$$Y_t = K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} E_t^{\varepsilon} \tag{1}$$

$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta) K_t \tag{2}$$

$$L_{t+1} = (1+n) L_t \tag{3}$$

$$A_{t+1} = (1+g) A_t \tag{4}$$

$$R_{t+1} = R_t - E_t \tag{5}$$

$$E_t = s_E R_t \tag{6}$$

2.1

Checker for homogenitetsgraden $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} E_t^{\varepsilon}$

Ganger λ ind på alle variable.

$$Y_t = (\lambda K_t)^{\alpha}(\lambda A_t L_t)^{\beta}(\lambda X)^{\kappa}(\lambda E_t)^{\varepsilon}$$
$$Y_t = \lambda^{\alpha+\beta+\kappa+\varepsilon} K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} E_t^{\varepsilon}$$

Det vides, at $\alpha + \beta + \kappa + \varepsilon = 1$. Ergo

$$Y_t = \lambda^1 K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} E_t^{\varepsilon}$$

Dette viser, at der er konstant skalaafkast, da homogenitetsgraden er lig 1.

Selvom land er fast og energy(olie) mindskes for hver periode, så er det muligt at have konstant skalaafkast, da via substitution substituere man mod teknologisk vækst. Des færre input af land og olie, man kan knytte til produktionen, des mere substitueres mod teknologisk vækst. Dette kan ses i verden omkring os med "mindskelsen" af olie og substitueringen mod grøn energi. Vindmøller, hydro etc.

2.2

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} E_t^{\varepsilon}$$

For at finde "per capita" variable, divideres der med L_t

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} E_t^{\varepsilon}}{L_t}$$
$$y_t = k_t^{\alpha} A_t^{\beta} x_t^{\kappa} e_t^{\varepsilon}$$

For vækstraten må det gælde at hvis man har periode $t+1$, dividere med periode t og tager ln af dette. Derfor sker følgende.

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}^{\alpha} A_{t+1}^{\beta} x_{t+1}^{\kappa} e_{t+1}^{\varepsilon}}{k_t^{\alpha} A_t^{\beta} x_t^{\kappa} e_t^{\varepsilon}}$$

$$\ln y_{t+1} - \ln y_t = \alpha(\ln k_{t+1} - \ln k_t) + \beta(\ln A_{t+1} - \ln A_t) + \kappa(\ln x_{t+1} - \ln x_t) + \varepsilon(\ln e_{t+1} - \ln e_t)$$

Ud fra givne definitioner kan dette omskrives til

$$g^y = \alpha g_t^k + \beta g_t^A + \kappa g_t^x + \varepsilon g_t^e$$

Dette er de forskellige vækstrater, der sammenlagt giver vækst i y.

2.3

Det vides at z_t er konstant. Af denne grund må $g^y = g_t^k$

Den approksimative vækstrate i g findes ved:

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{(1+g)A_t}{A_t}$$
$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1+g$$

Ved at tage logaritmen fås.

$$ln\frac{A_{t+1}}{A_t} = \ln(1+g)$$
$$\ln g_t^A \approx g$$

Den approksimative vækstrate for g_t^x findes ved følgende

$$g_t^x = \ln x_{t+1} - \ln x_t$$
$$g_t^x = \ln\frac{X}{L_{t+1}} - \ln\frac{X}{L_t}$$
$$g_t^x = \ln X - \ln L_{t+1} - \ln X - \ln L_t$$
$$g_t^x = -(\ln L_{t+1} - L_t)$$
$$g_t^x = -n$$

Den approksimative vækstrate for g_t^e

$$g_t^e = \ln e_{t+1} - \ln e_t$$
$$g_t^e = \ln\frac{E_{t+1}}{L_{t+1}} - \ln\frac{E_t}{L_t}$$
$$g_t^e = \ln E_{t+1} - \ln L_{t+1} - \ln E_t - L_t$$
$$g_t^e = \ln E_{t+1} - E_t - n$$

