Matematik A E2020
Uge 36, Forelæsning 1

Kort intro til kurset

+

Kapitel 1: Mængdelære, logik, beviser og induktion

Matematik på polit – Hvorfor?

- Økonomi som disciplin er stærkt matematiseret
  - Matematik er nødvendigt for at kunne læse økonomisk faglitteratur
    - Modeller indenfor mikro- og makroøkonomi
    - Empiriske metoder (økonometri)

- Matematik A og B: Den nødvendige (minimale) baggrund

- Matematik har mange positive "bivirkninger"
  - Styrker evne til at ræsonnere præcist og kortfattet
  - Styrker evne til abstrakt tænkning
  - Styrker kreativitet (ja, sgu!) inden for faste rammer

Kursusinformation

- Vi løber kort dokumentet med kursusinformation fra Absalon igennem. Læs det grundigt! Og se også info på *kurser.ku.dk*.

Matematik A E2020: Vigtig information om kurset

Se også kurser.ku.dk, direkte link: https://kurser.ku.dk/course/a%c3%98kb08006u/2020-2021

Undervisningen

Undervisningen i Matematik A består af:

- 4 (2 gange 2) timers forelæsninger i 14 uger fra uge 36 til 50 (minus uge 42). Forelæser og kursusansvarlig er Thomas Jensen (tj@econ.ku.dk).
- 3 timers holdundervisning i 15 uger fra uge 36 til 51 (minus uge 42).

Bemærk: Pga Corona-situationen kan alle studerende på kurset ikke være i auditoriet samtidig, så I skal regne med at følge nogle forelæsninger online. Holdundervisningen kan som udgangspunkt køre normalt med fysisk fremmøde. Alt dette kommer der nærmere information om inden semesterstart. Der kan i løbet af semestret ske ændringer med kort varsel, herunder fuld overgang til online undervisning.

Planer for de enkelte forelæsninger og holdundervisningsgange er tilgængelige på Absalon.

VIGTIGT: *Undervisningen forudsætter, at I har forberedt jer og deltager aktivt! Der er specifikke minimumsforventninger til jeres forberedelse – læs dem under beskrivelsen af forelæsninger og holdundervisning nedenfor.*

Undervisningsmateriale

Lærebogen i kurset er:

- Sydsæter, Hammond, Strøm og Carvajal: "Essential Mathematics for Economic Analysis". Fifth edition. Pearson, 2016.

Vi gennemgår kapitlerne 1-14, dog springes enkelte afsnit/sider over (se forelæsningsplanen).

Der findes løsninger til alle opgaver bagerst i bogen. Til opgaver markeret med "SM" er der uddybende løsninger i den tilhørende Student's Manual, som er tilgængelig på Absalon.

Eventuelt supplerende materiale vil blive lagt på Absalon.

Om papir, blyant og IT-værktøjer

Som udgangspunkt er vores eneste værktøjer i dette kursus papir og blyant. Det betyder, at alle opgaver bør laves uden brug af lommeregner, CAS-værktøjer og lignende. Formålet med dette er at styrke grundlæggende færdigheder og forståelse inden for dele af matematikken, der er helt centrale på økonomi-studiet.

I nogle tilfælde kan begrænset brug af IT-værktøjer være relevant til at støtte jeres arbejde med opgaver. Fx kan det være nyttigt at tegne en graf (især for funktioner af to variable) eller checke løsningen af en ligning.

