Introduktion til Modelanalyse

Note til Økonomiske Principper B

ved

Claus Thustrup Kreiner
Gitte Yding Michaelsen
Hans Jørgen Whitta-Jacobsen

Introduktion til modelanalyse

Claus Thustrup Kreiner
Gitte Yding Michaelsen
Hans Jørgen Whitta-Jacobsen

August 2007

Indholdsfortegnelse

1. Typer af variable

Man skelner mellem eksogene og endogene variable:

1) Endogene variable bestemmes af modellens relationer.

2) Eksogene variable, herunder parametre, er de variable, der betragtes som givne. Modellen har altså ingen indflydelse på dem. De kan dog variere over tid på grund af forhold udenfor modellen, og i nogle tilfælde forestiller vi os, at de kan ændres via økonomisk politik. Hvis en eksogen variabel har form af en rate, kvote eller teknisk koefficient, f.eks. den marginale forbrugskvote eller eksponenten i en Cobb-Douglas produktionsfunktion, så kaldes den for en parameter.

Betragt følgende makromodel for en lukket økonomi i velkendt notation (fodtegn *d* står for efterspørgsel og *s* for udbud):

Model 1

(1) $Y_d = C + I + G$

(2) $C = a + b \cdot (Y_d - T)$

(3) $Y_s = K^c L^{1-c}$

(4) $Y_s = Y_d$

Eksogene: I, G, T, K, a, b og c, heraf parametre a, b og c.
Endogene: Y_d, C, Y_s og L

Relation (1) angiver den samlede efterspørgsel efter varer og tjenesteydelser i økonomien, (2) er en simpel Keynesiansk forbrugsfunktion (jf Mankiw (2006), kapitel 3), (3) angiver, at det samlede udbud af produktion er givet ved en Cobb-Douglas-funktion af kapital og arbejdskraft, mens (4) siger, at udbud og efterspørgsel af produktion er lige store.

De aggregerede private investeringer I, det offentlige forbrug G, skatteprovenuet T og kapitalapparatet K er i denne model eksogene (ofte markeres dette ved at sætte en streg over variablene).

Parametrene a, b og c antages at være forholdsvis stabile over tid og kan estimeres ved statistiske metoder: a er en indkomstuafhængig del af forbruget, b er en marginal forbrugstilbøjelighed (andel der forbruges af ekstra indkomst) og c er en teknisk koefficient.

Aggregeret efterspørgsel Y_d, udbud Y_s, forbrug C og arbejdskraft L bestemmes af modellen. Hermed menes, at hver endogen variabel bestemmes som en funktion af udelukkende eksogene variable, herunder parametre. Når dette er tilfældet, siger vi, at modellen er fuldstændig. Som hovedregel er modellen fuldstændig, når der er lige mange ligninger og endogene variable.

2. Typer af relationer

Man skelner typisk mellem følgende typer af relationer.

1) Definitionsligninger	Kaldes også identiteter. Definerer blot en variabel som funktion af andre variable. Der ligger ingen antagelser til grund for relationen.
2) Adfærdsrelationer	Beskriver agenters adfærd i økonomien, dvs. hvad de gør som funktion af forskellige variable. Til grund for en adfærdsrelation ligger således en specifik adfærdsantagelse.
3) Tekniske relationer	Angiver rent tekniske sammenhænge, f.eks. en produktionsfunktion.
4) Ligevægtsbetingelser	Udtrykker, at udbud skal være lig efterspørgsel (på et eller andet marked), idet en eller flere variable tilpasser sig, så ligevægt sikres. I et FK-marked vil det være tilpasning af priser, der sikrer lighed mellem udbud og efterspørgsel.

I model 1 svarer rækkefølgen af relationer til ovenstående typer. Relation (1) er en identitet, da den samlede aggregerede efterspørgsel for en lukket økonomi består af de tre komponenter pr. konvention (jf. Nationalregnskabet). Relation (2) er en adfærdsrelation, som antager, at det private forbrug er en lineær funktion af indkomsten/produktionen. Relation (3) er en teknisk relation. Relation (4) er en ligevægtsbetingelse for varemarkedet og udtrykker, at den aggregerede efterspørgsel er lig det aggregerede udbud (som derfor også er lig aggregeret produktion og aggregeret indkomst).

3. Kausalanalyse

Model 1 er en meget simpel model, men kan alligevel fejlfortolkes. Betragt følgende udsagn:

a) En ændring i den offentlige vareefterspørgsel G påvirker den aggregerede efterspørgsel Y_d og derved Y_s.
b) En ændring i kapitalmængden K påvirker produktionen Y_s.

