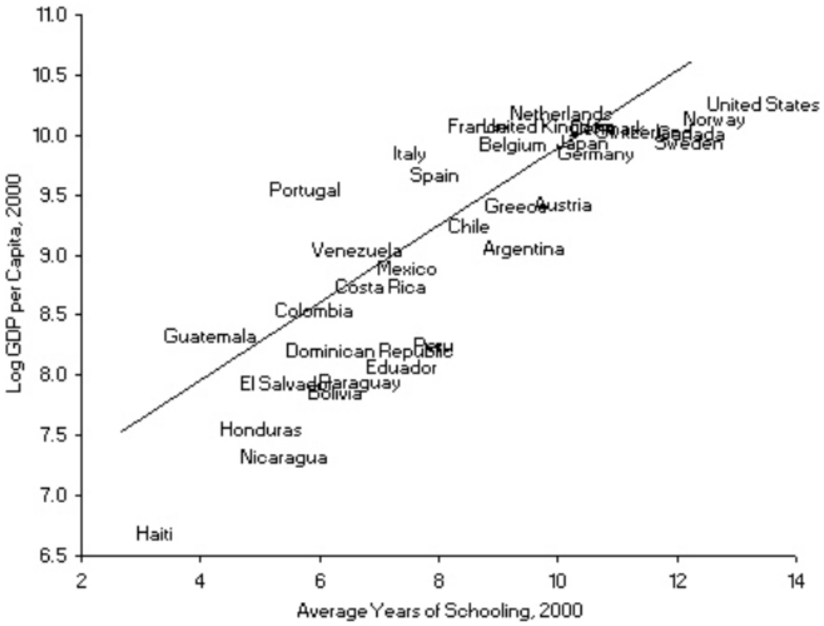
1.1
Bedre undervisning vil altid være at foretrække fremfor mere undervisning. Hvordan man måler god/dårlig undervisning er svært, da det kræver en at måle på individplan, eller se på indkomst efter endt uddannelse. Dette tager dog ikke højde på, niveauet af eleven i forvejen, og hvilke præferencer eleven har. Nogle uddannelser betaler mere efter endt uddannelse end andre uden at ”intelligensen” er mindre ved de mindre betalte uddannelser.
Derfor er fordelen ved at tage antal år i skole som et mål for humankapital simpelt, og kan lettere sammenlignes på tværs af lande. Yderligere kunne der laves en kunstig variabel, man ganger på, som forsøger at tage højde for kvaliteten af undervisningen.

1.2



Der vises en tydelig korrelation mellem længere tid i skole og velstanden målt i BNP for et land. Des flere år i skole, des rigere er landet.
I ovenstående figur er der dog fare for omvendt kausalitet. Det rigere et land er, des flere ressourcer har landet til at sende folk i skole, og derfor kan man argumentere for, at velstanden er den uafhængige variabel og år i skole er den afhængige variabel. Derfor kan man ikke konkludere, at længere tid i skole giver højere BNP per indbygger.

2.1.

Hvis man indfører en offentlig sektor i modellen, kan man indføre en skat, τ. Man kan antage, at $Y\tau$ er statens skatteindtægter, hvorved en konstant andel af τ går til s_H^g, og $1 - s_H^g$ går til offentlig forbrug. Herved bliver uddannelsessystemet finansieret gennem det offentlige. Uddannelsessystemet som vi ser som humankapital, da ”arbejdsmarkedet består af både muskler og hjerne” - Casper Worm Hansen.

2.2

$$H_{t+1} = \tau K_t + (1-\delta)H_t$$
$$\frac{H_{t+1}}{L_{t+1}A_{t+1}} = \frac{\tau K_t + (1-\delta)H_t}{(1+n)A_t(1+g)L_t}$$
$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(\tau_t\tilde{k}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t\right)$$
$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(\tau_t\tilde{k}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t\right) - \tilde{h}_t$$
$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(\tau_t\tilde{k}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t\right) - \frac{(1+n)(1+g)}{(1+n)(1+g)}\tilde{h}_t$$
$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(\tau_t\tilde{k}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t - (1+n+g+ng)\tilde{h}_t$$
$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(\tau_t\tilde{k}_t - (\delta+n+g+ng)\tilde{h}_t\right)$$

