Matematik A E2020
Uge 40, Forelæsning 2

Afsnit 8.6-8.7

Lokale ekstremumspunkter, vendetangenter, konvekse/konkave fkt

+ Nyttemaksimeringsproblem!

Lokale ekstremumspunkter (8.6)

Lad $f : I \to \mathbb{R}$

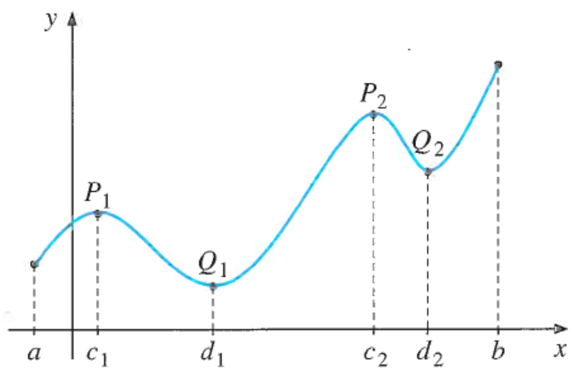
$c \in I$ er et **lokalt maximumspunkt** for f hvis

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{for alle } x \text{ i et interval omkring } c.$$

$d \in I$ er et **lokalt minimumspunkt** for f hvis

$$f(d) \leq f(x) \quad \text{for alle } x \text{ i et interval omkring } d.$$

Grafisk eksempel:



Nødvendig førsteordensbetingelse (FOC):

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være differentiabel og c være et indre punkt i I.
Hvis c er et lokalt ekstremumspunkt (maks. eller min.),
så er det et kritisk punkt: $f'(c) = 0$

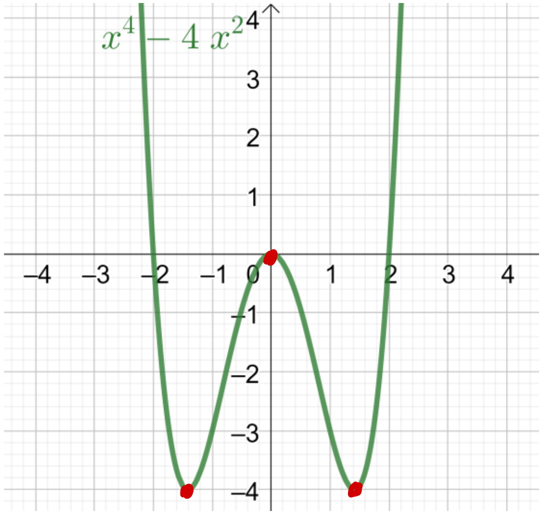
Test for lokale ekstr.-pkt vha f'

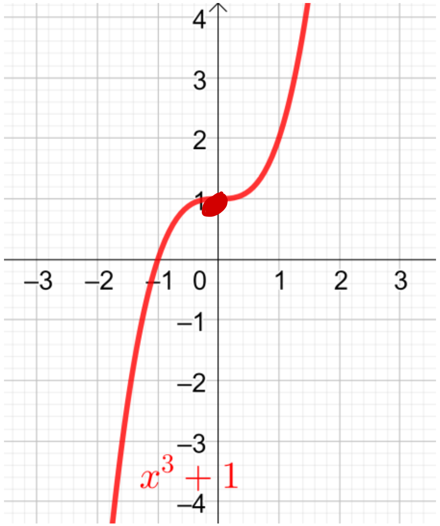
Sætning (8.6.1):
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være diff. og c være et indre kritisk pkt.

Hvis $f'(x) \geq 0$ i interval (a, c) og $f'(x) \leq 0$ i interval (c, b), så er c et lokalt maksimumspunkt.

Hvis $f'(x) \leq 0$ i interval (a, c) og $f'(x) \geq 0$ i interval (c, b), så er c et lokalt minimumspunkt.

Hvis $f'(x) > 0$ (eller $f'(x) < 0$) i intervaller (a, c) og (c, b), så er c *ikke* et lokalt ekstremumspunkt. "Saddel-pkt"





Test for lokale ekstr.-pkt vha f''

Sætning (8.6.2):
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være to gange diff. og c være et indre kritisk pkt.
Hvis $f''(c) < 0$, så er c et (strengt) lokalt maksimumspunkt.
Hvis $f''(c) > 0$, så er c et (strengt) lokalt minimumspunkt.

