Matematik B F2021 Forelæsning 6 (uge 11)

FMEA: 1.5-1.6

Egenværdier og egenvektorer, diagonalisering af matricer

I dag

- Egenværdier og egenvektorer (1.5)
  - Definition og generelt om bestemmelse af egenværdier og egenvektorer for n x n-matricer
  - 2 x 2-matricer: Eksempel og generelle resultater
  - Eksempel med 3 x 3-matrix og nogle generelle resultater for n x n matricer
- Anvendelse: “Markov kæde”
  - Indkomstfordeling over tid
- Diagonalisering af matricer (1.6)
  - Hvad betyder diagonalisering, hvorfor er det nyttigt, hvordan gør man det (egenværdier og egenvektorer er vigtige!)
  - Spec. fokus på symmetriske matricer (“Spektralsætn.”)

Egenværdier og egenvektorer (1.5)

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix

"Egenværdiproblemet" for $\mathbf{A}$:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}}$$

Hvis $\lambda \in \mathbb{R}$ og søjlevektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ løser denne ligning, så siger vi, at λ er en *egenværdi* for $\mathbf{A}$ og $\mathbf{x}$ er en *egenvektor* for $\mathbf{A}$ (hørende til egenværdien λ)

Egenværdiproblemet kan omskrives til:

$$\boxed{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}}$$

For ethvert λ er dette et homogent lineært ligningssystem med koefficientmatrix $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$

$$\boxed{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}}$$

"ikke triviel løsning"

λ er en egenværdi for $\mathbf{A}$ netop hvis
det homogene ligningssystem har en løsning $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Husk! (EMEA Thm 16.8.2, forelæsning 4)
Et homogent lineært ligningssystem med n ligninger, n ubekendte
har ikke-trivielle løsninger netop hvis determinanten
af koefficientmatricen er nul

Heraf får vi:

$$\boxed{\begin{array}{c}\lambda \text{ er en egenværdi for } \mathbf{A} \\ \Leftrightarrow \\ |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0\end{array}}$$

Hvis λ er en egenværdi fås de tilhørende egenvektorer $\mathbf{x}$
som de ikke-trivielle løsninger til $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Dette bliver et polynomium af grad n i den variable λ og kaldes *det karakteristiske polynomium* for $\mathbf{A}$:

$$\boxed{p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|}$$

Egenværdierne for $\mathbf{A}$ er altså netop rødderne i det karakteristiske polynomium, dvs. de værdier af λ, der opfylder $p(\lambda) = 0$

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ har således højst n egenværdier

(Hvis man tillader komplekse tal som egenværdier og tæller "med multiplicitet", så har den netop n egenværdier. Men vi betragter kun reelle egenværdier!)

2x2 matricer

Vi starter med et eksempel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Lad os finde alle egenværdier og de tilhørende egenvektorer

Karakteristisk pol:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 9$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-4)$$

Egenværdier: $\underline{\lambda_1 = -2}$, $\underline{\lambda_2 = 4}$

Egenvektorer hørende til $\lambda_1 = -2$: $(A - \lambda_1 I)\underline{x} = \underline{0}$

$A - \lambda_1 I = A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, dvs. løs: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gauss: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ $x_1 = -x_2$, $x_2 = t$ (fri var.)

Egenvektorerne: $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenvektorer hørende til $\lambda_2 = 4$:

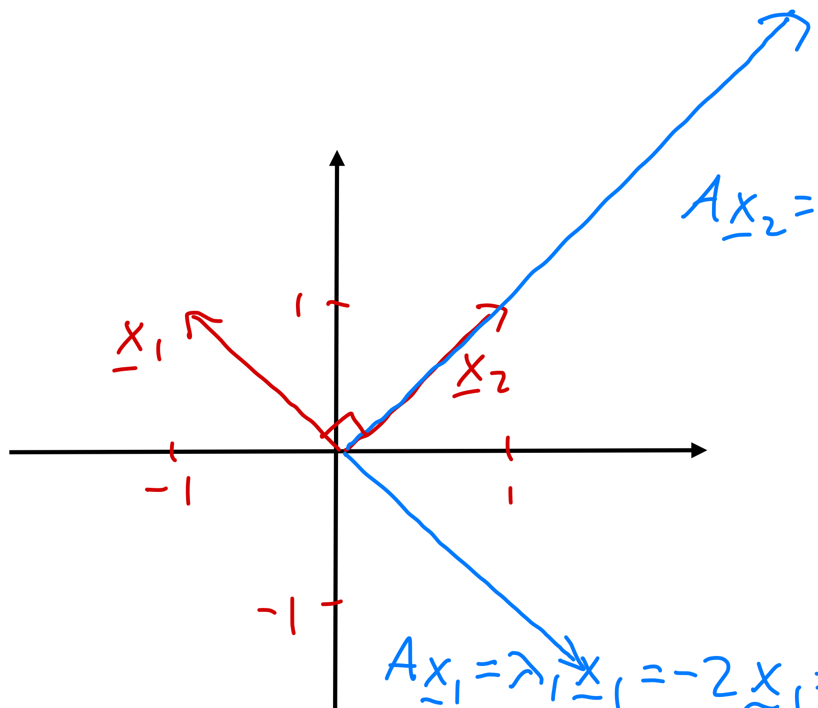
$A - \lambda_2 I = A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, dvs. løs $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gauss: $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_2 = t \end{matrix}$ Egenvektorer: $\underset{\sim}{x}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

Grafisk:

$t=1$: $\underset{\sim}{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$A\underset{\sim}{x}_2 = 4\underset{\sim}{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A\underset{\sim}{x}_1 = \lambda_1 \underset{\sim}{x}_1 = -2\underset{\sim}{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

De to egenvektorer er ortogonale!

Generel 2×2 matrix: $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Karakteristisk polynomium:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Hvis λ_1, λ_2 er rødder i $p(\lambda)$ (altså egenværdier for $\mathbf{A}$) har vi:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Altså har vi generelt om egenværdier (når de eksisterer):

(i) $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$ ← "sporet" (trace) af $\mathbf{A}$

(ii) $\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}|$

(gælder også hvis $p(\lambda)$ har en dobbeltrod, altså hvis $\lambda_1 = \lambda_2$)

Heraf fås resultater om fortegn på egenværdierne, se nederst s.20

Kan vi se på en matrix, om den har (reelle) egenværdier?

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Diskriminant:

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$= a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22} - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21}$$

$$= \underbrace{(a_{11} - a_{22})^2}_{\geq 0} + 4a_{12}a_{21}$$

For symmetrisk matrix ($a_{12} = a_{21}$) er $D \geq 0$

$$\boxed{\text{En symmetrisk } 2 \times 2 \text{ matrix har altid mindst en (reel) egenværdi!}}$$

NB: Symmetri er en tilstrækkelig betingelse for eksistens af (reelle) egenværdier, men *ikke* en nødvendig betingelse. Ikke-symmetriske matricer kan sagtens have (reelle) egenværdier.

Øvelse

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

1) Find alle egenværdier
2) Find for hver egenværdi alle de tilhørende egenvektorer

pingo.coactum.de (131061):
Stem på de vektorer, der er egenvektorer

1) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ \frac{1}{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda-3)$

Egenværdier : $\underline{\lambda_1 = 0}$, $\underline{\lambda_2 = 3}$

2) Egenvektorer hørende til $\lambda_1 = 0$:

Løs: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}}_{A - \lambda_1 I = A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Egenvektorer: $\underline{x}_1 = t\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

Extra: For hvilke $a \in \mathbb{R}$ har $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{a}{2} & 2 \end{pmatrix}$ mindst en (reel) egenværdi?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Egenvekt. hørende til $\lambda_2 = 3$:

Løs: $\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Egenvektorer: $\underline{x}_2 = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \neq 0.$

$t = -2$

PINGO: $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ er egenvektorer, de øvrige er ikke.

EXTRA: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{a}{2} & 2 \end{pmatrix}$ har mindst en egenværdi netop hvis det karakt. pol. har mindst en rod, dvs. netop hvis diskriminanten er større end eller lig nul.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ \frac{a}{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2a$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2(1-a)$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2(1-a) = 1 + 8a.$$

$$D \geq 0 \iff 1+8a \geq 0 \iff \underline{a \geq -\frac{1}{8}}$$

Egenværdier og egenvektorer for 3x3 matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi finder alle egenværdier og egenvektorerne hørende til en af egenværdierne

