Matematik A E2020
Uge 47, Forelæsning 2

Afsnit 13.1-3

Funktioner af flere variable:

Nødvendige og tilstrækkelige betingelser for globale og lokale ekstremumspunkter

Lidt overblik

- I dag: “Ekstremumsbestemmelse” for funktioner af 2 variable
  - Nødvendige førsteordensbetingelser (13.1)
  - Tilstrækkelige anden-ordensbetingelser for lokale ekstremumspunkter (13.3)
  - Tilstrækkelige betingelser for globale ekstremumspunkter (13.2)
  - Vigtige og ofte anvendte resultater!

- Husk prøveeksamen/lynprøve onsdag d. 2. dec!!!
  - Se dokument på Absalon for praktiske detaljer
    (“Om prøveeksamen/lynprøve” i modulet Kursusinfo mv)
  - Pensum til prøveeksamen: Alt stof fra forelæsningsplanen til og med denne uge (47). Opgaverne til holduv. næste uge er således også relevante for prøveeksamen.

Nødv. førsteordensbet. (13.1)

Betragt funktion $f(x, y)$ defineret på $S \subseteq \mathbb{R}^2$

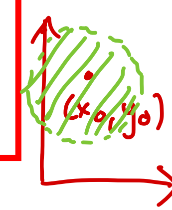
$(x_0, y_0) \in S$ er et *globalt maksimumspunkt* for f hvis

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \text{ for alle } (x, y) \in S$$

$(x_0, y_0) \in S$ er et *lokalt maksimumspunkt* for f hvis

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \text{ for alle } (x, y) \text{ i en omegn af } (x_0, y_0)$$

["i omegn af (x_0, y_0)": I lille cirkelskive med centrum (x_0, y_0)]



Bemærk:

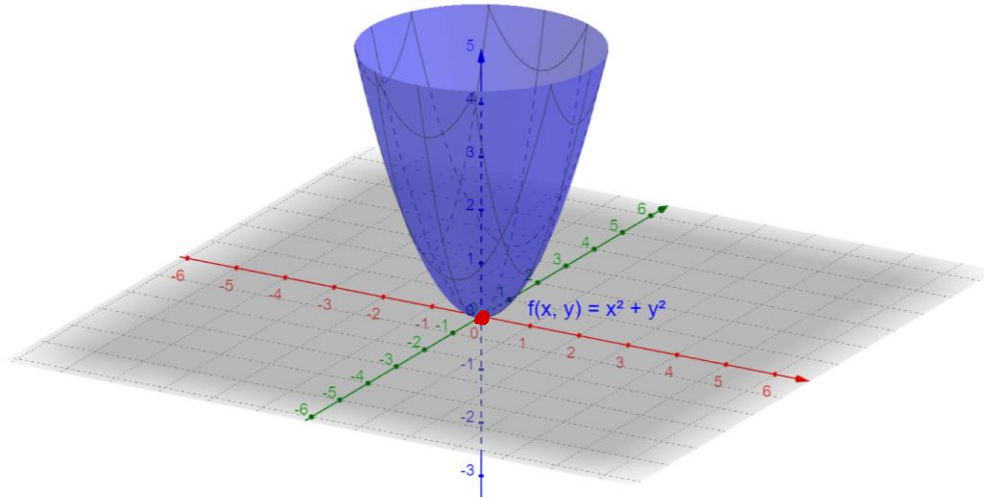
Strengt globalt/lokalt max-pkt, hvis der gælder ">" i definitionen

Et globalt max-pkt er et lokalt max-pkt, men det omvendte gælder ikke nødvendigvis

Globalt/lokalt minimumspunkt defineres tilsvarende

Grafiske eksempler på globale/lokale ekstremumspunkter:

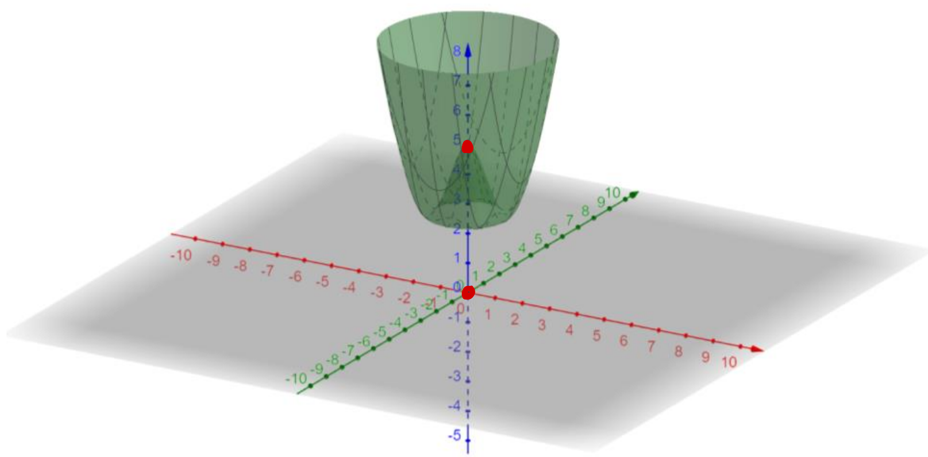
$(x_0, y_0) = (0, 0)$ er et globalt min-pkt for $f(x, y) = x^2 + y^2$:

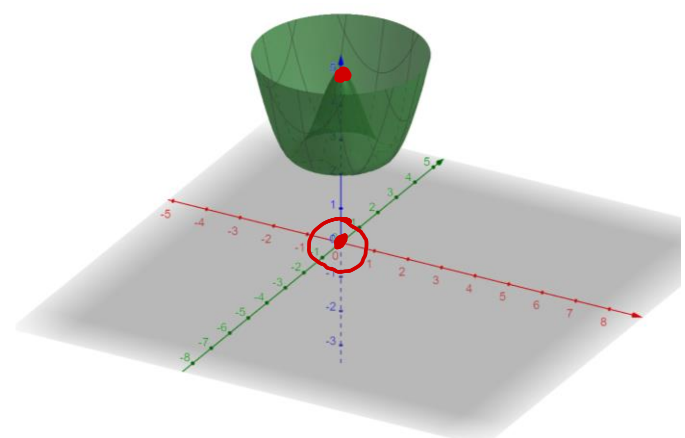


$f(0,0) = 0$

$f(x,y) > 0$ for $(x,y) \neq (0,0)$

$(x_0, y_0) = (0, 0)$ er et lokalt max-pkt for $f(x, y) = 5e^{-(x^2+y^2)} + x^2 + y^2$:

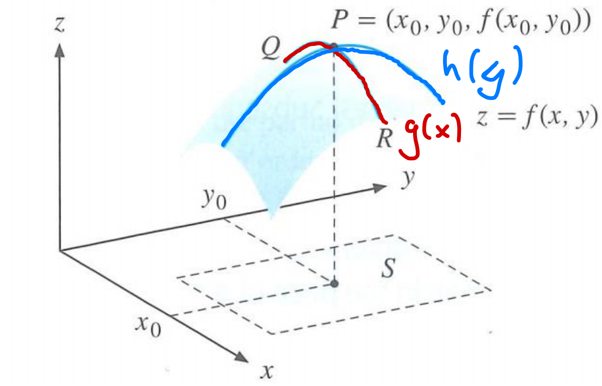




$(0, 0)$ er ikke et globalt max-pkt!

Lad (x_0, y_0) være lokalt maksimumspunkt for $f(x,y)$ (og et "indre pkt" i S)

Betragt følgende funktioner af én variabel:



$$g(x) = f(x, y_0)$$

$$h(y) = f(x_0, y)$$

Da (x_0, y_0) er lokalt max-pkt for f er:

$$x_0 \text{ lokalt max-pkt for } g$$

$$y_0 \text{ lokalt max-pkt for } h$$

Derfor:

x_0 er kritisk pkt for for g: $\boxed{g'(x_0) = f_1'(x_0, y_0) = 0}$

y_0 er kritisk pkt for for h: $\boxed{h'(y_0) = f_2'(x_0, y_0) = 0}$

"(x_0, y_0) kritisk pkt"

Altså: $\boxed{(x_0, y_0) \text{ er et } \textit{kritisk punkt} \text{ for funktionen } f}$

(kaldes også et *stationært pkt*)

[NB: samme udledning kan laves, hvis (x_0, y_0) er minimumspunkt]

Theorem 13.1.1 (s. 496): Nødvendige førsteordensbetingelser
Lad $f(x,y)$ være en funktion defineret på $S \subseteq \mathbb{R}^2$
Hvis (x_0, y_0) er et indre lokalt ekstremumspunkt (max- eller min-punkt),
så er (x_0, y_0) et kritisk punkt, dvs.

