Mikro I - Gode Huskeregler

Andrea Frisenette Jørgensen

December 2018

Indhold

1 Cobb Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$

1.1 Positive monotone transformationer

Hvis en funktion er et produkt af de to inputs eller en sum af logaritmer, er det ofte en positiv monoton transformation af en Cobb Douglas funktion. En positiv monoton transformation er en transformation af funktionen som skalerer den oprindelige funktion op men opretholder rangeringen af inputs ift. hinanden.

Eksempler

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \left(x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad \text{dvs.} \quad \alpha = \frac{1}{2} \tag{1}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 = \left(x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}}\right)^3 \quad \text{dvs.} \quad \alpha = \frac{1}{3} \tag{2}$$

$$f(x_1, x_2) = \alpha\left(\ln x_1 - \ln x_2\right) + \ln x_2 = \ln\left(x_1^\alpha \cdot x_2^{(1-\alpha)}\right) \tag{3}$$

1.2 Løsning

Løsningen til Cobb Douglas funktioner er altid

$$\begin{aligned} x_1^* &= \alpha \frac{I}{p_1} \\ x_2^* &= (1-\alpha)\frac{I}{p_2} \end{aligned} \tag{4}$$

Husk at dette også gælder selvom funktionen er en positiv monoton transformation af en Cobb Douglas funktion. Parameteren α skal dog være den fra den oprindelige, ikke transformerede, funktion.

1.3 Parameteren α

Parameteren α angiver hvor stor en andel af sin indkomst forbrugeren vil bruge på vare 1 og dermed altså hvor stor nytte forbrugeren tillægger denne vare. Så nu større α nu større x_1^* og nu mindre α nu større x_2^*.

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} > 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} < 0 \tag{5}$$

2 Perfekte komplementer og -substitutter

2.1 Perfekte komplementer $u(x_1, x_2) = min\{x_1, x_2\}$

Uanset om der er tale om perfekte komplementer i nyttefunktioner eller produktionsfunktioner, er løsningen altid at der skal bruges lige meget af begge input.

$$x_1^* = x_2^* \tag{6}$$

For nyttefunktioner er løsningen til dette

$$x_1^* = \frac{I}{p_1 + p_2} = x_2^* \tag{7}$$

2.2 Perfekte Substitutter $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

Ved perfekte substitutter er løsningen altid kun at anvende den vare/det produktionsinput, der er billigst. Hvis prisen er ens er løsningen alle værdier langs indifferenskurverne/isoquanterne.

$$(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} \left(\frac{I}{p_1}, 0\right), & \text{hvis } p_1 < \frac{a}{b}p_2 \\ (x_1, x_2) \in R_+^2 \mid I = p_1x_1 + p_2x_2, & \text{hvis } p_1 = \frac{a}{b}p_2 \\ \left(0, \frac{I}{p_2}\right), & \text{hvis } p_1 > \frac{a}{b}p_2 \end{cases} \tag{8}$$

3 Usikkerhed og lotterier

3.1 Risikotyper

Arrow Prat målet for forbrugerens risikoaversion er givet ved

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{9}$$

Hvis:

- $\mathcal{A}(x) > 0$ er forbrugeren risikoavers. Dette fremkommer hvis den andenordensafledte er negativ og den førsteordensafledte er positiv. Dvs. hvis forbrugerens nyttefunktion $u(x)$ er konkav.

En risikoavers forbruger har altid $u[E(G)] > E[u(G)]$ dvs. nytten ved at få den forventede værdi af lotteriet, med sikkerhed, er større end den forventede nytte ved at deltage i lotteriet.

- $\mathcal{A}(x) = 0$ er forbrugeren risikoneutral. Dette fremkommer hvis forbrugerens nyttefunktion $u(x)$ er lineær.
  En risikoneutral forbruger har altid $E(G) = E[u(G)] = u[E(G)]$ hvorfor han er indifferent mellem at deltage i lotteriet eller få den forventede værdi med sikkerhed.