Begge udsagn virker plausible ud fra modellen. Alligevel er det ene forkert – hvilket? Til at besvare dette er kausalanalysen et nyttigt redskab.

En kausalanalyse afslører modellens struktur, dvs. hvordan de endogene variable påvirker hinanden, og i hvilken rækkefølge de bestemmes. Først opskrives et skema med antal kolonner og rækker svarende til antal endogene variable og relationer (se skema 1.a). De endogene variable opskrives over kolonnerne og relationernes numre skrives til venstre for rækkerne. Man betragter nu hver relation og sætter kryds ud for de endogene variable, der indgår i den pågældende relation.

Eksogene variable og parametre, som indgår i den pågældende relation, skrives i en kolonne til højre for rækkerne. I skema 1.a er dette gjort for model 1.

Skema 1a. Uordnet kausalanalyse

	Endogene				
Nr.	*Yd*	*C*	*Ys*	*L*	**Eksogene & parametre**
(1)	**x**	**x**			*I G*
(2)	**x**	**x**			*a b T*
(3)			**x**	**x**	*K c*
(4)	**x**		**x**		

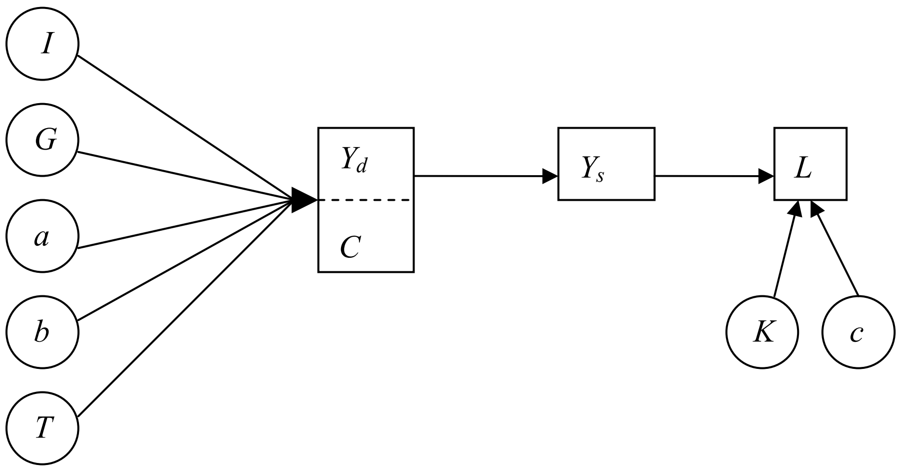
Skema 1b. Ordnet Kausalanalyse

	Endogene					
Nr.	*Yd*	*C*	*Ys*	*L*	**Eksogene & parametre**	**Orden**
(1)	**x**	**x**			*I G*	0.
(2)	**x**	**x**			*a b T*	
(4)	**x**		**x**			1.
(3)			**x**	**x**	*K c*	2.

Næste skridt er at "ordne" skemaet, som det er gjort i skema 1.b. Først søges efter en række med kun ét kryds. Hvis sådan en (eller flere) eksisterer, placeres den (de) øverst i det ny skema og betegnes 0. orden. For model 1 er der ingen rækker med kun ét kryds. Der søges nu efter en 2-ligningsblok, om hvilken det gælder, at der højst er krydser ud for de samme to endogene variable. For model 1 udgør relation (1) og (2) en 2-ligningsblok, da der er krydser ud for de to variable Y_d og C. Relation (3) og (4) udgør ikke en 2-ligningsblok, da der i alt er krydser ud for tre variable. Den fundne 2-ligningsblok (1) og (2) placeres øverst i det nye skema og betegnes 0. orden, da blokken ikke afhænger af endogene variable udenfor blokken (Y_s og L). Man søger nu efter 1-ligningsblokke igen, men under hensynstagen til, at Y_d og C er bestemte. Betragt relation (3). Den indeholder to endogene variable, Y_s og L. Da begge er ukendte kan den ikke blive til en 1-ligningsblok. Relation (4) indeholder også 2 endogene variable, Y_d og Y_s, men da Y_d allerede er bestemt, bliver den en slags énligningsblok, der bestemmer Y_s, og den placeres i det ordnede skema lige neden under blokken af 0. orden. Den ny blok kaldes en 1-ligningsblok af 1. orden, da den afhænger af 0. ordensblokken. Relation (3) opskrives til sidst som en 1-ligningsblok af 2. orden, da den afhænger af Y_s, der blev bestemt i 1. orden.