Nu finder jeg for $\tilde{k}_{t+1}$

$$K_{t+1} = s_K Y_t + (1-\delta-\tau)K_t$$
$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}H_{t+1}} = \frac{s_K Y_t + (1-\delta-\tau)K_t}{(1+n)A_t(1+g)L_t}$$
$$\widetilde{k_{t+1}} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K\tilde{y}_t + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t$$

Det vides, at $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\ \alpha}\tilde{h}_t^{\ \varphi}$. Derfor:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K\tilde{k}_t^\alpha\tilde{h}_t^\varphi + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t$$
$$\tilde{k}_{t_{t+1}} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_K\tilde{k}_t^\alpha\tilde{h}_t^\varphi + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t - \frac{(1+n)(1+g)}{(1+n)(1+g)}\tilde{k}_t\right)$$
$$\tilde{k}_{t_{t+1}} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_K\tilde{k}_t^\alpha\tilde{h}_t^\varphi + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t - (1+n+g+ng)\tilde{k}_t\right)$$
$$\tilde{k}_{t_{t+1}} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_K\tilde{k}_t^\alpha\tilde{h}_t^\varphi - (\delta+\tau+n+g+ng)\,\tilde{k}_t\right)$$

2.3

(Tegn og forklar fasediagram ala. Annas undervisning)

For at tegne et fasediagram skal nullclines først udledes.

$$\tilde{k} - \tilde{k} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_K\tilde{k}^\alpha\tilde{h}^\varphi - (\delta+\tau+n+g+ng)\,\tilde{k}\right)$$
$$0 = \left(s_K\tilde{k}^\alpha\tilde{h}^\varphi - (\delta+\tau+n+g+ng)\,\tilde{k}\right)$$
$$(\delta+\tau+n+g+ng)\,\tilde{k} = s_K\tilde{k}^\alpha\tilde{h}^\varphi$$
$$\tilde{k} = \frac{s_K\tilde{k}^\alpha\tilde{h}^\varphi}{(\delta+\tau+n+g+ng)}$$
$$\tilde{k}^{1-\alpha} = \frac{s_K\tilde{h}^\varphi}{(\delta+\tau+n+g+ng)}$$
$$\frac{\tilde{k}^{1-\alpha}(\delta+\tau+n+g+ng)}{s_K} = \tilde{h}^\varphi$$
$$\left(\tilde{k}^{1-\alpha}\cdot\frac{\delta+\tau+n+g+ng}{s_K}\right)^{\frac{1}{\varphi}} = \tilde{h}$$

$$\Delta\tilde{k}_t = \tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha}{\varphi}} \cdot \left(\frac{\delta + \tau + n + g + ng}{s_K}\right)^{\frac{1}{\varphi}} = \tilde{h}_t$$