Bevis (første del): Antag $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$.

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h} < 0$$

For h "tæt på 0": $\dfrac{f'(c+h)}{h} < 0$

$$f'(c+h) \begin{cases} > 0 & \text{for } h < 0 \\ < 0 & \text{for } h > 0 \end{cases} \quad (\text{og } h \text{ "tæt på 0"})$$

Sætn. 8.6.1 : c er et lok. max-pkt.

Øvelse

$$f(x) = x^3 e^x$$

Bestem alle kritiske punkter for f (pingo.coactum.de, 185415)

Klassificér alle de kritiske punkter
(lokalt/globalt max/min eller "saddelpunkt")

$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3+x)$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ eller $x = -3$

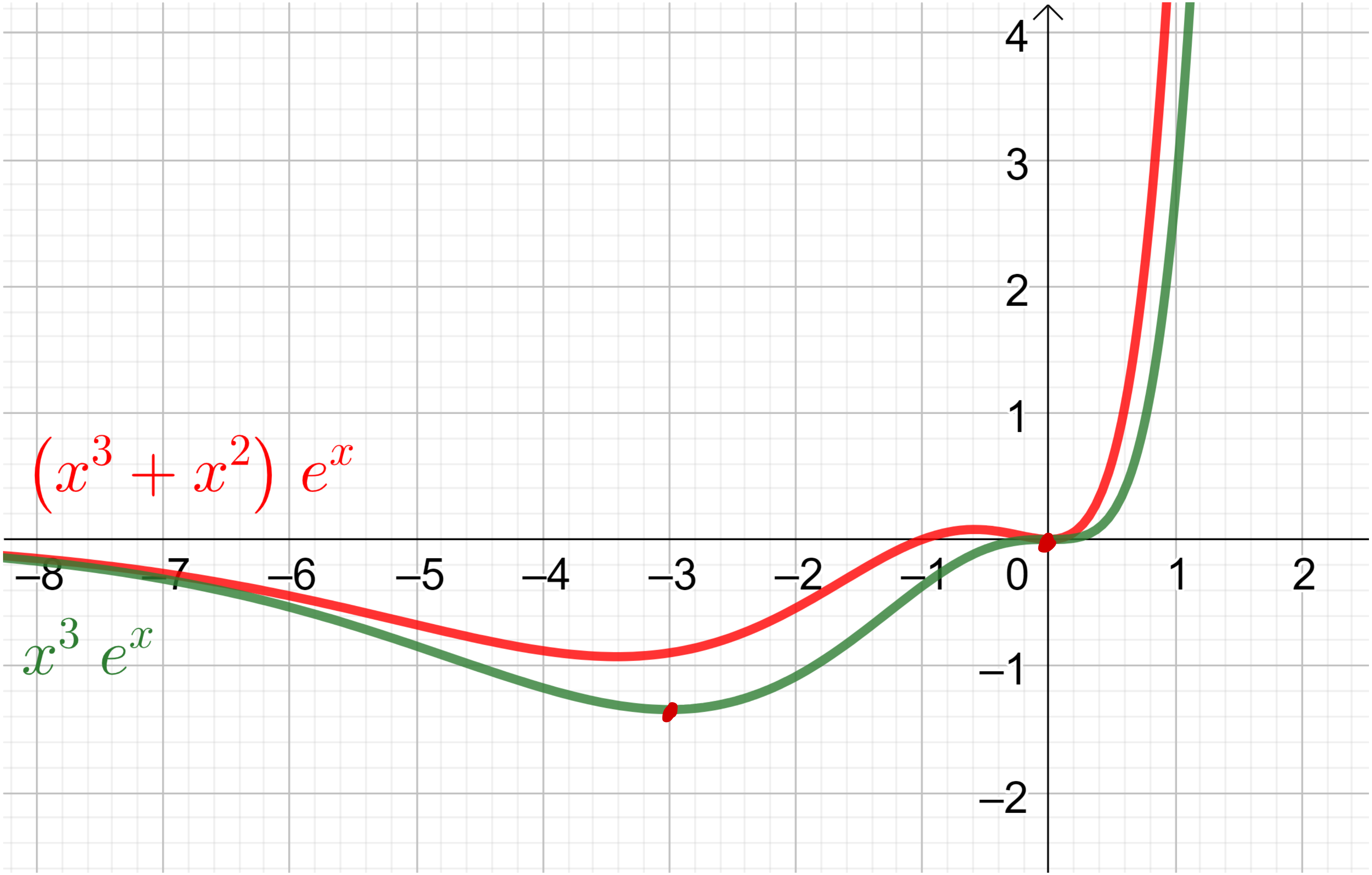
Fortegn for f':

