Técnicas de Busca e Ordenação (TBO)

Merge sort

Departamento de Informática (DI)
Centro Tecnológico (CT)
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

(Material baseado nos slides dos Professores Eduardo Zambon e Giovanni Comarela)

Introdução

- Métodos de ordenação são essenciais nas mais diferentes aplicações.
- **Aula de hoje**: apresentação do algoritmo clássico de ordenação *merge sort* e suas principais características.
- **Objetivos**: compreender o funcionamento do método de ordenação *merge sort*, e analisar o seu desempenho.

Referências

Chapter 8 – Merging and Mergesort
R. Sedgewick

Exemplo

1, 8, 9, 4, 5, 9, 12, 15

Exemplo

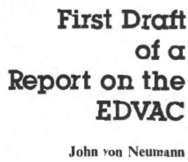
15, 12, 9, 9, 8, 5, 4, 1

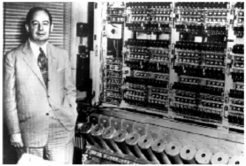
Ideia geral.

- Dividir o *array* em duas metades.
- Ordenar recursivamente cada metade.
- Unificar (*merge*) as duas metades.

input	M	E	R	G	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
sort left half	E	E	G	M	O	R	R	S	T	E	X	A	M	P	L	E
sort right half	E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	E	L	M	P	T	X
merge results	A	E	E	E	E	G	L	M	M	O	P	R	R	S	T	X

Mergesort overview





Merge demo

Objetivo.
Dados dois *sub-arrays* ordenados de `a[lo]` até `a[mid]` e de `a[mid+1]` até `a[hi]`, substituí-los pelo *array* ordenado de `a[lo]` até `a[hi]`.

Ver arquivo `22DemoMerge.mov` `https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/demo/22DemoMerge.mov`

Merge: implementação em C

```
void merge(Item *a, Item *aux, int lo, int mid, int hi) {
    for (int k = lo; k <= hi; k++)
        aux[k] = a[k];                    // Copy array
    int i = lo, j = mid+1;
    for (int k = lo; k <= hi; k++) {  // Merge
        if      (i > mid)                   a[k] = aux[j++];
        else if (j > hi)                    a[k] = aux[i++];
        else if (less(aux[j], aux[i])) a[k] = aux[j++];
        else                                a[k] = aux[i++];
    }
}
```

Merge sort: implementação em C

```
void merge_sort(Item *a, Item *aux, int lo, int hi) {
    if (hi <= lo) return;
    int mid = lo + (hi - lo) / 2; // Avoid overflow.
    merge_sort(a, aux, lo, mid);
    merge_sort(a, aux, mid+1, hi);
    merge(a, aux, lo, mid, hi);
}

void sort(Item *a, int lo, int hi) {
    int n = (hi - lo) + 1;
    Item *aux = malloc(n * sizeof(Item));
    merge_sort(a, aux, lo, hi);
    free(aux);
}
```

Para usar: `sort(a, 0, N-1);`

Veja as animações em:
`https://www.toptal.com/developers/sorting-algorithms/merge-sort`

Merge sort: trace

lo hi

	a[]															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	M	E	R	G	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 0, 0, 1)	E	M	R	G	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 2, 2, 3)	E	M	G	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 0, 1, 3)	E	G	M	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 4, 4, 5)	E	G	M	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 6, 6, 7)	E	G	M	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 4, 5, 7)	E	G	M	R	E	O	R	S	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 0, 3, 7)	E	E	G	M	O	R	R	S	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 8, 8, 9)	E	E	G	M	O	R	R	S	E	T	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 10, 10, 11)	E	E	G	M	O	R	R	S	E	T	A	X	M	P	L	E
merge(a, aux, 8, 9, 11)	E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	T	X	M	P	L	E
merge(a, aux, 12, 12, 13)	E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	T	X	M	P	L	E
merge(a, aux, 14, 14, 15)	E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	T	X	M	P	E	L
merge(a, aux, 12, 13, 15)	E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	T	X	E	L	M	P
merge(a, aux, 8, 11, 15)	E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	E	L	M	P	T	X
merge(a, aux, 0, 7, 15)	A	E	E	E	E	G	L	M	M	O	P	R	R	S	T	X

result after recursive call

Merge sort: análise empírica

Tempo de execução estimado:

