Teoria dos Grafos

Berilhes

O que é um grafo?

O que é um grafo?

Muitos sistemas do mundo real podem ser vistos como uma coleção de objetos (vértices) que estão relacionados entre si.

- Infraestrutura de tráfego: ruas, vias férreas, linhas aéreas, etc.

O que é um grafo?

Muitos sistemas do mundo real podem ser vistos como uma coleção de objetos (vértices) que estão relacionados entre si.

- Infraestrutura de tráfego: ruas, vias férreas, linhas aéreas, etc.
- Comunidades sociais: laços familiares, comunidades on-line.

O que é um grafo?

Muitos sistemas do mundo real podem ser vistos como uma coleção de objetos (vértices) que estão relacionados entre si.

- Infraestrutura de tráfego: ruas, vias férreas, linhas aéreas, etc.
- Comunidades sociais: laços familiares, comunidades on-line.
- Redes de comunicação: Internet, redes de telefonia móvel.

O que é um grafo (cont.)

O que é um grafo (cont.)

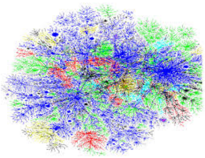


Figura: Internet

O que é um grafo (cont.)

O que é um grafo (cont.)

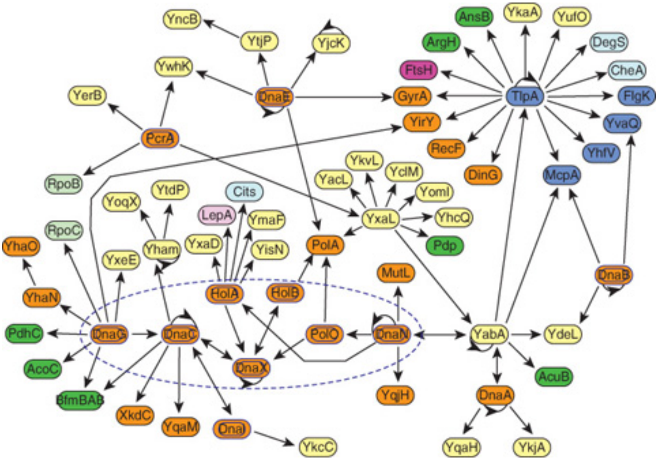


Figura: Rede Gênica

O que é um grafo (cont.)

O que é um grafo (cont.)

- Um grafo é um objeto matemático, assim como um conjunto, uma função e muitos outros também são objetos matemáticos.

O que é um grafo (cont.)

- Um grafo é um objeto matemático, assim como um conjunto, uma função e muitos outros também são objetos matemáticos.

Definição

Um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices V, e um conjunto de arestas E, no qual cada aresta é um par ordenado ou desordenado de vértice.

O que é um grafo? (cont.)

O que é um grafo? (cont.)

Rede	Vértices	Aresta (i, j)
Malha viária	Cidades	Estrada entre as cidades i e j
Código fonte de um programa	Linhas de código	Linha j pode ser a próxima linha executada depois da linha i
Interações humanas	Pessoas	A pessoa i se relaciona, de alguma forma, com a pessoa j

Alguns conceitos básicos

Alguns conceitos básicos

Definições

- Um grafo $G^{'} = (V^{'}, E^{'})$ é um subgrafo de $G = (V, E)$ se $V^{'} \subseteq V$ e $E^{'} \subseteq E$.
- O complemento $\overline{G}$ de um grafo G, possui o mesmo conjunto de vértices de G, mas $e \in E(\overline{G})$ se e somente se $e \notin E(G)$.
- Para qualquer grafo G e vértice $v \in V(G)$ o conjunto de vizinhos $N(v)$ de v é o conjunto de vértices (diferentes de v) adjacentes à v. Ou seja,

Alguns conceitos básicos

Definições

- Um grafo $G^{'} = (V^{'}, E^{'})$ é um subgrafo de $G = (V, E)$ se $V^{'} \subseteq V$ e $E^{'} \subseteq E$.
- O complemento $\overline{G}$ de um grafo G, possui o mesmo conjunto de vértices de G, mas $e \in E(\overline{G})$ se e somente se $e \notin E(G)$.
- Para qualquer grafo G e vértice $v \in V(G)$ o conjunto de vizinhos $N(v)$ de v é o conjunto de vértices (diferentes de v) adjacentes à v. Ou seja,

$$N(v) = \{w \in V(G) \mid v \neq w, (v, w) \in E(G)\}.$$

Grau de um vértice

- O número de arestas incidentes em um vértice v é chamado de grau de v, e é denotado por $grau(v)$.