Det samme gøres for h_t

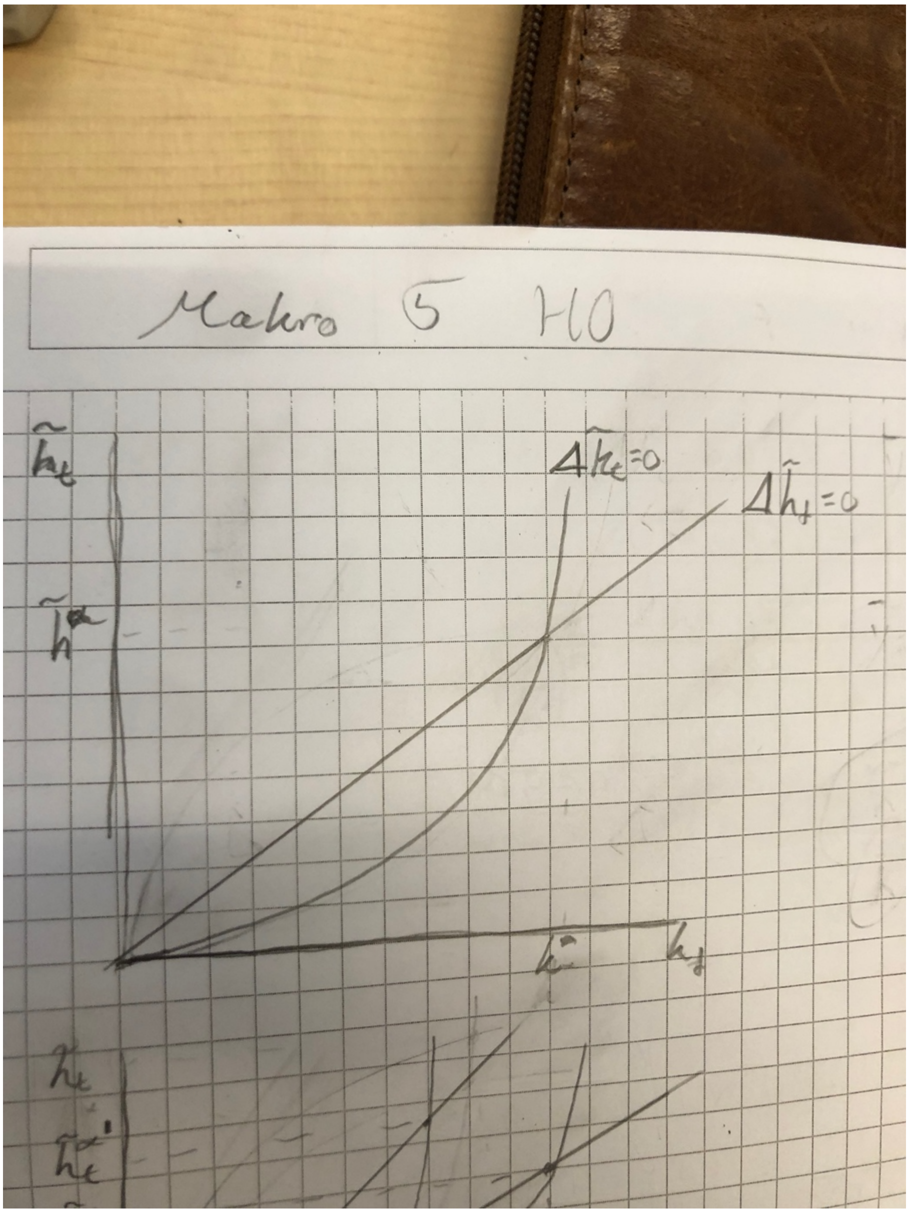
$$\tilde{h} - \tilde{h} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(\tau\tilde{k} - (\delta + n + g + ng)\tilde{h}\right)$$

$$(\delta + n + g + ng)\tilde{h} = \tau\tilde{k}$$

$$\tilde{h}_t = \frac{\tau\tilde{k}_t}{\delta + n + g + ng}$$

De såkaldte nullclines er de værdier, hvor der ingen vækst er i $\tilde{h}_t \wedge \tilde{k}_t$. Det hvor de skærer findes SS, da de afhængige af hinanden. Ændrer $\widetilde{k_t}$ sig, vil $\widetilde{h_t}$ også ændre sig og vice versa. For et givent $\tilde{k}_0$, vil pilenes retning vise, hvilken vej, $\tilde{k}_t$ bevæger sig. Pilene viser, at hvor end man starter, så vil man altid ende i SS punktet, hvor $\tilde{k}^{\star} \wedge \tilde{h}^{\star}$ befinder sig.