- Computador pessoal executa 10^8 comparações/segundo.
- Supercomputador executa 10^{12} comparações/segundo.

	insertion sort (N^2)			mergesort (N log N)		
computer	thousand	million	billion	thousand	million	billion
home	instant	2.8 hours	317 years	instant	1 second	18 min
super	instant	1 second	1 week	instant	instant	instant

Conclusão: bons algoritmos são melhores que supercomputadores.

Merge sort: número de comparações

Proposição: *Merge sort* usa no máximo $N \lg N$ comparações para ordenar um *array* de tamanho N.

Ideia: O número de comparações $C(N)$ satisfaz a recorrência:

$$C(N) \leq C(\lceil N/2 \rceil) + C(\lfloor N/2 \rfloor) + N, \text{ com } C(1) = 0 \quad .$$

Onde os dois primeiros termos são os tamanhos das metades e o último termo é a operação de *merge*.

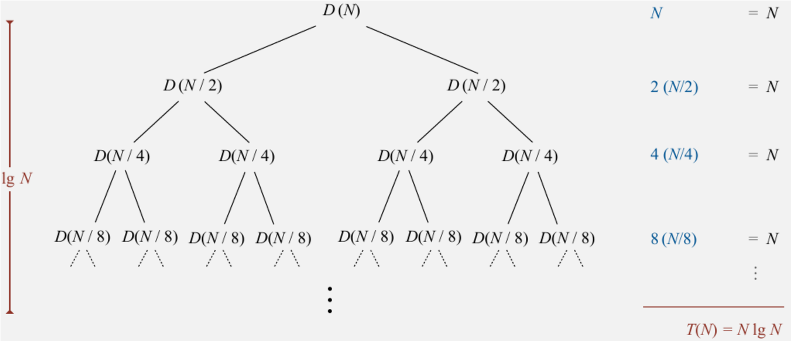
Quando N é uma potência de 2, a recorrência fica mais simples:

$$D(N) = 2D(N/2) + N, \text{ com } D(1) = 0 \quad .$$

Recorrência de divisão e conquista: "prova" por figura

Proposição: se $D(N) = 2D(N/2) + N$, com $D(1) = 0$, então $D(N) = N \lg N$.

Ideia:



Resultado também vale para quando N não é uma potência de 2. Prova por indução (mais complicada).

Proposição: *Merge sort* usa no máximo $6N \lg N$ acessos para ordenar um *array* de tamanho N.

Ideia: O número $A(N)$ de acessos ao *array* satisfaz a recorrência:

$$A(N) \leq A(\lceil N/2 \rceil) + A(\lfloor N/2 \rfloor) + 6N, \text{ com } A(1) = 0 \quad .$$

Ponto fundamental. Qualquer algoritmo com a estrutura abaixo leva tempo $N \log N$:

```
void linearithmic(int N) {
    if (N == 0) return;
    linearithmic(N/2); // Resolver dois problemas com
    linearithmic(N/2); // metade do tamanho original.
    linear(N);         // Quantidade de trabalho linear.
}
```

Merge sort: memória

Proposição: *Merge sort* usa espaço extra proporcional a N.

Justificativa: O *array* `aux[]` deve ter tamanho N para se realizar a última operação de *merge*.

Definição: Um algoritmo de ordenação é *in-place* (ou *in-situ*) se ele utiliza $\leq c \log N$ de memória extra.

Exemplos: *selection sort, insertion sort, shell sort*.

Desafio 1 (fácil): Utilizar `aux[]` com tamanho $\sim {}^1\!/\!_2 N$.

