Opgave 1

a) $f(x) = \ln(e^x + 1)$ for alle $x \in R$

$f'(x) = e^x \cdot \frac{1}{e^x+1}$ ved kæde reglen

$= \frac{e^x}{e^x+1}$

$f''(x) =$ Brug af kvotient reglen.

$f''(x) = \frac{e^x \cdot (e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1) - e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Vi ved $f'' > 0$, derfor konveks

~~b)~~ $\cancel{\int_1^b \sqrt{x}\,dx = [2\sqrt{x}]_1^b} =$

Opgave 2

a)

1 $\int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_a^4 x^{-\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2\cdot 4^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}} = 4 - 2a^{\frac{1}{2}}$

2 Jeg bruger partial Integration $f(x) = (x+1)$

$g'(x) = e^{x+2}$

$\int_0^2 (x+1)e^{x+2}\,dx$

$(x+1)e^{x+2} - \int 1\cdot e^{x+2}\,dx = (x+1)e^{x+2} - x\cdot e^{x+2}$

$= xe^{x+2} + e^{x+2} - xe^{x+2} = e^{x+2}$

$= \left[e^{x+2}\right]_0^2 = e^{2+2} - e^{0+2} = \underline{\underline{e^4 - e^2}}$

b)

$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^b = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{1} = 2\cdot\sqrt{b} - 2$

når $b \to \infty$, så må $2\sqrt{b} - 2 \to \infty$

derfor divergent

c

$k = \frac{1}{4}$ $|k| < 1$

$a = 3$

Derfor konvergent

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}} = \frac{3}{4^{1-1}} = 3 + 3\cdot\frac{3}{4^1} \ldots$

Sum formlen: $a \cdot \frac{1}{1-k}$

$3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = \frac{3\cdot 4}{3} = 4 = \frac{12}{3}$

Summen derfor til 4

Opgave 3

a $f(x,y) = x^2 e^{y^2} - x$

$f_1'(x,y) = 2xe^{y^2} - 1 \qquad f_2'(x,y) = x^2 2y e^{y^2}$

b Vis $(\frac{1}{2}, 0)$ er kritisk punkt

$f_1'(\frac{1}{2}, 0) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{0^2} - 1 = 1 \cdot 1 - 1 = 0$

Derfor kritisk punkt for x

$f_2'(\frac{1}{2}, 0) = 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2}^2 \cdot e^{0^2} = 0$

og så kritisk punkt for y

Derfor samlet kritisk punkt.

c

$f_{11}''(x,y) = 2e^{y^2} \qquad f_{22}''(x,y) = \text{produkt regel}$

$f_{22}'' = x^2 2 \cdot e^{y^2} + x^2 2y \cdot 2y e^{y^2}$

$f_{22}'' = 2x^2 e^{y^2} + 4x^2 y^2 e^{y^2}$

$f_{22}'' = 2x^2 e^{y^2}(1 + y^2)$

$f_{21}'' = f_{12}'' = 4xye^{y^2}$ Dette siger Youngs sætning.

d Bestem hvilken form for kritisk punkt

$A = 2e^{y^2} = 2e^{0^2} = 2 \cdot 1 = 2 > 0$

$B = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot e^{0^2} = 0 = 0$

$C = 2\frac{1}{2}^2 \cdot e^{0^2}(1 + 0^2) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$AC - B^2 > 0$ Da $2 \cdot \frac{1}{2} - 0^2 = 1$ og $A > 0$

Derfor har vi at gøre med et minimum.