Matematik B F2021 Forelæsning 3 (uge 8)

EMEA: 16.1-5

Determinanter

I dag:

- **Opsamling fra sidst**
  - Vi samler op på de sidste slides om linjer og hyper-planer

- **Determinanter!**
  - Determinanter for 2x2 matricer (16.1)
  - En generel definition af determinanter ("v1")
  - Determinanter for 3x3 matricer (16.2)
  - Bogens generelle definition af determinanter ("v2", 16.3)
  - Regneregler for determinanter (16.4)
  - Udregning af determinanter ved udvikling efter vilkårlig række eller søjle (16.5)

Determinanter: Kort intro

Til enhver kvadratisk matrix **A** knyttes et tal kaldet determinanten af **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \qquad |\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A})$$

Determinanten giver os nyttig information

Fx:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B} \text{ har entydig løsning} \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{A}| \neq 0$$

Determinanter: 2x2 matricer (16.1)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \qquad |\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Vi har faktisk tidligere mødt en determinant af orden 2 ifm andenordens-testen for lokale ekstremumspkt (13.3):

$A = f''_{11}(x_0, y_0)$, $B = f''_{12}(x_0, y_0) = f''_{21}(x_0, y_0)$ og $C = f''_{22}(x_0, y_0)$

$AC - B^2$ er determinanten af Hessematricen i punktet (x_0, y_0):

$$f''(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x_0, y_0) & f''_{12}(x_0, y_0) \\ f''_{21}(x_0, y_0) & f''_{22}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

(og $|f''(x, y)|$ indgår i de nødv. bet. for globalt max/min-pkt i 13.2)

Den generelle løsning til ligningssystemet

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}}$$

er (hvis nævner ikke er nul, se afsnit 3.6):

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$|A|$

NB: Entydig løsning hvis (og kun hvis) $|\mathbf{A}| \neq 0$

Løsningen kan udtrykkes vha determinanter:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

"Cramer's rule" for 2 lineære lign. med 2 ubek.

(Se 16.2 for 3 lign, 3 ubek. Generelt resultat næste uge)

Determinanter: Generel definition (v1)

"Opvarming" til definition:

- Definition er induktiv/rekursiv:
  - Først defineres determinanten for 1 x 1-matricer, så for 2 x 2-matricer, så for 3 x 3-matricer, …
- Vigtig notation:

Givet $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ defineres $\mathbf{A}_{ij}$ som den $(n-1)\times(n-1)$ matrix, hvor i'te række og j'te søjle er fjernet

Fx:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Generel definition (v1):

- For en vilkårlig 1×1-matrix $\mathbf{A} = (a_{11})$:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}.$$

- For en vilkårlig $n \times n$-matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, hvor $n > 1$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot |\mathbf{A}_{1j}| \\ &= a_{11}|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}|\mathbf{A}_{12}| + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} |\mathbf{A}_{1n}| \end{aligned}$$

determinanter af $(n-1) \times (n-1)$ matricer

For 2×2 matrix: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot |(a_{22})| + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot |(a_{21})| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

✓ Det passer!

Determinant af 3 x 3-matrix (16.2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot |\mathbf{A}_{1j}|}$$

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= \ldots$$

"Sarrus regel" for 3x3 matricer

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}}_{\text{2 første søjler i } A}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

NB: Tilsvarende regel gælder <u>ikke</u> for $n > 3$

Øvelse: Determinant af 4x4 matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a_{23} & 1 \\ 2 & 1 & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 4 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot |\mathbf{A}_{1j}|}$$

Bestem $|\mathbf{A}|$, idet det oplyses, at $|\mathbf{A}_{11}| = |\mathbf{A}_{14}|$

pingo.coactum.de (131061)

$$|A| = \cancel{(-1)^2 \cdot 2 \cdot |A_{11}|} + \cancel{(-1)^3 \cdot 0 \cdot |A_{12}|} + (-1)^4 \cdot 3 \cdot |A_{13}| \cancel{+ (-1)^5 \cdot 2 \cdot |A_{14}|}$$

$$= 3 \cdot |A_{13}| = 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a_{34} \\ 1 & 4 & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= 3\left(0 + 0 + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right) = 3(8-1) = 21$$

Generel definition (v2, afsnit 16.3)