Desafio 2 (muito difícil): *in-place merge* [Kronrod 1969].

Merge sort: melhorias práticas

Use *insertion sort* para *sub-arrays* pequenos.

- *Merge sort* tem um *overhead* muito grande para *sub-arrays* pequenos.
- *Cutoff* para *insertion sort* quanto o *array* tiver $\approx$ 10 itens.

```
void merge_sort(Item *a, Item *aux, int lo, int hi) {
    if (hi <= lo + CUTOFF - 1) {
        insert_sort(a, lo, hi);
        return;
    }
    int mid = lo + (hi - lo) / 2;
    merge_sort(a, aux, lo, mid);
    merge_sort(a, aux, mid+1, hi);
    merge(a, aux, lo, mid, hi);
}
```

Merge sort: melhorias práticas

Parar quando já está ordenado.

- O maior item da primeira metade $\leq$ que o menor item da segunda metade?
- Se sim, não precisa fazer *merge*.
- Ajuda no desempenho para entradas parcialmente ordenadas.

```
void merge_sort(Item *a, Item *aux, int lo, int hi) {
    if (hi <= lo + CUTOFF - 1) {
        insert_sort(a, lo, hi);
        return;
    }
    int mid = lo + (hi - lo) / 2;
    merge_sort(a, aux, lo, mid);
    merge_sort(a, aux, mid+1, hi);
    if (!less(a[mid+1], a[mid])) return;
    merge(a, aux, lo, mid, hi);
}
```

Bottom-up merge sort

Ideia geral.

- Percorre *array* com *merge* para *sub-arrays* de tamanho 1.
- Repita para *sub-arrays* de tamanho 2, 4, 8, ...

	a[i] 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
sz = 1	M	E	R	G	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 0, 0, 1)	E	M	R	G	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 2, 2, 3)	E	M	G	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 4, 4, 5)	E	M	G	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 6, 6, 7)	E	M	G	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 8, 8, 9)	E	M	G	R	E	S	O	R	E	T	X	A	M	P	L	E
merge(a, aux, 10, 10, 11)	E	M	G	R	E	S	O	R	E	T	A	X	M	P	L	E
merge(a, aux, 12, 12, 13)	E	M	G	R	E	S	O	R	E	T	A	X	M	P	L	E
merge(a, aux, 14, 14, 15)	E	M	G	R	E	S	O	R	E	T	A	X	M	P	E	L
sz = 2																
merge(a, aux, 0, 1, 3)	E	G	M	R	E	S	O	R	E	T	A	X	M	P	E	L
merge(a, aux, 4, 5, 7)	E	G	M	R	E	O	R	S	E	T	A	X	M	P	E	L
merge(a, aux, 8, 9, 11)	E	G	M	R	E	O	R	S	A	E	T	X	M	P	E	L
merge(a, aux, 12, 13, 15)	E	G	M	R	E	O	R	S	A	E	T	X	E	L	M	P
sz = 4																
merge(a, aux, 0, 3, 7)	E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	T	X	E	L	M	P
merge(a, aux, 8, 11, 15)	E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	E	L	M	P	T	X
sz = 8																
merge(a, aux, 0, 7, 15)	A	E	E	E	E	G	L	M	M	O	P	R	R	S	T	X