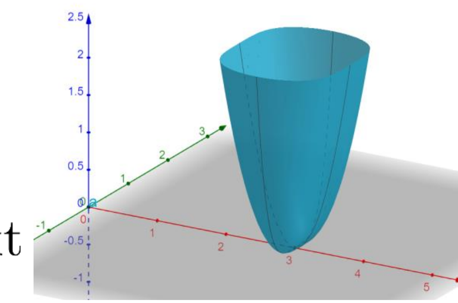
$$f_1'(x_0, y_0) = 0 \quad \text{og} \quad f_2'(x_0, y_0) = 0$$

(Bemærk: Det antages, at de partielle afledede eksisterer)

Altså: Når vi søger efter indre ekstremumspunkter for f,
så kan vi nøjes med at lede blandt de punkter, der opfylder
førsteordensbetingelserne (FOCS)

$$\boxed{f_1'(x, y) = 0 \quad \text{og} \quad f_2'(x, y) = 0}$$

Kort øvelse:
Vis, at funktionen $f(x,y) = (2x-6)^2 + 3y^4$ har globalt
minimumspunkt i $(3, 0)$. Check, at dette er et kritisk punkt



$f(3,0) = 0$. $f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Dvs. $(3,0)$ er et globalt min-pkt.

$f_1'(3,0) = 0$

$f_1'(x,y) = 2 \cdot 2(2x-6) = 8x - 24$. $f_2'(x,y) = 12y^3$. $f_2'(3,0) = 0$ ✓

Tilstr. bet. for lokale ekstrem.-pkt (13.3)

For funktioner af én variabel (uge 40, forelæsning 2):

Sætning (8.6.2), s. 308:
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være to gange diff. og c være et indre kritisk pkt.
Hvis $f''(c) < 0$, så er c et (strengt) lokalt maksimumspunkt.
Hvis $f''(c) > 0$, så er c et (strengt) lokalt minimumspunkt.

Et lignende (men mere komplekst) resultat gælder for funktioner af to variable!

Vi skal have fat i alle de fire anden-ordens partielle afledede, som jo indgår i Hessematricen:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x,y) & f''_{12}(x,y) \\ f''_{21}(x,y) & f''_{22}(x,y) \end{pmatrix}$$

Men først: **Definition af "saddelpunkt" (s. 504)**

Lad $f(x, y)$ være funktion defineret på S og (x_0, y_0) et indre pkt i S

At (x_0, y_0) er et kritisk punkt for f, er en nødvendig *men ikke tilstrækkelig* betingelse for, at (x_0, y_0) er et lokalt ekstremumspunkt for f

Saddelpunkt: Et kritisk punkt, der ikke er et lokalt ekstremumspunkt

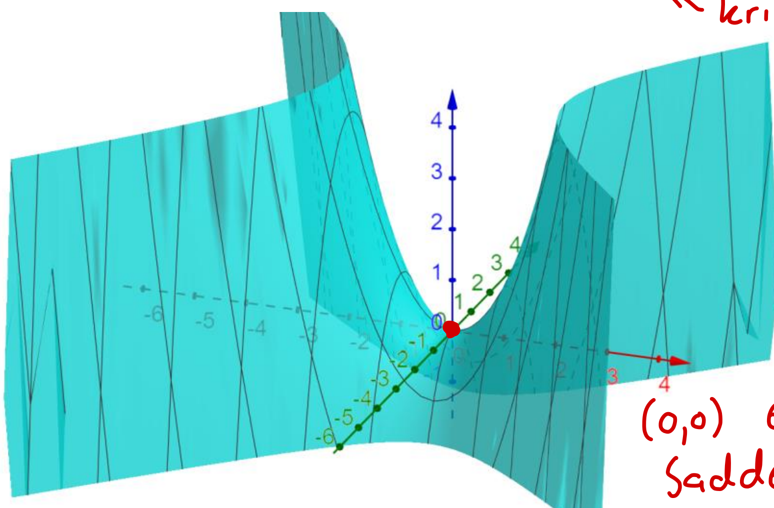
Eksempler:

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$f_1'(x,y) = 2x$

$f_2'(x,y) = -2y$

$(x_0, y_0) = (0, 0)$ ⇐ krit. pkt.

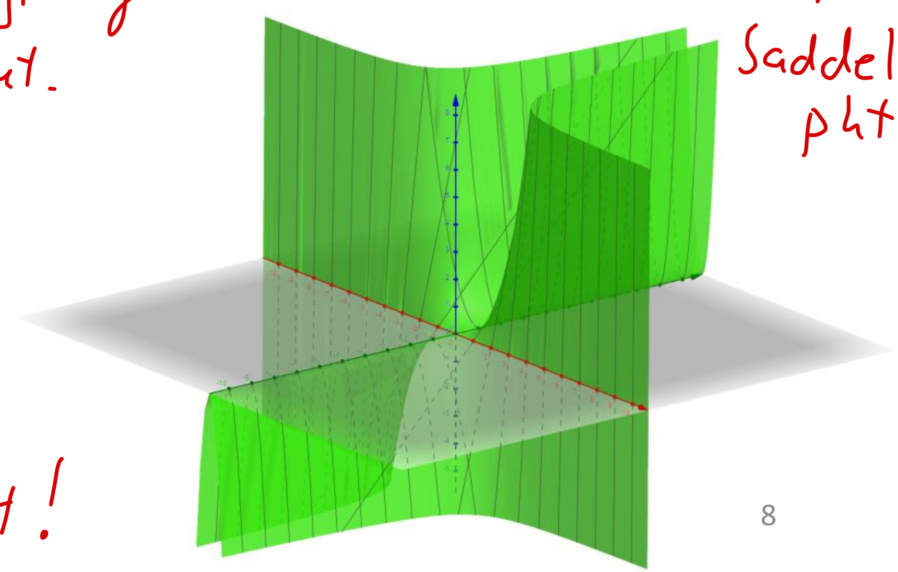


(0,0) er Saddelpkt!

$$f(x, y) = x^2 y$$

$(x_0, y_0) = (0, 0)$ krit. pkt.

Saddel-pkt.



Theorem 13.3.1, s. 505-6:
Anden-ordens test for lokale ekstremumspkt.

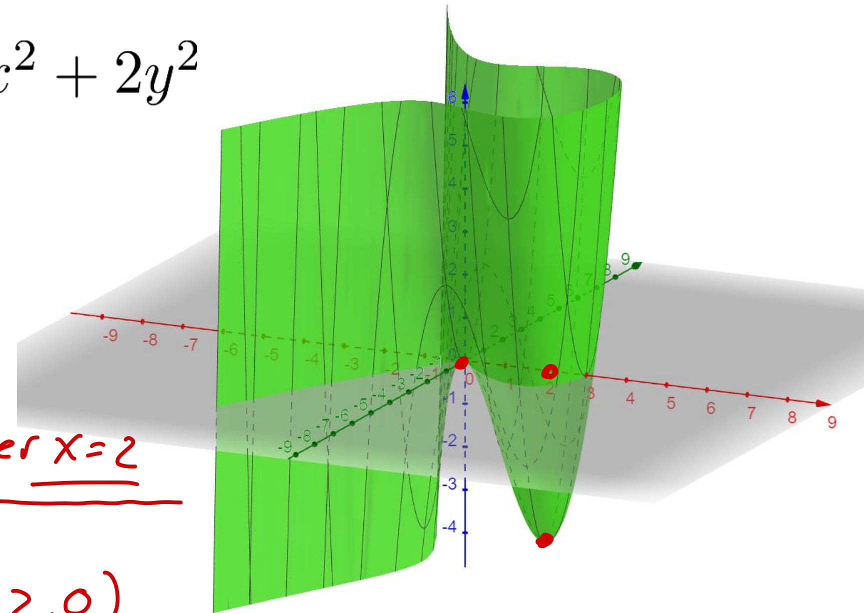
Lad $f(x, y)$ være en C^2-funktion på mængden S.
Lad (x_0, y_0) være et indre kritisk punkt for f.
Definér:

$$A = f''_{11}(x_0, y_0),\ B = f''_{12}(x_0, y_0) = f''_{21}(x_0, y_0) \text{ og } C = f''_{22}(x_0, y_0)$$