Den kausale struktur kan også vises i et pilediagram, hvor der er cirkler om eksogene variable og firkanter om endogene, og pile har betydningen ”er med til at bestemme”. Når Y_d og C er samlet indenfor én firkant med stiplet adskillelse, markerer det, at disse to variable bestemmes indenfor en simultan 2-ligningsblok. Ellers skulle diagrammet gerne være selvforklarende:

Figur 1a. Pilediagram over den kausale struktur



Den kausale struktur, hvad enten den illustreres i et pilediagram eller i et ordnet skema, beskriver de årsagsmæssige sammenhængene mellem modellens variable. Generelt gælder:

- Endogene og eksogene variable har ingen indflydelse på endogene variable af en lavere orden.
- Endogene og eksogene variable har som hovedregel indflydelse på endogene variable af en højere orden.
- Endogene variable indenfor en blok har gensidig indflydelse på hinanden.

Vi kan nu uden udregning eller reducering af modellen finde ud af, om udsagnene a) og b) er korrekte i henhold til model 1. En ændring i G påvirker Y_d i 0. orden, som påvirker Y_s i 1. orden, altså er udsagn a) korrekt. En ændring i K har kun indflydelse i blokken af 2. orden, hvor den bevirker ændringer i L. Udsagn b) er altså forkert, da K ingen indflydelse har på Y_s i denne model.

4. Løsning af model ved substitution

Kausalanalysen bidrager til forståelsen af modellen, men giver ikke et eksplicit udtryk for størrelsesordenen af de endogene variable. Lad os antage, at regeringen har spurgt sine økonomiske rådgivere om følgende:

(a) Hvor stor er den aggregerede vareefterspørgsel som funktion af investeringerne og det offentlige forbrug?
(b) Hvor stor er effekten af en ekspansiv finanspolitik på produktionen?

Vi ved fra vores kausalanalyse, at Y_d og C i model 1 bestemmes samtidigt i 0. orden. Vi kan da se bort fra resterende relationer, når a) skal besvares. Relation (1) og (2) er således to ligninger med to ubekendte, som kan løses. For at finde Y_d substitueres C i relation (2) ind i (1):

$$\begin{aligned} Y_d &= \left[a + b\left(Y_d - T\right)\right] + I + G && \Leftrightarrow \\ (1-b)\, Y_d &= a - bT + I + G && \Leftrightarrow \\ Yd &= \underline{\underline{\frac{a - bT + I + G}{1-b}}} \end{aligned}$$

Hermed er a) besvaret, Y_d er opskrevet udelukkende som funktion af eksogene variable og parametre.

Kausalanalysen viser, at Y_s bliver bestemt af Y_d (svarende til, at producenterne tilpasser udbuddet fuldkommen til efterspørgslen). Vi kan derfor besvare b) ved at indsætte Y_s på Y_d's plads og differentiere mht. G:

$$\begin{aligned} Ys &= \frac{1}{1-b}\left[a + I + G\right] && \Rightarrow \\ \frac{\partial Ys}{\partial G} &= \frac{1}{1-b}\left[\frac{\partial a}{\partial G} + \frac{\partial I}{\partial G} + \frac{\partial G}{\partial G}\right] && \Rightarrow \\ \frac{\partial Ys}{\partial G} &= \frac{1}{1-b}\left[0 + 0 + 1\right] = \frac{1}{1-b} \end{aligned}$$

Da den marginale forbrugstilbøjelighed b er mellem 0 og 1, bevirker en stigning i G en endnu kraftigere stigning i produktionen Y_s. Antag, at det offentlige ansætter en person til kontorarbejde. Personen bidrager til produktionen via sit arbejde og får løn, hvilket forøger personens privatforbrug (med b gange indkomstforøgelsen). Det øgede privatforbrug øger produktionen. Produktionsforøgelsen betyder øget indkomst i økonomien, øget forbrug og dermed øget produktion osv. Dette er Keynes' berømte multiplikatorvirkning. Virkningen dør langsomt ud, da b er mindre end 1. Den samlede virkning på Y_s af en stigning på én i G er derfor 1/(1-b), som udregnet.