Grau de um vértice

- O número de arestas incidentes em um vértice v é chamado de grau de v, e é denotado por $grau(v)$.
- Laços, isto é, arestas unindo um vértice a si mesmo são contados duas vezes.

Grau de um vértice

- O número de arestas incidentes em um vértice v é chamado de grau de v, e é denotado por $grau(v)$.
- Laços, isto é, arestas unindo um vértice a si mesmo são contados duas vezes.

Teorema

Para todos os grafos G, $\sum_{v \in V(G)} grau(v) = 2\,|E(G)|$.

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo	

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo	
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*
	Redes viárias urbanas

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo		
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*	não dirigido
	Redes viárias urbanas	

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo		
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*	não dirigido
	Redes viárias urbanas	dirigido

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo		
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*	não dirigido
	Redes viárias urbanas	dirigido
Ponderado ou não ponderado?	*Grau de separação entre duas pessoas*	
	Caminho mais curto	

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo		
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*	não dirigido
	Redes viárias urbanas	dirigido
Ponderado ou não ponderado?	*Grau de separação entre duas pessoas*	*Não ponderado*
	Caminho mais curto	

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo		
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*	não dirigido
	Redes viárias urbanas	dirigido
Ponderado ou não ponderado?	*Grau de separação entre duas pessoas*	*Não ponderado*
	Caminho mais curto	*Ponderado*

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo		
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*	não dirigido
	Redes viárias urbanas	dirigido
Ponderado ou não ponderado?	*Grau de separação entre duas pessoas*	*Não ponderado*
	Caminho mais curto	*Ponderado*
Cíclico ou acíclico?	Árvores	

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo		
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*	não dirigido
	Redes viárias urbanas	dirigido
Ponderado ou não ponderado?	*Grau de separação entre duas pessoas*	*Não ponderado*
	Caminho mais curto	*Ponderado*
Cíclico ou acíclico?	Árvores	*Áciclico*

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo		
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*	não dirigido
	Redes viárias urbanas	dirigido
Ponderado ou não ponderado?	*Grau de separação entre duas pessoas*	*Não ponderado*
	Caminho mais curto	*Ponderado*
Cíclico ou acíclico?	Árvores	*Áciclico*
Esparso ou denso?	Internet	
	Rede gênica	

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo		
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*	não dirigido
	Redes viárias urbanas	dirigido
Ponderado ou não ponderado?	*Grau de separação entre duas pessoas*	*Não ponderado*
	Caminho mais curto	*Ponderado*
Cíclico ou acíclico?	Árvores	*Áciclico*
Esparso ou denso?	Internet	Denso
	Rede gênica	

Tipos de Grafos

Tipo de Grafo		
Dirigido ou não dirigido?	*Redes viárias entre cidades*	não dirigido
	Redes viárias urbanas	dirigido
Ponderado ou não ponderado?	*Grau de separação entre duas pessoas*	*Não ponderado*
	Caminho mais curto	*Ponderado*
Cíclico ou acíclico?	Árvores	*Áciclico*
Esparso ou denso?	Internet	Denso
	Rede gênica	Esparso

Representação

- A forma mais simples que um ser humano tem de representar um grafo é por meio de um desenho,

Representação

- A forma mais simples que um ser humano tem de representar um grafo é por meio de um desenho,
- no qual, normalmente, os vértices são representados por pequenos círculos rotulados e arestas são linhas entre os círculos, no caso de arestas dirigidas estas são representadas por setas.

Representação

- A forma mais simples que um ser humano tem de representar um grafo é por meio de um desenho,
- no qual, normalmente, os vértices são representados por pequenos círculos rotulados e arestas são linhas entre os círculos, no caso de arestas dirigidas estas são representadas por setas.

Representação

- A forma mais simples que um ser humano tem de representar um grafo é por meio de um desenho,
- no qual, normalmente, os vértices são representados por pequenos círculos rotulados e arestas são linhas entre os círculos, no caso de arestas dirigidas estas são representadas por setas.

