, mens den forventede værdi af G_B er 9.5. Forbrugeren foretrækker G_B på trods af den lavere forventede værdi, fordi G_B er risikofrit modsat G_A.

(c) Forklar forskellen på »kompenserende variation« (»compensating variation«, CV) og »ækvivalerende variation« (»equivalent variation«, EV) for en prisstigning.

Svar:

i. *Kompenserende variation* angiver, hvor meget forbrugeren skal have mere i indkomst ifbm. en prisstigning for at have et uændret nytteniveau.

ii. *Ækvivalerende variation* angiver, hvor meget forbrugeren skal trækkes i indkomst før at få det samme nyttetab som prisstigningen medfører.

2 Forbrugerteori

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = 8\sqrt{x_1} + x_2.$$

Forbrugsmulighedsområdet er $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Prisen på vare 1 er p_1, prisen på vare 2 er p_2, og forbrugerens indkomst er I. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, I > 0$. Priser og indkomst måles i kr.

(a) Bestem hvilke af varerne som er essentielle for forbrugeren

Svar:

$$|MRS(x_1, x_2)| = \left| -\frac{MU_1}{MU_2} \right| = \left| -\frac{4x_1^{-\frac{1}{2}}}{1} \right| = \frac{4}{x_1^{\frac{1}{2}}}$$

x_1 er essentiel da

$$\lim_{x_1 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \infty, \, \forall x_2 > 0$$

x_2 er *ikke* essentiel da

$$\lim_{x_2 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \frac{4}{x_1^{\frac{1}{2}}} > 0, \, \forall x_1 > 0$$

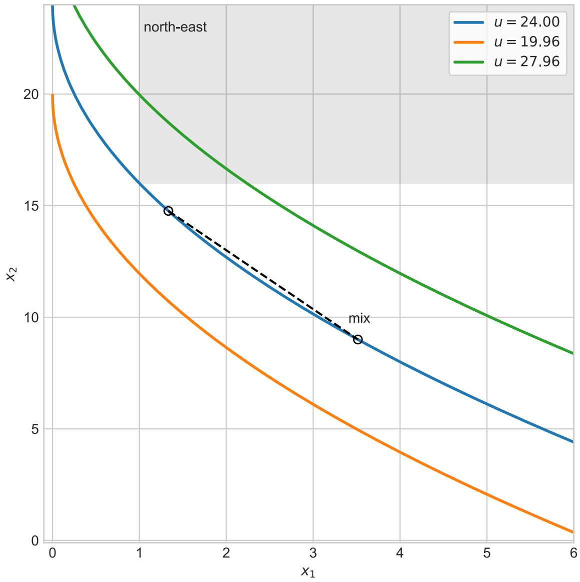
(b) Tegn indifferenskurverne og forklar om forbrugerens præferencer er monotone og/eller strengt konvekse

Svar: $u_0 = 8\sqrt{x_1} + x_2 \Leftrightarrow x_2 = u_0 - 8\sqrt{x_1}$

- *Monotone:* Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde
- *Strengt konvekse:* Lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i det indre af den øvre konturmængde

Se Figur 1.

Figure 1: Indifferenskurver



(c) Løs forbrugerens nyttemaksimeringsproblem vha. Lagrange. Lav en grafisk illustration af løsningen.

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1,x_2} 8\sqrt{x_1} + x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone jf. spørgsmål (b), og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 8\sqrt{x_1} + x_2 + \lambda[I - p_1x_1 - p_2x_2]$$

Hvorfra *førsteordensbetingelserne* (FOCs) kan beregnes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 4x_1^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow 4x_1^{-\frac{1}{2}} = \lambda p_1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow 1 = \lambda p_2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = I \tag{3}$$

Vi deler nu (1) med (2) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned} 4x_1^{-\frac{1}{2}} &= \frac{p_1\lambda}{p_2\lambda} \Leftrightarrow \\ x_1^\star &= \left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Vi indsætter nu (4) i (3) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned} p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2 + p_2x_2 &= I \Leftrightarrow \\ x_2^\star &= \frac{I - p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2}{p_2} \end{aligned} \tag{5}$$

Bemærk, at vi kun har en indre løsning hvis

$$x_2^\star > 0 \Leftrightarrow \frac{I - p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2}{p_2} > 0 \Leftrightarrow I > p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2 \tag{6}$$

Det kan bemærkes, at løsningen er et globalt maksimum, da præferencerne er strengt konvekse jf. spørgsmål (b).

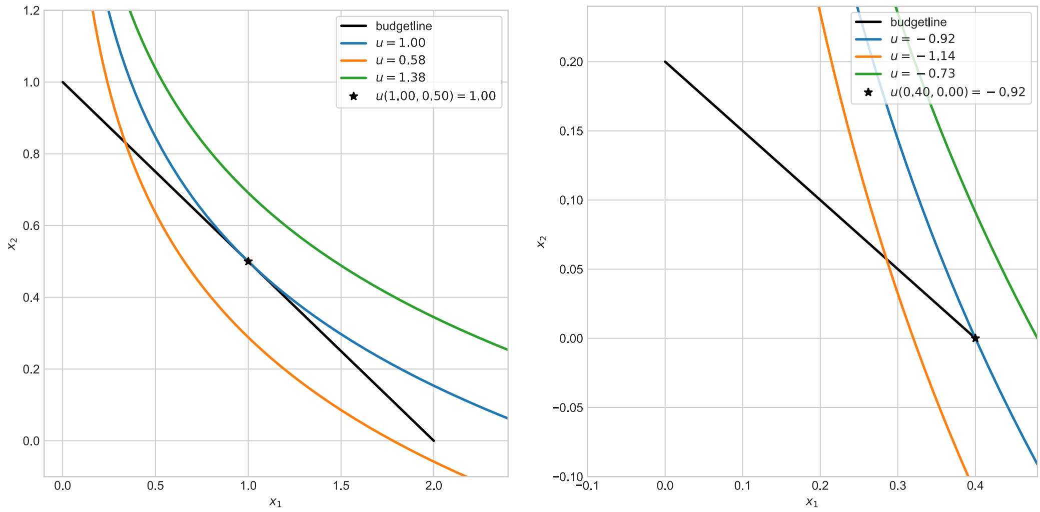
Løsningen er derfor

$$\boldsymbol{x}^\star(p_1, p_2, I) = \begin{cases} \left(\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2, \frac{I-p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2}{p_2}\right) & \text{hvis } I > p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2 \\ \left(\frac{I}{p_1}, 0\right) & \text{hvis } I \leq p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2 \end{cases} \tag{7}$$

Se Figur 2.

Figure 2: Løsning

(a) Indre løsning (b) Randløsning



(d) Beregn efterspørgslen og nytten ved hhv.

i. priserne $p_1 = 4$ og $p_2 = 1$ og indkomsten $I = 20$

ii. priserne $p_1 = 2$ og $p_2 = 1$ og indkomsten $I = 17$

Svar: I det første tilfælde

$$\boldsymbol{x}^{\star}(4,1,20) = (1,16)$$
$$u(\boldsymbol{x}^{\star}(4,1,20)) = 8\sqrt{1} + 16 = 24$$

I det andet tilfælde

$$\boldsymbol{x}^{\star}(2,1,18) = (4,9)$$
$$u(\boldsymbol{x}^{\star}(2,1,18)) = 8\sqrt{4} + 9 = 25$$

Antag, at forbrugeren handler i en butik, som tilbyder en mængderabat. Prisen på vare 1 er i udgangspunktet 4, men efter 1.5 enheder falder prisen til 2. Prisen på vare 2 er altid 1. Forbrugeren har en indkomst på 20.

(e) Opskriv et matematisk udtryk for forbrugerens budgetmængde og illustrér den grafisk
Svar: Generelt set har vi

$$C(p_1^A, p_1^B, p_2, I, k) = \left\{ x_1, x_2 \geq 0 \,|\, \begin{cases} p_1^A x_1 + p_2 x_2 \leq I & \textbf{hvis } x_1 \leq k \\ p_1^B x_1 + (p_1^A - p_1^B)k + x_2 \leq I & \textbf{hvis } x_1 > k \end{cases} \right\}$$

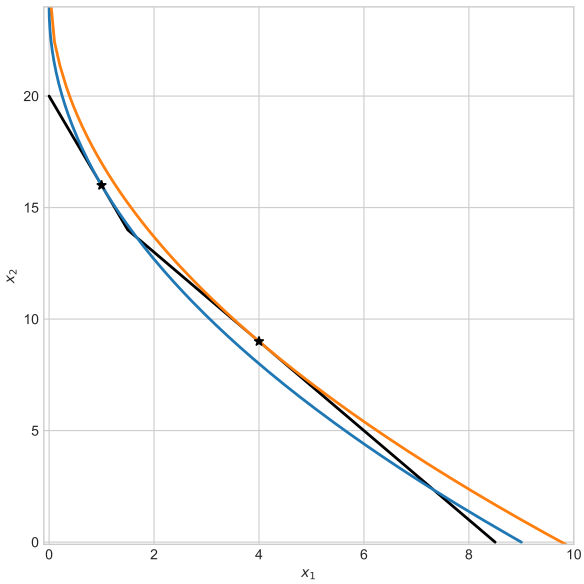
hvor p_1^A er prisen før rabatten, p_1^B er prisen efter rabatten, p_2 er prisen på vare 2, og k er niveauet hvorefter rabatten træder i kraft.

I det konkrete tilfælde fås:

$$C(4,2,1,I,1.5) = \left\{ x_1, x_2 \geq 0 \,|\, \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 20 & \text{hvis } x_1 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 17 & \text{hvis } x_1 > 1 \end{cases} \right\}$$

Se Figur 3.