Det karakteristiske polynomium:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

udv.kl. efter 1. række

$$= (1-\lambda)\big((1-\lambda)(3-\lambda) - 4\big) + 2\big(-2(1-\lambda)\big)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Egenværdier : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$

(nulreglen + diskriminantmetoden)

Lad os finde egenvektorerne hørende til egenværdien $\lambda = -1$

Vi skal løse flg lineære ligningssystem: $(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$(A - \lambda I)\underline{x}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A+I} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{rækkeop.}}{\sim \ldots \sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = t \text{ (fri var.)} \end{matrix}$$

Egenvektorer: $\underline{x} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0$

Tilsvarende fås egenvektorer for hver af de to andre egenværdier

For $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ For $\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

Generelle resultater (n x n matricer)

For $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ med n (reelle) egenværdier: ”sporet” (trace) af $\mathbf{A}$

(i) $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$

(ii) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = |\mathbf{A}|$

Bemærk, at $p(\lambda)$ kan skrives: $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$

Resultaterne gælder også, hvis nogle af λ_i'erne er ens.
Fx. hvis $p(\lambda)$ har en dobbeltrod som i flg simple eksempel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = -\underbrace{(\lambda-1)(\lambda-1)}_{1 \text{ er "dobbeltrod"}}(\lambda-2)$

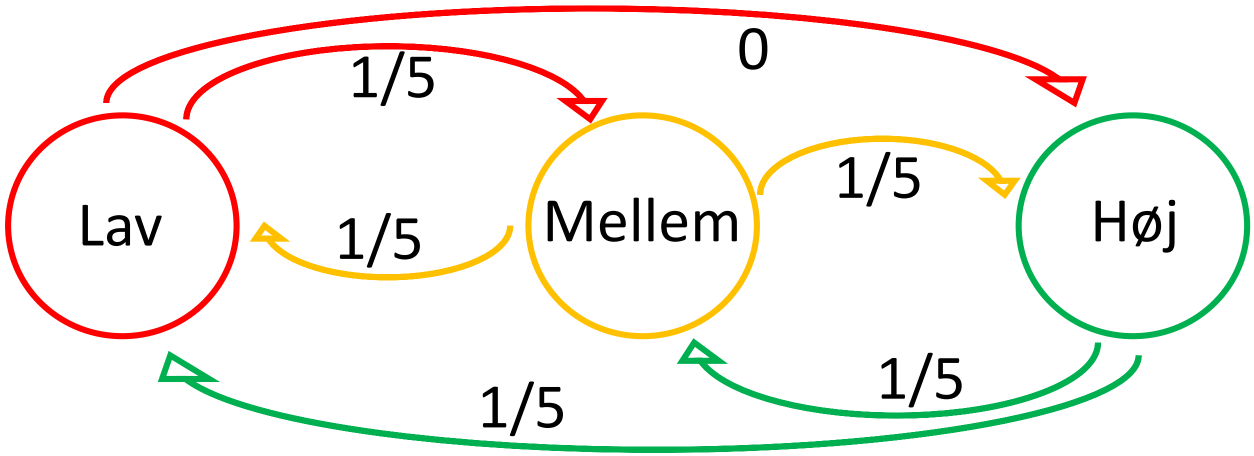
Egenværdier:
$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

En symmetrisk $n \times n$ matrix har altid mindst en (reel) egenværdi!
Hvis de tælles ”med multiplicitet”, har den netop n (reelle) egenværdier

Anvendelse ("Markov kæde")

Befolkning inddelt i indkomstgrupper: Lav, Mellem, Høj

I løbet af periode (fx 10 år) bevægelse ml. grupperne:



Dette system kan beskrives vha "Transitions-matrix":

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Antag initial fordeling af befolkning (t=0):

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_L \\ v_M \\ v_H \end{pmatrix} \qquad \text{(hvor } v_L + v_M + v_H = 1\text{)}$$

Efter en periode (t=1) er fordelingen så:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{T}\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \\ v_M \\ v_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}v_L + \frac{1}{5}v_M + \frac{1}{5}v_H \\ \frac{1}{5}v_L + \frac{3}{5}v_M + \frac{1}{5}v_H \\ 0v_L + \frac{1}{5}v_M + \frac{3}{5}v_H \end{pmatrix}$$

Efter to perioder (t=2) er den: $\mathbf{v}_2 = \mathbf{T}\mathbf{v}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{v}_0$

Og efter m perioder (t=m): $\boxed{\mathbf{v}_m = \mathbf{T}^m\mathbf{v}_0}$

$$\boxed{\mathbf{v}_m = \mathbf{T}^m \mathbf{v}_0}$$

Hvis vi vil kende fordelingen efter m perioder, skal vi altså udregne matrix-potensen $\mathbf{T}^m$

Hvad sker der "på lang sigt?"