Bruger ligning 6, og indsætter

$$g_t^e = \ln S_E R_{t+1} - \ln S_E\, R_t - n$$
$$g_t^e = \ln S_E + \ln R_{t+1} - \ln S_E - \ln R_t - n$$
$$g_t^e = \ln R_{t+1} - R_t - n$$

Bruger ligning 5 og 6 simultant til at finde vækstraten for R_t

$$R_{t+1} = R_t - s_E R_t$$
$$R_{t+1} = (1-s_E)R_t$$
$$\frac{R_{t+1}}{R_t} = (1-s_E)$$
$$g_t^R = (1-s_E)$$
$$\ln g_t^R \approx -s_E$$

Altså

$$g_t^e = -s_e - n$$
$$g_t^e = -(s_e + n)$$

Indsætter dette og samler udtrykket.

$$g^y \approx \alpha g_t^k + \beta g_t^A + \kappa g_t^x + \varepsilon g_t^e$$
$$g^y \approx \alpha g^y + \beta g + \kappa(-n) + \varepsilon - (s_E + n)$$
$$(1-\alpha)g^y \approx \beta g - \kappa n - \varepsilon(s_E + n)$$

Det vides, at $(1-\alpha) = \beta + \kappa + \varepsilon$. Derfor

$$g^y \approx \frac{\beta g}{\beta+\kappa+\varepsilon} - \frac{\kappa n}{\beta+\kappa+\varepsilon} - \frac{\varepsilon(s_E+n)}{\beta+\kappa+\epsilon}$$

Det kan udledes , at vækst i befolkningen på lang sigt vil presse produktionen. Dette ses, da befolkningsvæksten, n, har et negativt bidrag i to led af ligningen. Det negative bidrag til væksten afhænger dog af $\kappa \wedge \varepsilon$ størrelser. Altså des mere produktionen er afhængig af land og olie, des mere vil befolkningsvæksten bidrage til negativt output på lang sigt.

Samme tanker kan bruges ved s_E, der ligeledes bidrager negativt til produktionens output. Jo mere produktionen er afhængig af olie, des mere vil en stigning i s_E påvirke output på lang sigt.

2.4
Figur 1 viser sammenhængen mellem vækst i arbejdskraft og vækst i real produktion fratrukket real forbrug i produktionen(Real bruttonationalprodukt). Ud fra figuren kan der udledes en negativ sammenhæng mellem de to variable. Sammenholdt med ligning 9 hentyder figuren til, at befolkningsvækst er en kausal faktor for lavere BNP. Dette kan dog ikke konkluderes ud fra figuren, da der skal tages højde for omvendt kausalitet.

2.5

$$f^y = \frac{y_{t+1}}{y_t}$$

$$f^y = \frac{k_{t+1}^{\alpha} A_{t+1}^{\beta} x_{t+1}^{\kappa} e_{t+1}^{\varepsilon}}{k_t^{\alpha} A_t^{\beta} x_t^{\kappa} e_t^{\varepsilon}}$$

$$f^y = \left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\beta} \left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right)^{\kappa} \left(\frac{e_{t+1}}{e_t}\right)^{\varepsilon}$$

Det vides fra tidligere at $\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + g$, samtidig vides det, at pga. balanceret vækst er $\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t}$

$$f^y = \left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right)^{\alpha} (1+g)^{\beta} \left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right)^{\kappa} \left(\frac{e_{t+1}}{e_t}\right)^{\varepsilon}$$

$$f^y = (f^y)^{\alpha}(1+g)^{\beta} \left(\frac{\frac{X}{L_{t+1}}}{\frac{X}{L_t}}\right)^{\kappa} \left(\frac{\frac{E_{t+1}}{L_{t+1}}}{\frac{E_t}{L_t}}\right)^{\varepsilon}$$

$$(f^y)^{1-\alpha} = (1+g)^{\beta} \left(\frac{L_t}{L_{t+1}}\right)^{\kappa} \left(\frac{E_{t+1}L_t}{E_t L_{t+1}}\right)^{\varepsilon}$$