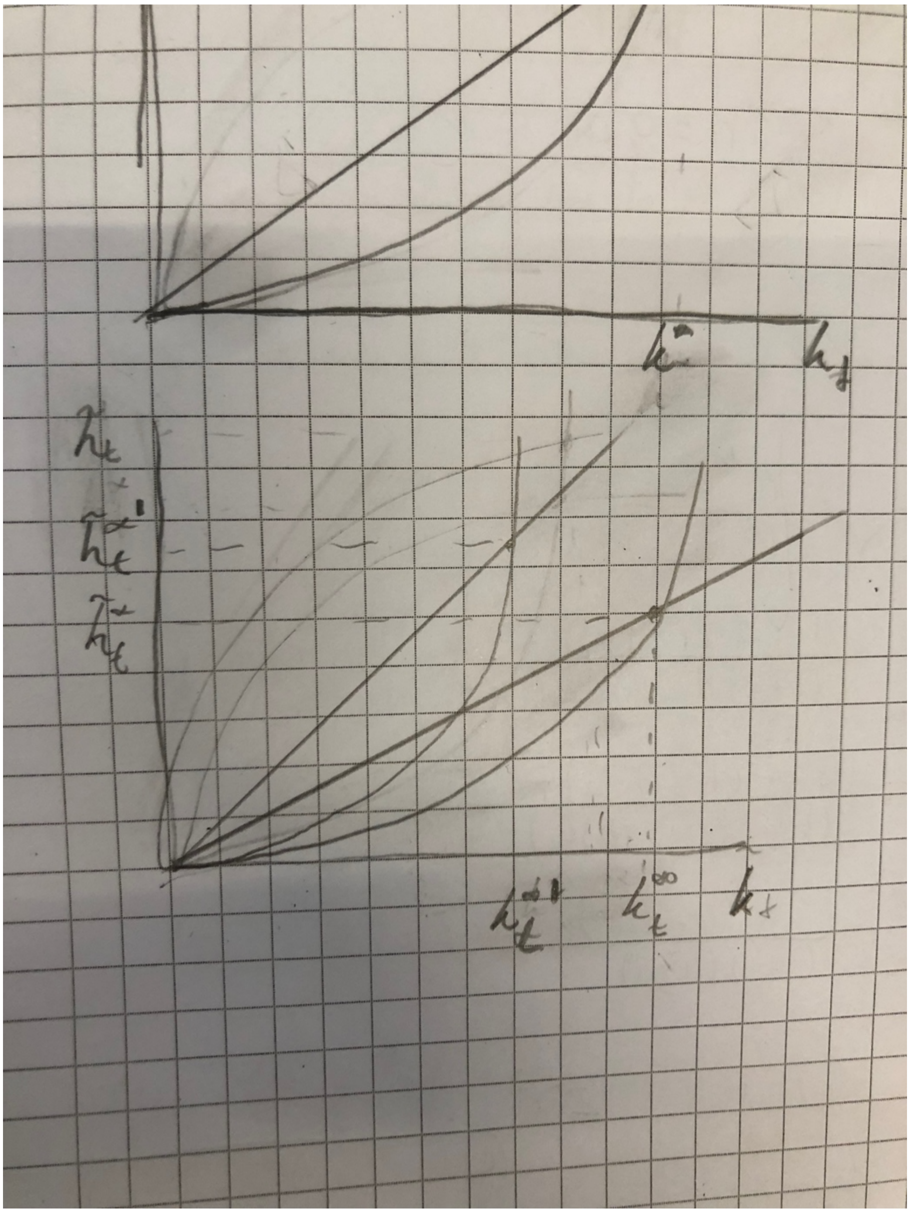
Det kan tydeligt ses, at $\tilde{h}_t$ er en lineær funktion, og denne tegnes som en lige streg. Modsat tegner jeg $\tilde{k}_t$ som en konveks funktion. Dette gøres, da jeg antager, at $\alpha = \varphi = \frac{1}{3}$. I og med antagelsen om parametreværdierne, så må det være plausibelt at tegne funktionen konveks.



2.4

(Tegn fasediagram og hæv s_H, $h_t$vokser, k_t falder

Ved at hæve τ bliver både $\Delta h_t \wedge \Delta k_t$ stejlere. Dette kan udledes ud fra ligningerne fundet i 2.3 og 2.2. Dette betyder, at SS-værdien for k_t bliver mindre, mens den for h_t bliver større. Dette giver mening, da større investering, forøgelse af tau, vil give større humankapital, men k_t må falde, der større vægt på humankapital, giver mindre vægt til fysisk kapital.



2.5

Først skal SS-værdierne findes for $h \wedge k$

Dette gøres ved at droppe perioderne, og isolerer for $k \wedge h$

Isolerer $\tilde{h}_t$

lavere, mens den vil stige for $\tilde{h}_t$. Intuitivt giver dette mening, da en stigning i τ, betyder at andelen per periode investeret i humankapital vil stige, hvilket netop betyder at steady state-værdien for $\tilde{h}_t$ vil være højere. En større andel investeret i human kapital, betyder dog også at der må investeres en mindre andel i fysisk kapital, hvilket ses i fasediagrammet, ved at steady state-værdien for $\tilde{k}_t$ netop bliver lavere.