		-3		0		x
$f'(x)$:	÷	0	+	0	+	

$x=-3$: Globalt min-pkt (Sætn. 8.2.1)

$x=0$: Saddelpkt. (Sætn 8.6.1)

Extra: Prøv med $g(x) = (x^3 + x^2) e^x$



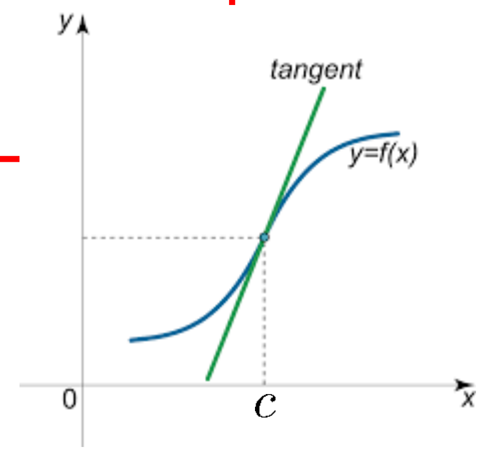
$(x^3 + x^2)\ e^x$
$x^3\ e^x$
4
3
2
1
0
−1
−2
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2

Vendetangenter/inflection points (8.7)

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være to gange differentiabel.
f har vendetangent i det indre punkt c, hvis der findes interval (a, b) omkring c så:

$$f''(x) \geq 0 \text{ i } (a, c) \text{ og } f''(x) \leq 0 \text{ i } (c, b) \textit{ eller}$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ i } (a, c) \text{ og } f''(x) \geq 0 \text{ i } (c, b)$$



"f skifter fra at være konveks til konkav (eller omvendt) i c"

Nødvendig bet. for vendetangent (Thm 8.7.1)

Hvis f'' er kontinuert og f har vendetangent i c, så gælder:

$$f''(c) = 0$$

Ikke tilstr. bet.!

$f(x) = x^4$, $c = 0$

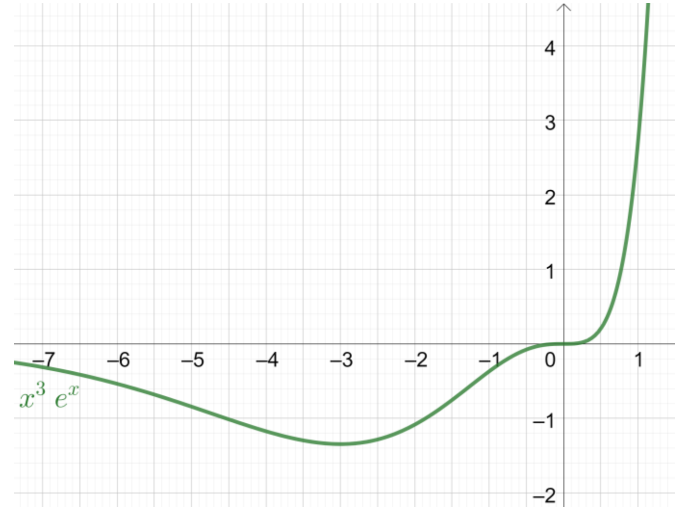
$f''(0) = 0$ men f har ikke vendetang. i $c = 0$.