5. Totaldifferentiation

Ofte kan man ikke eksplicit isolere en endogen variabel som funktion af kun eksogene variable og parametre, dvs. man kan ikke løse modellen ved substitution som beskrevet ovenfor. Man kan derfor ikke svare på spørgsmål af typen (a), dvs. det er ikke muligt at bestemme den endogene variabels *niveau.* Dette problem kan for eksempel opstå, hvis de indgående funktioner er ikke-lineære.

Heldigvis bliver økonomer oftest spurgt om spørgsmål af typen (b), dvs. om *ændringer*, som jo også er mest interessante: Vi ved godt, hvor stor indkomsten/produktionen er; det, vi er interesserede i, er, hvordan vi kan påvirke den ved økonomisk politik.

I model 1 var der ikke noget problem med isoleringen af Y_d. Antag nu at relation (2) i model 1 udskiftes med den generelle funktion (alt andet er uændret):

(2') $\quad C = C(Y_d\text{-}T) \quad\quad 0 < C'(Y_d\text{-}T) < 1$

Når (2') substitueres ind i (1), bliver modellen reduceret til én relation, men Y_d kan ikke isoleres. Vi kan altså ikke svare på spørgsmål a) længere, men ved brug af totaldifferentiering kan vi svare på (b).

Totaldifferentiering anvender den matematiske sætning, at hvis y kan skrives $y = f(x)$, så er ændringer i y forårsaget af en ændring i x ud fra et givet punkt (x,y) tilnærmelsesvis: $dy \approx f'(x)\, dx$, for små dx. Man siger i den forbindelse, at man har lineariseret modellen, for dy afhænger jo lineært af dx. Ved en totaldifferentiering lineariseres alle relationerne ved denne metode. Når der i relation (1) fx står G, skal den differentieres mht. G og ganges med ændringen, dG. Ligeledes giver lineariseringen af venstresiden i (2') dC, mens højresiden giver $C'(Y_d\text{-}T)\, dY_d$.

Lad os nu besvare spørgsmål (b). Kausalanalysen ændres ikke ved udskiftningen af (2) og viser altså, at relationerne (1), (2') og (4) skal anvendes:

(1) $\quad dY_d = dC + dI + dG$

(2') $\quad dC = C'(Y_d - T) \cdot dY_d$

(4) $\quad dY_s = dY_d$

Nu kan man løse ved substitution:

$$dY_d = C'(Y_d - T) \cdot dYd + dI + dG \quad \Leftrightarrow$$

$$dY_d = \frac{1}{1 - C'(Y_d - T)}\left[dI + dG\right] = dYs \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{dY_s}{dG} = \frac{1}{1 - C'(Y_d - T)} > 1}}$$

Vi har hermed vist - uden angivelse af funktionsform for forbruget og uden isolering af Y_d - at produktionen vil stige kraftigere end stigningen i de offentlige udgifter (for små ændringer i de offentlige udgifter).

Bemærk, at med kendskab til $C'(Y_d - T)$, altså til den marginale forbrugstilbøjlighed blot lokalt, kan vi også finde effekten på Y_s af en ændring i G. Den tidligere multiplikator, $1/(1\text{-}b)$, er et specialtilfælde af $1/(1 - C'(Y_d - T))$.

Model 1 er et eksempel på en simpel keynesiansk model, som vi ikke skal diskutere videre her (vi udskyder diskussionen til gennemgangen af Mankiws lærebog). Det vigtige i denne forbindelse er at forstå brugen af ”redskaberne”: Kausalanalyse, substitution og totaldifferentiering.

Sydsæter (2005) omtaler totaldifferentiering i afsnit 11.9 side 402 i 1. bind. Det kan også være nyttigt at se på implicit differentiation afsnit 7.1 s. 239, hvis matematikken bag ligger langt væk.

6. Case: Klassisk model

Betragt den klassiske model fra Mankiw (2006), kapitel 3:

Model 2

(1) $Y = C + I + G$

(2) $C = C(Y\text{-}T)$

(3) $I = I(r)$

(4) $Y = F(K,L)$

Eksogene: *G, T, K* og *L*.
Endogene: *Y, C, I* og r

Model 2 ligner model 1 på mange punkter. Relation (1) og (2) er uforandrede. Ligevægtsbetingelsen fra før $Y_d = Y_s$ (= *Y*) er implicit her, idet *Y* blot er indsat i (1) og (4). Dette “shortcut” anvendes tit, da man så får en relation mindre. Den vigtige forskel fra model 1 består i, at beskæftigelsen *L* nu er eksogen, og at investeringerne *I* er blevet gjort afhængige af den endogene rente. Dette lyder umiddelbart som uskyldige ændringer, men som den nedenstående kausalanalyse vil afsløre, er der tale om en model med næsten modsatte konklusioner.

