Exercícios

Você deve justificar as suas respostas de forma clara e precisa.

1.

   (a) Prove que em qualquer grafo não dirigido conectado $G = (V, E)$ existe um vértice $v \in V$ cuja remoção mantém G conectado. (Considere a árvore de pesquisa primeiro em profundidade de G.)

   (b) Dê um exemplo de grafo fortemente conectado $G = (V, E)$ tal que para todo $v \in V$, a remoção de v de G resulta em um grafo dirigido que não é fortemente conectado.

   (c) Em um grafo não dirigido com 2 componentes conectados é sempre possível tornar o grafo conectado adicionando-se uma única aresta. Dê um exemplo de um grafo dirigido com dois componentes fortemente conectados tal que nenhuma adição de uma única aresta tornará o grafo fortemente conectado.

2. Forneça um algoritmo de tempo linear que tome como entrada um grafo acíclico dirigido $G = (V, E)$ e dois vértices s e t, retorne o número de caminhos de s para t em G. (Seu algoritmo só precisa contar os caminhos não listá-los.)

3. Você foi contratado pela empresa Gambiarra S/A como projetista de rede. A empresa está com o seguinte problema. Eles tem um grafo conectado $G = (V,\ E)$, no qual os nós representam locais que devem se comunicar. Cada aresta e representa um elo de comunicação, com uma determinada largura de banda $l(e)$. Para cada par de vértices $u,\ v \in V$, a empresa deseja selecionar um único caminho P ligando u à v através do qual os nós poderão se comunicar. A razão de estrangulamento $est(P)$ desse caminho P é a menor largura de banda de qualquer aresta pertencente ao caminho; por outras palavras $est(P) = \min_{e \in P} l(e)$. A melhor razão de estrangulamento para qualquer par de vértices u, v em G é simplesmente o valor máximo de $est(P)$ sobre todos os caminhos entre u e v. O seu chefe sugeriu encontrar uma árvore geradora T de G de modo que todo par de vértices u, v, o caminho único de $u \leftrightsquigarrow v$ na árvore corresponde a melhor razão de estrangulamento para $u,\ v \in V$.

   Mostre que tal árvore existe, e projete um algoritmo eficiente para determinar uma árvore geradora T que resolva esse problema. (Você pode assumir que todas as larguras de banda são distintas.)

4. Os algoritmos de Prim, Kruskal e Borůvka para o problema da árvore geradora mínima assumem que o grafo não dirigido com peso nas arestas é fixo, e então determinam a árvore geradora mínima para este grafo. O que acontece se nós temos uma situação mais dinâmica onde novas arestas podem ser adicionadas ao grafo. Este tipo de situação conduz ao seguinte problema:

   Problema Árvore Geradora Mínima Dinâmica
   Entrada: Um grafo não dirigido ponderado conectado $G = (V, E)$ com árvore geradora mínima T e uma nova aresta (u, v) com peso $w(u, v)$.
   Saída: Uma árvore geradora mínima T' para o grafo $G' = (V, E \cup \{(u, v)\})$.

   (a) Projete um algoritmo que resolva o problema *Árvore Geradora Mínima Dinâmica* em tempo $O(|V|)$.

   (b) Implemente o seu algoritmo em Sage. A entrada é dada da seguinte forma:

```
G = Graph({"a":{"b":4,"h":8},
           "b":{"c":8,"h":11},
           "c":{"d":7,"f":4,"i":2},
           "d":{"e":9,"f":14},
           "e":{"f":10},
           "f":{"g":2},
           "g":{"h":1, "i":6},
           "h":{"i":7}})
T = Graph([('g', 'h', 1),
           ('f', 'g', 2),
           ('c', 'i', 2),
           ('c', 'f', 4),
           ('a', 'b', 4),
           ('c', 'd', 7),
           ('b', 'c', 8),
           ('d', 'e', 9)])
aresta =  ('b', 'e', 1)
```