Matematik A E2020
Uge 39, Forelæsning 2

Afsnit 6.9-6.11 og 7.3

Differentialregning: Højere ordens afledede, eksp. og log-funktioner, invers funktion mv.

Afledede af højere orden (6.9)

Husk def. af differentialkvotient og differentiabilitet for f i a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Hvis diff.kvotienten eksisterer overalt (hvor f er defineret), så har vi den (første) afledede funktion:

$$f'(x)$$

Hvis denne igen er diff. overalt, så kan vi definere den anden afledede af f som den afledede af f':

$$\boxed{f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}}$$

Og videre (hvis muligt): $f'''(x) = (f'')'(x), \quad f^{(4)}(x) = (f''')'(x), \ldots$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x), \ldots$$

Konvekse og konkave funktioner

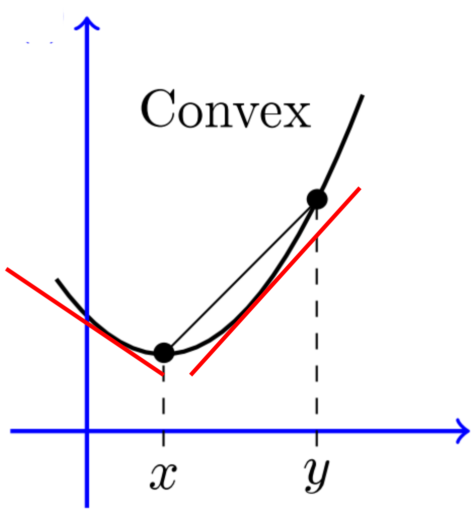
Lad f være en kontinuert fkt på interval I,
der er to gange diff. i (det indre af) I

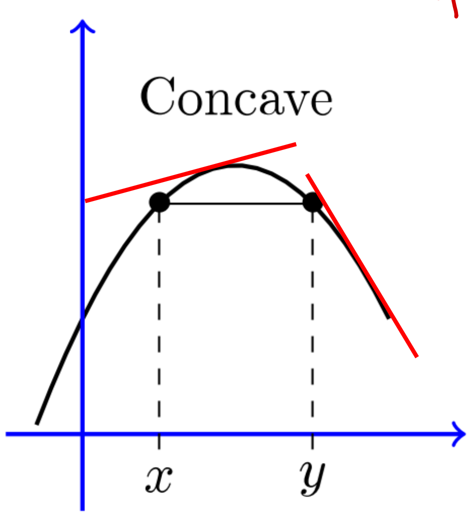
Definition af konveks/konkav (s. 205): Dvs f'(x) er voksende

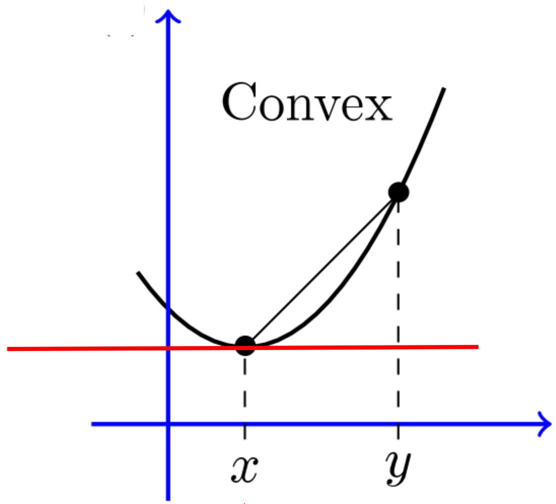
f er konveks på I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ for alle x i (det indre af) I

f er konkav på I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ for alle x i (det indre af) I

