Jeppe Vanderhaegen

Opgave 2.1
Det antages, at $\delta = 0$ og $g = 0$

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$K_{t+1} = sY_t + K_t, \quad 0 < s < 1$$

$$L_{t+1} = (1+n)\, L_t, \quad n > 0$$

Transitionsligningen udledes.

$$K_{t+1} = sY_t + K_t$$
$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{sY_t + K_t}{(1+n)L_t}$$
$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sy_t + k_t)$$

Det vides samtidigt, at $\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{L_t} \Leftrightarrow \frac{K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{L_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}} = k_t^{\alpha} \cdot 1 = k_t^{\alpha} = y_t$

Derfor.

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sk_t^{\alpha} + k_t)$$

Hvorved transitionsligningen er opfyldt.

2.2

For at vise at transitionsligningen konvergerer mod en bestemt værdi skal INADA-betingelserne bevises.

1. Transitionsligningen er voksende: Ved $k_t = 0$ er $k_{t+1} = 0$.
2. Transitionskurven er konstant voksende.
$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{1}{1+n}(s\alpha k_t^{\alpha-1} + 1) > 0$$
Modellen antager, at $0 < \alpha < 1$. Udtrykket er derfor positivt, og dermed er transitionskurven voksende.
3. Transitionskurven udviser aftagende MP. Dette ses ved, at $\alpha < 1$. Det større k_t bliver, des mindre vokser k_{t+1}. Altså er hældningen konstant aftagende.
4. Hældningen går mod et tal mindre end 1: Når $k_t \to \infty$, så $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t}$

Får at udlede SS-værdierne droppes alle perioder.

$$k_{t+1} = k_t = k^{\star}$$
$$k = \frac{1}{1+n}(sk_t^{\alpha} + k)$$
$$k(1+n) = sk^{\alpha} + k$$
$$1 + n = sk^{\alpha-1} + 1$$
$$\frac{n}{s} = k^{\alpha-1}$$
$$\left(\frac{n}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = k^{\star} \Leftrightarrow k^{\star} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Det vides fra tidligere, at $y_t = k_t^{\alpha}$. Derfor:

$$y = k^{\alpha}$$
$$y\hat{}\ \star= (s/n)\hat{}(\alpha/(1-\alpha))$$

Det risikokorrigerede afkast er defineret ved afkast minus risik, $r - \varepsilon$. Her angiver epsilon risikoen for tab af kapital. Den samlede risikokorrigeret indkomst må tage højde for, at kapital kan gå tabt. Ved at tilføre en risiko faktor til kapital, kan der tages hæjde for dette. Indføre εK_t. Herved kan den samlede risikokorrigeret indkomst gives ved: $\hat{Y} = Y_t - \varepsilon K_t$

$$\frac{\hat{Y}}{L_t} = \frac{Y_t - \varepsilon K_t}{L_t}$$
$$\hat{y} = y_t - \varepsilon k_t$$

Indsætter tidligere fundne SS-værdier

$$\hat{y} = \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \varepsilon\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ved at forlænge potensen. $\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{1+\alpha-\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Dette indsættes.

$$\hat{y} = \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \varepsilon\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$
$$\hat{y} = \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \varepsilon\left(\frac{S}{n}\right)^{1}\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$
$$\hat{y} = \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1 - \varepsilon\frac{S}{n}\right)$$

2.3

O3 beskriver landets samlede indkomst ikke som BNP, men som BNI. BNI afhænger både af den indenlandske produktion, men også af nettofordringer, realrenten og risikopræmier på kapitalplaceret i udlandet. BNI udgøres hovedsagligt af indenlandsk BNP tillagt det afkast vi har hentet i udlandet. Herved kan vi opkræve gæld eller opbygge gæld til udlandet alt efter om vi ejer mere udlandet, eller udlandet ejer mere i indlandet.

O6 er en ligevægt, der angiver en økonomi med fuld kapitalmobilitet uden mulighed for arbitrage. Ligningen viser, at renteniveauet tillagt risikopræmien er givet ved $\alpha\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1}$ Ligevægten kommer af, at hvis den indenlandske rente falder, så vil investeringerne trække udenlandsk, hvilket gør at kapital i indlandet falder. Fordi udbuddet af kapital nu er faldet, må rente stige tilsvarende. Matematisk kan dette ses ved, at K_t falder på højresiden, hvorved r må stige simultant.