- Og lad os så bare komme i gang…

Mængder (1.1)

- Mængde: "Samling af elementer"

$S = \{1, 2, 3\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

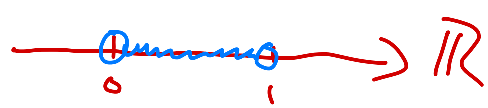
$H = \{\text{pasta}, \text{fisk}, \text{bøf}\}$

- Ofte opskrives mængder ved at specificere:
  - Typen af elementer (fx $n \in \mathbb{N}$)
  - De egenskaber elementerne skal opfylde (fx $n \geq 10$)

$$\{\text{type} \;:\; \text{egenskaber}\}$$

  - Naturlige tal større end eller lig 10: $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 10\}$

  - Det åbne interval fra 0 til 1:



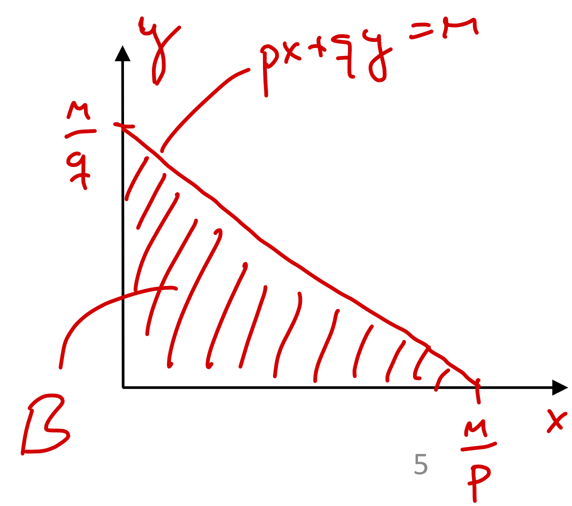
$]0,1[\,=\, (0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

Budgetmængder

- Forbrugssituation med 2 varer
  - Varebundt (consumption bundle): (x, y), hvor $x, y \geq 0$
  - Priser: $p > 0$ og $q > 0$
  - Indkomst/formue: $m > 0$

- Budgetmængde: Mængden af varebundter, som forbrugeren har mulighed for at købe

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ px + qy \leq m\}$$

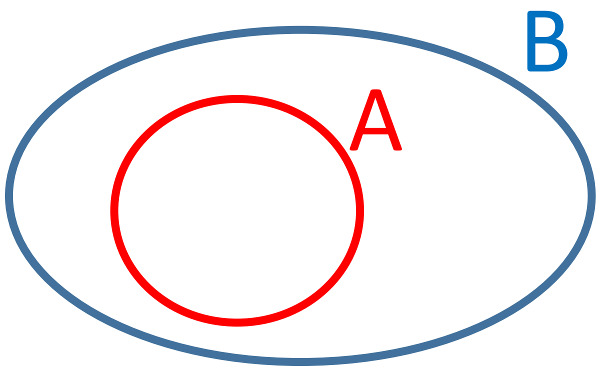


Delmængde

- $A \subseteq B$ (A er en delmængde af B) betyder:

  $$\text{Hvis } a \in A, \text{ så gælder også } a \in B$$

- Venn diagram:

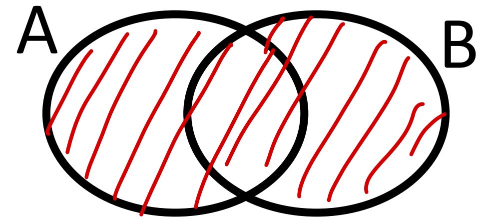


- Bemærk:
  - Enhver mængde er en delmængde af sig selv: $A \subseteq A$
  - Den tomme mgd er delmgd af enhver mængde: $\varnothing \subseteq A$
  - $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ og $B \subseteq A$

Mængdeoperationer

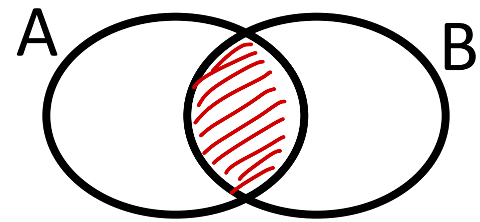
- Foreningsmængde:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$$