f'(x) er aftagende

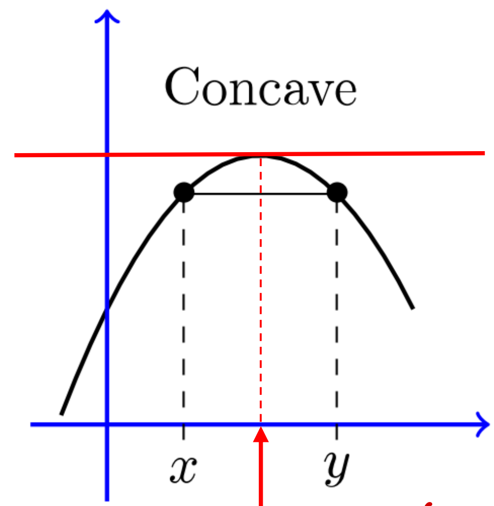






$f' \le 0$ $f' = 0$ $f' \ge 0$

Minimum



$f' \ge 0$ $f' = 0$ $f' \le 0$

Maximum

Det kritiske pkt ($f'(x)=0$) må være et minimum!

Det kritiske pkt må være et maksimum!

Den naturlige eksponentialfkt (6.10)

Den naturlige eksponentialfkt: $f(x) = e^x = \exp(x)$

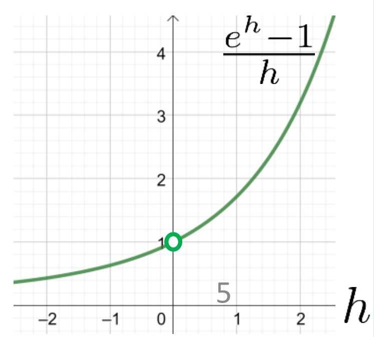
Lad os opstille differenskvotienten:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h}$$

$$= e^x \cdot \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1 \text{ for } h \to 0} \to e^x \quad \text{for } h \to 0$$

$$\underline{f'(x) = e^x \text{ for alle } x \in \mathbb{R}}$$

$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$



Andre eksponentialfunktioner

Lad $a > 0$ og betragt eksponentialfunktionen:

$$h(x) = a^x$$

Da $a = e^{\ln(a)}$ har vi:

$$h(x) = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a) \cdot x}$$

Sammensat fkt, brug kædereglen...

$$h'(x) = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = \ln(a) \cdot a^x$$

Øvelser

Opgave 3 (fra eksamen februar 2019)

Betragt funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = xe^x \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestem funktionerne f', f'' og f''' (de afledede funktioner af henholdsvis første, anden og tredje orden).

(b) Bestem Taylorpolynomiet P_3 af tredje orden for f ud fra punktet $a = 0$.

(c) Brug dine resultater fra spørgsmål (a) til at opstille et kvalificeret gæt på et udtryk for $f^{(n)}$ (den afledede funktion af n'te orden, $n \in \mathbb{N}$). ⟵ pingo.coactum.de (185415)
Vis ved induktion, at dit udtryk gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

Ekstra: Betragt funktionen

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{x^2+1}$$

Bestem $g'(x)$.

Bestem alle kritiske punkter for g, dvs alle c med $g'(c) = 0$.

Betragt funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = xe^x \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestem funktionerne f', f'' og f''' (de afledede funktioner af henholdsvis første, ande og tredje orden).

(c) Brug dine resultater fra spørgsmål (a) til at opstille et kvalificeret gæt på et udtryk for $f^{(n)}$ (den afledede funktion af n'te orden, $n \in \mathbb{N}$).

Vis ved induktion, at dit udtryk gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Produktreglen!

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$

$f''(x) = 1 \cdot e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$ $\quad$ $f'''(x) = 1 \cdot e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x$

c)

$f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$

Induktionsstart $(n=1)$: $f'(x) = (1+x)e^x$ ✓ (fra a))

Induktionsskridt: Antag $f^{(k)}(x) = (k+x)e^x$

Vis: $f^{(k+1)}(x) = (k+1+x)e^x$

$\underline{f^{(k+1)}(x)} = (f^{(k)})'(x) = 1 \cdot e^x + (k+x) \cdot e^x = \underline{(k+1+x)e^x}$ ✓

Ved induktion gælder vores "gæt" for alle $n \in \mathbb{N}$

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{x^2+1}$$

Bestem $g'(x)$.