- "Steady state"-fordeling $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ $(\text{med } s_L + s_M + s_H = 1)$:

$$\boxed{\mathbf{T}\mathbf{s} = {}^{1}\mathbf{s}}$$

  - Egenvektor for $\mathbf{T}$ hørende til egenværdien 1 !!!

- For alle initialfordelinger $\mathbf{v}_0$ vil

$$\boxed{\mathbf{T}^m \mathbf{v}_0 \to \mathbf{s} \quad \text{når} \quad m \to \infty}$$

- På lang sigt vil indkomstfordelingen altså være givet ved steady state-fordelingen $\mathbf{s}$

I vores eksempel med transitionsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

er egenvektorerne hørende til egenværdien 1 på formen

$$(T - 1 \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$$

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \neq 0)$$

Steady state-fordelingen er den egenvektor, der opfylder, at koordinaterne summer til 1:

$$\boxed{\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

Diagonalisering af matricer (1.6)

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix

$\mathbf{A}$ siges at være *diagonaliserbar (diagonalizable)*,
hvis der findes en invertibel $n \times n$ matrix $\mathbf{P}$
og en $n \times n$ diagonalmatrix $\mathbf{D}$ så

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$$

Hvorfor er vi interesserede i diagonaliserbare matricer?

Hvilke matricer er diagonaliserbare?

Hvordan finder vi $\mathbf{P}$ og $\mathbf{D}$?

Matrixpotenser for diagonaliserbare matricer:

Hvis $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, så har vi $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$

Heraf får vi:

$$\boxed{\mathbf{A}^m = (\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1})\ldots(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1}}$$

Dette gør det forholdsvis nemt at udregne $\mathbf{A}^m$ når vi kender $\mathbf{P}$ og $\mathbf{D}$, idet vi har:

$$\mathbf{D}^m = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} d_{11}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^m \end{pmatrix}$$

Theorem 1.6.1

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er diagonaliserbar hvis og kun hvis den har n lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. I så fald har vi

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D,$$

hvor $\mathbf{P}$ er matricen med søjlerne $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ og $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ er de tilhørende egenværdier.

For at afgøre om $\mathbf{A}$ er diagonaliserbar og evt finde $\mathbf{P}$ og $\mathbf{D}$ vha denne sætning, må vi altså i gang med at angribe egenværdiproblemet!

En $n \times n$ matrix $\mathbf{P}$ siges at være *ortogonal* hvis $\mathbf{P}' = \mathbf{P}^{-1}$, altså hvis $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{I}$.

Theorem 1.6.2 ("Spektralsætn. for symm. matricer")

For enhver symmetrisk $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ gælder:

(a) $\mathbf{A}$ har n (reelle) egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, når de tælles med multiplicitet

(b) Egenvektorer der hører til forskellige egenværdier er ortogonale

(c) Der eksisterer en ortogonal matrix $\mathbf{P}$ så

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D$$

$\mathbf{P}$'s søjlevektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ er egenvektorer hørende til egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ med $\|\mathbf{v}_1\| = \ldots = \|\mathbf{v}_n\| = 1$.

Eksempel fra slide 13-15:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$P^{-1}AP = D$, hvor P er ortogonal

Symmetrisk matrix!
Vi vil nu diagionalisere den - og heldigvis har vi allerede gjort en stor del af arbejdet...

Egenværdier: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 5$

Tilhørende egenvektorer:

$$\mathbf{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 5$$

$$\mathbf{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi mangler bare at "normalisere" egenvektorerne, dvs. for hver af dem at vælge t, så længden/normen er lig 1

$$\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3} \xrightarrow[t=\frac{1}{\sqrt{3}}]{} \underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2} \xrightarrow[t=\frac{1}{\sqrt{2}}]{} \underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6} \xrightarrow[t=\frac{1}{\sqrt{6}}]{} \underline{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

ortogonal matrix!

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Så er $P^{-1} A P = D$