Det vides fra tidligere at $\frac{L_t}{L_{t+1}} = \frac{1}{(1+g)}$

$$(f^y)^{1-\alpha} = (1+g)^{\beta} \left(\frac{1}{1+g}\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{1+g}\frac{E_{t+1}}{E_t}\right)^{\varepsilon}$$

Indsætter definitioner for E_t

$$(f^y)^{1-\alpha} = (1+g)^{\beta} \left(\frac{1}{1+g}\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{1+g}\frac{s_E R_{t+1}}{s_E R_t}\right)^{\varepsilon}$$

$$(f^y)^{1-\alpha} = (1+g)^{\beta} \left(\frac{1}{1+g}\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{1+g}\frac{R_{t+1}}{R_t}\right)^{\varepsilon}$$

Fra tidligere ved vi, at $R_{t+1} = R_t - s_E R_t \rightarrow R_{t+1} = R_t(1 - s_E) \rightarrow \frac{R_{t+1}}{R_t} = 1 - s_E$

$$(f^y)^{1-\alpha} = (1+g)^{\beta} \left(\frac{1}{1+g}\right)^{\kappa} \left(\frac{1-s_E}{1+g}\right)^{\varepsilon}$$

Fra tidligere vides det, at $1 - \alpha = \beta + \kappa + \varepsilon$

$$f^y = (1+g)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}} \left(\frac{1}{1+g}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon}} \left(\frac{1-s_E}{1+g}\right)^{\frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}}$$

Vi kan tage logaritmen, for at sammenholde ovenstående med den tidligere ligning (9).

$$\ln(y_{t+1} - y_t) = \frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}\ln(1+g) - \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\varepsilon}\ln(1+g) + \frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}(\ln(1-s_E) - \ln(1+g))$$

$$g_t^y = \frac{\beta g}{\beta+\kappa+\epsilon} - \frac{\kappa g}{\beta+\kappa+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}(-s_E - n)$$

$$g_t^y = \frac{\beta g}{\beta+\kappa+\epsilon} - \frac{\kappa g}{\beta+\kappa+\varepsilon} - \frac{\varepsilon(s_E+n)}{\beta+\kappa+\varepsilon}$$

Det kan ses, at 10 og 9 er i overensstemmelse.

2.6

Vi ved, $z_{t+1} = \frac{k_{t+1}}{y_{t+1}}$. Derfor

$$z_{t+1} = \frac{k_{t+1}}{k_{t+1}^{\alpha} A_{t+1}^{\beta} x_{t+1}^{\kappa} e_{t+1}^{\varepsilon}}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}\right)^{1-\alpha} A_{t+1}^{-\beta} \left(\frac{X}{L_{t+1}}\right)^{-\kappa} \left(\frac{E_{t+1}}{L_{t+1}}\right)^{-\varepsilon}$$

De forskellige definitioner indsættes.

$$z_{t+1} = \left(\frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{(1+n)L_t}\right)^{1-\alpha} \left((1+g)A_t\right)^{-\beta} \left(\frac{X}{(1+n)L_t}\right)^{-\kappa} \left(\frac{s_E R_{t+1}}{(1+n)L_t}\right)^{-\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{1+n}\right)^{1-\alpha-\kappa-\varepsilon} \left(\frac{1}{1+g}\right)^{\beta} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} (s_E R_{t+1})^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

Vi kan omskrive og sammentrække brøkerne pga. $1 - \alpha - \kappa - \varepsilon = \beta$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} (s_E R_{t+1})^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

Ved at indsætte (6) i (5) vides det, at $R_{t+1} = R_t(1 - s_E)$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} (s_E R_{t+1})^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} \left(s_E R_t(1-s_E)\right)^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} (E_t)^{-\varepsilon} L_t^{\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} \left(\frac{E_t}{L_t}\right)^{-\varepsilon}$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} \left(\frac{sy_t}{k_t} + (1-\delta)\right)^{1-\alpha} k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} e_t^{-\varepsilon}\ k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} e_t^{-\varepsilon} = z_t$$

vides fra tidligere.

