Lista de Exemplos 2: Sistemas Lineares

Exemplo 1

a) Resolver o sistema abaixo pelo método da eliminação de Gauss (Campos, 2018; Exemplo 2.32).

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Solução

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & -3 & 2 & 11 \\ -2 & 8 & -1 & -15 \\ 4 & -6 & 5 & 29 \end{array}\right]$$

Pivô: $a_{11} = 1$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-2}{1} = -2$$
$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{4}{1} = 4$$

$$L_2 = L_2 - m_{21}L_1 = L_2 + 2L_1$$
$$L_3 = L_3 - m_{32}L_1 = L_3 - 4L_1$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & -3 & 2 & 11 \\ 0 & \underline{2} & 3 & 7 \\ 0 & 6 & -3 & -15 \end{array}\right]$$

Pivô: $a_{22} = 2$

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$L_3 = L_3 - m_{32}L_2 = L_3 - 3L_2$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & -3 & 2 & 11 \\ 0 & \underline{2} & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -12 & -36 \end{array}\right]$$

Sistema triangular superior $Ux = y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}$$

Solução de $Ux = y$ pelas substituições retroativas:

$$-12x_3 = -36, x_3 = \frac{-36}{-12} \Rightarrow x_3 = 3$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7, x_2 = \frac{7 - 3x_3}{2}, x_2 = \frac{7 - 3(3)}{2} \Rightarrow x_2 = -1$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, x_1 = \frac{11 + 3x_2 - 2x_3}{1}, x_1 = \frac{11 + 3(-1) - 2(3)}{1} \Rightarrow x_1 = 2$$

$$x = [2 - 1\ 3]^T$$

b) Verificar a exatidão e a unicidade da solução.

Solução

Exatidão da solução:

$$r = b - Ax = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como o vetor resíduo é nulo, a solução é exata.

Unicidade da solução:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{3} u_{ii} = 1 \times 2 \times -12 = -24$$

Como $\det(A) \neq 0$, então o sistema admite uma única solução.

Exemplo 2

a) Resolver o sistema abaixo pelo método da eliminação de Gauss com pivotação parcial (Campos, 2018; Exemplo 2.42).

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Solução

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 11 \\ -2 & 8 & -1 & -15 \\ \underline{4} & -6 & 5 & 29 \end{array}\right]$$

Pivô: $a_{31} = 4$

Permutar as linhas 1 e 3:

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} \underline{4} & -6 & 5 & 29 \\ -2 & 8 & -1 & -15 \\ 1 & -3 & 2 & 11 \end{array}\right]$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{4}$$

$$L_2 = L_2 - m_{21}L_1 = L_2 + \frac{1}{2}L_1 = L_2 + 0{,}5L_1$$
$$L_3 = L_3 - m_{32}L_1 = L_3 - \frac{1}{4}L_1 = L_3 - 0{,}25L_1$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} \underline{4} & -6 & 5 & 29 \\ 0 & \underline{5} & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -1{,}5 & 0{,}75 & 3{,}75 \end{array}\right]$$

Pivô: $a_{22} = 5$

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-1{,}5}{5} = -0{,}3$$

$$L_3 = L_3 - m_{32}L_2 = L_3 + 0{,}3L_2$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} \underline{4} & -6 & 5 & 29 \\ 0 & \underline{5} & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 & 3{,}6 \end{array}\right]$$

Sistema triangular superior $Ux = y$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}6 \end{bmatrix}$$

Solução de $Ux = y$ pelas substituições retroativas:

$$1{,}2x_3 = 3{,}6, x_3 = \frac{3{,}6}{1{,}2} \Rightarrow x_3 = 3$$
$$5x_2 + 1{,}5x_3 = -0{,}5, x_2 = \frac{-0{,}5 - 1{,}5x_3}{5}, x_2 = \frac{-0{,}5 - 1{,}5(3)}{5} \Rightarrow x_2 = -1$$
$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 29, x_1 = \frac{29 + 6x_2 - 5x_3}{4}, x_1 = \frac{29 + 6(-1) - 5(3)}{4} \Rightarrow x_1 = 2$$

$$x = [2 - 1\ 3]^T$$

b) Verificar a unicidade da solução.

Solução

$$\det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^{3} u_{ii} = (-1)^1\, 4 \times 5 \times 1{,}2 = -24$$

Como $\det(A) \neq 0$, então o sistema admite uma única solução.

Exemplo 3

a) Resolver o sistema abaixo pelo método da decomposição LU com pivotação parcial (Ruggiero e Lopes, 2000; Exemplo 3.7).

