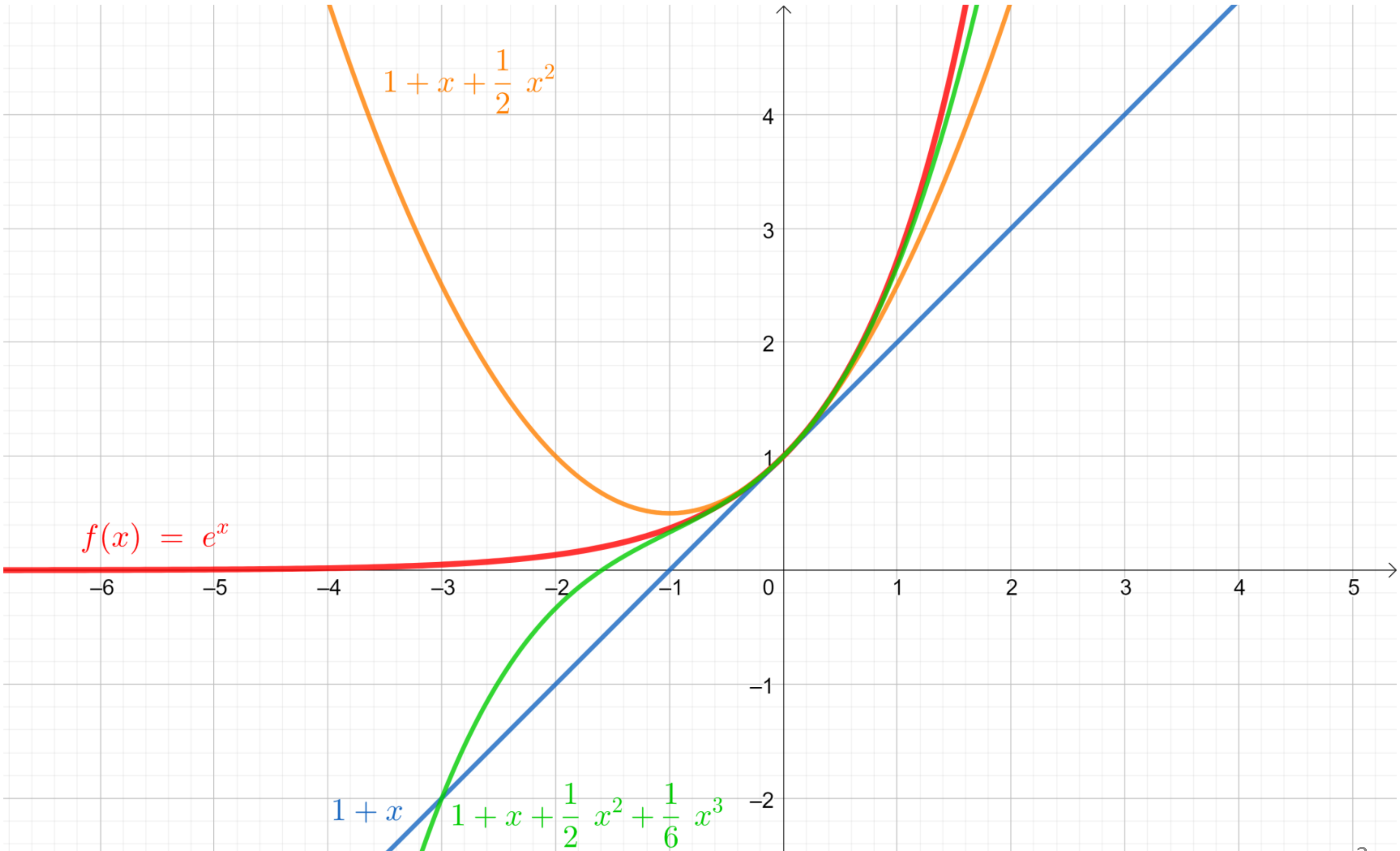
Matematik A E2020
Uge 41, Forelæsning 2

Afsnit 7.4-7.7

Taylor-approksimation og elasticiteter

Taylor-approksimationer (7.4-5)

Approksimation af funktioner med polynomier



$f : I \to \mathbb{R}$, n gange differentiabel i $a \in I$

Førsteordens/lineær approksimation ($n = 1$) omkring punktet a:

$$\boxed{f(x) \approx A + B(x-a) = p_1(x)}$$

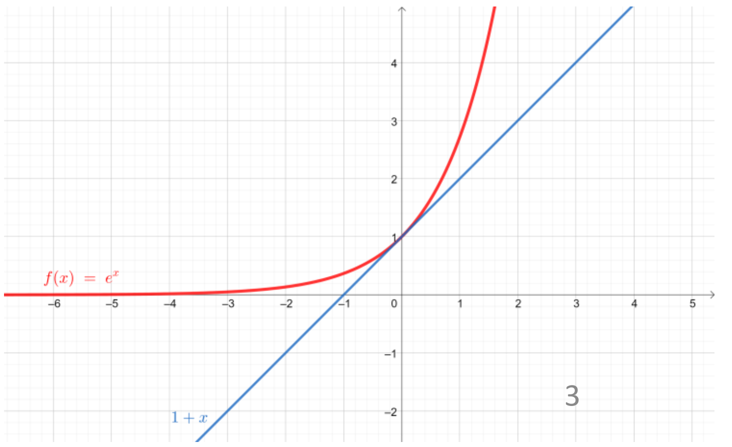
Bedste approksimation fås ved at kræve $p_1(a) = f(a)$ og $p_1'(a) = f'(a)$