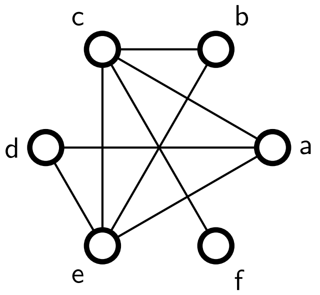


Figura: Grafo

Representação (cont.)

- Matriz de Adjacências

Representação (cont.)

- Matriz de Adjacências
  - se nós representamos os vértices a, b, c, d, e, f por $0, 1, 2, 3, 4, 5$, a matriz de adjacências para o grafo da Figura 3 é

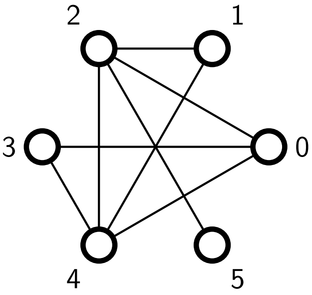
Representação (cont.)

- Matriz de Adjacências
  - se nós representamos os vértices a, b, c, d, e, f por $0, 1, 2, 3, 4, 5$, a matriz de adjacências para o grafo da Figura 3 é

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Representação (cont.)

- Lista de Adjacências



(a) Grafo Original

0 → 4 → 3 → 2 → null
1 → 4 → 2 → null
2 → 0 → 1 → 5 → 4 → null
3 → 0 → 4 → null
4 → 0 → 1 → 2 → 3 → null
5 → 2 → null

(b) Lista de Adjacências

Comparação entre representações

	Matriz de Adjacências	Listas de Adjacências
Espaço	$\Theta(V^2)$	$\Theta(V+E)$
Tempo para testar se (u,v) em E	$O(1)$	$O(V)$
Tempo para testar se $u \to v$ em E	$O(1)$	$O(V)$
Tempo para listar todos os vértices adjacentes à v	$O(V)$	$O(1+grau(v))$
Tempo para listar todas as arestas	$\Theta(V^2)$	$\Theta(V+E)$
Tempo para adicionar uma aresta	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Tempo para remover uma aresta	$\Theta(1)$	$O(V)$

Árvores

Definições

Um grafo acíclico (sem ciclos) conectado não dirigido é chamado de árvore,
e um conjunto de árvores é chamado de floresta.

Árvores

Definições

Um grafo acíclico (sem ciclos) conectado não dirigido é chamado de árvore,
e um conjunto de árvores é chamado de floresta.

- Em um grafo não dirigido conectado G existe pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices

Árvores

Definições

Um grafo acíclico (sem ciclos) conectado não dirigido é chamado de árvore,
e um conjunto de árvores é chamado de floresta.

- Em um grafo não dirigido conectado G existe pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices
- e a ausência de ciclos implica que existe no máximo um caminho entre qualquer par de vértices em G.

Árvores

Definições

Um grafo acíclico (sem ciclos) conectado não dirigido é chamado de árvore,
e um conjunto de árvores é chamado de floresta.

- Em um grafo não dirigido conectado G existe pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices
- e a ausência de ciclos implica que existe no máximo um caminho entre qualquer par de vértices em G.
- Assim se G é uma árvore, existe exatamente um caminho entre todo par de vértices em G.

Árvores

Definições

Um grafo acíclico (sem ciclos) conectado não dirigido é chamado de árvore,
e um conjunto de árvores é chamado de floresta.

- Em um grafo não dirigido conectado G existe pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices
- e a ausência de ciclos implica que existe no máximo um caminho entre qualquer par de vértices em G.
- Assim se G é uma árvore, existe exatamente um caminho entre todo par de vértices em G.
- Uma árvore com n vértices tem exatamente $(n-1)$ arestas.

Árvore Geradora

Definição

Uma árvore geradora para um grafo conectado G é um subgrafo de G que é uma árvore contendo todo vértice de G.

Árvore Geradora

Definição

Uma árvore geradora para um grafo conectado G é um subgrafo de G que é uma árvore contendo todo vértice de G.

Definição

Se G não é conectado, um conjunto consistindo de uma árvore geradora para cada componente é chamado de floresta geradora.