Teoria dos Grafos

Berilhes

Componentes Fortemente Conectados

Componentes Fortemente Conectados

Definição

Dois vértices v e w estão fortemente conectados se exister um caminho dirigido de v para w e um caminho dirigido de w para v.

Componentes Fortemente Conectados

Definição

Dois vértices v e w estão fortemente conectados se existir um caminho dirigido de v para w e um caminho dirigido de w para v.

Definição

Um grafo dirigido $G = (V, E)$ é fortemente conectado se todo par de vértices de G for fortemente conectado.

Componentes Fortemente Conectados

Componentes Fortemente Conectados

A noção de conectividade forte é uma relação de equivalência, ou seja:

- v está fortemente conectado à v;

Componentes Fortemente Conectados

A noção de conectividade forte é uma relação de equivalência, ou seja:

- v está fortemente conectado à v;
- se v está fortemente conectado à w, então w está fortemente conectado a v.

Componentes Fortemente Conectados

A noção de conectividade forte é uma relação de equivalência, ou seja:

- v está fortemente conectado à v;
- se v está fortemente conectado à w, então w está fortemente conectado a v.
- se v está fortemente conectado à w e w à x, então v está fortemente conectado à x.

Componentes Fortemente Conectados

A noção de conectividade forte é uma relação de equivalência, ou seja:

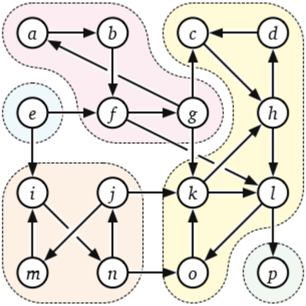
- v está fortemente conectado à v;
- se v está fortemente conectado à w, então w está fortemente conectado a v.
- se v está fortemente conectado à w e w à x, então v está fortemente conectado à x.

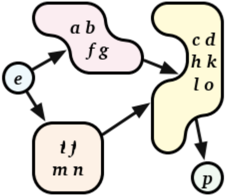
Definição

Um componente fortemente conectado é um subconjunto de vértices fortemente conectado.

Componentes Fortemente Conectados

Exemplo





Um pouco de história

Um pouco de história

- Em 1972 Robert Tarjan inventou um algoritmo de tempo linear para determinar os componentes fortemente conectados,

Um pouco de história

- Em 1972 Robert Tarjan inventou um algoritmo de tempo linear para determinar os componentes fortemente conectados,
- o algoritmo baseia-se em uma modificação da pesquisa primeiro em profundidade,

Um pouco de história

- Em 1972 Robert Tarjan inventou um algoritmo de tempo linear para determinar os componentes fortemente conectados,
- o algoritmo baseia-se em uma modificação da pesquisa primeiro em profundidade,
- mas de difícil implementação.

Um pouco de história

- Em 1972 Robert Tarjan inventou um algoritmo de tempo linear para determinar os componentes fortemente conectados,
- o algoritmo baseia-se em uma modificação da pesquisa primeiro em profundidade,
- mas de difícil implementação.
- Em 1980 Kosaraju-Sharir, independentemente, apresentaram um algoritmo mais simples

Um pouco de história

- Em 1972 Robert Tarjan inventou um algoritmo de tempo linear para determinar os componentes fortemente conectados,
- o algoritmo baseia-se em uma modificação da pesquisa primeiro em profundidade,
- mas de difícil implementação.
- Em 1980 Kosaraju-Sharir, independentemente, apresentaram um algoritmo mais simples
- que também é de tempo linear.

Algoritmo Kosaraju-Sharir

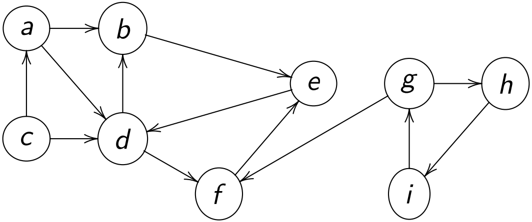
Algoritmo Kosaraju-Sharir

KOSARAJU-SHARIR(G)