$$\tilde{h} - \tilde{h} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(\tau\tilde{k} - (\delta + n + g + ng)\tilde{h}\right)$$

$$(\delta + n + g + ng)\tilde{h} = \tau\tilde{k}$$

$$\tilde{h} = \frac{\tau\tilde{k}}{\delta + n + g + ng}$$

Isolerer $\tilde{k}_t$

$$\tilde{k}-\tilde{k}=\frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_K\tilde{k}^{\alpha}\tilde{h}^{\varphi}-(\delta+\tau+n+g+ng)\,\tilde{k}\right)$$
$$0=\left(s_K\tilde{k}^{\alpha}\tilde{h}^{\varphi}-(\delta+\tau+n+g+ng)\,\tilde{k}\right)$$
$$(\delta+\tau+n+g+ng)\,\tilde{k}=s_K\tilde{k}^{\alpha}\tilde{h}^{\varphi}$$
$$\tilde{k}=\frac{s_K\tilde{k}^{\alpha}\tilde{h}^{\varphi}}{(\delta+\tau+n+g+ng)}$$
$$\tilde{k}^{1-\alpha}=\frac{s_K\tilde{h}^{\varphi}}{(\delta+\tau+n+g+ng)}$$

Indsætter dette i $\tilde{k}$

$$\tilde{k}=\frac{s_K\tilde{k}^{\alpha}\left(\frac{\tau\tilde{k}}{\delta+n+g+ng}\right)^{\varphi}}{(\delta+\tau+n+g+ng)}$$
$$\tilde{k}=\frac{\left(\frac{\tau}{\delta+n+g+ng}\right)^{\varphi}}{(\delta+\tau+n+g+ng)}s_K\tilde{k}^{\alpha+\varphi}$$
$$\tilde{k}^{1-\alpha-\varphi}=\left(\frac{\tau}{\delta+n+g+ng}\right)^{\varphi}\cdot\frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)}$$
$$\tilde{k}=\left(\left(\frac{\tau}{\delta+n+g+ng}\right)^{\varphi}\cdot\frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}$$

Udtrykket sættes ind i $\tilde{h}$

$$\tilde{h}=\frac{\tau\tilde{k}}{\delta+n+g+ng}$$
$$h_t=\frac{\tau}{\delta+g+n+ng}\cdot\left(\frac{s_K}{\delta+\tau+g+n+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{\tau}{\delta+g+n+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$
$$h_t=\left(\frac{\tau}{\delta+g+n+ng}\right)^{\frac{1-\alpha-\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{s_K}{\delta+\tau+g+n+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{\tau}{\delta+g+n+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$
$$h_t=\left(\frac{s_K}{\delta+\tau+g+n+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{\tau}{\delta+g+n+ng}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}}$$

De to led indsættes i $\tilde{y}=\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi}$

$$\tilde{y}^{\star}=\left(\left(\frac{s_K}{\delta+\tau+g+n+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{\tau}{\delta+g+n+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\right)^{\alpha}\cdot\left(\left(\frac{s_K}{\delta+\tau+g+n+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{\tau}{\delta+g+n+ng}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\right)^{\varphi}$$
$$\tilde{y}^{\star}=\left(\frac{s_K}{\delta+\tau+g+n+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{\tau}{\delta+g+n+ng}\right)^{\frac{\varphi\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{s_K}{\delta+\tau+g+n+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{\tau}{\delta+g+n+ng}\right)^{\frac{(1-\alpha)\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$
$$\tilde{y}^{\star}=\left(\frac{\tau}{\delta+g+n+ng}\right)^{\frac{\varphi\alpha+(1-\alpha)\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{s_K}{\delta+\tau+g+n+ng}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

$$\tilde{y}^{\star} = \left(\frac{\tau}{\delta + g + n + ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \cdot \left(\frac{s_K}{\delta + \tau + g + n + ng}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

2.6

Fra ovenstående har vi fundet

$$\tilde{y}_t = \left(\frac{\tau}{\delta + n + g + ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_K}{\delta + \tau + n + g + ng}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

$$\tilde{c}_t = (1 - s_K)\left(\left(\frac{\tau}{\delta + n + g + ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_K}{\delta + \tau + n + g + ng}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\right)$$

Tager logaritmen og finder FOC.