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} \left(\frac{s}{z_t} + (1-\delta)\right)^{1-\alpha} z_t$$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon} (s + (1-\delta)z_t)^{1-\alpha} z_t^{\alpha}$$

2.7
For at udlede SS-værdien for z, droppes perioderne. Altså $z_t = z_{t+1} = z^\star$

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon}(s+(1-\delta)z_t)^{1-\alpha} z_t^{\alpha}$$

$$z = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon}(s+(1-\delta)z)^{1-\alpha} z^{\alpha}$$

$$z^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon}(s+(1-\delta)z)^{1-\alpha}$$

$$z = \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} (1-s_E)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}}(s+(1-\delta)z)$$

$$z = \big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}(1-s_E)^{\frac{-\varepsilon}{1-\alpha}} = s+(1-\delta)z$$

$$z\big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}(1-s_E)^{\frac{-\varepsilon}{1-\alpha}} - (1-\delta)z = s$$

$$z\left(\big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}(1-s_E)^{\frac{-\varepsilon}{1-\alpha}} - (1-\delta)\right) = s$$

$$z = \frac{s}{\left(\big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}(1-s_E)^{\frac{-\varepsilon}{1-\alpha}} - (1-\delta)\right)}$$

Det vides stadig, at $1-\alpha = \beta+\kappa+\varepsilon$

$$z^\star = \frac{s}{\left(\big((1+n)(1+g)\big)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\varepsilon}}(1-s_E)^{\frac{-\varepsilon}{\beta+\kappa+\varepsilon}} - (1-\delta)\right)}$$

For at bevise modellen opfylder konvergens mod en SS-værdi, skal de nedstående betingelser være opfyldt.

1. Transitionsligningen går gennem (0,0). Dette er opfyldt, da $z_{t+1} = 0$ også er $z_t = 0$
2. Transitionskurven er konstant voksende:
$$\frac{dz_{t+1}}{dz_t} = \left(\frac{1}{(1+g)(1+n)}\right)^{\beta} (1-s_E)^{-\varepsilon}(1-\delta)(1-\alpha)(s+(1-\delta z_t)^{\alpha}\alpha z^{\alpha-1}$$
Modellen antager, at $s_E \wedge \delta \wedge \alpha$ alle er mindre end 1. Udtrykket er derfor positivt, og ligningen opfylder dermed at transitionskuren er konstant voksende.
3. Transitionskurvens hældning er konstant aftagende: For voksende z_t vil $\frac{dz_{t+1}}{dz_t}$ blive mindre og mindre. Ergo må væksten være konstant aftagende.
4. Hældningen går mod et tal mindre end 1: Når $z_t \to \infty$, går $\frac{dz_{t+1}}{dz_t} \to 0$, hvilket opfylder kravet.

Derfor kan der konkluderes, at $z_t \to z^\star$ og at der er konvergens.

2.8
I opgave 2.3 og 2.4 antages en negativ sammenhæng mellem befolkningsvækst og langsigtet output. Det samme fælder for mængden af begrænsede ressourcer(olie). Des mere forbrug af udtømmelige ressourcer som input i produktionen, des mere pessimistisk er modellen overfor langsigtet vækst.(Større kappa og epsilon giver mindre vækst, jf 2.3 og 2.4). Ser man

derimod på højere udviklede lande, der med mindre befolkningsvækst og forbrug af land i produktionen, samt mulighed for substitution mod teknologiske energi former(grøn energi), så har modellen et positivt syn på langtidsvækst. Altså pessimistisk for lande, der ikke kan betale for andre energiformer og bruge mindre land i produktionen, dårligt for de, der ikke kan. Pessimistisk for de lande der er afhængige er mange hænder, meget land og olie.

Ved at vi arbejder med en Cobb-Douglas funktion, antages der fuld elasticitets mellem teknologi og begrænsede ressourcer. Er denne antagelse plausibel er lettere diskutabelt. Nogle lande er tæt på og nogle lande er langt fra. Ved at kigge på en CES-funktion, kan der tages højde for antagelsen lavet i Cobb-Douglas funktionen. CES-funktionen vil derfor kunne komme med bedre resultater, da vi endnu ikke fuldstændigt kan substituere mellem grøn energi og brændbare ting.