Figure 3: Budgetlinje (og løsning) med mængderabat



(f) Diskutér hvad forbrugerens efterspørgsel er og om han køber nok til at tage mængderabatten i brug
Svar: Forbrugerens efterspørgsel er $\boldsymbol{x}^\star = (5, 9)$. Det er valget som giver den højeste nytte af følgende 3 muligheder:

i. Hvis forbrugeren ikke gør brug af mængderabatten har vi $x_1 \leq 1.5$ og løsningen til hans problem er det samme som i det første tilfælde i (d), dvs. nytten er 24.

ii. Hvis forbrugeren gør brug af mængderabatten har vi $x_1 > 1.5$ og løsningen til hans problem er det samme som i det andet tilfælde i (d), dvs. nytten er 25.

iii. Hvis forbrugeren vælger at forbruge akkurat i knækket er nytten $8\sqrt{1.5} + 14 \approx 23.8$.

Se Figur 3 for en illustration af løsningen.

3 Produktion

Betragt en virksomhed der producerer et output ved hjælp af to inputs, arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$x = f(\ell, k) = \ell^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{4}},$$

hvor x er mængden af output, ℓ er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital. Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogent givne. Virksomheden har faste omkostninger givet ved $FC \geq 0$.

Det kan vises, at den betingede faktorefterspørgsel, som løser virksomhedens omkostningsminimeringsproblem, er givet ved

$$\begin{aligned} \ell_b^\star(x, w, r) &= \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{w}} x^2 \\ k_b^\star(x, w, r) &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}} x^2 \end{aligned}$$

Virksomhedens omkostningsfunktion er derfor givet ved

$$\begin{aligned} C(x, w, r) &= w\ell_b^\star(x, w, r) + rk_b^\star(x, w, r) + FC \\ &= 2\sqrt{wr}x^2 + FC \end{aligned}$$

(a) Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem indirekte ved at bruge omkostningsfunktionen

Svar: Vi opstiller nu virksomhedens optimeringsproblem som funktion af udbuddet

$$\Pi(p, w, r) = \max_x px - C(x, w, r)$$

Fra hvilken vi beregner *førsteordensbetingelsen* (FOC)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(px - C(x, w, r))}{\partial x} &= 0 \Leftrightarrow \\ p - MC(x, w, r) &= 0 \Leftrightarrow \\ p &= MC(x, w, r) \Leftrightarrow \\ p &= 4\sqrt{wr}x \Leftrightarrow \\ x &= \frac{p}{4\sqrt{wr}} \end{aligned} \tag{8}$$

Profitten er

$$\begin{aligned}\Pi(p,w,r) &= px - C(x,w,r)\\ &= \frac{p^2}{4\sqrt{wr}} - 2\sqrt{wr}\frac{p^2}{16wr} - FC\\ &= \frac{p^2}{4\sqrt{wr}} - \frac{p^2}{8\sqrt{wr}} - FC\\ &= \frac{p^2}{8\sqrt{wr}} - FC\end{aligned}$$

Proffitten er *positiv,* hvis de faste omkostninger ikke er for store

$$\frac{p^2}{8\sqrt{wr}} - FC > 0 \Leftrightarrow FC < \frac{p^2}{8\sqrt{wr}}$$

Hvis profitten er positiv, har vi fundet et *maksimum*, fordi at *andenordensbetingelsen* (SOC) altid overholdt da

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(px - C(x,w,r))}{\partial x^2} &= \frac{\partial(p - MC(x,w,r))}{\partial x}\\ &= -\frac{\partial MC(x,w,r)}{\partial x}\\ &= -4\sqrt{wr} < 0\end{aligned}$$

Antag, at de faste omkostninger er $FC = 100$.

(b) Find virksomhedens udbud og efterspørgsel efter arbejdskraft og kapital ved prissystemerne $(p,w,r) = (80,2,2)$ og $(p,w,r) = (80,4,1)$.

Svar: Udbud og faktorefterspørgslerne ved $(p,w,r) = (80,2,2)$ er

$$\begin{aligned}x^\star(80,2,2) &= \frac{80}{4\cdot\sqrt{4}} = 10\\ k_b^\star(10,2,2) &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}}x^2 = 100\\ \ell_b^\star(10,2,2) &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}}x^2 = 100\\ C(10,2,2,2) &= 2\cdot 100 + 2\cdot 100 = 400\end{aligned}$$

mens de ved $(p,w,r) = (80,4,1)$ er

$$
\begin{aligned}
x^\star(82,4,1) &= \frac{80}{4\cdot\sqrt{4}} = 10 \\
k_b^\star(10,4,1) &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}}x^2 = 200 \\
\ell_b^\star(10,4,1) &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}}x^2 = 50 \\
C(10,2,4,1) &= 4\cdot 100 + 1\cdot 100 = 400
\end{aligned}
$$

Profitten er positiv i begge tilfælde

$$
\begin{aligned}
\Pi(80,2,2) = 80\cdot 10 - 400 - 100 = 300 > 0 \\
\Pi(80,4,2) = 80\cdot 10 - 400 - 100 = 300 > 0
\end{aligned}
$$

(c) Forklar kort hvilken rolle substitutionselasticiteten for virksomhedens produktionsfunktion spiller for dine resultater i spørgsmål (b)

Svar: Substitutionselasticiteten beskriver, hvor let det er for virksomheden at substituere mellem de to produktionsfaktorer. Vi ser, at det optimale udbud er uændret, men at faktorefterspørgslen ændrer sig sådan, at efterspørgslen efter den relativt dyrere faktor er mindre. For Cobb-Douglas er substitutionselasticiteten én, hvilket forklarer, at en fordobling af lønnen samtidig med en halvering af lejeprisen på kapital ikke ændrer på omkostningsfunktionen, og derfor ikke det valgte udbud.

4 Generel Ligevægt: Produktionsøkonomi

Betragt en produktionsøkonomi med to aktører, én virksomhed og én forbruger, og to forbrugsgoder, fritid f målt i timer og en generisk forbrugsvare x. Antag, at der eksisterer en produktionsteknologi med produktionsfunktionen

$$y = g(\ell) = \ell^a,\ a > 0$$

hvor ℓ input af arbejdskraft og y er output af den generiske forbrugsvare.

Antag, at der er fuldkommen konkurrence på både arbejdsmarkedet og varemarkedet. Lad prisen på forbrugsvaren være givet ved p, lønnen givet ved w, og virksomhedens profit givet ved Π.

Forbrugeren ejer virksomheden, har initialbeholdning af tid på $L > 0$, intet af forbrugsvaren, og maksimerer nyttefunktionen

$$u(L - \ell, x) = u(f, x) = fx^b,\ b > 0$$

Det kan vises, at forbrugerens efterspørgsel ved eksogen indkomst I er givet ved

$$f^\star(w, p, I) = \frac{1}{w(1+b)} I$$
$$x^\star(w, p, I) = \frac{b}{p(1+b)} I$$

(a) Hvor mange timer arbejder forbrugeren i den Pareto-optimale tilstand når $ab = 1$?

Svar: Definér

$$h(\ell) \equiv (L - \ell)\left(\ell^a\right)^b = L\ell^{ab} - \ell^{ab+1} = L\ell - \ell^2$$

Mængden af arbejdskraft i den Pareto-optimale tilstand kan findes ved at løse samfundsplanlægningsproblemet

$$U = \max_{\ell \in [0,L]} h(\ell)$$

Førsteordensbetingelsen (FOC) giver

$$L - 2\ell = 0 \Leftrightarrow \ell^{PO} = \frac{L}{2}$$

Vi kan *udelukke randløsningerne* $\ell = 0$ og $\ell = L$, da

$$h(0) = h(L) = 0 < h\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{4} = \frac{L^2}{4} > 0$$

Vi har fundet et maksimum da *andenordensbetingelsen* (SOC) altid er overholdt da

$$\frac{\partial^2 h(\ell)}{\partial \ell^2} = \frac{\partial (L - 2\ell)}{\partial \ell} = -2 < 0$$

(b) Løs virksomhedens omkostningsminimeringsproblem givet w

Svar: Den betingede arbejdskraftefterspørgsel er givet ved

$$(\ell_b^\star(y))^a = y \Leftrightarrow \ell_b^\star(y) = y^{\frac{1}{a}}$$

Virksomhedens omkostningsfunktion er derfor:

$$C(y, w) = w\ell_b^\star(y) = wy^{\frac{1}{a}}$$

Antag at $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ og $L = 8$.

(c) Hvor mange timer arbejder forbrugeren i den Pareto-optimale tilstand?

Svar: Da $ab = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ fås

$$\ell^{PO} = \frac{L}{2} = 4$$

(d) Find Walras-ligevægten (priser og allokering) med $p = 1$ som numeraire

Svar: Virksomhedens profitmaksimeringsproblem er

$$\Pi(p, w) = \max_y py - wy^2$$

Førsteordensbetingelsen (FOC) er:

$$p - 2wy = 0 \Leftrightarrow y^\star(p, w) = \frac{p}{2w}$$

Arbejdskraftefterspørgslen er derfor

$$\ell^\star(p, w) = \left(\frac{p}{2w}\right)^2$$

Profiten er altid *positiv* da

$$\Pi = py - wy^2 = \frac{p^2}{2w} - \frac{p^2}{4w} = \frac{p^2}{4w} > 0$$

Vi har fundet et *maksimum* fordi at anden ordensbetingelsen (SOC) altid overholdt da

$$\frac{\partial(py - wy^2)}{\partial y^2} = -2w < 0$$

Lønnen, w, i ligevægt findes ved ved at *cleare varemarkedet*:

$$\begin{aligned} x^\star(p, w) &= y^\star(p, w) \\ \frac{2}{3}\left(wL + \frac{1}{4w}\right) &= \frac{1}{2w} \\ wL + \frac{1}{4w} &= \frac{3}{4w} \\ 4w^2L + 1 &= 3 \Leftrightarrow \\ w &= \sqrt{\frac{1}{2L}} = \sqrt{\frac{1}{2L}} = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{9}$$

Walras-ligevægtsprisvektoren er derfor $(p, w) = (1, \frac{1}{4})$ og ligevægtsallokeringen er beskrevet ved:

i. Arbejdskraft: $\ell^\star = \left(\frac{1}{2\frac{1}{4}}\right)^2 = 2^2 = 4$

ii. Produktion: $y^\star = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

iii. Profit: $py^\star - w\ell^\star = 1 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

iv. Fritid: $f^\star = \frac{1}{w(1+b)}I = \frac{1}{\frac{1}{4}(1+2)}[\frac{1}{4} \cdot 8 + 1] = 4 = L - \ell^\star$

v. Forbrug: $x^\star = \frac{b}{p(1+b)}I = \frac{2}{(1+2)}[\frac{1}{4} \cdot 8 + 1] = 2 = y^\star$

Antag i stedet at $a = 2$ og $b = \frac{1}{2}$, men stadig $L = 8$.