$$\ln \tilde{c}_t = \ln(1 - s_K) + \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi} ln \frac{\tau}{\delta + n + g + ng} + \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi} ln \frac{s_K}{\delta + \tau + n + g + ng}$$

$$\ln c_t = \ln(1 - s_K) + \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}(ln\tau - \ln(\delta + n + g + ng))$$
$$+ \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}(lns_K - \ln(\delta + \tau + n + g + ng))$$

$$\frac{dc_t}{ds_K} = -\frac{1}{1 - s_K} + \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi} \cdot \frac{1}{s_k}$$

$$\frac{1}{1 - s_K} = \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi} \cdot \frac{1}{s_k}$$

$$s_K = \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}(1 - s_K)$$

$$s_K(1-\alpha-\varphi) = (\alpha+\varphi)(1 - s_k)$$

$$s_K - \alpha s_K - \varphi s_K = \alpha - \alpha s_K + \varphi - \varphi s_K$$

$$s_K = \alpha + \varphi$$

$$\frac{dc_t}{d\tau} = \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi} \cdot \frac{1}{\tau} - \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi} \cdot \frac{1}{\delta + \tau + n + g + ng}$$

$$\frac{\varphi}{(1-\alpha-\varphi)\tau} = \frac{\alpha+\varphi}{(1-\alpha-\varphi)(\delta + \tau + n + g + ng)}$$

$$\varphi(1-\alpha-\varphi)(\delta + \tau + n + g + ng) = (1-\alpha-\varphi)\tau(\alpha+\varphi)$$

$$\varphi(\delta + \tau + n + g + ng) = \tau(\alpha+\varphi)$$

$$\delta + \tau + n + g + ng = \frac{\tau(\alpha+\varphi)}{\varphi}$$

$$\delta + \tau + n + g + ng = \frac{\tau\alpha}{\varphi} + \tau$$

$$(\delta + n + g + ng)\varphi = \tau\alpha$$

$$\frac{(\delta + n + g + ng)\varphi}{\alpha} = \tau$$

$$\frac{(\delta + n + g + ng)\varphi}{\alpha} = \tau \wedge \ s_K = \alpha + \varphi$$

Dette indsættes i $\tilde{c}_t$

$$\tilde{c}_t = \left(1-(\alpha+\varphi)\right)\left(\left(\frac{\frac{(\delta+n+g+ng)\varphi}{\alpha}}{\delta+n+g+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{\alpha+\varphi}{\delta+\tau+n+g+ng}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\right)$$

$$\tilde{c}_t = (1-\alpha-\varphi)\left(\left(\frac{\frac{(\delta+n+g+ng)\varphi}{\alpha}}{\delta+n+g+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{\alpha+\varphi}{\delta+\tau+n+g+ng}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\right)$$

$$\tilde{c}_t = (1-\alpha-\varphi)\left(\left(\frac{(\delta+n+g+ng)\varphi}{(\delta+n+g+ng)\alpha}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{\alpha+\varphi}{\delta+\tau+n+g+ng}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\right)$$

$$\tilde{c}_t = (1-\alpha-\varphi)\left(\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{\alpha+\varphi}{\delta+\tau+n+g+ng}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\right)$$

2.7

Fra pensumbogen får man følgende

$$\tilde{y}^\star = (1-\alpha-\varphi)\cdot\left(\frac{\alpha}{\delta+n+g+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{\varphi}{\delta+n+g+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

Her indsættes antaget værdier fra tidligere, og sættes lig opgavens

$$(1-\alpha-\varphi)\cdot\left(\frac{\alpha}{\delta+n+g+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\cdot\left(\frac{\varphi}{\delta+n+g+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$
$$= (1-\alpha-\varphi)\left(\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{\alpha+\varphi}{\delta+\tau+n+g+ng}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{3}}{\delta+n+g+ng}\right)^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}}\cdot\left(\frac{\frac{1}{3}}{\delta+\mathrm{n}+\mathrm{g}+\mathrm{ng}}\right)^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}}$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{\delta+\tau+n+g+ng}\right)^{\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\delta+n+g+ng}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\delta+n+g+ng} = \left(\frac{1}{3}\right)\cdot 1^1\cdot\left(\frac{\frac{2}{3}}{\delta+\tau+n+g+ng}\right)^2$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{9}}{(\delta+n+g+ng)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{4}{9}}{(\delta+\tau+n+g+ng)^2}$$

$$\frac{1}{(\delta+n+g+ng)^2} = \frac{4}{(\delta+\tau+n+g+ng)^2}$$

Det kan ses, at vores model kontra pensumbogens er afhængig af τ. Man vil foretrække det største mulige forbrug. Det kan ses, at medmindre tau=0, så vil finansierings gennem indkomstskat være bedst, da dette sikrer størst mulig forbrug. Uagtet tælleren er størst ved formuebeskatning. Her kigges udelukkende på nævneren.