

## Exercícios

Você deve justificar as suas respostas de forma clara e precisa.

1. (Valor 20) Assuma que  $C_1, \dots, C_k$  são os componentes fortemente conectados de um grafo dirigido  $G$ . Nós definimos um grafo dirigido  $G'$ , a condensação de  $G$ , da seguinte forma: os vértices de  $G'$  são  $C_1, \dots, C_k$ ; uma aresta  $(C_i, C_j)$  pertence à  $G'$  se e somente se existir uma aresta  $(u, v)$  em  $G$  com  $u \in C_i$  e  $v \in C_j$ . Mostre que  $G'$  é acíclico.
2. (Valor 20) Assuma que  $T$  é uma árvore pesquisa primeira em profundidade enraizada no vértice  $s$  produzida pela DFS de um grafo não dirigido conectado  $G$ . Prove que toda aresta de  $G$ , não pertencente à árvore  $T$ , vai de um vértice em  $T$  para um ancestral desse vértice, colocando de outra forma, esta é uma aresta de retorno. Observação: Suponha que a aresta que não pertence à  $T$  é uma aresta de cruzamento argumente, com base baseado na ordem em que os vértices são visitados, que isto conduz a uma contradição.
3. (Valor 20) Considere o seguinte problema:

*Problema Dois Ciclos*

*Entrada: Um grafo não dirigido  $G = (V, E)$ .*

*Pergunta:  $G$  possui exatamente dois ciclos que não possuem nenhuma aresta em comum?*

Projete um algoritmo que resolva o problema Dois Ciclos em tempo  $O(|V| + |E|)$ .

4. (Valor 40) Suponha que você tenha um grafo não dirigido ponderado conectado  $G = (V, E)$ , com todos os pesos positivos, ~~mas os pesos não~~ são distintos. Considere o seguinte problema:

*Problema PERTENCE A UMA ÁRVORE GERADORA MÍNIMA*

*Entrada: Um grafo não dirigido ponderado conectado  $G = (V, E)$ , com todos os pesos de arestas diferentes. Uma aresta  $e \in E$ .*

*Pergunta: A aresta  $e$  está contida em alguma árvore geradora mínima  $T$  do grafo  $G$ .*

- (a) Projete um algoritmo que resolva o problema *PERTENCE A UM ÁRVORE GERADORA MÍNIMA* em tempo  $O(|V| + |E|)$ .
- (b) Implemente o seu algoritmo em Sage. A entrada é dada da seguinte forma:

```
G = Graph({"a":{"b":4,"h":8},
          "b":{"c":8,"h":4},
          "c":{"d":7,"f":4,"i":2},
          "d":{"e":9,"f":14},
          "e":{"f":10},
          "f":{"g":2},
          "g":{"h":1, "i":6},
          "h":{"i":7}})
aresta = ('b', 'h')
```