(e) Diskutér hvad der sker med den Pareto-optimale tilstand og Walras-ligevægten under de nye antagelser

Svar:

i. Den Pareto-optimale tilstand ændrer sig ikke. Forbrugerens marginalnytte af forbrugsvaren er nu aftagende,

$$MU_2 = bfx^{b-1} = \begin{cases} 2fx & \text{hvis } b = 2 \\ \frac{1}{2}fx^{-\frac{1}{2}} & \text{hvis } b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

men det opvejes, af at produktionsteknologien har stigende skalaafkast.

ii. Der er ikke længere nogen Walras-ligevægt, da virksomhedens produktionsfunktion får stigende skalaafkast, og derfor faldende marginal omkostninger. Det bliver derfor optimalt for virksomheden at producerer uendeligt meget til alle priser

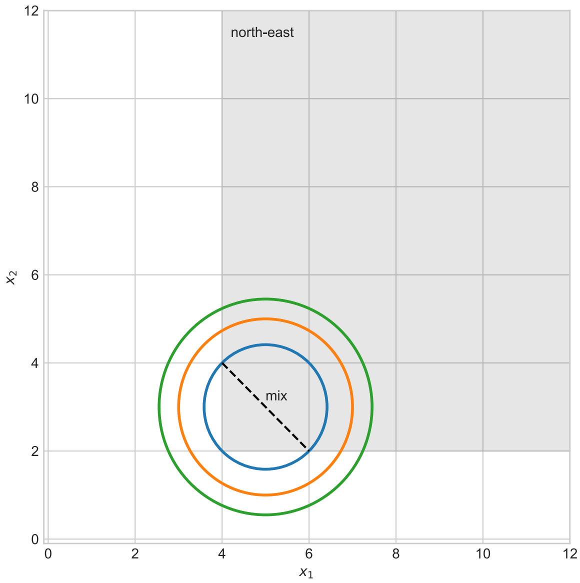
$$C(y,w) = wy^{\frac{1}{2}}$$
$$MC(y,w) = w\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$
$$\lim_{y\to\infty}[py - C(y,w)] = \lim_{y\to\infty}\int_0^{\infty}[p - MC(y,w)] = \infty$$

1 Tre Korte Spørgsmål

(a) Tegn indifferenskurverne for en præferencerelation som er strengt konveks, men ikke er monoton.

Svar: Se Figur 1.

Figure 1: Indifferenskurver



- *Ikke-monoton:* Nogle punkter nord-øst for et punkt på en indifferenskurve ligger uden for den øvre konturmængde. Præferencerne er derfor ikke monotone.
- *Strengt konveks:* Alle lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i det indre af den øvre kontourmængde.

(b) Betragt en prisstigning for en forbruger, der i udgangspunktet har en strengt positiv initialbeholdning af alle varer, og forbruger en strengt positiv mængde af alle varer. Hvad er forskellen på den rene indkomsteffekt og formueeffekten af prisstigningen?

Svar: Egenpris Slutsky-ligningen med endogen indkomst er

$$\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial h_i^\star(\boldsymbol{p},u^\star)}{\partial p_i}}_{\text{substitutionseffekt}} \underbrace{-\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},I)}{\partial I} x_i^\star(\boldsymbol{p},I)}_{\text{ren indkomsteffekt}} + \underbrace{\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},I)}{\partial I} e_i}_{\text{formueeffekt}}$$

hvor $h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)$ er Hicks-efterspørgslen ved prisvektoren $\boldsymbol{p}$ og nytten $u^\star \equiv u(\boldsymbol{x}^\star(\boldsymbol{p}, I))$ hvor $I = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}$.

i. Den rene indkomsteffekt fremkommer fordi at forbrugerens eksisterende forbrugsbundt bliver dyrere ved en prisstigning (lavere realindkomst). For *normale* [*inferiøre*] goder er den *negativ* [*positiv*].

ii. Formueeffekten fremkommer fordi forbrugerens endogene indkomst stiger. Den har det modsatte fortegn af indkomsteffekten.

iii. Formueeffekten dominerer den rene indkomsteffekt hvis forbrugeren er *nettosælger*, $e_i > x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)$. Hvis forbrugeren er *nettokøber*, $x_i^\star(\boldsymbol{p}, I) > e_i$, dominerer indkomsteffekten.

(c) Betragt et marked med perfekt konkurrence, hvor alle virksomheder har gennemsnitsomkostninger givet ved $AC(x) = x^2 - 2x + 10$, hvor x er produktionsniveauet. Hvad er prisen i langsigtsligevægten?

Svar: I langsigtsligevægten er al profit konkurreret væk og

$$p = AC(\underline{x})$$

hvor

$$\underline{x} = \min_x AC(x)$$

Fra *førsteordensbetingelsen* (FOC) fås

$$\frac{\partial AC(x)}{\partial x} = 2x - 2 \Leftrightarrow \underline{x} = 1 \Rightarrow p = AC(1) = 9$$

Vi har fundet et maksimum, da *andenordensbetingelse* (SOC) altid er overholdt

$$\frac{\partial^2 AC(x)}{\partial x^2} = 2 > 0$$

2 Forbrugerteori

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2\}$$

Forbrugsmulighedsområdet er $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, I > 0$. Priser og indkomst måles i kr.

(a) Find Marshall-efterspørgselsfunktionen
Svar: Vi har oplagt $2x_1 = x_2$, da forbrugeren ellers har udgifter til varer, som ikke bidrager til hendes nytte. Da præferencerne er monotone ved vi, at budgetbetingelsen er overholdt med ligehedstegn. Heraf fås

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 &= I \Leftrightarrow \\ p_1x_1 + p_2 2x_1 &= I \Leftrightarrow \\ x_1^\star(p_1, p_2, I) &= \frac{I}{p_1 + 2p_2} \end{aligned}$$

Fra $2x_1 = x_2$ fås videre

$$x_2^\star(p_1, p_2, I) = \frac{2I}{p_1 + 2p_2} = \frac{I}{\frac{1}{2}p_1 + p_2}$$

(b) Find Hicks-efterspørgselsfunktionen og udgiftsfunktionen
Svar: Vi skal løse

$$E(p_1, p_2, u) = \min_{h_1, h_2} p_1h_1 + p_2h_2 \text{ u.b.b. } \min\{2h_1, h_2\} = u$$

Af bibetingelsen følger

$$\begin{aligned} 2h_1 \geq u \Leftrightarrow h_1 \geq \frac{u}{2} \Rightarrow h_1^\star(u) &= \frac{u}{2} \\ h_2 \geq u \Rightarrow h_2^\star(u) &= u \end{aligned}$$

hvor de svage ulighedstegn bliver til lighedstegn, da begge priser er strengt positive.

Udgiftsfunktionen er

$$\begin{aligned} E(p_1, p_2, u) &= p_1h_1^\star(u) + p_2h_2^\star(u) \\ &= p_1\frac{u}{2} + p_2u \\ &= \left(\frac{p_1}{2} + p_2\right)u \end{aligned}$$

Antag, at $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ og $I = 12$.

(c) Hvad er den »ækvivalerende variation« (»equivalent variation«, EV) for en afgift på $\tau = 2$ så prisen inkl. afgiften er $p'_1 = p_1 + \tau$?

Svar: Efterspørgslen og nytten i de nye priser er:

$$\begin{aligned} x_1'^{\star}(4,1,12) &= \frac{12}{4+2\cdot 1} = 2 \\ x_2'^{\star}(4,1,12) &= \frac{2\cdot 12}{4+2\cdot 1} = 4 \\ u' \equiv u(x_1'^{\star}, x_2'^{\star}) &= \min\{2\cdot 2, 4\} = 4 \end{aligned}$$

EV angiver det indkomsttab, der giver det samme nyttetab som afgiftsstigningen

$$EV = I - E(p_1, p_2, u') = 12 - \left(\frac{2}{2} + 1\right) 4 = 4$$

(d) Hvad er hhv. skatteprovenuet og dødvægtstabet ved at indføre afgiften? Giv en kort forklaring på dine resultater

Svar: Skatteprovenuet ved afgiften er

$$T = \tau \cdot x_1'^{\star}(4,1,12) = 2 \cdot 2 = 4$$

Dødvægtstabet er 0 da

$$D = EV - T = 4 - 4 = 0$$

Dødvægtstabet 0, fordi at forbrugerens præferencer er perfekte komplementer, og at forbrugeren derfor ikke substituerer væk fra den afgiftspålagte vare.

(e) Forklar om dine resultater i spørgsmål (d) ville ændre sig, hvis forbrugerens nyttefunktion var

$$g(x_1, x_2) = \left(e^{\min\{4x_1, 2x_2\}}\right)^2 - 8$$

Svar: Nej, der er tale om en række af montone transformationer,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= t_4(t_3(t_2(t_1(u(x_1, x_2))))) \\ t_1(u) &= 2u \\ t_2(u) &= e^u \\ t_3(u) &= u^2 \\ t_4(u) &= u - 8 \end{aligned}$$

hvorfor forbrugeradfærden er uændret.

