Lista de Exercícios 2: Sistemas Lineares

Exercício 1

a) Resolver o sistema abaixo pelo método da eliminação de Gauss (Campos, 2018; Exercício 2.17).
b) Verificar a exatidão e a unicidade da solução.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 7 & 10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 2

Repetir o exercício anterior usando pivotação parcial.

Exercício 3

a) Resolver o sistema abaixo pelo método da decomposição LU (Campos, 2018; Exercício 2.22).
b) Verificar a exatidão e a unicidade da solução.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Exercício 4

Repetir o exercício anterior usando pivotação parcial.

Exercício 5

Calcular a inversa da matriz A pela decomposição LU com pivotação parcial (Campos, 2007; Exercício 2.29).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Exercício 6

a) Calcular duas aproximações do vetor solução do sistema abaixo pelo método de Jacobi com vetor inicial $x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}$ (Campos, 2018; Exercício 2.43).

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 1 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 4 \\ -11 \end{bmatrix}$$

b) Calcular a diferença relativa entre as duas aproximações usando $\frac{|x^{k+1} - x^k|_\infty}{|x^{k+1}|_\infty}$
c) Verificar a convergência do método de Jacobi pela condição suficiente.

Exercício 7

Repetir o exercício anterior usando o método de Gauss-Seidel e o vetor inicial $x^0 = [0\ 0\ 0]^T$.

Exercício 8

Mostrar pelo método da eliminação de Gauss que o sistema linear abaixo não tem solução.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 9

a) Explicar duas vantagens da pivotação parcial para o método da eliminação de Gauss.

   Evitar pivôs nulos, que causam falha no método da eliminação de Gauss, e multiplicadores grandes, que ampliam os erros de arredondamento.

b) Descrever a condição necessária e a condição suficiente para a convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

c) Explicar por que é preferível utilizar métodos iterativos (como os de Jacobi ou Gauss-Seidel) em vez de métodos diretos (como a eliminação de Gauss ou a decomposição LU) na solução de sistemas lineares grandes e esparsos.

   Em sistemas lineares grandes e esparsos, os métodos iterativos costumam ser mais vantajosos do que os métodos diretos por três motivos principais.

   1. Preservação da esparsidade
   Os métodos diretos realizam muitas operações aritméticas que, em sistemas grandes, podem acumular erros de arredondamento significativos. Nos métodos iterativos, esses erros também existem, mas o processo de iteração permite controlá-los, interrompendo o cálculo quando a diferença entre duas soluções consecutivas estiver dentro de uma tolerância aceitável.

   2. Menor acúmulo de erros de arredondamento
   Nos métodos diretos, como a eliminação de Gauss, muitas vezes aparecem novos elementos diferentes de zero onde antes havia zeros na matriz. Esse preenchimento consome mais memória e processamento. Já os métodos iterativos trabalham diretamente com a matriz original, sem alterar sua estrutura esparsa, o que permite otimizar o uso de memória.

   3. Eficiência computacional
   Para sistemas muito grandes, métodos iterativos geralmente exigem menos recursos computacionais, especialmente quando se aproveita a estrutura esparsa da matriz. Eles podem ser mais rápidos e menos exigentes em termos de armazenamento, desde que a convergência esteja garantida.

d) Por que é preferível usar um método iterativo (como Jacobi ou Gauss-Seidel) em vez de um método direto (como eliminação de Gauss ou decomposição LU) na solução de sistemas lineares mal condicionados?

Sistemas lineares mal condicionados são aqueles em que pequenas alterações nos coeficientes do sistema (coeficientes da matriz dos coeficientes A ou do vetor dos termos independentes b) provocam grandes variações na solução x. Isso significa que o sistema é sensível a erros de arredondamento ou a perturbações nos dados.

Nos métodos diretos, como a eliminação de Gauss ou a decomposição LU, os coeficientes do sistema sofrem modificações ao longo do processo. Essas modificações, embora matematicamente corretas, podem amplificar os erros numéricos quando o sistema é mal condicionado. O resultado pode ser uma solução altamente imprecisa.

Nos métodos iterativos, por outro lado, os coeficientes do sistema não são alterados. O algoritmo constrói uma sequência de aproximações da solução com base na forma original do sistema. Isso permite um maior controle sobre os erros numéricos e oferece, muitas vezes, mais estabilidade na presença de condicionamento ruim, desde que a convergência do método esteja garantida.

Referências

F. F. Campos. *Algoritmos Numéricos.* 2ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2007.

F. F. Campos. Algoritmos Numéricos: Uma Abordagem Moderna de Cálculo Numérico. 3ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2018.