Øvelse

$f(x) = x^3 e^x$ $\quad f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x$

Bestem alle ”inflection points” c for f (altså alle de c, hvor f har vendetangent)

Lav evt fortegnsdiagram for f''



$f''(x) = 6x\,e^x + 3x^2e^x + 3x^2e^x + x^3e^x = x\,e^x(x^2 + 6x + 6)$

$f''(x) = 0 \iff \underline{x = 0}$ eller $x^2 + 6x + 6 = 0$

$\underline{x = -3 \pm \sqrt{3}}$

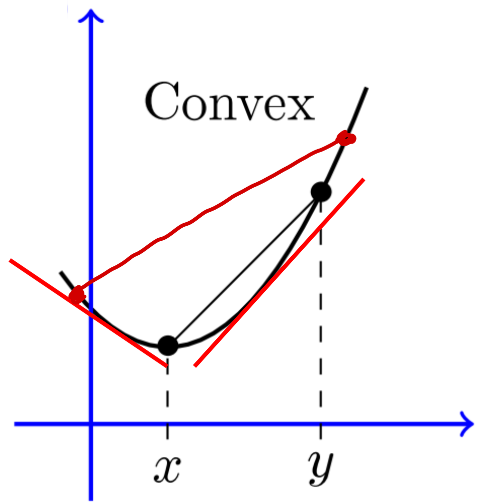
Fortegn for f'':

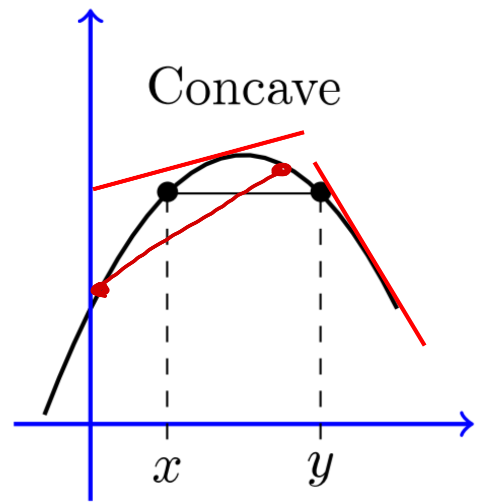
x		$-3-\sqrt{3}$		$-3+\sqrt{3}$		0	
$f''(x)$:	÷	0	+	0	÷	0	+

Vendetangenter i $x = -3-\sqrt{3}$, $x = -3+\sqrt{3}$, $x = 0$

(Vha fortegnsdiagram og definitionen).

Konveks/konkav: Generel definition

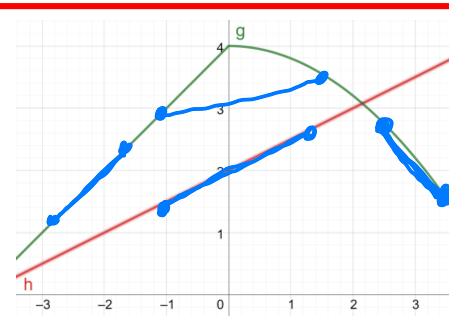




f er konveks, hvis det for ethvert par af punkter på grafen gælder, at liniestykket mellem disse punkter ligger på eller over grafen

f er konkav, hvis det for ethvert par af punkter på grafen gælder, at liniestykket mellem disse punkter ligger på eller under grafen

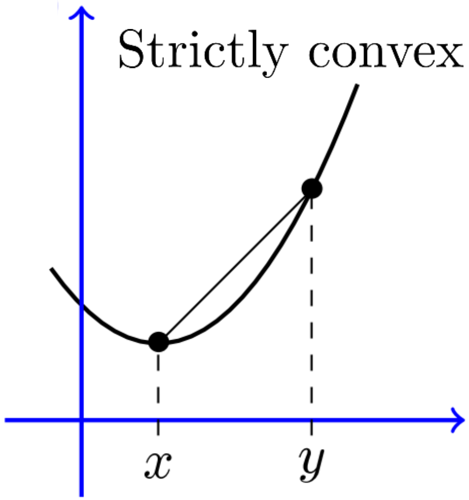
Eksempel: Er disse fkt konvekse/konkave?

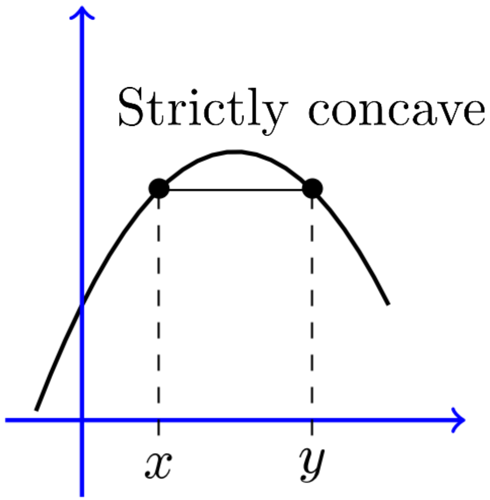


h: ✓konveks
✓konkav

g: ✓konkav
✗konveks

Strengt Konveks/konkav





f er *strengt konveks*, hvis det for ethvert par af punkter på grafen gælder, at liniestykket mellem disse punkter ligger *over* grafen. Tilstrækkelig betingelse: $f''(x) > 0$ for alle x.