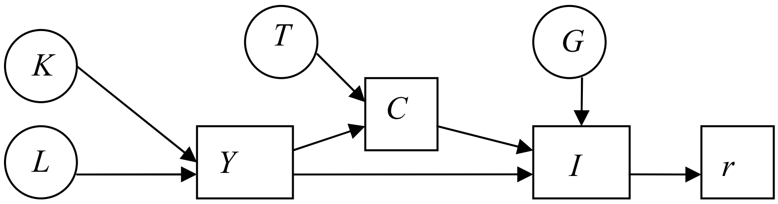
Skema 2a. Uordnet kausalanalyse

	Endogene				
Nr.	*Y*	*C*	*I*	*r*	**Eksogene & parametre**
(1)	**x**	**x**	**x**		*G*
(2)	**x**	**x**			*T*
(3)			**x**	**x**	
(4)	**x**				*K L*

Skema 2b. Ordnet kausalanalyse

	Endogene					
Nr.	*Y*	*C*	*I*	*r*	Eksogene & parametre	Orden
(4)	$\boxed{x}$				*K L*	0.
(2)	x	$\boxed{x}$			*T*	1.
(1)	x	x	$\boxed{x}$		*G*	2.
(3)			x	$\boxed{x}$		3.

Figur 2a. Pilediagram for kausalanalysen



Som man kan se af skema 2b og figur 2a, kan ekspansiv finanspolitik *G* ikke påvirke produktionen *Y* i denne model, da *G* befinder sig i 2. orden og *Y* bestemmes i 0. orden. Produktionen er bestemt af beholdningerne af kapital *K* og arbejdskraft *L* (samt teknologi) og kan således kun ændres ved ændringer i disse variable. Konsekvensen af ændret *K* eller *L* kan udregnes ved totaldifferentiering:

(4)
$$dY = F_K(K,L)\cdot dK + F_L(K,L)\cdot dL \Rightarrow$$
$$\frac{dY}{dK} = F_K(K,L)\ ,\ \frac{dY}{dL} = F_L(K,L)$$

Modsat model 1 påvirker ændringer i *K* produktionen *Y*.

Ekspansive finanspolitik påvirker investeringerne I i 2. orden. Effekten findes ved at totaldifferentiere (1) og sætte dY og dC lig 0, da de er bestemt i en lavere orden:

(1)
$$dY = dC + dI + dG \Rightarrow$$
$$dI = -dG$$

Heraf kan vi se, at der ved en øget ekspansiv finanspolitik blot sker en tilsvarende nedgang i de private investeringer (igen modsat model 1, hvor investeringerne var eksogene). At øget G bevirker faldende I kaldes fortrængning eller **crowding-out**. I vores model er der fuldkommen crowding-out (effekten er én til én), hvilket er et typisk klassisk resultat.

Stigningen i de offentlige udgifter mindsker den offentlige opsparing og derved den totale opsparing, $S = Y - C - G$ (jf. Mankiw (2006), kapitel 3). Ligevægtsbetingelsen $Y = C + I + G$ kan skrives: $Y - C - G = I$, eller $S = I$, og kan fortolkes som en betingelse for clearing på de finansielle markeder, at den totale opsparing skal svare til de totale investeringer i ligevægt. Når opsparingen falder, må investeringerne altså også falde.

Faldet i investeringerne påvirker renten r i 3. orden:

(3)
$$dI = I'(r)\,dr \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dr}{dI} = \frac{1}{I'(r)} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dr}{dG} = -\frac{1}{I'(r)}$$

Da $I'(r)$ er negativ (jf. kapitel 3 i Mankiw (2006)), bliver resultatet en rentestigning. Når renten stiger, falder investeringerne og nærmer sig den nye opsparing. Renten stiger, indtil investeringerne I svarer til opsparingen S. Vi får igen et typisk klassisk resultat: Det er **renten, som skaber ligevægt på varemarkedet.** I model 2 er opsparingen S uafhængig af renten r, men en udbygning af modellen på dette punkt giver kun små ændringer i resultaterne (jf opgave 8 nedenfor samt Mankiw, kapitel 3, s. 70-71), som stadig vil være klassiske.

7. Opgaver

1. I følgende model er Y, Y_{disp} og C endogene. Y_{disp} er disponibel indkomst, og T er eksogene skatter. Det antages, at udbuddet tilpasser sig den aggregerede efterspørgsel.