Så gælder:

- Hvis $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$, så er (x_0, y_0) et (strengt) lokalt maksimumspunkt
- Hvis $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$, så er (x_0, y_0) et (strengt) lokalt minimumspunkt
- Hvis $AC - B^2 < 0$, så er (x_0, y_0) et saddelpunkt
- Hvis $AC - B^2 = 0$, så kan (x_0, y_0) være et lokalt max-pkt, et lokalt min-pkt eller et saddelpunkt

Eksempel/øvelse: $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2y^2$



Bestem alle kritiske punkter

$f_1'(x,y) = 3x^2 - 6x \qquad f_2'(x,y) = 4y$

Krit. pkt:

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 6x = 0 \\ 4y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ eller } \underline{x=2} \\ \Leftrightarrow \underline{y=0} \end{array}$$

Kritiske pkt: $(0,0)$ og $(2,0)$

Prøv for hvert kritisk pkt at afgøre, om det er et lokalt max-pkt, et lokalt min-pkt eller et saddelpunkt

$f_{11}''(x,y) = 6x - 6 \qquad f_{12}''(x,y) = 0 \qquad f_{22}''(x,y) = 4$

$\underline{(0,0):}$ $A = -6 < 0 \quad B = 0 \quad C = 4$

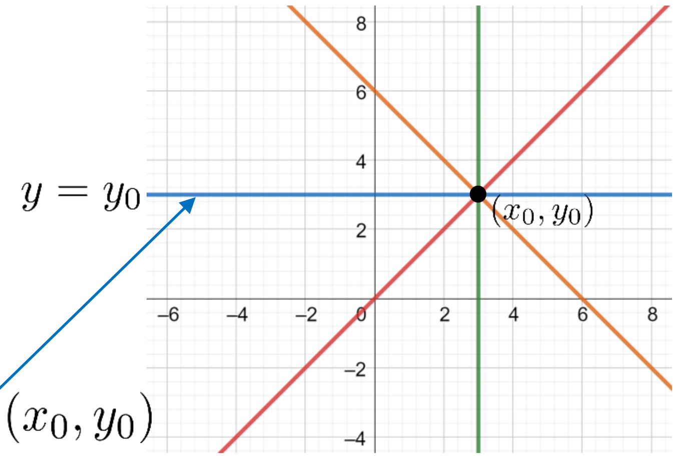
$AC - B^2 = -6 \cdot 4 - 0^2 = -24 < 0 \Rightarrow$ $\underline{(0,0) \text{ er saddelpkt}}$

$\underline{(2,0):}$ $A = 12 - 6 = 6 > 0 \quad B = 0 \quad C = 4$

$AC - B^2 = 6 \cdot 4 - 0^2 = 24 > 0 \Rightarrow$ $\underline{(2,0) \text{ er lok. min-pkt}}$

En smule baggrund for Thm 13.3.1

- Hvis $\boxed{A < 0}$ og $\boxed{AC - B^2 > 0}$, så er (x_0, y_0) et (strengt) lokalt maksimumspunkt



"Hvor kommer disse betingelser fra?"

$A = f''_{11}(x_0, y_0) < 0$:
Sikrer, at fkt $g(x) = f(x, y_0)$ har lok. max-pkt i (x_0, y_0)
$(A = g''(x_0))$
Dvs. at f betragtet som fkt kun på linien $y = y_0$ har lok. max-pkt i (x_0, y_0)

De to betingelser sikrer tilsammen,
at det tilsvarende gælder for f på enhver linie gennem (x_0, y_0)

Og det sikrer endelig, at $f(x, y)$ faktisk har lok. max-pkt i (x_0, y_0)

Tilstr. bet. for glob. ekstrem.-pkt (13.2)

For funktioner af én variabel (uge 40, forelæsning 1):

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ og c være et (indre) kritisk pkt.