Lad $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$.
$|\mathbf{A}|$ er så en sum af alle led af formen

$$(\pm)\ a_{1r_1} \cdot a_{2r_2} \cdot \ldots \cdot a_{nr_n},$$

fx: 2 1 n

hvor $r_1, \ldots, r_n$ består af tallene $1, 2, \ldots, n$ i en eller anden rækkefølge.
(en "permutation" af tallene $1, 2 \ldots, n$)

Bemærk: Der er ialt $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ sådanne led

I hvert led er der netop en faktor fra hver række
og netop en faktor fra hver søjle

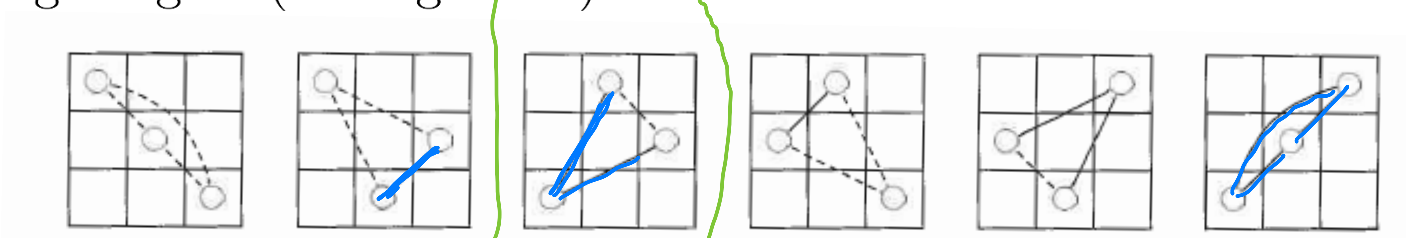
Fortegnet foran hvert led findes ved "fortegnsreglen" (the sign rule).
Den introduceres nemmest for 3×3 matricer - se næste side.

Determinant af 3 x 3-matrix (v2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| = &+ a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \\ &- a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} \\ &+ a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

Fortegnsreglen (the sign rule):



Samme princip for større matricer!

Øvre trekantsmatrix

En øvre trekantsmatrix (upper triangular matrix) har nuller under diagonalen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \; a_{n-1\,n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Alle andre led giver nul!

Samme resultat gælder for en nedre trekantsmatrix

Regneregler for determinanter (16.4)

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Så gælder:

(i) Hvis $\mathbf{A}$ har en nulrække (eller en nulsøjle), så er $|\mathbf{A}| = 0$

(ii) $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$, dvs transponering ændrer ikke determinanten

(iii) Hvis en række (eller en søjle) ganges med $\alpha \in \mathbb{R}$, så bliver determinanten ganget med α

(iv) Hvis to rækker (eller to søjler) byttes om, så skifter determinanten fortegn

(v) Hvis to rækker (eller søjler) er proportionale, så er $|\mathbf{A}| = 0$

(vi) Hvis et multiplum af en række (eller søjle) adderes til en anden række (søjle), så er determinanten uændret

(vii) Hvis $\mathbf{B}$ også er en $n \times n$ matrix, så er

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

(viii) For alle $\alpha \in \mathbb{R}$ er

$$|\alpha \mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}|$$

Øvelse: Determinant af 4x4 matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestem $|\mathbf{A}|$

pingo.coactum.de (131061)

Hint: Omdan ved rækkeoperationer **A** til en matrix, som det er let at bestemme determinaten af. Brug regnereglerne til at holde styr på, hvad rækkeoperationerne gør ved determinanten.

(Ekstra øvelse til de hurtige på slide 17)

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} -2 \quad -4 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \quad -2 \\ \\ \\ \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-5) \cdot 2 = -10$$

Øvre trekantsmatrix!

