Mat B Juni 2021

gave 1

a) For at beregne matrixproduktet AB', skal B' findes.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ Nu findes produktet

$$B \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB' = A \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad AB' = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}}$$

b) For at have en invers / være invertibel skal $|AB'| \neq 0$. Finder determinanten

$$|AB'| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -4$$

Determinanten er forskellig fra 0 derfor er AB' invertibel

c) Nu findes den inverse ved at opstille udtrykket $(AB' : E)$ Den inverse findes ved række operationer

$$(AB')^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (AB')^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}}$$

c For at bestemme alle løsninger til $A\alpha = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
Opstilles en udvidet koefficientmatrix
som reduceres til echelon form vha. rækkeoperationer

$$A: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Det udledes x_3 indgår i begge rækker
derfor sættes x_3 til en fri variabel.

$x_3 = s$ $\quad$ $x_2 + x_3 = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $x_1 - x_3 = \frac{1}{2}$

$\quad$ $x_2 = -x_3 - \frac{1}{2}$ $\quad$ $x_1 = x_3 + \frac{1}{2}$

Herved fås $(x_1, x_2, x_3) = \underline{\underline{(s+\frac{1}{2}, -s-\frac{1}{2}, s)}}$

d)

$$C(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

For at bestemme om -1 og 3 er egenværdier
findes determinanden for $|C(2) - \lambda I| x = 0$
Her betegner λ egenværdien. Determinanterne
findes vha. Sarrus regel.

$$|C(2)+1I| = \begin{vmatrix} 1+1 & 0 & 1 \\ 0 & 2+1 & 0 \\ 4 & 0 & 1+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 - (12) = 12 - 12 = 0$$

Derfor er -1 en egenværdi for $C(2)$

$$|C(2)-3I| = \begin{vmatrix} 1-3 & 0 & 1 \\ 0 & 2-3 & 0 \\ 4 & 0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4-(-4) = -4+4 = 0$$

Derfor er 3 en eigenværdi for $C(2)$

e) For at finde egenvektorerne for eigenværdien -1 opstilles $|C(2)+1I|$. Denne er tidligere fundet. Vha af Gauss elimanition findes egenvektorene.

$$|C(2)+1I| = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Derfor fås en fri variabel

$x_3 = s$ $\quad x_2 = 0$ $\quad x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0$

$x_1 = -\frac{1}{2}x_3$

$(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}s, 0, s)$

Dette er egenvektorene til eigenværdien -1

$$s\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$ Hvor $s \in \mathbb{R}$, men $\neq 0$

A For at bestemme alle værdier s ved egenvektoren x opstilles følgende: $C(s)x = \lambda x$

Først findes $C(s)x$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$C(s) \cdot x = C(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ s^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+4 \\ 0 \\ s^2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ s^2+4 \end{pmatrix}$$

Det huskes - størrelses forholdet var 1:4

Derfor får man

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$ Det vil sige.

$20 = s^2 + 4 \iff 16 = s^2 \iff s = \pm 4$

Altså skal s være -4 eller 4, hvis $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ skal gælde. Herved fås egenværdien 5

g) Bestem alle værdier af s, hvor $r(C(s)) = 2$
Vha af rækkeoperationer findes den korrekte rang. Den korrekte rang er lig to initial ettaller

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ s^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ s^2-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Herved ses det, hvis $s^2-1=0$, så har $C(s)$ rangen 2.

$s^2 = 1 \Leftrightarrow s = \pm$

Dvs. der skal s være ± 1, for at det gælder $r(C(s)) = 2$. Altså $\underline{\underline{s = \pm 1}}$

gave 2

$f(x,y,z) = e^{-x} + x + y^2 + z^2 - 2yz + 2$

a) For at finde den retningsafledte i punktet $(0,2,1)$ bruges formlen $\nabla f \cdot a$

Først findes $\nabla f(x,y,z)$

$f_1' = -e^{-x} + 1 \qquad f_2' = 2y - 2z \qquad f_3' = 2z - 2y$

Derfor er gradienten $\nabla f = (-e^{-x} + 1, 2y - 2z, 2z - 2y)$

Derfor $\nabla f(0,2,1) = (-1+1, 4-2, 2-4) = (0, 2, -2)$

Nu sikres det, at længden for retningsvektoren er lig 1

$$a = \frac{(4,0,3)}{\|(4,0,3)\|} = \frac{(4,0,3)}{\sqrt{4^2+0^2+3^2}} \quad \frac{(4,0,3)}{\sqrt{25}} = \frac{(4,0,3)}{5} = \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}$$

Nu kan $\nabla f(0,2,1) \cdot a$ prikkes

$$= (0,2,-2) \cdot \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = 0 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot 0 + -2 \cdot \frac{3}{5} = 0 + 0 + \frac{-6}{5} = \frac{-6}{5}$$

Dermed er den retningsafledte $= \underline{\underline{\frac{-6}{5}}}$

b) For at bestemme Hesse matricen findes de dobbelt afledte.