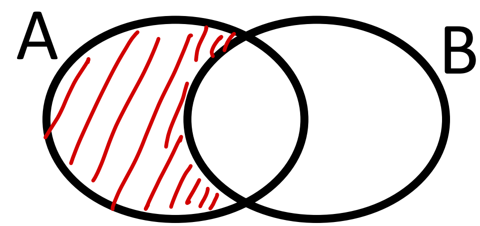
- Fællesmængde:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ og } x \in B\}$$



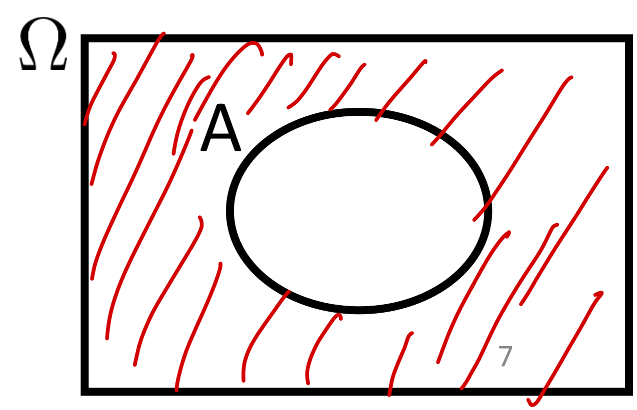
- Mængdedifferens:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ og } x \notin B\}$$



- Komplementærmængde (universalmængde Ω):

$$A^c = \complement A = \Omega \setminus A$$



PINGO: Budgetmængde

- pingo.coactum.de, access number 185415
- Forbrugssituation med 2 varer
  - Priser og indkomst: $p = 3,\ q = 5 \text{ og } m = 28$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ px + qy \leq m\}$$

- Afgør for hvert af følgende varebundter, om de ligger i budgetmængden:

1. $(x, y) = (9, 0)$ $px + qy = 27 \leq 28$ ✓
2. $(x, y) = (3, 4)$ $= 29$ %
3. $(x, y) = (6, 2)$ $= 28$ ✓

En smule om logik (1.2)

- Formel logik er basis for al matematisk ræsonnement
  - Vi er ikke altid eksplicitte omkring vores brug af logik i beviser mv, men logikkens regler ligger altid i baggrunden

- **Udsagn (proposition)**: En formulering i ord og/eller symboler, som enten er sand eller falsk

$2^2=4 \leftarrow$ sand $\qquad \pi=3 \leftarrow$ falsk

- **Åbent udsagn**: Udsagn med en eller flere variable, så sandhedsværdien afhænger af variablens værdi

$x^2=1$ $\qquad\qquad px+qy \leq M$

sandt hvis $x=1$ eller $x=-1$

Implikationer

Lad P og Q være udsagn

- Implikationen $P \Rightarrow Q$ betyder:
  Hvis P er sand, så er Q også sand

  $x=1 \Rightarrow x^2=1$ sandt

  Det regner $\Rightarrow$ vejen er våd sandt

  $x^2=y^2 \Rightarrow x=y$ falsk! (fx $x=1, y=-1$)
- Bi-implikationen (equivalence arrow) $P \Leftrightarrow Q$ betyder:
  Der gælder både $P \Rightarrow Q$ og $Q \Rightarrow P$

($x=1$ eller $x=-1$) $\Leftrightarrow x^2=1$ sand!

Nødv. og tilstr. betingelser

Lad P og Q være udsagn

- At P er en **tilstr. betingelse** for Q betyder:

  Der gælder $P \Rightarrow Q$

- At P er en **nødv. betingelse** for Q betyder:

  Der gælder $Q \Rightarrow P$

  [eller den ækviv. implikation ikke-$P \Rightarrow$ ikke-Q]

Beviser (1.3)

- En matematisk sætning (theorem) består af en eller flere implikationer

$$P \Rightarrow Q$$

- Eksempler:

Lad f være en differentiabel funktion på et åbent interval I. Hvis $c \in I$ er et maksimumspkt eller et minimumspkt for f, så er $f'(c) = 0$.