Ekstra øvelse: Bestem $|\mathbf{A}|$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a & 3 & 5 \\ 1 & b & 3 & 4 \\ 2 & c & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 8 - 4b$

Kan fx udregnes på flg måde:

$$|A| = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ & 1 & a & 3 & 5 & \\ & 1 & b & 3 & 4 & \\ & 2 & c & 2 & 2 & \end{array} \overset{(vi)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a & 3 & 5 \\ 0 & b-2 & 0 & 0 \\ 2 & c & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{(iv)}{=} - \begin{vmatrix} 0 & b-2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & c & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{DEF "v1"}}{=} -(-1)^3 \cdot (b-2) \cdot \begin{array}{|ccc|c} 1 & 3 & 5 & \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & \end{array} \overset{(vi)}{=} (b-2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{DEF "v1"}}{=} (b-2) \cdot (-1)^4 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (b-2)(2-6) = (b-2)(-4)$$

$$= \underline{8 - 4b}$$

Bevis for en enkelt regneregel

(iii) Hvis en række (eller en søjle) ganges med $\alpha \in \mathbb{R}$, så bliver determinanten ganget med α

$$a_{1r_1} \cdot \ldots \cdot a_{ir_i} \cdot \ldots \cdot a_{nr_n} \xrightarrow[\text{ganges med } \alpha]{\text{række } i} a_{1r_1} \cdot \ldots \cdot (\alpha a_{ir_i}) \cdot \ldots \cdot a_{nr_n}$$

(vilkårligt led i $|\mathbf{A}|$)

$$= \alpha(a_{1r_1} \cdot \ldots \cdot a_{ir_i} \cdot \ldots \cdot a_{nr_n})$$

Alle led i $|A|$ ganges med α, dvs. at determ. af den nye matrix bliver $\alpha|A|$.

Et ekstra bevis (kun hvis tid…)

(vi) Hvis et multiplum af en række (eller søjle) adderes til en anden række (søjle), så er determinanten uændret

Vi betragter matricen $\mathbf{A}$ og adderer α gange række i til række 1:

$$|\mathbf{A}| \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot |\mathbf{A}_{1j}|$$

α gange række i
lægges til række 1

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot (a_{1j} + \alpha a_{ij}) \cdot |\mathbf{A}_{1j}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot |\mathbf{A}_{1j}| \quad + \quad \alpha \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{ij} \cdot |\mathbf{A}_{1j}|}_{\text{determinant af matrix, hvor række 1 og række } i \text{ er ens, derfor lig nul}}$$

$$= |\mathbf{A}| \quad + \quad \alpha \cdot 0 \quad = \quad |\mathbf{A}|$$

"Udvikling efter række i/søjle j" (16.5)
(Expansion by cofactors)

Husk vores første (v1) definition af determinanten:

$$\boxed{|\mathbf{A}| \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot |\mathbf{A}_{1j}|}$$

"udvikling efter første række"

Definition af cofaktorer:

$$\boxed{C_{ij} \quad = \quad (-1)^{i+j} \cdot |\mathbf{A}_{ij}|,}$$

dvs $C_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,j-1} & \boxed{a_{ij}} & a_{i,j+1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Altså har vi:

$$\boxed{|\mathbf{A}| \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot C_{1j}}$$

Det viser sig (Thm 16.5.1, s.643), at determinanten kan udregnes ved udvikling efter en vilkårlig række i:

$$\boxed{\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |\mathbf{A}_{ij}| \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij} \\ &= a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot C_{in} \end{aligned}}$$

Eller ved udvikling efter en vilkårlig søjle j:

$$\boxed{\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |\mathbf{A}_{ij}| \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij} \\ &= a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot C_{nj} \end{aligned}}$$

Eksempel: Udregn determinant

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |\mathbf{A}_{ij}|$$

udvikling efter 2. række

$$|A| = 0 + 0 + (-1)^5 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 0$$

udvikl. efter 2. søjle

$$= -2\left((-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^5 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -2\left(-(8-6) - (24-20)\right) = -2(-6) = 12$$

Øvelse - tilbage til starten af forelæsningen:

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{B} \text{ har entydig løsning} \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{A}| \neq 0}$$

Obl. opg til næste uge:

(a) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 6 \\ x_2 + 4x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

$|A| = 6 \neq 0$ Entydig løsning!

(b) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_2 - 2x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

$|A| = 0$

Ikke entydig løsn. !

Afgør vha udregning af determinanter, om hvert af disse ligningssystemer har en entydig løsning

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \\
-2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 6 \\
x_2 + 4x_3 &= -2
\end{aligned}
$$

udvikl. efter 3. række

$$
|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^5 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^6 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= -(-6-4) + 4(-1) = 6
$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\
2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\
-x_2 - 2x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -1 \\ \leftarrow \\ \end{array} \underset{(vi)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \underset{(v)}{=} 0
$$

række 2 og 3 er proportionale !