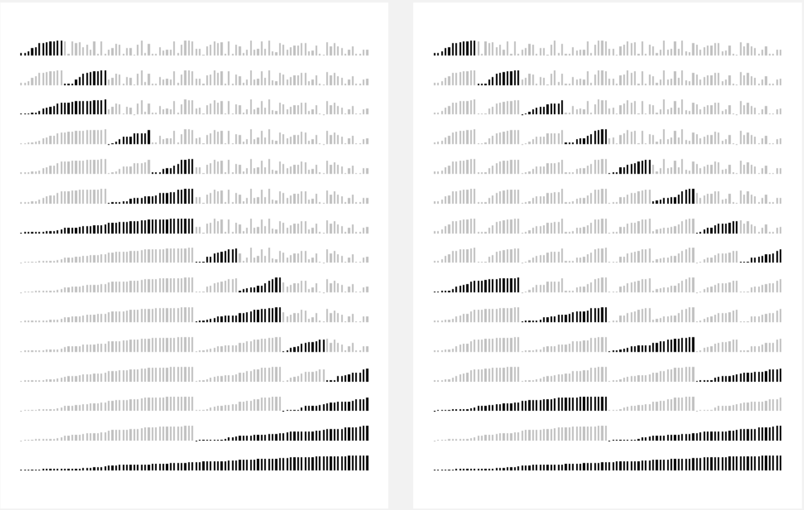
Bottom-up merge sort: implementação em C

```
#define SZ2      (sz+sz)
#define MIN(X,Y) ((X < Y) ? (X) : (Y))

void sort(Item *a, int lo, int hi) {
    int N = (hi - lo) + 1;
    int y = N - 1;
    Item *aux = malloc(N * sizeof(Item));
    for (int sz = 1; sz < N; sz = SZ2) {
        for (int lo = 0; lo < N-sz; lo += SZ2) {
            int x = lo + SZ2 - 1;
            merge(a, aux, lo, lo+sz-1, MIN(x,y));
        }
    }
    free(aux);
}
```

- Versão simples não-recursiva do *merge sort*.
- Mas geralmente mais lenta que a versão *top-down* recursiva na maioria dos sistemas. (Próximo Lab!)

Merge sort: visualizações



top-down mergesort (cutoff = 12)

bottom-up mergesort (cutoff = 12)

Merge sort natural

Ideia: Explorar ordem pré-existente através da identificação de *runs* que ocorrem naturalmente.

input

1	5	10	16	3	4	23	9	13	2	7	8	12	14

first run

1	5	10	16	3	4	23	9	13	2	7	8	12	14

second run

1	5	10	16	3	4	23	9	13	2	7	8	12	14

merge two runs

1	3	4	5	10	16	23	9	13	2	7	8	12	14

Tradeoff: Menos passadas vs. mais comparações por passada.

Tim sort

- *Merge sort* natural.
- Utiliza *insertion sort* para criar *runs* iniciais (se necessário).
- Mais algumas otimizações espertas.

```
Intro
-----
This describes an adaptive, stable, natural mergesort, modestly called
timsort (hey, I earned it <wink>).  It has supernatural performance on many
kinds of partially ordered arrays (less than lg(N!) comparisons needed, and
as few as N-1), yet as fast as Python's previous highly tuned samplesort
hybrid on random arrays.

In a nutshell, the main routine marches over the array once, left to right,
alternately identifying the next run, then merging it into the previous
runs "intelligently".  Everything else is complication for speed, and some
hard-won measure of memory efficiency.
...
```

Tim Peters

Consequência: Tempo linear em vários *arrays* com uma pré-ordem existente.

Amplamente utilizado atualmente: Python, Java 7, Octave, ...

Complexidade do problema de ordenação

Complexidade do problema de ordenação

Complexidade computacional: Estudo da eficência de algoritmos para se resolver um dado problema X.