- $\mathcal{A}(x) < 0$ er forbrugeren risikoelskende. Dette fremkommer hvis både den første- og andenordensafledte er positive. Dvs. hvis forbrugerens nyttefunktion $u(x)$ er konveks.
  En risikoelskende forbruger har altid $u[E(G)] < E[u(G)]$ dvs. nytten ved at få den forventede værdi af lotteriet, med sikkerhed, er mindre end den forventede nytte ved at deltage i lotteriet.

3.2 Forventet værdi og forventet nytte

Den forventede værdi $E(G)$ af et lotteri er blot den statiske forventede værdi dvs. summen af sandsynlighederne ganget med de enkelte udfald

$$E(G) = p \cdot x_1 + (1 - p) \cdot x_2 \tag{10}$$

Den forventede nytte, $E[u(G)]$, er summen af sandsynlighederne for nytten ved de enkelte udfald

$$E[u(G)] = p \cdot u(x_1) + (1 - p) \cdot u(x_2) \tag{11}$$

Nytten af den forventede værdi $u[E(G)]$ er den nytte der opnås ved den forventede værdi af lotteriet

$$u[E(G)] = u\left[p \cdot x_1 + (1 - p) \cdot x_2\right] \tag{12}$$

3.3 Sikkerhedsækvivalent og risikopræmie

Sikkerhedsækvivalenten, C, angiver hvor meget forbrugeren som minimum skal have for ikke at deltage i lotteriet.

Det er altså det er antal kroner forbrugeren skal have, som giver samme nytte som den forventede nytte af lotteriet.

$$u(C) = E[u(G)] \Leftrightarrow C = u^{-1}\left[E[u(G)]\right] \tag{13}$$

Hvor u^{-1} angiver den inverse funktion af nyttefunktionen.
Risikopræmien, RP, angiver forskellen mellem den forventede værdi af lotteriet og sikkerhedsækvivalenten

$$RP = E[G] - C \tag{14}$$

3.4 Aktuarisk fair

Hvis prisen på forsikringen blot er den forventede værdi

$$p = E(G) \tag{15}$$

altså hvis forsikringsselskabet ikke har nogen profit.

4 Sætninger

4.1 Brug af Lagrange

- Man kan anvende Lagrange såfremt (nytte)funktionen er differentiabel
- Man er sikker på at finde maximum såfemt indifferenskurverne er konvekse
- Man kan sætte lighedstegn i bibetingelsen såfremt præferencerne er monotone

4.2 Første velfærdsteorem

Hvis alle forbrugere har monotone præferencer så er enhver Walrasligevægt Paretooptimal.
Så hvis alle forbrugere f.eks. har Cobb Douglas præferencer (eller alle andre typer af præferencer hvor "mere er bedre"), så behøver man ikke vise at en Walrasligevægt er Paretooptimal, men kan blot bruge første velfærdsteorem som argument.

4.3 Andet velfærdsteorem

Hvis alle forbrugeres præferencer er kontinuerte, monotone og strengt konvekse, og alle virksomhedernes produktionsfunktioner er strengt konkave kan enhver Pareto-optimal allokering implementeres som en Walras-ligevægt efter en omfordeling af initialbeholdningerne.
Hvis både, alle forbrugeres præferencer og alle produktionsfunktioner opfylder dette, er man sikker på at enhver Paretooptimal allokering kan implementeres som Walrasligevægt. Er det ikke gældende betyder det ikke at det ikke er muligt, man kan dog ikke være sikker og er derfor nødt til at vise det.

5 Matematiske omskrivninger

5.1 Kvadratrødder $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Kvadratroden af et produkt

$$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \tag{16}$$

Kvadratroden af en sum

$$\sqrt{x + y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{17}$$

Gange og dele med kvadratrødder

$$\begin{aligned} x * \sqrt{\frac{1}{x}} &= \sqrt{x} \\ \frac{1}{x} * \sqrt{x} &= \sqrt{\frac{1}{x}} \end{aligned} \tag{18}$$

5.2 Potenser

Husk kvadratsætningerne

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{19}$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \tag{20}$$

Potenser i brøker/produkter

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \tag{21}$$

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \tag{22}$$