3 Produktion

Betragt en virksomhed der producerer et output ved hjælp af to inputs, arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$x = f(\ell, k) = \ell^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{4}},$$

hvor x er mængden af output, ℓ er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital. Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogent givne.

(a) Vis at $f(\ell, k)$ har faldende skalaafkast

Svar: $f(\lambda\ell, \lambda k) = \lambda^{\frac{2}{4}} f(\ell, k) < \lambda f(\ell, k)$.

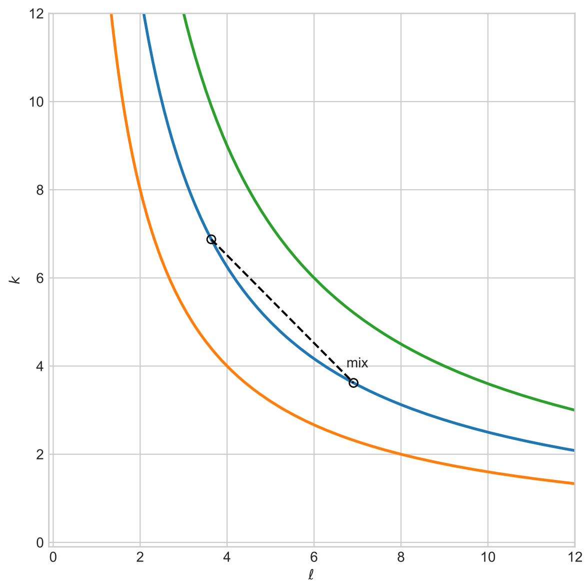
(b) Tegn isokvanterne for $f(\ell, k)$ og forklar om de øvre kontourmængder er strengt konvekse eller ej.

Svar: Hver isokvantkurve er givet ved

$$x_0 = \ell^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow k = \frac{x_0^4}{\ell}$$

Det ses af Figur 2, at de øvre kontourmængder er strengt konvekse. Alle lineære kombinationer af to punkter på en isokvant ligger i det indre af den øvre kontourmængde.

Figure 2: Isokvanter



(c) Det kan vises at $f(\ell, k)$ er strengt konkav. Argumentér for dette.

Svar: Det følger af, at f har faldende skalaafkast $\frac{2}{4} \in (0,1)$, spgm. a, og at de øvre kontourmængder er strengt konvekse, spgm. (b).

(d) Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem og find dens udbudskurve.

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\Pi(p,w,r) = \max_{\ell,k,x} px - w\ell - rk \quad \text{u.b.b.} \quad \ell^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}} = x$$

Vi kan substitutere produktionsfunktionen ind så

$$\Pi(p,w,r) = \max_{\ell,k} p\ell^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}} - w\ell - rk$$

Vi kan nu udlede *førsteordensbetingelserne* (FOCs)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial l} = \frac{1}{4}p\ell^{-\frac{3}{4}}k^{\frac{1}{4}} - w = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}p\ell^{-\frac{3}{4}}k^{\frac{1}{4}} = w \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k} = \frac{1}{4}p\ell^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{3}{4}} - r = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}p\ell^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{3}{4}} = r \tag{2}$$

Vi deler nu (1) med (2) således, at vi kan udtrykke k som en funktion af ℓ

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4}p\ell^{-\frac{3}{4}}k^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}p\ell^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{3}{4}}} &= \frac{w}{r} \Leftrightarrow \\ \frac{k}{\ell} &= \frac{w}{r} \Leftrightarrow \\ k &= \frac{w}{r}\ell \qquad (3) \end{aligned}$$

Vi indsætter nu (3) i (1) og udleder den profitmaksimerende efterspørgsel efter ℓ

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}p\ell^{-\frac{3}{4}}k^{\frac{1}{4}} &= w \Leftrightarrow \\ \frac{1}{4}p\ell^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{w}{r}\ell\right)^{\frac{1}{4}} &= w \Leftrightarrow \\ \frac{1}{4}p\ell^{-\frac{2}{4}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{4}} &= w \Leftrightarrow \\ \frac{1}{4^4}p^4\ell^{-2}\frac{w}{r} &= w^4 \Leftrightarrow \\ \ell^2 &= \frac{p^4}{256rw^3} \Leftrightarrow \\ \ell^\star(w,r,p) &= \frac{p^2}{16w\sqrt{wr}} \qquad (4) \end{aligned}$$

Vi indsætter nu (4) i (3) og udleder efterspørgslen efter k

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{w}{r}\frac{p^2}{16w\sqrt{wr}} \\
&= \frac{w}{r}\frac{p^2}{16w\sqrt{wr}} \\
k^\star(w,r,p) &= \frac{p^2}{16r\sqrt{wr}} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Udbudskurven er derfor

$$
\begin{aligned}
x^\star(w,r,p) &= \left(\frac{p^2}{16w\sqrt{wr}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{p^2}{16r\sqrt{wr}}\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{(wr)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{p^2}{16\sqrt{wr}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(wr)^{\frac{1}{4}}}\frac{p}{4(wr)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{p}{4\sqrt{wr}}
\end{aligned}
$$

Profitten er altid *positiv* da

$$
\begin{aligned}
\Pi &= p\frac{p}{4\sqrt{wr}} - w\frac{p^2}{16w\sqrt{wr}} - r\frac{p^2}{16r\sqrt{wr}} \\
&= \frac{4p^2}{16\sqrt{wr}} - \frac{2p^2}{16\sqrt{wr}} \\
&= \frac{2p^2}{16\sqrt{wr}} > 0
\end{aligned}
$$

Det er sikkert, at vi har fundet et global maksimum, da f er strengt konkav.

Antag, at virksomheden på kort sigt er låst fast til en bestemt mængde kapital, $\bar{k}$.

(e) Find virkomhedens udbudskurve på kort sigt

Svar: Den betingede faktorefterspørgsel på kort sigt er

$$\ell_b^{SR}(x,\bar{k}) = \frac{x^4}{\bar{k}}$$

Omkostningsfunktionen på kort sigt er derfor

$$C^{SR}(x, w, \overline{k}) = w\ell_b(x) = w\frac{x^4}{\overline{k}}$$

Virksomheden maksimerer sit dækningsbidrag

$$\pi(p, w, \overline{k}) = \max_x px - C^{SR}(x, w, \overline{k})$$

Førstordensbetingelsen (FOC) er

$$p - 4w\frac{x^3}{\overline{k}} = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^{\star SR}(p, w, \overline{k}) = \left(\frac{p\overline{k}}{4w}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Vi ser, at gennemsnitsomkostningerne er

$$AC^{SR}(x, w) = \frac{C(x, w)}{x} = w\frac{x^3}{\overline{k}}$$

Vi ser, at marginalomkostningerne er

$$MC(x, w) = \frac{\partial C(x, w)}{\partial x} = 4w\frac{x^3}{\overline{k}}$$

Vi er sikre på, at løsningen til førsteordentingelsen er et maksimum da:

i. MC altid er stigende, da $\frac{\partial MC(x,w)}{\partial x} = 12w\frac{x^2}{\overline{k}} > 0$

ii. $MC > AC$ for all x

4 Generel Ligevægt: Bytteøkonomi

Betragt en bytteøkonomi med to varer hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionerne

$$u^A(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a},\ a \in (0,1)$$

og

$$u^B(x_1, x_2) = x_1^b x_2^{1-b},\ b \in (0,1)$$

Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Der er privat ejendomsret i økonomien. A's initialbeholdning er $(K_1, 0)$, mens B's initialbeholdning er $(0, K_2)$. Der findes markeder for begge varer med fuldkommen konkurrence. Priserne er givet ved $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$.

Ved eksogen indkomst I kan forbruger A's og B's efterspørgselsfunktioner vises at være givet ved

$$\boldsymbol{x}^{A\star}(p_1, p_2, I) = \left(a\frac{I}{p_1}, (1-a)\frac{I}{p_2}\right)$$

og

$$\boldsymbol{x}^{B\star}(p_1, p_2, I) = \left(b\frac{I}{p_1}, (1-b)\frac{I}{p_2}\right)$$

(a) Find Walras-ligevægten (priser og allokering), hvor $p_2 = 1$ er numeraire

Svar: Indkomsterne er

$$\begin{aligned} I^A &= p_1 K_1 \\ I^B &= K_2 \end{aligned}$$

Vi clearer markedet for vare x_1

$$\begin{aligned} \left(x_1^{A\star}(p_1, p_2, I) - K_1\right) + \left(x_1^{B\star}(p_1, p_2, I) - 0\right) = 0 &\Leftrightarrow \\ aK_1 - K_1 + b\frac{K_2}{p_1} = 0 &\Leftrightarrow \\ p_1 &= \frac{b}{1-a}\frac{K_2}{K_1} \end{aligned}$$

Ligevægtsallokeringen er givet ved

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{A\star}(p_1, p_2, I) &= \left(a\frac{p_1 K_1}{p_1}, (1-a)\frac{p_1 K_1}{1}\right) \\ &= (aK_1, bK_2) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{B\star}(p_1,p_2,I) &= \left(b\frac{K_2}{p_1},(1-b)\frac{K_2}{1}\right)\\ &= ((1-a)K_1,(1-b)K_2)\end{aligned}$$

(b) Find et udtryk for forbruger A's nytte i Walras-ligevægten. Afhænger forbruger A's nytte positivt eller negativt af b? Giv en kort forklaring.

Svar:

$$u^A = u(\boldsymbol{x}^{A\star}(p_1,p_2,I)) = (aK_1)^a(bK_2)^{1-a}$$

Der er en positiv sammenhæng,

$$\frac{\partial u^A}{\partial b} = (1-a)(aK_1)^a K_2^{1-a} b^{-a} > 0$$

Når b stiger, stiger forbruger B's efterspørgsel efter vare 1, og han er derfor villig til at betale en højere pris. Da forbruger A er den eneste udbyder af vare 1 øger det hans indkomst og derfor hans nytte.