Det giver: $A = f(a)$

$B = f'(a)$

Altså: $\boxed{p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)}$

Bemærk: tangenten til f i punktet a



Andenordens-approksimation omkring a:

$$\boxed{f(x) \approx A + B(x-a) + C(x-a)^2 = p_2(x)}$$

$p_2(a) = A$

$p_2'(a) = B$

$p_2''(a) = 2C$

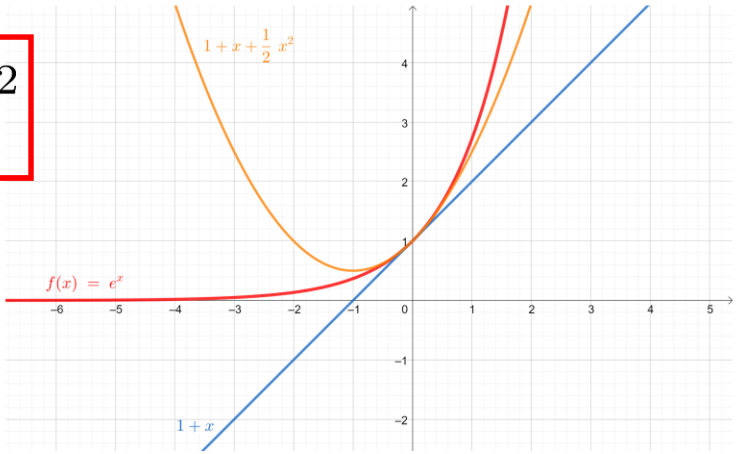
Bedste approksimation:

$$p_2(a) = f(a), \;\; p_2'(a) = f'(a) \text{ og } \; p_2''(a) = f''(a)$$

$\underline{A = f(a)}$, $\underline{B = f'(a)}$, $2C = f''(a) \Rightarrow \underline{C = \frac{f''(a)}{2}}$

Altså:

$$\boxed{p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}$$



Sådan kan fortsættes med approks.
af højere og højere grad...

Taylor-approksimationen/Taylor-polynomiet af grad n omkring punktet a:

$$\boxed{p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

(NB: $j! = j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$)

"j fakultet"

$1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$,
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

p_n er det n'te-gradspolynomium, der bedst approksimerer $f(x)$ tæt på punktet a, idet

$$p_n(a) = f(a), \quad p_n'(a) = f'(a), \quad p_n''(a) = f''(a), \quad \ldots, \quad p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

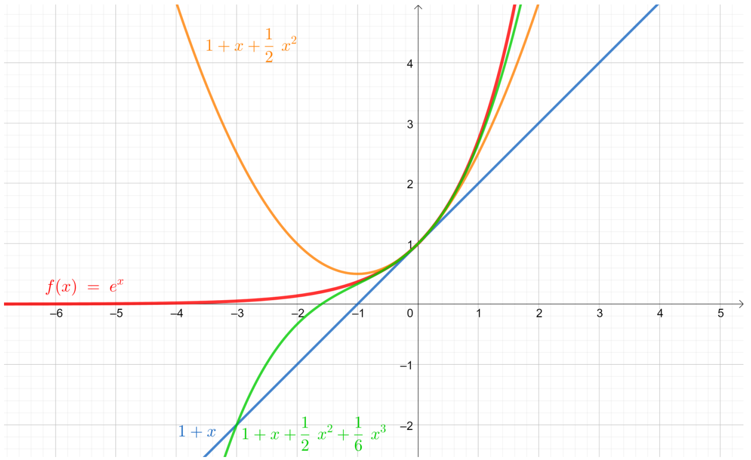
Taylor polynomiet med sum-notation:

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}$$

(per definition er $0! = 1$)

Eksempel

$$f(x) = e^x$$



Find Taylorpolynomiet af grad n omkring punktet a:

$f^{(j)}(x) = e^x$ for alle $j \in \mathbb{N}$

$$p_n(x) = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n$$

$a = 0,\ n = 3$:

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

Husk:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Øvelse

$$f(x) = \ln(1+x)$$

1) Find Taylorpolynomiet af grad 3 omkring punktet $a = 0$

(Extra: Prøv også med Taylor-pol. af grad n)

$f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$

$$p_3(x) = \ln(1) + \frac{(1+0)^{-1}}{1!}(x-0) + \frac{-(1+0)^{-2}}{2!}(x-0)^2 + \frac{2(1+0)^{-3}}{3!}(x-0)^3$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

2) Brug dette til at bestemme en approksimativ værdi for $\ln(1+\frac{1}{10})$

$$\ln(1+\tfrac{1}{10}) \approx p_3\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1000}$$

$$= 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}000333\ldots = 0{,}095333\ldots$$

$\ln(1+\frac{1}{10}) = 0{,}0953102$, så "fejl" $= 0{,}000023$

Taylors formel (7.6)

Lad p_n være Taylor-approksimationen for f omkring $a = 0$.