f er *strengt konkav*, hvis det for ethvert par af punkter på grafen gælder, at liniestykket mellem disse punkter ligger *under* grafen Tilstrækkelig betingelse: $f''(x) < 0$ for alle x.

NB: g og h i eksemplet på slide 10 er hverken strengt konvekse eller strengt konkave.

Nyttemaksimeringsproblem

- Forbrugssituation med 2 varer
  - Varebundt (consumption bundle): (x,y), hvor $x,y \geq 0$
  - Priser: $p > 0$ og $q > 0$
  - Indkomst/formue: $m > 0$

- Budgetmængden er de varebundter (x,y), der opfylder budgetbetingelsen: $px + qy \leq m$

- Forbrugerens "smag" (præferencer) er givet ved en nyttefunktion $u(x,y)$
  -> "Nyttemaksimeringsproblem":

$$\boxed{\max_{x,y\geq 0} u(x,y) \quad \text{under bibetingelsen} \quad px + qy \leq m}$$

Eksempel/øvelse: $u(x,y) = \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y)$

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

1) Isolér y i bibetingelsen. $y = \frac{m - px}{q} = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}x$

2) Omform problemet til et optimeringsproblem med kun én variabel (x). Hvilket interval er det, vi skal finde maksimum på?

3) Løs problemet, dvs. bestem maksimumspunktet x^*. Bemærk, at det kan afhænge af parametrene p, q og m.

pingo.coactum.de (185415)

4) Bestem også det optimale forbrug af vare 2 (y^*). Hvordan afhænger det optimale forbrug af hver af de to varer (x^* og y^*) af p, q og m?

5) Hvor stor en andel af sin indkomst m bruger forbrugeren på vare 1?

[Ekstra: Prøv med $u(x,y) = \alpha\ln(x) + (1-\alpha)\ln(y)$, hvor $0 < \alpha < 1$]

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

2) $$\boxed{\max_{0<x<\frac{m}{p}} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{m-px}{q}\right)}$$

$x > 0$

$y > 0: \quad \frac{m-px}{q} > 0 \iff m > px \iff x < \frac{m}{p}$

Vi skal altså finde maksimumspunkt for funktionen $f(x) = \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{m-px}{q}\right)$ på intervallet $\left(0, \frac{m}{p}\right)$.

3) HINT: Find kritisk pkt. for f.
Vis, at det er et max-pkt.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\left(-\frac{p}{q}\right)\frac{1}{\frac{m-px}{q}} = \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{2p}{3q}\left(\frac{m-px}{q}\right)^{-1}$$

$$\boxed{\max_{x,y>0}\ \frac{1}{3}\ln(x)+\frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px+qy=m}$$

$$\frac{1}{3}x^{-1}=\frac{2p}{3q}\left(\frac{m-px}{q}\right)^{-1}=\frac{2}{3}p(m-px)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{-1}=2p(m-px)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{m-px}{2p}=\frac{m}{2p}-\frac{px}{2p}=\frac{m}{2p}-\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x=\frac{m}{2p} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=\frac{m}{3p}}$$

Eneste krit. pkt!

Vis, at krit. pkt. er max-pkt

$$f''(x)=\frac{1}{3}\left(-x^{-2}\right)-\frac{2}{3}p(-p)\left(-(m-px)^{-2}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}x^{-2}-\frac{2}{3}p^2(m-px)^{-2}<0$$

Altså må $x=\frac{m}{3p}$ være max-pkt (Thm 8.2.2)

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

3) Løsn. til nytte-max problem: $x^* = \dfrac{m}{3p}$

4)

$$y^* = \frac{m - px^*}{q} = \frac{m - \frac{m}{3}}{q} = \underline{\frac{2m}{3q}}$$

5)

$$\frac{p \cdot x^*}{m} = \frac{\frac{m}{3}}{m} = \underline{\frac{1}{3}}$$