Antag, at der yderligere er en tredje forbruger med nyttefunktionen

$$u^C(x_1,x_2) = x_1^c x_2^{1-c},\ c\in(0,1)$$

og initial beholdning $(Q,0)$. Ved eksogen indkomst I kan forbruger C's efterspørgselsfunktion vises at være givet ved

$$\boldsymbol{x}^{C\star}(p_1,p_2,I) \quad = \quad \left(c\frac{I}{p_1},(1-c)\frac{I}{p_2}\right)$$

(c) Find Walras-ligevægtsprisvektoren, hvor $p_2 = 1$ er numeraire

Svar:

$$\begin{aligned}\left(x_1^{A\star}(p_1,p_2,I)-K_1\right)+\left(x_1^{B\star}(p_1,p_2,I)-0\right)+\left(x_1^{C\star}(p_1,p_2,I)-Q\right)&=0 \Leftrightarrow\\ aK_1-K_1+b\frac{K_2}{p_1}+cQ-Q&=0\end{aligned}$$

Ved at løse for p_1 fås

$$p_1 = \frac{bK_2}{(1-a)K_1+(1-c)Q}$$

(d) Afhænger forbruger A's nytte positivt eller negativt af Q? Giv en kort forklaring.

Svar: Forbruger A's efterspørgsel er:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{A\star}(p_1, p_2, I) &= \left(a\frac{p_1 K_1}{p_1}, (1-a)\frac{p_1 K_1}{1}\right) \\ &= \left(aK_1, \frac{(1-a)K_1 b K_2}{(1-a)K_1 + (1-c)Q}\right)\end{aligned}$$

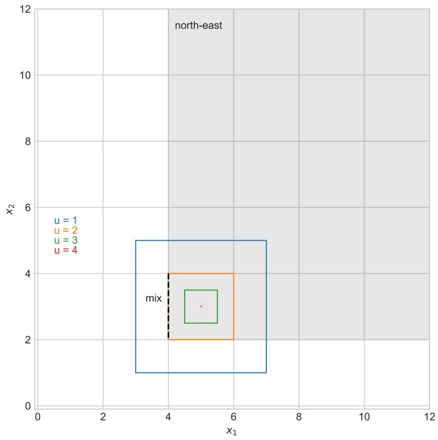
Vi ser at forbruger A's forbrug af vare 2 er faldende i Q, mens hans forbrug af vare 1 er upåvirket. Derfor er hans nytte faldende i Q. Forklaringen er at når Q stiger, stiger udbuddet af vare 1, og derfor falder prisen. Det reducerer forbruger A's indkomst og derfor hans forbrug og nytte.

1 Tre Korte Spørgsmål

(a) Tegn indifferenskurverne for en præferencerelation som hverken er *monoton* eller *strengt konveks*, men dog er *konveks*.

Svar: Se Figur 1.

Figure 1: Indifferenskurver



- *Ikke-monoton:* Nogle punkter nord-øst for et punkt på en indifferenskurve ligger uden for den øvre konturmængde. Præferencerne er derfor ikke monotone.
- *Konveks, men ikke strengt konveks:* Alle lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i den øvre kontourmængde. Derfor er præferencerne *konvekse*. Men da de *ikke* ligger i det *indre* af den øvre kontourmængde er præferencerne ikke *strengt* konvekse.

(b) Tag stilling til følgende udsagn: »En virksomheds valg af faktorinputs er underlagt færre begrænsninger på langt sigt end på kort sigt, og derfor vil en virksomhed for givne output- og faktorpriser altid producere på langt sigt, hvis den også vil producere på kort sigt.«

Svar: Udsagnet er falskt. Dækningsbidraget på kort sigt kan godt være positivt, mens profitten på langt sigt er negativ. Et positivt dækningsbidrag betyder, at virksomheden vil producere på kort sigt, mens negativ profit på langt sigt betyder, at virksomheden herefter vil lukke ned. Store faste lejeudgifter til kapital tæller fx ikke med i dækningsbidraget på kort sigt, men omkostninger til kapitalleje trækker ned i profitten på langt sigt.

(c) Betragt en investor med en formue på $w > 0$ og en von Neumann–Morgenstern nyttefunktion med Bernoullli-nyttefunktion $u(x) = \ln(x)$ over penge. Investoren har mulighed for at investere sin formue i et risikabelt projekt, hvor han med $\frac{1}{3}$ sandsynlighed mister hele sin investering og med $\frac{2}{3}$ sandsynlighed får sin investering fordoblet. Den del af sin formue han ikke investerer givet intet afkast. Opstil investorens problem matematisk, og afgør hvor stor en andel af sin formue investoren vil sætte i projektet.

Svar: Investorens forventede nytte af en investering på $\Delta \in [0, w]$ er

$$U(w, \Delta) = \max_{\Delta \in [0,w]} \frac{1}{3} \ln(w - \Delta + 0\Delta) + \frac{2}{3} \ln(w - \Delta + 2\Delta)$$

og investorens problem kan derfor skrives

$$\max_{0 \leq \Delta \leq w} U(w, \Delta)$$

Førsteordensbetingelsen (FOC) giver

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(w, \Delta)}{\partial \Delta} &= 0 \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{3} (w - \Delta)^{-1} + \frac{2}{3} (w + \Delta)^{-1} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{w - \Delta}{w + \Delta} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ 2w - 2\Delta &= w + \Delta \Leftrightarrow \\ w &= 3\Delta \Leftrightarrow \\ \Delta &= \frac{1}{3} w \end{aligned}$$

Vi er sikre på, at have fundet et maksimum da *andenordensbetingelsen* (SOC) er opfyldt

$$\frac{\partial^2 U(w, \Delta)}{\partial \Delta^2} = -\frac{1}{3} (w - \Delta)^{-2} - \frac{2}{3} (w + \Delta)^{-2} < 0$$

Ekstra: Det ses desuden, at $\Delta = w$ ikke kan være en løsning, da

$$\lim_{\Delta \to w} U(w, \Delta) = -\infty$$

Og $\Delta = 0$ er heller ikke en løsning, da nytten så er stigende i Δ

$$\frac{\partial U(w, 0)}{\partial \Delta} = -\frac{1}{3} w^{-1} + \frac{2}{3} w^{-1} = \frac{1}{3} w^{-1} > 0$$

2 Forbrugerteori

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta\frac{x_2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

hvor $\alpha > 1$ og $\beta > 0$. Det kan vises, at præferencerne er monotone og strengt konvekse. Forbrugsmulighedsområdet er $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Prisen på vare 1 er p_1, prisen på vare 2 er p_2, og forbrugerens indkomst er I. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, I > 0$.

(a) Kan det udelukkes, at der er randløsninger?
Svar: Ja. Begge varer er essentielle.

$$|MRS(x_1, x_2)| = \left|-\frac{MU_1}{MU_2}\right| = \left|-\frac{x_1^{-\alpha}}{\beta x_2^{-\alpha}}\right| = \frac{x_1^{-\alpha}}{\beta x_2^{-\alpha}}$$

x_1 er essentiel da

$$\lim_{x_1 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \infty, \ \forall x_2 > 0$$

x_2 er essentiel da

$$\lim_{x_2 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = 0, \ \forall x_1 > 0$$

(b) Løs forbrugerens nyttemaksimeringsproblem vha. Lagrange.
Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1, x_2} \frac{x_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta\frac{x_2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{u.b.b.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

Bemærk at vi kan skrive $=$ i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone jf. opgavebeskrivelsen, og at vi pga. begge goder er essentielle kan være sikre på, at der ikke er randløsninger. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{x_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta\frac{x_2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \lambda[I - p_1x_1 - p_2x_2]$$

Førsteordensbetingelserne (FOCs) bliver derfor:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_1^{-\alpha} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^{-\alpha} = \lambda p_1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \beta x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \beta x_2^{-\alpha} = \lambda p_2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = I \tag{3}$$

Vi deler nu (1) med (2) og udleder det optimale forbrug af x_1 givet ved x_2

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^{-\alpha}}{\beta x_2^{-\alpha}} &= \frac{p_1\lambda}{p_2\lambda} \Leftrightarrow \\
x_1^{-\alpha} &= \beta\frac{p_1}{p_2}x_2^{-\alpha} \\
x_1 &= \left(\beta\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} x_2 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (4) i (3) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned}
p_1\left(\beta\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} x_2 + p_2x_2 &= I \Leftrightarrow \\
x_2^\star &= \frac{I}{p_1\left(\beta\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} + p_2} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Løsningen er derfor

$$\boldsymbol{x}^\star(p_1,p_2,I) = \left(\frac{\left(\beta\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} I}{p_1\left(\beta\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} + p_2}, \frac{I}{p_1\left(\beta\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} + p_2}\right) \qquad (6)$$

Antag, at x_1 er en generisk forbrugsvare til tidspunkt 1, og x_2 er en generisk forbrugsvare til tidspunkt 2. Antag at forbrugerens initialbeholdning opfylder $e_1 > 0$ og $e_2 > 0$. Lad $p_2 = 1$ og $p_1 = (1+r)$, hvor r er renten. Antag endelig at vi ved et tilfælde har $\beta = \frac{1}{1+r}$.

(c) Vis at løsningen til forbrugerens problem nu kan skrives som nedenfor, og diskutér hvordan forbrugeren udjævner forbrug over tid.

$$\boldsymbol{x}^\star(r,e_1,e_2) = \left(\frac{(1+r)e_1+e_2}{2+r}, \frac{(1+r)e_1+e_2}{2+r}\right)$$

Svar: Forbrugerens indkomst er

$$I = p_1e_1 + p_2e_2 = (1+r)e_1 + e_2$$

og vi har

$$\left(\beta\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = \left(\beta\frac{1+r}{1}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = 1^{-\frac{1}{\alpha}} = 1$$

Ved at sætte ind i ligning (6) fås resultatet. Vi ser, at forbrugeren ønsker, at have det *samme forbrug i begge perioder*. Det skyldes, at forbrugerens utålmodighed (β) lige præcis opvejes af gevinsten ved at spare op $(1+r)$.

