Lista de Exemplos 3: Interpolação Polinomial

Exemplo 1

Calcular $P_2(0{,}2)$ por meio da solução de um sistema de equações lineares usando os dados da tabela abaixo (Campos, 2018; Exemplo 3.2).

x	***y***
0,1	1,221
0,6	3,320
0,8	4,953

Solução

$P_2(x_0) = y_0$
$P_2(x_1) = y_1$
$P_2(x_2) = y_2$

$$\begin{aligned} a_0 + 0{,}1a_1 + 0{,}1^2a_2 &= 1{,}221 \\ a_0 + 0{,}6a_1 + 0{,}6^2a_2 &= 3{,}320 \\ a_0 + 0{,}8a_1 + 0{,}8^2a_2 &= 4{,}953 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}01 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}36 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}221 \\ 3{,}320 \\ 4{,}953 \end{bmatrix} \Rightarrow a = \begin{bmatrix} 1{,}1412 \\ 0{,}2310 \\ 5{,}6671 \end{bmatrix}$$

$P_2(x) \ = \ 1{,}1412 \ + \ 0{,}2310x \ + \ 5{,}6671x^2$

$P_2(0{,}2) \ = \ 1{,}414$

Exemplo 2

Calcular $P_2(0{,}2)$ por meio de um polinômio de Lagrange usando os dados da tabela abaixo (Campos, 2018; Exemplo 3.4).

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i}$
0	0,1	1,221
1	0,6	3,320
2	0,8	4,953

Solução

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= 1{,}221 \frac{(x - 0{,}6)(x - 0{,}8)}{(0{,}1 - 0{,}6)(0{,}1 - 0{,}8)} + 3{,}320 \frac{(x - 0{,}1)(x - 0{,}8)}{(0{,}6 - 0{,}1)(0{,}6 - 0{,}8)} \\ &+ 4{,}953 \frac{(x - 0{,}1)(x - 0{,}6)}{(0{,}8 - 0{,}1)(0{,}8 - 0{,}6)} \end{aligned}$$

$P_2(0{,}2) = 1{,}414$

Exemplo 3

Determinar $P_2(1{,}2)$ por meio de um polinômio de Newton usando os dados da tabela abaixo (Campos, 2018; Exemplo 3.9).

x	**y**
0,9	3,211
1,1	2,809
2,0	1,614

Solução

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i}$	$\boldsymbol{\Delta y_i}$	$\boldsymbol{\Delta^2 y_i}$
0	0,9	3,211	-2,010	0,62020
1	1,1	2,809	-1,328	
2	2,0	1,614		

$$P_2(x) = 3{,}211 - 2{,}010(x - 0{,}9) + 0{,}62020(x - 0{,}9)(x - 1{,}1)$$

$$P_2(1{,}2) = 2{,}62661$$

Exemplo 4

Seja $f(x) = e^x + x - 1$ tabelada abaixo (Ruggiero e Lopes, 2009; Exemplo 5.8).

x	**y**
0	0,0
0,5	1,1487
1	2,7183
1,5	4,9811
2,0	8,3890

a) Obter $f(0{,}7)$ por interpolação linear.

Solução

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0)$$

$x = 0{,}7 \in (0{,}5, 1)$, então $x_0 = 0{,}5$ e $x_1 = 1$

$$P_1(x) = 1{,}1487 + \left(\frac{2{,}7183 - 1{,}1487}{1 - 0{,}5}\right)(x - 0{,}5) = 1{,}1487 + 3{,}1392(x - 0{,}5)$$

$$P_1(0{,}7) = 1{,}7765$$

b) Analisar a cota máxima do erro cometido.

Solução

$$|E_1(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)| \frac{\text{máx}_{\xi \in [0,5,1]} |f''(\xi)|}{2!}$$

$$f(x) = e^x + x - 1$$
$$f'(x) = e^x + 1$$
$$f''^{(x)} = e^x \Rightarrow \xi = 1$$

$$|E_1(x)| \leq |(x-0{,}5)(x-1)| \frac{|e^1|}{2!}$$

$$|E_1(0{,}7)| \leq 0{,}0815$$

Exemplo 5

Seja $f(x)$ dada na forma (Ruggiero e Lopes, 2009; Exemplo 5.9):

x	***y***
0,20	0,16
0,34	0,22
0,40	0,27
0,52	0,29
0,60	0,32
0,72	0,37

a) Obter $f(0{,}46)$ usando um polinômio de grau 2 na forma de Newton.

Solução

	i	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i}$	$\Delta \boldsymbol{y_i}$	$\Delta^2 \boldsymbol{y_i}$	$\Delta^3 \boldsymbol{y_i}$
	0	0,20	0,16	0,4286	2,0235	-17,8963
$\boldsymbol{x_0}$	**1**	**0,34**	**0,22**	**0,8333**	**-3,7033**	18,2494
$\boldsymbol{x_1}$	**2**	**0,40**	**0,27**	**0,1667**	1,0415	-2,6031
$\boldsymbol{x_2}$	**3**	**0,52**	**0,29**	0,375	0,2085	
	4	0,60	0,32	0,4167		
	5	0,72	0,37			

Deve-se escolher três pontos de interpolação. Como $0{,}46 \in (0{,}4, 0{,}52)$, dois pontos deverão ser 0,40 e 0,52. O outro deve ser 0,34, porque $|0{,}46 - 0{,}34| = 0{,}12 < |0{,}46 - 0{,}60| = 0{,}14$. Escolheremos $x_0 = 0{,}34$, $x_1 = 0{,}52$ e $x_2 = 0{,}60$.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \Delta^0 y_0 + \Delta y_0 (x-x_0) + \Delta^2 y_0 (x-x_0)(x-x_1) \\ &= 0{,}22 + 0{,}8333(x-0{,}34) + (-3{,}7033)(x-0{,}34)(x-0{,}40) \end{aligned}$$

$$P_2(0{,}46) = 0{,}2933$$

b) Dar uma estimativa para o erro.

Solução

$$
\begin{aligned}
|E_2(x)| &\approx |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|\left(\max(|\text{diferenças divididas de ordem 3}|)\right) \\
&= |(x-0{,}34)(x-0{,}4)(x \\
&\quad -0{,}52)|\left(\max(|-17{,}8963|,|18{,}2494|,|-2{,}6031|)\right) \\
&= |(x-0{,}34)(x-0{,}4)(x-0{,}52)|\ (18{,}2494)
\end{aligned}
$$

$$|E_2(0{,}46)| \approx 0{,}007884$$

Referências

F. F. Campos. Algoritmos Numéricos: Uma Abordagem Moderna de Cálculo Numérico. 3ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2018.

M. A. G. Ruggiero e V. L. da R. Lopes. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2ª edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2000.