Den indenlandske nationalindkomst består af løn til arbejdskraft og formueafkast. Det antages, at hele indlandets formue er placeret i indenlandsk kapital. Når den indenlandske nationalindkomst findes, består den af samlet indkomst og fratrækkes den risiko, der er ved investere formue. Af denne grund kan den samlede indenlandske indkomst gives ved $\hat{Y} = Y_t^n - \varepsilon V_t$., hvor ε stadig er en risikofaktor.

2.4

Det vides fra tidligere, at $k_t^\alpha = y_t$

O6 kan skrives som $\bar{r} + \varepsilon = \alpha k_t^{\alpha-1} \Leftrightarrow (\bar{r} + \varepsilon)k_t = \alpha k_t^\alpha$, og O7 kan skrives som $w_t = (1-\alpha)k_t^\alpha$

Ligning O7 og O6 summeres.

$$(\bar{r} + \varepsilon)k_t + w_t = \alpha k_t^\alpha + (1-\alpha)k_t^\alpha$$
$$(\bar{r} + \varepsilon)k_t + w_t = \alpha k_t^\alpha + k_t^\alpha - \alpha k_t^\alpha$$
$$(\bar{r} + \varepsilon)k_t + w_t = k_t^\alpha$$

$$(\bar{r}+\varepsilon)k_t + w_t = y_t$$

Fra ligning O3 vides det,

$$Y_t^n = Y_t + (\bar{r}+\varepsilon)F_t$$
$$\frac{Y_t^n}{L_t} = \frac{Y_t + (\bar{r}+\varepsilon)F_t}{L_t}$$
$$y_t^n = y_t + (\bar{r}+\varepsilon)f_t$$

Indsætter tidligere fundet y_t

$$y_t^n = (\bar{r}+\varepsilon)k_t + w_t + (\bar{r}+\varepsilon)f_t$$
$$y_t^n = (\bar{r}+\varepsilon)(f_t + k_t) + w_t$$

Det vides, at $\frac{V_t}{L_t} = \frac{K_t+F_t}{L_t} \Leftrightarrow v_t = k_t + f_t$. Dette indsættes.

$$y_t^n = (\bar{r}+\varepsilon)v_t + w_t$$

Herved er dette udledt.

Fra tidligere vides det, at $\frac{\hat{Y}}{L_t} = \frac{Y_t^n - \varepsilon V_t}{L_t} \Leftrightarrow \hat{y}_t = y_t^n - \varepsilon v_t$. Altså den risikokorrigeret nationalindkomst. Indsætter $y_t^n = (\bar{r}+\varepsilon)v_t + w_t$

$$\hat{y}_t = y_t^n - \varepsilon v_t$$
$$\hat{y}_t = (\bar{r}+\varepsilon)v_t + w_t - \varepsilon v_t$$
$$\hat{y}_t = \bar{r}v_t + \varepsilon v_t + w_t - \varepsilon v_t$$
$$\hat{y}_t = \bar{r}v_t + w_t$$

Ligning O10 viser, at den risikokorrigerede indkomst per indbygger er afhængig af realønnen, w_t, og indlandets formue. Realrenten er givet ved $\bar{r}$. Altså er formuen ikke længere korrigeret for risiko. Pga af frie kapitalbevægelser kan der ikke være arbitrage på verdensmarkeder, og derfor kan risikopræmien droppes. I og med der er frie kapitalbevægelser sker rente ændringer med det samme, hvorved man ikke kan hente rentegevinster i andre lande(Antaget hele verden er en stor enhed bestående af åbne økonomier)

2.5

Gør brug af ligning O7: $w_t = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\alpha \Leftrightarrow (1-\alpha)k_t^\alpha$

Vi bruger den tidligere omskrivning af O6: $\bar{r}+\varepsilon = \alpha k_t^{\alpha-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_t$. Derfor

$$w_t = (1-\alpha)k_t^\alpha$$
$$w_t = (1-\alpha)\left(\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^\alpha$$
$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Da der ingen tidintervaller er på højre side af ligningen må realønnen tilpasse sig straks til et ny SS-niveau. Dette giver derfor.