(d) For hvilke kombinationer af hhv. e_1 og e_2 er forbrugeren hhv. *låntager* og *opsparer* i periode 1?
Svar: Forbrugeren er opsparer i periode 1 når han forbruger *mindre* end sin initialbeholdning i periode 1

$$x_1^\star < e_1 \Leftrightarrow \frac{(1+r)e_1+e_2}{2+r} < e_1 \Leftrightarrow e_2 < e_1$$

Forbrugeren er låntager i periode 1 når han forbruger *mere* end sin initialbeholdning i periode 1

$$x_1^\star > e_1 \Leftrightarrow \frac{(1+r)e_1+e_2}{2+r} > e_1 \Leftrightarrow e_2 > e_1$$

(e) Diskutér hvad et forbud mod låntagning vil betyde for forbrugerens adfærd og nytte.
Svar: Adfærden efter forbud kan skrives

$$\boldsymbol{x}^\star(r,e_1,e_2) = \begin{cases} (e_1,e_2) & \text{hvis } e_2 > e_1 \\ \left(\frac{(1+r)e_1+e_2}{2+r}, \frac{(1+r)e_1+e_2}{2+r}\right) & \text{ellers} \end{cases}$$

Hvis forbrugeren i forvejen sparede op betyder det ikke noget for hans adfærd, og derfor heller ikke hans nytte, at låntagning fordybes.

Hvis forbrugeren i forvejen var låntager, ved vi, at der ikke var nogen indre løsninger som opsparer, og da vi også kan udelukke randløsninger, ved vi at $x_1^\star = e_1$, og af monotonictet fås videre $x_2^\star = e_2$. Da forbrugeren også kunne have valgt dette i første omgang, men ikke gjorde det, må hans nytte blive mindre.

(f) Opskriv et udtryk for hvor meget kompensation, i form af mere af varen i periode 2, forbrugeren skal have for at være indifferrent i forhold til om låntagning forbydes eller ej, hvis forbuddet betyder, at hans forbrug i periode 1 er begrænset af hans initialbeholdning i periode 1. *(Bemærk: Du skal ikke løse for denne kompensation)*
Svar: Den påkrævede kompensation er

$$\frac{\left(\frac{(1+r)e_1+e_2}{2+r}\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta\frac{\left(\frac{(1+r)e_1+e_2}{2+r}\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{e_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta\frac{(e_2+\Delta)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

hvor venstresiden er nytten *før* forbud, og højresiden er nytten *efter* forbud med en kompensation i periode 2 på Δ.

3 Produktion og partiel ligevægt

Betragt en virksomhed der producerer et output ved hjælp af to inputs, arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$x = f(\ell, k) = (\min\{\ell, 2k\})^{\frac{1}{2}},$$

hvor x er mængden af output, ℓ er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital. Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogent givne.

Det kan vises, at virksomhedens omkostningsfunktion bliver

$$C(x, w, r) = \left(w + \frac{r}{2}\right) x^2$$

(a) Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem indirekte ved at bruge omkostningsfunktionen og find profitten.

Svar: Virksomhedens profitmaksimeringsproblem bliver

$$\Pi^{\star}(p, w, r) = \max_{x} px - C(x, w, r) = \max_{x} px - \left(w + \frac{r}{2}\right) x^2$$

Det giver *førsteordensbetingelsen* (FOC)

$$p - \frac{\partial C(x, w, r)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow p = (2w + r)\, x \Leftrightarrow x^{\star}(p, w, r) = \frac{\frac{1}{2}p}{w + \frac{r}{2}}$$

Bemærk, at *profitten er positiv* da

$$\Pi^{\star}(p, w, r) = px^{\star} - \left(w + \frac{r}{2}\right)(x^{\star})^2 = \frac{\frac{1}{2}p^2}{w + \frac{r}{2}} - \frac{\frac{1}{4}p^2}{w + \frac{r}{2}} = \frac{\frac{1}{4}p^2}{w + \frac{1}{2}r} > 0$$

Bemærk yderligere, at vi har fundet et maksimum, da *andenordensbetingelsen* (SOC) altid er opfyldt

$$\frac{\partial^2[px - C(x, w, r)]}{\partial x^2} = -(2w + r) < 0$$

Antag, at virksomheden yderligere også har langsigtede faste omkostninger $FC > 0$, som kun kan undgås, hvis virksomheden lukker helt.

(b) Hvad er det maksimale niveau af FC, hvor virksomheden ikke vil lukke ned givet p, w og r?
Svar: De faste omkostninger skal nu trækkes fra i profitten, men påvirker ikke virksomhedens valg af faktorinput. Virksomheden vil ikke lukke ned så længe profitten ikke er negativ, dvs.

$$\Pi = \frac{\frac{1}{4}p^2}{w + \frac{1}{2}r} - FC \geq 0 \Leftrightarrow FC \leq \frac{\frac{1}{4}p^2}{w + \frac{1}{2}r}$$

Antag, at $w = 3$ og $r = 2$, og at virksomheden sælger sit output på et marked med fuldkommen konkurrence, hvor virksomheder frit kan træde ind og ud af markedet. Alle virksomheder har den samme produktionsfunktion, som beskrevet ovenfor.

(c) Hvad bliver ligevægtsprisen på langt sigt?
Svar: Gennnemsnitsomkostningerne er:

$$\begin{aligned} AC(x) &= \left(w + \frac{r}{2}\right)x + \frac{FC}{x} \\ &= 4x + \frac{FC}{x} \end{aligned}$$

Entry/exit vil sikre, at produktionen sker i minimum af gennemsnitsomkostningerne, så der ingen profit er, dvs.

$$\frac{\partial AC(x)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 4 - FCx^{-2} = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \frac{\sqrt{FC}}{2}$$

og vi er sikkre på at have fundet et minimum da

$$\frac{\partial^2 AC(x)}{\partial x^2} = 2FCx^{-3} > 0$$

Ligevægtsprisen bliver så

$$p^\star = AC(\underline{x}) = 4\frac{\sqrt{FC}}{2} + \frac{FC}{\left(\frac{\sqrt{FC}}{2}\right)} = 4\sqrt{FC}$$

(d) Diskutér om der er et maksimalt niveau af FC, hvor vi kan være sikre på, at ingen virksomheder vil ønske at udbyde noget.
Svar: Det kan vi ikke være. Bare prisen følger med op, så vil profitten vedblive at være 0. Dog kan der sker det, at efterspørgslen forsvinder når prisen bliver høj nok. Virksomhederne vil dog stadig ønske at udbyde til den høje pris, men der er bare ingen købere.

4 Generel Ligevægt: Bytteøkonomi

Betragt en bytteøkonomi med to varer hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionerne

$$u^A(x_1, x_2) = x_1^\alpha + x_2,\ \alpha \in [0, 1]$$

og

$$u^B(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Der er privat ejendomsret i økonomien. A's initialbeholdning er (e_1^A, e_2^A), mens B's initialbeholdning er (e_1^B, e_2^B). Der findes markeder for begge varer med fuldkommen konkurrence. Priserne er givet ved $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$.

(a) Hvad skal x_1^A være i alle *indre* Pareto-optimale tilstande når $\alpha \in (0, 1)$?

Svar: Alle indre Pareto-optimale tilstande skal overholde

$$\begin{aligned} MRS^A(x_1^A, x_2^A) &= MRS^B(x_1^B, x_2^B) \\ \frac{\alpha\left(x_1^A\right)^{\alpha-1}}{1} &= 1 \Leftrightarrow \\ x_1^A &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \end{aligned}$$

(b) Vil der altid være en *indre* Pareto-optimal tilstand når $\alpha \in (0, 1)$?

Svar: Nej, det kræver at $x_1^A = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ er en mulig tilstand, dvs. kun hvis $e_1^A + e_1^B > \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

(c) Find alle de Pareto-optimale tilstande når $\alpha = 1$.

Svar: Alle allokeringer er nu Pareto-optimale. For at blive stillet bedre skal hver af forbrugerne have mere af den ene vare end de afgiver af den anden, hvilket ikke kan lade sig gøre for dem begge to samtidig. Matematisk:

$$\mathcal{K} = \left\{(x_1^A, x_2^A)\,|\,x_1^A \in [0, e_1^A + e_1^B],\ x_2^A \in [0, e_2^A + e_2^B]\right\}$$

(d) Find alle de Pareto-optimale tilstande når $\alpha = 0$.

Svar: Forbruger A's nytte afhænger nu ikke af vare 1, og det vil derfor altid være Pareto-forbedrende, at give alt af vare 1 til forbruger B. Det er desuden ikke muligt at give A noget i bytte for at afveje et nyttetab, hvis noget af vare 2 tages fra ham, og derfor

$$\mathcal{K} = \left\{(x_1^A, x_2^A) \mid x_1^A = 0,\ x_2^A \in [0, e_2^A + e_2^B]\right\}$$

Antag at $\alpha = \frac{1}{2}$, og at du observerer en Walras-ligevægt, hvor begge forbrugere har et positivt forbrug af begge varer.