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Solução

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ \underline{4} & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Pivô: $a_{31} = 4$

Permutar as linhas 1 e 3:

$$A = \begin{bmatrix} \underline{4} & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{1}{4}$
$m_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} = \dfrac{3}{4}$

$L_2 = L_2 - m_{21}L_1 = L_2 - \dfrac{1}{4}L_1$
$L_3 = L_3 - m_{32}L_1 = L_3 - \dfrac{3}{4}L_1$

$$A = \begin{bmatrix} \underline{4} & 0 & -3 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \\ 3/4 & -\underline{4} & 13/4 \end{bmatrix}$$

Pivô: $a_{32} = -4$

Permutar as linhas 2 e 3:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -\underline{4} & 13/4 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$m_{32} = \dfrac{a_{32}}{a_{22}} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$

$L_3 = L_3 - m_{32}L_2 = L_3 + \dfrac{1}{2}L_2$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & -1/2 & |\; 35/8 \end{bmatrix}$$

Fatores L, U e P:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução de $Ly = Pb$ pelas substituições sucessivas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$y_1 = -2$
$\frac{3}{4}y_1 + y_2 = 9, y_2 = 9 - \frac{3}{4}(-2) \Rightarrow y_2 = \frac{21}{2}$
$\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 3, y_3 = 3 - \frac{1}{4}(-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{21}{2}\right) \Rightarrow y_3 = \frac{35}{4}$

$y = [-2 \; 21/2 \;\; 35/4]^T$

Solução de $Ux = y$ pelas substituições retroativas:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix}$$

$\frac{35}{8}x_3 = \frac{35}{4} \Rightarrow x_3 = 2$
$-4x_2 + \frac{13}{4}x_3 = \frac{21}{2}, x_2 = \frac{\frac{21}{2} - \frac{13}{4}(2)}{-4} \Rightarrow x_2 = -1$
$4x_1 - 3x_3 = -2, x_1 = \frac{-2 + 3(2)}{4} \Rightarrow x_1 = 1$

$x = [1 - 1 \; 2]^T$

b) Verificar a unicidade da solução.

Solução

$$\det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^{3} u_{ii} = (-1)^2 \times 4 \times -4 \times \frac{35}{8} = -70$$

Como $\det(A) \neq 0$, então o sistema admite uma única solução.

Exemplo 4

Calcular duas aproximações do vetor solução do sistema abaixo pelo método de Jacobi com o vetor inicial $x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}$ (Campus, 2018; Exemplo 2.67).

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Solução

$$x_1^0 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{57}{10} \Rightarrow x_1^0 = 5{,}7$$
$$x_2^0 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{20}{8} \Rightarrow x_2^0 = 2{,}5$$
$$x_3^0 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{-4}{5} \Rightarrow x_3^0 = -0{,}8$$

$$x^0 = [5{,}7\ 2{,}5 - 0{,}8]^T$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{10}(-3x_2^k + 2x_3^k + 57)$$
$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8}(-2x_1^k + x_3^k + 20)$$
$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5}(-x_1^k - x_2^k - 4)$$

$$x_1^1 = \frac{1}{10}(-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57) = \frac{1}{10}(-3(2{,}5) + 2(-0{,}8) + 57) \Rightarrow x_1^1 = 4{,}79$$
$$x_2^1 = \frac{1}{8}(-2x_1^0 + x_3^0 + 20) = \frac{1}{8}(-2(5{,}7) + (-0{,}8) + 20) \Rightarrow x_2^1 = 0{,}975$$
$$x_3^1 = \frac{1}{5}(-x_1^0 + x_2^0 - 4) = \frac{1}{5}(-(5{,}7) - (2{,}5) - 4) \Rightarrow x_3^1 = -2{,}44$$

$$x^1 = [4{,}79\ 0{,}975\ \ -2{,}44]^T$$

$$x_1^2 = \frac{1}{10}(-3x_2^1 + 2x_3^1 + 57) = \frac{1}{10}(-3(0{,}975) + 2(-2{,}44) + 57) \Rightarrow x_1^2 = 4{,}920$$
$$x_2^2 = \frac{1}{8}(-2x_1^1 + x_3^1 + 20) = \frac{1}{8}(-2(4{,}79) + (-2{,}44) + 20) \Rightarrow x_2^2 = 0{,}9975$$
$$x_3^2 = \frac{1}{5}(-x_1^1 + x_2^1 - 4) = \frac{1}{5}(-(4{,}79) - (0{,}975) - 4) \Rightarrow x_3^2 = -1.953$$

$$x^2 = [4{,}920\ 0{,}9975\ \ -1{,}953]^T$$

Referências

F. F. Campos. Algoritmos Numéricos: Uma Abordagem Moderna de Cálculo Numérico. 3ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2018.

M. A. G. Ruggiero e V. L. da R. Lopes. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2ª edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2000.