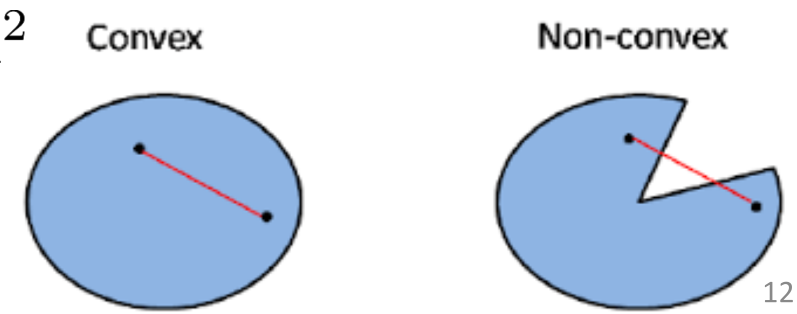
Hvis f er konkav ($f''(x) \leq 0$), så er c et maksimumspunkt.

Hvis f er konveks ($f''(x) \geq 0$), så er c et minimumspunkt.

Et lignende resultat gælder for funktioner af to variable!

Men det er mere komplekst at checke konkavitet/konveksitet af f

Nyt begreb: Konveks mængde i $\mathbb{R}^2$
(s. 500)



Theorem 13.2.1, s. 500-1:
Tilstr. betingelser for globale max- og min-pkt

Lad $f(x, y)$ være en C^2-funktion på den konvekse mgd S.
Lad (x_0, y_0) være et indre kritisk punkt for f.

- (x_0, y_0) er et globalt max-pkt for f på S, hvis der for alle $(x, y) \in S$ gælder:

$$f''_{11}(x,y) \le 0, \quad f''_{22}(x,y) \le 0 \quad \text{og}$$
$$f''_{11}(x,y) f''_{22}(x,y) - \left[f''_{12}(x,y)\right]^2 \ge 0$$

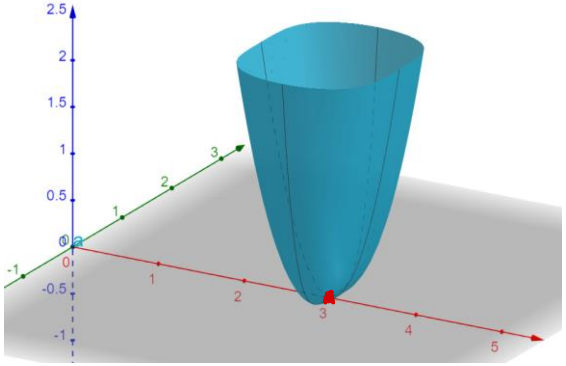
- (x_0, y_0) er et globalt min-pkt for f på S, hvis der for alle $(x, y) \in S$ gælder:

$$f''_{11}(x,y) \ge 0, \quad f''_{22}(x,y) \ge 0 \quad \text{og}$$
$$f''_{11}(x,y) f''_{22}(x,y) - \left[f''_{12}(x,y)\right]^2 \ge 0$$

Simpelt eksempel (fra tidligere kort øvelse):

$$\boxed{f(x,y) = (2x-6)^2 + 3y^4 \text{ for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2}$$

konveks mgd!



$$f_1'(x,y) = 2(2(2x-6)) = 8x - 24$$

$$f_2'(x,y) = 12y^3$$

$(x_0, y_0) = (3, 0)$ er kritisk punkt

$$f_{11}''(x,y) = 8 \geq 0 \qquad f_{22}''(x,y) = 36y^2 \geq 0 \qquad f_{12}''(x,y) = 0$$

$$f_{11}''(x,y) f_{22}''(x,y) - \left[f_{12}''(x,y)\right]^2 = 8 \cdot 36y^2 \geq 0$$

Thm 13.2.1 giver da, at $(3,0)$ er et globalt minimumspunkt