(e) Hvad må forbruger A's forbrug af vare 1 være i Walras-ligevægten? *Husk at argumentere for dit svar.*
Svar: Præferencerne er monotone, så betingelserne for 1. velfærdsteorem gælder. Derfor ved vi, at alle Walras-ligevægte er Pareto-optimale. Og derfor skal betingelsen fra spørgsmål (a) gælde i Walras-ligevægten, da det er en indre allokering fordi begge forbrugere har et positivt forbrug af begge varer, dvs.

$$x_1^A = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = 2^{\frac{1}{\frac{1}{2}-1}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

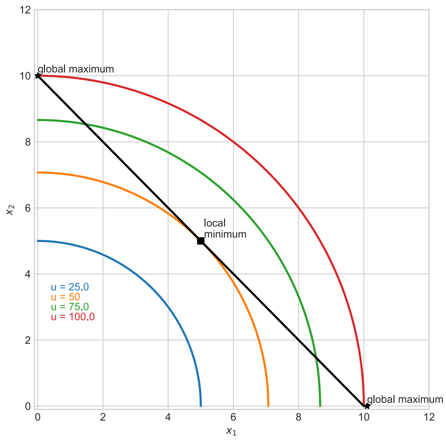
1 Tre Korte Spørgsmål

(a) Lav en grafisk illustration af en forbrugers nyttemaksimeringsproblem hvor der for en given budgetlinje er et indre punkt hvor MRS er lig med den relative pris, men dette er et *lokalt minimum*, og den faktiske løsning i stedet er en *randløsning*.

Svar: Se Figur 1 med konkave præfferencer

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Figure 1: Nyttemaksimering med lokalt minimum og randløsning



(b) Betragt en virksomhed der producerer et output (x) ved hjælp af to inputs, arbejdskraft (ℓ) og fysisk kapital (k). Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogent givne. Ved priserne (p', w', r) vælger virksomheden (x', ℓ', k'), og ved priserne (p'', w'', r) vælger virksomheden (x'', ℓ'', k''). Under hvilken almindelig antagelse om virksomhedens adfærd vil følgende to uligheder altid vil være overholdt? Forklar hvorfor.

$$\begin{aligned} p'x' - w'\ell' - rk' &\geq p'x'' - w'\ell'' - rk'' \\ p''x'' - w''\ell'' - rk'' &\geq p''x' - w''\ell' - rk' \end{aligned}$$

Svar: Virksomhedens produktionsmulighedsområde er uafhængigt af priserne. Derfor må (x', ℓ', k') og (x'', ℓ'', k'') være mulige uanset priserne. Da virksomhedens profit er givet ved

$$\Pi = px - w\ell - rk$$

angiver ulighederne, at profitten er højest når priser og valg »passer sammen«. Dette følger af den almindelige antagelse om, at virksomheden profitmaksimerer. Hvis ulighederne vendte skarpt den anden vej, ville virksomheden ikke have profitmaksimeret, da der ville findes et muligt valg med højere profit.

(c) Betragt en gambler med en von Neumann–Morgenstern nyttefunktion med Bernoullli-nyttefunktion $u(x) = x^\alpha$ over penge, $\alpha > 0$. Når gambleren bliver bedt om at vælge mellem følgende to lotterier

$$G_{AI} = \left(\frac{1}{2} \circ 0, \frac{1}{2} \circ 16\right), G_{AII} = (1 \circ 1)$$

fortrækker han G_{AI} frem for G_{AII}. Når gambleren bliver bedt om at vælge mellem følgnede to lotterier

$$G_{BI} = \left(\frac{1}{2} \circ 0, \frac{1}{2} \circ 4\right), G_{BII} = (1 \circ 1)$$

foretrækker han G_{BII} frem for G_{BI}. Hvad kan du sige om gamblerens risiko-attitude og værdien af α i hans Benoulli-nyttefunktion?
Svar: De *forventede værdier* af lotterierne er

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G_{AI}] = 8 > 1 = \mathbb{E}[A_{II}] \\ \mathbb{E}[G_{BI}] = 2 > 1 = \mathbb{E}[B_{II}] \end{aligned}$$

Gambleren må være *risikoavers*, da det sikre lotteri G_{BII} fortrækkes frem for det risikable lotteri G_{BI} med en højere forventet værdi.
De *forventede nytter* af lotterierne er

$$\begin{aligned} U(G_{AI}) = \frac{1}{2}0^\alpha + \frac{1}{2}16^\alpha > 1^\alpha = U(G_{AII}) \Rightarrow \alpha > \frac{\ln 2}{\ln 2^3} = \frac{1}{3} \\ U(G_{BI}) = \frac{1}{2}0^\alpha + \frac{1}{2}4^\alpha < 1^\alpha = U(G_{BII}) \Rightarrow \alpha < \frac{\ln 2}{\ln 2^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dvs. at $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

2 Forbrugerteori

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \;\; \alpha > 0, \beta > 0.$$

Forbrugsmulighedsområdet er $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Prisen på vare 1 er p_1, prisen på vare 2 er p_2, og forbrugerens indkomst er I. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, I > 0$.

Det kan vises, at forbrugerens *Marshall-efterspørgslen* er givet ved

$$\begin{aligned} x_1^\star(p_1, p_2, I) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{I}{p_1} \\ x_2^\star(p_1, p_2, I) &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{I}{p_2} \end{aligned}$$

(a) Vis at *Hicks-efterspørgslen* er givet ved

$$\begin{aligned} h_1^\star(p_1, p_2, u) &= \left(\frac{\beta p_2}{\alpha p_1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\ h_2^\star(p_1, p_2, u) &= \left(\frac{\alpha p_1}{\beta p_2}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

Svar: Udgiftsminimeringsproblemet er

$$\min_{x_1, x_2} \; p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad x_1^\alpha x_2^\beta = u \tag{1}$$

Den tilhørende Lagrange-funktion er

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda[u - x_1^\alpha x_2^\beta] \tag{2}$$

med *førsteordensbetingelserne (*FOCs)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \alpha\lambda x_1^{\alpha-1} x_2^\beta = 0 \Leftrightarrow p_1 = \lambda\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \beta\lambda x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} = 0 \Leftrightarrow p_2 = \lambda\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u - x_1^\alpha x_2^\beta = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow x_1^\alpha x_2^\beta = u \tag{5}$$

Fra (3) og (4) fås

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\alpha p_2}{\beta p_1} x_2 \tag{6}$$

Sammen med (5) giver det

$$\left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} x_2\right)^{\alpha} x_2^{\beta} = u \Leftrightarrow$$

$$h_2^{\star}(p_1, p_2, u) = \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \tag{7}$$

Og fra (6) følger så

$$h_1^{\star}(p_1, p_2, u) = \frac{\alpha p_2}{\beta p_1} h_2^{\star} = \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \tag{8}$$

Lad $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $p_1 = p_2 = 1$ og $I = 40$.

(b) Dekomponér ændringen i efterspørgslen efter en pristigning fra $p_1 = 1$ til $p_1' = 4$ i substitutions- og indkomsteffekt. Illustrér grafisk.
Svar:

i. *Initial* Marshal-efterspørgsel:

$$\boldsymbol{x}^{\star}(1, 1, 40) = (20, 20)$$

med nytte

$$u^{\star} = 20^{\frac{1}{2}} 20^{\frac{1}{2}} = 20$$

ii. *Endelig* Marshal-efterspørgsel:

$$\boldsymbol{x}^{\star}(1, 4, 40) = (5, 20)$$

iii. *Hicks-efterspørgsel*

$$\boldsymbol{h}^{\star}(1, 4, u^{\star}) = \boldsymbol{h}^{\star}(1, 4, 20) = (10, 40)$$

Substitutionseffekterne er

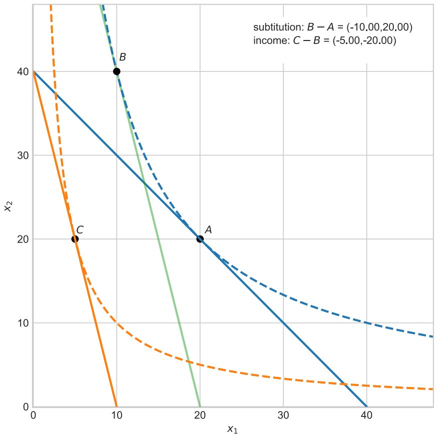
$$\boldsymbol{h}^{\star}(1, 4, 20) - \boldsymbol{x}^{\star}(1, 1, 40) = (-10, 20)$$

Indkomsteffekterne er

$$\boldsymbol{x}^{\star}(1, 4, 40) - \boldsymbol{h}^{\star}(1, 4, 20) = (-5, -20)$$

Se Figur 2.

Figure 2: Substitutionseffekt og indkomsteffekt



(c) Hvad er den *kompenserende variation (CV)* for en pristigning fra $p_1 = 1$ til $p_1' = 4$?
Svar: Udgiften til det Hicks-kompenserede forbrug er

$$
\begin{aligned}
E(p_1', p_2, u^\star) &= p_1' h_1^\star(p_1', p_2, u^\star) + p_2 h_1^\star(p_1', p_2, u^\star) \\
&= 4 \cdot 10 + 1 \cdot 40 = 80
\end{aligned}
$$

Derfor er den *kompenserende variation*

$$CV = E(p_1', p_2, u) - I = 80 - 40 = 40$$

(d) Hvad er den *kompenserende variation (CV)* for en prisstigning fra $p_1 = p_2 = 1$ til $p_1' = p_2' = 4$?
Svar: Hicks-efterspørgslen ved uændret nytte bliver

$$\boldsymbol{h}^\star(4, 4, 20) = (20, 20)$$

Udgiften til det Hicks-kompenserede forbrug er derfor

$$
\begin{aligned}
E(p_1', p_2', u) &= p_1' h_1^\star(p_1', p_2', u^\star) + p_2' h_1^\star(p_1', p_2', u^\star) \\
&= 4 \cdot 20 + 4 \cdot 20 = 160
\end{aligned}
$$

Derfor er den *kompenserende variation*

$$CV = E(p_1', p_2', u^\star) - I = 160 - 40 = 120$$

(e) Hvad er den *ækvivalerende variation (EV)* for en prisstigning fra $p_1 = p_2 = 1$ til $p_1' = p_2' = 4$?
Svar: Den endelig Marshall-efterspørgsel er

$$x^\star(4, 4, 40) = (5, 5)$$

og nytten er $u^{\star\prime} = 5^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{1}{2}} = 5$. Den ækvivalerende variation er derfor

$$\begin{aligned} E(p_1, p_2, u^{\star\prime}) &= p_1 h_1^\star(p_1, p_2, u^{\star\prime}) + p_2 h_2^\star(p_1, p_2, u^{\star\prime}) \\ &= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 10 \end{aligned}$$

Derfor er den *ækvivalerende variation*

$$EV = I - E(p_1, p_2, u) = 40 - 10 = 30$$

3 Produktion

Betragt en virksomhed der producerer et output ved hjælp af to inputs, arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$x = f(\ell, k) = (\min\{\alpha\ell, \beta k\})^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

hvor x er mængden af output, ℓ er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital. Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogent givne.