Bestem alle kritiske punkter for g, dvs alle c med $g'(c) = 0$.

Vi bestemmer $g'(x)$ uha kvotientreglen :

$$g'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot (x^2+1) - e^{2x} \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2 - x + 1)}{(x^2+1)^2}$$

$g'(x) = 0 \iff x^2 - x + 1 = 0$ (da $2e^{2x} > 0$ for alle x).

Da $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ ser vi således, at g ikke har nogen kritiske punkter!

Differentiation af den inverse (7.3)

Sætning (7.3.1, "Inverse Fct Theorem")

Hvis f er differentiabel og strengt voksende på et interval I, så har den en invers f^{-1}, som er strengt voksende på intervallet $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$.

"R_f"

Hvis x_0 er et indre punkt i I og $f'(x_0) \neq 0$, så er f^{-1} differentiabel i $y_0 = f(x_0)$ med

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

NB: Gælder også hvis "strengt voksende" erstattes med "strengt aftagende"

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

Uformel udledning af reglen:

$f(f^{-1}(y)) = y$ (pr. definition af invers fkt)

Diff. på begge sider mht. y:

$$(f^{-1})'(y) \cdot f'(f^{-1}(y)) = 1 \quad \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Simpelt eksempel: $f(x) = x^3$ $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{3(y^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3y^{2/3}} = \underline{\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}}$$

Samme resultat som ved brug af potensreglen (selvfølgelig!)

Den naturlige logaritmefkt (6.11)

Den naturlige logaritmefkt er den inverse til e^x:

$$f(x) = e^x$$

$$f^{-1}(y) = \ln(y) \qquad (\text{hvor } y > 0)$$

Differentiation vha sætn om diff. af den inverse:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \underline{\frac{1}{y}}$$

$$\boxed{g(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x}}$$

Kort øvelse: Lad $h(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$ (hvor $x > 0$).

Bestem $h'(x)$.

Kvotientreglen + kædereglen !

$$h'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot x - \ln(2x) \cdot 1}{x^2} = \underline{\frac{1 - \ln(2x)}{x^2}}$$

Andre log-fkt: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$

Derfor: $\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$

Potensfunktioner (s. 217)

For alle $a \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = x^a \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ax^{a-1}}$$

Det kan vi nu bevise:

$$f(x) = x^a = \left(e^{\ln(x)}\right)^a = e^{a \cdot \ln(x)}$$

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{a \ln(x)} = a x^{-1} \cdot x^a = \underline{a x^{a-1}}$$

Logaritmisk differentiation

Lad h være diff. fkt med $h(x) > 0$ for alle x.
Betragt den sammensatte fkt:

$$y = \ln(h(x))$$

Da har vi:

$$y' = h'(x) \cdot \frac{1}{h(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)}$$

$$\underline{h'(x) = y' \cdot h(x)}$$

Eksempel (hvis tid)

$$h(x) = (x^2+1)^3(x+7)^{\frac{5}{2}}$$

Bestem $h'(x)$

$$y = \ln(h(x)) = \ln\left((x^2+1)^3\right) + \ln\left((x+7)^{5/2}\right) = 3\ln(x^2+1) + \frac{5}{2}\ln(x+7)$$

$$y' = 3(2x)\frac{1}{x^2+1} + \frac{5}{2}\cdot 1 \cdot \frac{1}{x+7} = \frac{6x}{x^2+1} + \frac{5}{2(x+7)}$$

$$h'(x) = y' \cdot h(x) = \left(\frac{6x}{x^2+1} + \frac{5}{2(x+7)}\right)(x^2+1)^3 \cdot (x+7)^{\frac{5}{2}}$$