Forskellen mellem f og p_n i punkt x betegnes $R_{n+1}(x)$:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= f(x) - p_n(x) \\ &= f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right) \end{aligned}}$$

"fejlen når vi approksimerer $f(x)$ med $p_n(x)$"

Altså har vi oplagt:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + R_{n+1}(x) \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \end{aligned}}$$

Taylors formel med Lagranges restled: med et specifikt udtryk for $R_{n+1}(x)$

Lagranges restled (7.6.2, s. 244):
Lad f være $n+1$ gange differentiabel på interval, der indeholder 0 og x. Da gælder:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

for et tal z mellem 0 og x.

Anvendelse (~~eks~~ øvelse fra tidligere): $f(x) = \ln(1+x)$

$$p_3(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3$$

Da $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(1+x)^{-4}$ får vi:

$$R_4(x) = \frac{-3\cdot 2(1+z)^{-4}}{4!} x^4 = -\frac{1}{4}(1+z)^{-4} x^4$$

for et z mellem 0 og x

For $x > 0$ har vi så:

$$|R_4(x)| = \frac{1}{4}(1+z)^{-4} x^4 < \frac{1}{4} x^4$$

$$\left|R_4\left(\tfrac{1}{10}\right)\right| < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \underline{0{,}000025}$$

(fejl var 0,000023, så det passer!)

Kort om differentialer (7.4)

Lad f være differentiabel fkt og dx betegne (arbitrær) ændring i x.

Differentialet af $y = f(x)$ er så:

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

Grafisk:

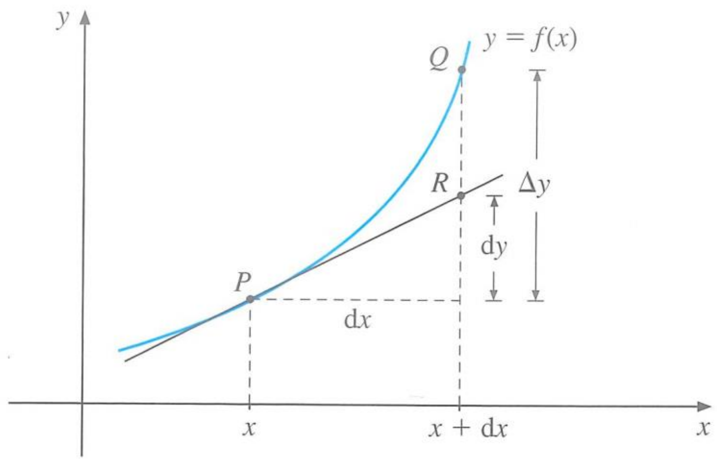


Figure 7.4.2 The differential dy and $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$

Regneregler for differentialer følger af de tilsvarende regler for differentialkvotienter (fx. differentialet af produktet af to fkt)

Elasticiteter (7.7)

- Priselasticitet for efterspørgsel på vare
  - ”Hvis prisen stiger/falder med 1%, hvad er så den %-vise ændring i efterspørgslen?”
- Efterspørgsel som fkt. af pris: $D(p)$
- Betragt prisændring fra p til $p + \Delta p$
- Så kan vi udregne (gennemsnits-)priselasticiteten:

$$\frac{\frac{D(p+\Delta p) - D(p)}{D(p)} \cdot 100\%}{\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%} = \frac{p}{D(p)} \cdot \frac{D(p+\Delta p) - D(p)}{\Delta p}$$

Hvis Δp "lille" $\approx \frac{p}{D(p)} \cdot D'(p)$

Elasticitet – generel definition

For en differentiabel funktion f med $f(x) \neq 0$ er elasticiteten mht x defineret ved:

$$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

Husk fortolkning: Elasticiteten giver os (approximativt) den procentvise ændring i funktionsværdien ved en ændring på 1% i x-værdien

NB:

- Differentialkvotienter: Absolutte ændringer
- Elasticiteter: Relative ændringer!

Øvelse

$$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

Bestem elasticiteterne for følgende funktioner:

$f(x) = \sqrt{2x} \quad (\text{hvor } x > 0)$ ⟵ pingo.coactum.de (185415)

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

$g(x) = \ln(x^2 + 1)$

$g'(x) = 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$

$\mathrm{El}_x g(x) = \frac{x}{\ln(x^2+1)} \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2}{\ln(x^2+1) \cdot (x^2+1)}$