Det kan vises, at virksomhedens omkostningsfunktion bliver

$$C(x, w, r; \alpha, \beta) = \left(\frac{w}{\alpha} + \frac{r}{\beta}\right) x^2$$

(a) Hvis virksomheden frit kunne vælge ville den så helst have $\alpha = \beta = 1$ eller $\alpha = \beta = 2$?
Svar: Den ville vælge $\alpha = \beta = 2$, fordi omkostningerne så er halvt så store

$$C(x, w, r; 2, 2) = \frac{1}{2} C(x, w, r; 1, 1)$$

(b) Hvis virksomheden frit kunne vælge ville den så helst have $\alpha = 1$ og $\beta = 2$ eller $\alpha = 2$ og $\beta = 1$?
Svar: Det afhænger af, hvilket faktor input, der er det dyreste, fordi

$$\begin{aligned} C(x, w, r; 1, 2) < C(x, w, r; 2, 1) &\Leftrightarrow \\ \left(\frac{w}{1} + \frac{r}{2}\right) x^2 < \left(\frac{w}{2} + \frac{r}{1}\right) x^2 &\Leftrightarrow \\ 2w + r < w + 2r &\Leftrightarrow \\ w < r & \end{aligned}$$

Hvis lønnen er lavest ($w < r$) ønskes $\alpha = 1$ og $\beta = 2$, da det så er vigtigst at spare på den dyrere kapital. Vice versa hvis lønnen er højest ($w > r$).

Antag $\alpha = \beta = \gamma$.

(c) Vis at profitten efter profitmaksimering bliver $\Pi = \frac{\frac{\gamma}{4} p^2}{w + r}$
Svar: Omkostningsfunktionen bliver

$$C(x, w, r) = \frac{1}{\gamma} (w + r) x^2$$

Virksomhedens profitmaksimeringsproblem bliver

$$\Pi^\star(p,w,r) = \max_x px - C(x,w,r) = \max_x px - \frac{1}{\gamma}(w+r)\,x^2$$

Det giver *førsteordensbetingelsen (FOC)*

$$p - \frac{\partial C(x,w,r)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{2}{\gamma}(w+r)\,x \Leftrightarrow x^\star(p,w,r) = \frac{\frac{\gamma}{2}p}{w+r}$$

Profitten bliver så

$$\Pi^\star(p,w,r) = px^\star - \frac{1}{\gamma}(w+r)(x^\star)^2 = \frac{\frac{\gamma}{2}p^2}{w+r} - \frac{\frac{\gamma}{4}p^2}{w+r} = \frac{\frac{\gamma}{4}p^2}{w+r} > 0$$

Bemærk yderligere, at vi har fundet et maksimum, da *andenordensbetingelsen (SOC)* altid er opfyldt

$$\frac{\partial^2[px - C(x,w,r)]}{\partial x^2} = -\frac{2}{\gamma}(w+r) < 0$$

Antag at $p = 4$, $w = 2$ og $r = 2$, samt at der er faste omkostninger givet ved $FC = \gamma^2$.

(d) Hvis virksomheden kunne vælge $\gamma > 0$, hvad ville den så vælge? Og hvad bliver omkostningsfunktionen?
Svar: Vi har at

$$\Pi^\star(\gamma) = \frac{\frac{\gamma}{4}4^2}{2+2} - FC = \gamma - \gamma^2$$

og får derfor giver *førsteordensbetingelsen* (FOC) at

$$\frac{\partial \Pi^\star(\gamma)}{\partial \gamma} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{2}$$

Vi er sikre på, at have fundet et maksimum, da *andenordensbetingelsen* (SOC) altid er overholdt

$$\frac{\partial^2 \Pi^\star(\gamma)}{\partial \gamma^2} = -2 < 0$$

Omkostningsfunktionen bliver

$$C(x,w,r) = 8x^2 + \frac{1}{4}$$

Antag at virksomheden i stedet også kunne vælge at have produktionsfunktionen

$$x = f(\ell, k) = \left(\frac{1}{4}\ell + \frac{1}{4}k\right)^{\frac{1}{2}}$$

og faste omkostninger $FC = \frac{1}{4}$.

(e) Ville den foretrække dette frem for valget i (d) for uændrede faktorpriser? Hvad hvis én af faktorerpriserne stiger i fremtiden?
Svar: Når faktorpriserne er ens, så er det lige meget, hvor meget virksomheden bruger af hvert input. Alle kombinationer hvor $\ell + k = 4x^2$ giver et output på x og koster $8x^2$. Derfor bliver omkostningsfunktionen

$$C(x, w, r) = 8x^2 + \frac{1}{4}$$

og virksomhedens profit vil derfor være uændret sammenlignet med spørgsmål (d). Men fordelen er, at omkostningsfunktionen ikke vil blive påvirket så længe at kun én af faktorpriserne stiger, da det så er muligt at substitutere fuldt over til den anden faktor. Det er ikke muligt med den originale produktionsfunktion.

4 Generel Ligevægt: Bytteøkonomi

Betragt en bytteøkonomi med usikkerhed og én vare i to tilstande, der indtræffer med hhv. sandsynlighed δ og $1-\delta$, hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved von Neumann–Morgenstern nyttefunktioner givet ved

$$U^A(x_1, x_2) = \delta x_1^{\alpha} + (1-\delta)x_2^{\alpha}, \alpha \in (0, 1]$$
$$U^B(x_1, x_2) = \delta x_1^{\beta} + (1-\delta)x_2^{\beta}, \beta \in (0, 1)$$

Varen kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder i begge tilstande. Der er privat ejendomsret i økonomien. Både A's og B's initialbeholdninger er $(2, 1)$. Markederne er komplette og der er perfekt konkurrence. Priserne på vare 1 og 2 er $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$.

(a) Hvilken betingelse skal gælde for alle *indre* Pareto-optimale tilstande?
Svar: Alle indre Pareto-optimale tilstande skal overholde

$$\begin{aligned}
MRS^A(x_1^A, x_2^A) &= MRS^B(x_1^B, x_2^B) \\
\frac{\delta\alpha\left(x_1^A\right)^{\alpha-1}}{(1-\delta)\alpha\left(x_2^A\right)^{\alpha-1}} &= \frac{\delta\alpha\left(x_1^B\right)^{\beta-1}}{(1-\delta)\alpha\left(x_2^B\right)^{\beta-1}} \Leftrightarrow \\
\left(\frac{x_1^A}{x_2^A}\right)^{\alpha-1} &= \left(\frac{x_1^B}{x_2^B}\right)^{\beta-1}
\end{aligned}$$

(b) Giv en kort forklaring på, hvad 1. velfærdsteorem siger.
Svar: »Hvis alle forbrugere har monotone præferencer så er enhver Walras-ligevægt Pareto optimal«.

Antag at $\alpha = 1$.

(c) Argumentér for eller imod om det gælder, at $x_1^B = x_2^B$ i alle *indre* Pareto-optimale tilstande.
Svar: Det er korrekt. Fra svaret i spørgsmål (a) fås:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_1^A}{x_2^A}\right)^{1-1} &= \left(\frac{x_1^B}{x_2^B}\right)^{\beta-1} \Leftrightarrow \\
1 &= \left(\frac{x_1^B}{x_2^B}\right)^{\beta-1} \Leftrightarrow \\
x_1^B &= x_2^B
\end{aligned}$$

(d) Argumentér for eller imod om det gælder, at $x_1^B = x_2^B$ i Walras-ligevægten (du kan være sikker på at den eksisterer og *ikke* ligger på randen).
Svar: Da $x_1^B = x_2^B$ gælder i alle Pareto-optimale tilstande (jf. spørgmsål (c)), og antagelserne bag 1. velfærdsteorem er overholdt, må alle Walras-ligevægte være Pareto-optimale, og derfor også have denne egenskab (jf. spørgsmål (b)).

Antag at $\alpha \in (0, 1)$.

(e) Påvirker den nye antagelse på α dine svar i spørgsmål (c) og (d)? Diskutér dine resultater i forhold til, hvordan risikoen fordeles i økonomien og hvor meget forsikring forbruger B kan opnå.
Svar: Med $\alpha \in (0, 1)$ kan det afvises, at $x_1^B = x_2^B$ i en *indre* Pareto optimal tilstand, da

$$\left(\frac{x_1^B}{x_2^B}\right)^{\beta-1} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x_1^A}{x_2^A}\right)^{\alpha-1} = 1 \Leftrightarrow x_1^A = x_2^A$$

hvilket ikke kan lade sig gøre, da følgende betingelser ikke begge kan være opfyldt

$$\begin{aligned} x_1^A + x_1^B = x_2^A + x_2^B = 2 \\ x_2^A + x_2^B = x_1^A + x_1^B = 1 \end{aligned}$$

Der er *aggregeret risiko* i modellen, da der er mere af varen i tilstand 1 end i tilstand 2.

i. Når $\alpha = 1$ er forbruger A *risikoneutral*, og påtager sig derfor al risiko, mens forbruger B opnår *fuld forsikring.*

ii. Når $\alpha \in (0, 1)$ er forbruger A *risikoavers*, og der vil derfor ske en *fordeling af risikoen.*

Det kan bemærkes, at fordelingen af risiko altid er Pareto-optimal.