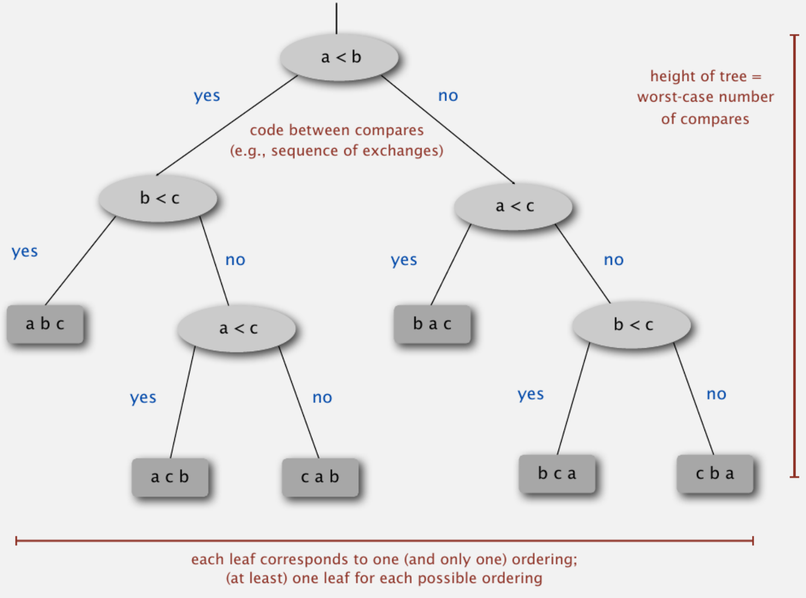
- Modelo de computação: operações permitidas.
- Modelo de custo: operações (relevantes) contadas.
- *Upper bound* (UB): Garantia de custo provida por algum algoritmo para X.
- *Lower bound* (LB): Limite provado de custo de todos os algoritmos para X.
- Algoritmo ótimo: algoritmo com a melhor garantia de custo para X (UB = LB).

Complexidade do problema de ordenação

Exemplo: Ordenação.

- Modelo de computação: árvore de decisão.
- Modelo de custo: número de comparações.
- UB: $\sim N \lg N$ (*merge sort*).
- LB: ?
- Algoritmo ótimo: ?

Árvore de decisão (para 3 chaves distintas *a*, *b* e *c*)



LB para ordenação baseada em comparações

Proposição: Qualquer algoritmo de ordenação baseado em comparações precisa realizar no mínimo $\lg(N!) \sim N \lg N$ comparações no pior caso.

Justificativa:

- Assuma que o *array* possui N valores distintos.
- Pior caso é dado pela altura h da árvore de decisão.
- Árvore binária com altura h tem no máximo 2^h folhas.
- $N!$ ordenações distintas $\Rightarrow$ no mínimo $N!$ folhas:

$$2^h \geq \# \text{ folhas} \geq N! \quad \Rightarrow \quad h \geq \lg(N!) \quad .$$

-
- Fórmula de Stirling: $\lg(N!) \sim N \lg N$.

Complexidade do problema de ordenação

Exemplo: Ordenação.

- Modelo de computação: árvore de decisão.
- Modelo de custo: número de comparações.
- UB: $\sim N \lg N$ (*merge sort*).
- LB: $\sim N \lg N$.
- Algoritmo ótimo: *merge sort*.

Objetivo do projeto de algoritmos: encontrar algoritmos ótimos.

Resultados de complexidade em contexto

Q: Na aula anterior vimos que o *insertion sort* pode executar em tempo N em algumas situações. Por que isso não contradiz o LB encontrado nos slides anteriores?

A: Porque *insertion sort* é N no melhor caso. O LB encontrado de $N \lg N$ é para o pior caso.

Comparações? *Merge sort* é ótimo quanto ao número de comparações.

Espaço? *Merge sort* não é ótimo quanto ao espaço utilizado.

Lições: Usar a teoria como guia.

Ex.: Projetar um algoritmo que é ótimo para tempo e espaço?

Estabilidade

Estabilidade

Aplicação típica: Ordene por nome, e a seguir por seção.