$f''_{11} = e^{-x}$ $\quad f''_{22} = 2$ $\quad f''_{33} = 2$

$f''_{13} = 0$ $\quad f''_{12} = 0$ $\quad f''_{23} = 2$

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ved at kigge på de ledende hovedunderdeterminanter findes definithed.

$D_1^1 = \frac{1}{e^x} > 0 \quad D_1^2 = 2 > 0 \quad D_1^3 = 2 \geq 0$

$$D_2^{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \geq 0$$

$$D_2^{33} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{e^x} - 0^2 = \frac{2}{e^x} \geq 0$$

$$D_2^{22} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2e^{-x} - 0 = 2e^{-x} \geq 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$|D_3|$ findes vha. Sarrus regel

$= 4e^{-x} - (4e^{-x}) = 4e^{-x} - 4e^{-x} = 0 \geq 0$

Derfor er $H(x,y,z)$ positiv semidefinit, da $D_1, D_2, D_3 \geq 0$. Når $H(x,y,z)$ er positiv semidefinit, så er funktionen f konveks.

c) For at bestemme de globale minimumspunkter bruges førsteordens betingelsen FOC.

$f_1' = 0 \quad f_2' = 0 \quad f_3' = 0$

$f_1' = -e^{-x} + 1 = 0$ $\quad f_2' = 2y - 2z = 0$ $\quad f_3' = 2z - 2y = 0$

$1 = e^{-x}$ $\quad y - z = 0$ $\quad = z = y$

Jeg tager logaritmen $\quad y = z$

$0 = -x$

$0 = x$

Derved fås et globalt minimumspunkt i punktet $(0, z, y)$. Det er tidligere konkluderet, at f er konveks, dette indikerer ikke en entydig løsning. Så længe $y = z$ er der ∞ globale minimums punkter.

Minimums værdierne til minimumspunkterne findes ved at løse $f(0, z, y)$

Minimums værdierne er derfor givet ved

$f(0, z, y) = e^{-0} + 0 + (0)^2 + z$

Da $y = z$ bliver $(y - z)^2 = 0^2 = 0$

Derfor er alle minimumsværdier ...

$f(0, z, y) = 1 + 2 = 3$

$f(0, z, y) = \underline{3}$

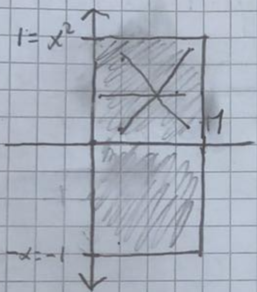
d) Funktionen f er ikke strengt konveks da.

1) f har flere minimumspunkter, hvilket ikke er muligt, fordi en streng konveks funktion kun har 1

2) Fra b) vides det at funktion er positiv semi definit, derfor er f konveks, men ikke strengt konveks

ue 3

Skitser A i et koordinatsystem



En mængde er konveks, hvis mængden er afgrænset og lukket. At man tegner to punkter i mængden, uden bindingsleddet forlader mængden.

Det udledes gennem skitsen, at mængden er konveks. Det er en konveks mængde

b) $\int_{0}^{1}\int_{-x}^{x^2} 14x^2y\,dx\,dy = -\frac{2}{5}$

Først udregnes det indre integral mht. y

$$\int_{-x}^{x^2} 14x^2y\,dy = \left[7x^2y^2\right]_{-x}^{x^2} = 7x^2\cdot(x^2)^2 - 7x^2\cdot(-x)^2$$
$$= 7x^6 - 7x^4$$

Efterfølgende findes det indre integral mht. x

$$\int_{0}^{1} 7x^6 - 7x^4\,dx = \left[x^7 - \frac{7}{5}x^5\right]_{0}^{1} = 1^7 - \frac{7}{5}\cdot 1^5 = 1 - \frac{7}{5} = \underline{\underline{-\frac{2}{5}}}$$

Herved vist at $\underline{\underline{\int_{0}^{1}\int_{-x}^{x^2} 14x^2y\,dx\,dy = -\frac{2}{5}}}$