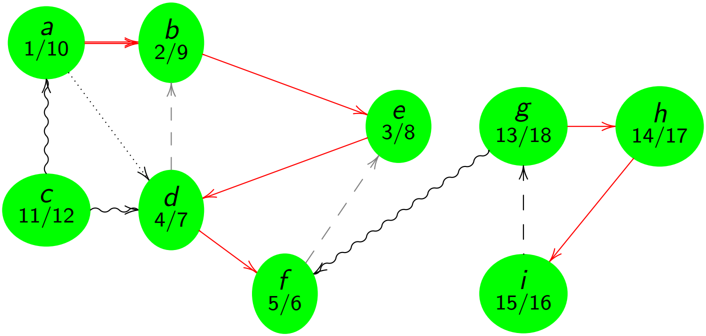
1 Chame DFS(G)
2 Compute G^T
3 Chame DFS(G^T), mas no laço principal considere os vértices em ordem decrescente de tempo de finalização.
4 Liste os vértices de cada árvore primeiro em profundidade do passo anterior como um componente fortemente conectado.

Componentes Fortemente Conectados

Componentes Fortemente Conectados

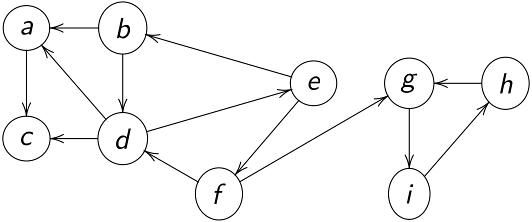


Componentes Fortemente Conectados



Componentes Fortemente Conectados

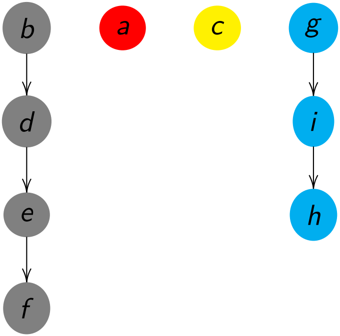
Componentes Fortemente Conectados



Ordem decrescente do tempo de finalização: $g, h, i, c, a, b, e, d, f$

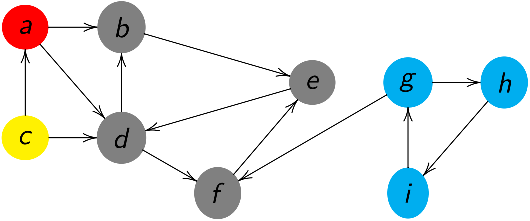
Componentes Fortemente Conectados

Componentes Fortemente Conectados



Componentes Fortemente Conectados

Componentes Fortemente Conectados



Componentes Fortemente Conectados

Teorema

O algoritmo de KOSARAJU-SHARIR *determina corretamente os componentes fortemente conectados de um grafo dirigido* $G = (V, E)$ *em tempo* $O(V + E)$.

Componentes Fortemente Conectados

Teorema

O algoritmo de Kosaraju-Sharir *determina corretamente os componentes fortemente conectados de um grafo dirigido* $G = (V, E)$ *em tempo* $O(V + E)$*.*

Demonstração.

Nós provaremos a correção do algoritmo por meio de indução. Assuma que k denota o número de árvores formadas quando DFS é executada sobre o grafo G^T. Quando $k = 0$, o caso base é verdade, vamos assumir que as $k - 1$ primeiras árvores obtidas pelo algoritmo são componentes fortemente conectados do grafo G. Assuma que o vértice u é a raiz da $k-$ésima árvore e que também pertence ao componente fortemente conectado C_1 de G.

Componentes Fortemente Conectados

Teorema

O algoritmo de Kosaraju-Sharir *determina corretamente os componentes fortemente conectados de um grafo dirigido* $G = (V, E)$ *em tempo* $O(V + E)$*.*

Demonstração.

Para qualquer componente C_x não descoberto no passo k, nós temos que o tempo de finalização dos vértices de C_1são maiores que os tempos de finalização dos vértices de C_x e todos os outros vértices de C_1 serão descendentes de u na árvore DFS recentemente descoberta. Qualquer aresta saindo do componente C_1 deve se dirigir a um componente já descoberto. Portanto, todos os descendentes de u estarão no componente fortemente conectado C_1 e em nenhum outro CFC de G^T. A complexidade de tempo é $O(m + n)$ uma vez que o algoritmo realiza duas chamadas ao procedimento DFS. □