$$w^\star = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

2.6

Bruger ligning $V_{t+1} = sY_t^n + V_t$

$$\frac{V_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{sY_t^n + V_t}{L_t(1+n)}$$

Jeppe Vanderhaegen

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sy_t^n + v_t)$$

Indsætter O9

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}(s(w_t + (\bar{r}+\varepsilon)v_t) + v_t)$$
$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sw_t + (\bar{r}+\varepsilon)v_t s + v_t)$$

Indsætter O7

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}(s(1-\alpha)k_t^\alpha + (\bar{r}+\varepsilon)v_t s + v_t)$$

Det vides fra tidligere, at $\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_t$. Derfor:

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(s(1-\alpha)\left(\left(\frac{\alpha}{\overline{\overline{r+\varepsilon}}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^\alpha + (\bar{r}+\varepsilon)v_t s + v_t\right)$$

Tidligere er $w^\star = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Derfor:

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sw^\star + (\bar{r}+\varepsilon)v_t s + v_t)$$
$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}\big(sw^\star + (v_t(\bar{r}+\varepsilon)s + 1)\big)$$
$$v_{t+1} = \frac{s}{1+n}w^\star + \frac{1+s(\bar{r}+\varepsilon)}{1+n}v_t$$

For at vise SS-værdien droppes tidsindeks. Altså $v_t = v^\star = v_{t+1}$

$$v = \frac{s}{1+n}w^\star + \frac{1+s(\bar{r}+\varepsilon)}{1+n}v$$
$$v(1+n) = sw^\star + \big(1+s(\bar{r}+\epsilon)\big)v$$
$$sw^\star = v(1+n) - \big(1+s(\bar{r}+\epsilon)\big)v$$
$$sw^\star = v((1+n) - \big(1+s(\bar{r}+\varepsilon)\big)$$
$$v = \frac{sw^\star}{1+n-1-s(\bar{r}+\varepsilon)}$$
$$v = \frac{s}{n-s(\bar{r}+\varepsilon)}w^\star$$

Dividerer igennem med n?

$$v^\star = \frac{\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}w^\star$$

Ud fra transitionsligningen kan det udledes, at det er en ret linje. Skæringen gives ved $\frac{s}{1+n}w^\star$, mens hældningen er givet ved $\frac{\partial v_{t+1}}{\partial v_t} = \frac{1+s(\bar{r}+\varepsilon)}{1+n} < 1$. Dette kan konkluderes, da parameterrestriktionerne giver os at, $s(\bar{r}+\varepsilon) < n$. Ved positiv skæring og hældning mindre end 1, må den på et tidspunkt skærer $45° - linjen$.

(Tegn transitionsdiagram)

2.7

$$\hat{y}_t^n = w_t + \bar{r}v_t$$

$$\hat{y}_t^n = w_t + \bar{r}\frac{\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}w^\star$$

$$\hat{y}_t^n = \left(1+\frac{\bar{r}\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)w^\star$$

$$\hat{y}_t^n = \left(\frac{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}+\frac{\bar{r}\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)w^\star$$

$$\hat{y}_t^n = \left(\frac{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)+\bar{r}\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)w^\star$$

$$\hat{y}_t^n = \left(\frac{1-\frac{s}{n}\bar{r}+\frac{s}{n}\varepsilon+\bar{r}\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)w^\star$$

$$\hat{y}^{n\star} = \left(\frac{1-\frac{s}{n}\varepsilon}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)w^\star$$

2.8

Indsætter O11 i O14

$$\hat{y}^{n\star} = \left(\frac{1-\frac{s}{n}\varepsilon}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)w^\star$$

$$\hat{y}^{n\star} = \left(\frac{1-\frac{s}{n}\varepsilon}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)\cdot(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

For at kunne analysere forskellen opstilles $z = \frac{\hat{y}^{n\star}}{\hat{y}_c^\star} = \frac{\left(\frac{1-\frac{s}{n}\varepsilon}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\right)\cdot(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1-\varepsilon\frac{s}{n}\right)}$

$$z = \frac{\frac{1}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\cdot(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

$$z = \frac{1}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\cdot(1-\alpha)\left(\frac{\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}}{\frac{s}{n}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$z = \frac{1}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}\cdot(1-\alpha)\left(\frac{\frac{\alpha n}{s}}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$