(1) $Y = C + I + G$
(2) $Y_{disp} = Y - T$
(3) $C = a + bY_{disp}$

1.a Hvilken type relation er (2)?
1.b Udfør en kausalanalyse. Hvad viser den?
1.c Udregn ved substitution Y som function af eksogene variable og parametre.
1.d Hvordan vil en stigning i I påvirke Y, Y_{disp} og C?

2. Udskift relation (2) i ovenstående med:

(2') $Y_{disp} = (1-t)Y$, t er en parameter mellem 0 og 1.

2.a Beskriv forskellen mellem (2) og (2').
2.b Ændres modellens kausale struktur?
2.c Udregn Y.
2.d Vil en stigning i I have samme virkning på Y som før?

3. I følgende model er Y, C og I endogene. Det antages, at udbuddet tilpasser sig den aggregerede efterspørgsel.

(1) $Y = C + I + G$
(2) $C = C(Y)$
(3) $I = I(r)$

3.a Beskriv relationerne.
3.b Udfør en kausalanalyse. Hvad viser den?
3.c Hvilke eksogene variable kan påvirke Y?
3.d Kan Y isoleres i denne model?
3.e Totaldifferentier modellen og udregn $\partial Y/\partial G$ og $\partial Y/\partial r$.

4. Betragt følgende mikro-model:

(1) $S_{træ} = S(V)$
(2) $D_{træ} = D(P_{træ}, P_{lys})$
(3) $D_{træ} = S_{træ}$

(1) angiver aggregeret udbud af juletræer d. 24. december. Udbuddet er uafhængigt af prisen, da juletræerne formentlig ikke er meget værd dagen efter. V er en vejrfaktor. Det antages, at der udbydes færre juletræer, når V stiger (enten fordi juletræerne ikke kan komme frem til nogle sælgere, eller fordi nogle sælgere ikke gider stå og sælge dem i dårligt vejr). (2) er efterspørgslen efter juletræer, som afhænger af prisen på juletræer og prisen på lys til træet. Vi vil antage, at efterspørgslen efter juletræer falder, når P_{lys} stiger. Lad os ikke filosofere mere over problemstillingen, men blot sige, at $S_{træ}$, $D_{træ}$ og $P_{træ}$ er de endogene variable.

4.a Hvilken type relation er (3)?
4.b Udfør en kausalanalyse. Hvad viser den?
4.c Hvilke(n) eksogen(e) variable har indflydelse på $D_{træ}$?
4.d Totaldifferentier modellen og beregn effekten på $P_{træ}$ af en stigning i henholdsvis V og P_{lys}.

5. Vi betragter nu markedet for juletræer d. 18. december og antager derfor, at udbuddet af juletræer afhænger af prisen på juletræer $P_{træ}$. Derudover er modellen uændret fra 4.

5.a Opstil en ny relation (1).
5.b Ændres kausalanalysen?
5.c Hvilke(n) eksogen(e) variable har nu indflydelse på $D_{træ}$?
5.d Totaldifferentier modellen og beregn effekten på $P_{træ}$ af en stigning i henholdsvis V og P_{lys}.

6. I model 1 blev $\partial Y/\partial G$ udregnet, og kausalanalysen viste, at ændringer i K ikke havde effekt på Y. Betragt igen model 1.

6.a Udregn L i model 1 som funktion af kun eksogene variable og parametre.
6.b Udregn $\partial L/\partial G$ og $\partial L/\partial K$.

7. Betragt model 2 igen.

7.a Hvilke endogene variable kan T påvirke?
7.b Beregn de endogene variables følsomhed overfor T.
7.c Beregn $\partial C/\partial K$, $\partial I/\partial K$, $\partial r/\partial K$.

8. I Figure 3-12 i Mankiw (2006) er opsparingen S gjort afhængig af renten r. Mankiw opstiller ikke en revideret model, men man kunne udtrykke denne sammenhæng ved at ændre relation (2) i model 2 til:

(2') $C = C(Y - T, r) \quad , \quad C'_{Y-T} > 0 \ , \ C'_{r} < 0$

8.a Fortolk (2').
8.b Udfør en kausalanalyse. Sammenlign med skema 2.b s. 10 i denne note.
8.c Er der stadig fuldkommen crowding out ved en stigning i G?
8.d Beregn de endogene variables følsomhed overfor T. Sammenlign med spørgsmål. 7.b.