Lad n være et naturligt tal. Da gælder:

$$n \text{ er lige} \Leftrightarrow n^2 \text{ er lige}$$

Bevis-typer

En sætning $P \Rightarrow Q$ kan bevises på forskellige måder

- **Direkte:** Antag P er sand. Vis, at så må Q være sand.

- **Bevis ved "kontraponering"/"kontraposition":**
  Vis, at implikationen $\text{ikke-}Q \Rightarrow \text{ikke-}P$ gælder.
  Denne implikation er ækvivalent med $P \Rightarrow Q$

- **"Modstridsbevis":** Antag P er sand, men at Q <u>ikke</u> er sand. Vis, at dette fører til en modstrid.
  Heraf følger det ønskede:

  Hvis P er sand, må også Q være sand

Et lille bevis...

Lad n være et naturligt tal. Da gælder:

$$n \text{ er lige} \Leftrightarrow n^2 \text{ er lige}$$

$\Rightarrow$ Direkte! Antag n lige, vis at n^2 lige.

$n = 2k$ for et $k \in \mathbb{N}$

Så er $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$, dvs n^2 er lige.

$\Leftarrow$ Kontraponering! Antag n er ulige, vis at n^2 er ulige

$n = 2k+1$ for et $k \in \mathbb{N}$.

Så er $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{\overbrace{2(2k^2+2k)}^{\text{lige}} + 1}_{\text{ulige.}}$

Altså er n^2 ulige

$\square$

Induktionsbeviser (1.4)

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2 \\ 1+3 &= 4 = 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 = 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 16 = 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2 \end{aligned}$$

Hmmm...man kunne fristes til at tro at...

$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$

skal bevises!

Induktionsbevis!

En del matematiske resultater har “formen”:

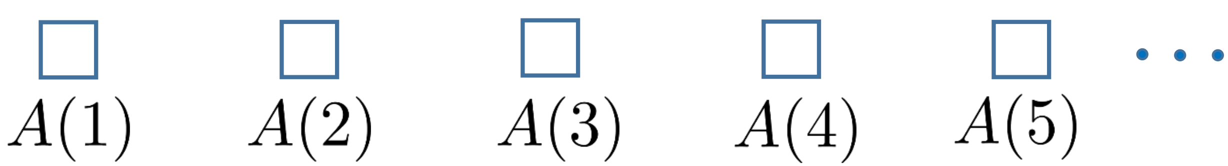
Et udsagn/formel $A(n)$ gælder for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

Sådanne resultater kan ofte bevises ved **induktion:**

- **Induktionsstart**: Vis, at $A(1)$ er sand.
- **Induktionsskridt**: Lad k være vilkårligt naturligt tal. Vis, at hvis $A(k)$ er sand, så er også $A(k+1)$ sand.

Kan vi komme igennem både induktionsstart og induktionsskridt, så har vi vist det ønskede!

“Induktionsprincippet”: Dyb matematik, men intuitionen er ganske simpel



Induktionsbevis: Eksempel

For ethvert naturligt tal n gælder:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Bevis ved induktion:

Ekstra (hvis tid): π=3 ?!

pingo.coactum.de
185415

- Hvilken implikation gælder ikke (er falsk)?

$$
\begin{array}{clrcl}
 & & x & = & (\pi + 3)/2 \\
1 & \Rightarrow & 2x & = & \pi + 3 \\
2 & \Rightarrow & 2x(\pi - 3) & = & (\pi + 3)(\pi - 3) \\
3 & \Rightarrow & 2\pi x - 6x & = & \pi^2 - 9 \\
4 & \Rightarrow & 9 - 6x & = & \pi^2 - 2\pi x \\
5 & \Rightarrow & 9 - 6x + x^2 & = & \pi^2 - 2\pi x + x^2 \\
6 & \Rightarrow & (3 - x)^2 & = & (\pi - x)^2 \\
7 & \Rightarrow & 3 - x & = & \pi - x \\
8 & \Rightarrow & \pi & = & 3
\end{array}
$$