Sort by Name

Andrews	3	A	664-480-0023	097 Little
Battle	4	C	874-088-1212	121 Whitman
Chen	3	A	991-878-4944	308 Blair
Fox	3	A	884-232-5341	11 Dickinson
Furia	1	A	766-093-9873	101 Brown
Gazsi	4	B	766-093-9873	101 Brown
Kanaga	3	B	898-122-9643	22 Brown
Rohde	2	A	232-343-5555	343 Forbes

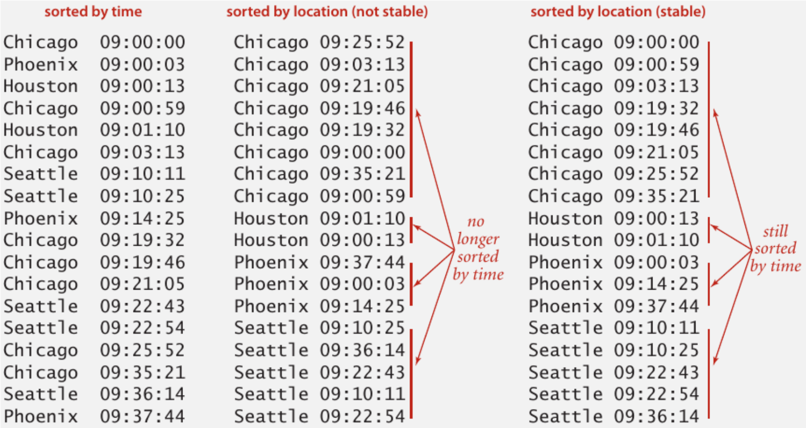
Sort by Section

Furia	1	A	766-093-9873	101 Brown
Rohde	2	A	232-343-5555	343 Forbes
Chen	3	A	991-878-4944	308 Blair
Fox	3	A	884-232-5341	11 Dickinson
Andrews	3	A	664-480-0023	097 Little
Kanaga	3	B	898-122-9643	22 Brown
Gazsi	4	B	766-093-9873	101 Brown
Battle	4	C	874-088-1212	121 Whitman

@#%&@! Pessoas da seção 3 não estão mais ordenadas por nome.

Um método de ordenação estável preserva a ordem relativa dos itens com chaves iguais.

Estabilidade



Q: Quais *sorts* são estáveis?

A: É preciso verificar o algoritmo (e a implementação).

Estabilidade: *insertion sort*

Insertion sort é estável.

```
      for (int i = 0; i < N; i++)
         for (int j = i; j > 0 && less(a[j], a[j-1]); j--)
            exch(a, j, j-1);
   }
}
```

i	j	0	1	2	3	4
0	0	B_1	A_1	A_2	A_3	B_2
1	0	A_1	B_1	A_2	A_3	B_2
2	1	A_1	A_2	B_1	A_3	B_2
3	2	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2
4	4	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2
		A_1	A_2	A_3	B_1	B_2

Item iguais nunca são movidos além da sua posição inicial relativa.

Estabilidade: *selection sort*

Selection sort não é estável.

```
      for (int i = 0; i < N; i++)
      {
         int min = i;
         for (int j = i+1; j < N; j++)
            if (less(a[j], a[min]))
               min = j;
         exch(a, i, min);
      }
   }
}
```

i	min	0	1	2
0	2	B_1	B_2	A
1	1	A	B_2	B_1
2	2	A	B_2	B_1
		A	B_2	B_1

Trocas entre posições distantes podem embaralhar a posição inicial relativa de chaves iguais.

Estabilidade: *shell sort*

Shell sort não é estável.

```
while (h >= 1)
{
   for (int i = h; i < N; i++)
   {
      for (int j = i; j > h && less(a[j], a[j-h]); j -= h)
         exch(a, j, j-h);
   }
   h = h/3;
}
```

h	0	1	2	3	4
	B_1	B_2	B_3	B_4	A_1
4	A_1	B_2	B_3	B_4	B_1
1	A_1	B_2	B_3	B_4	B_1
	A_1	B_2	B_3	B_4	B_1

Mesma justificativa do *selection sort*.

Estabilidade: *merge sort*

Merge sort é estável porque a operação de *merge* é estável.

```
    for (int k = lo; k <= hi; k++)
       aux[k] = a[k];

    int i = lo, j = mid+1;
    for (int k = lo; k <= hi; k++)
    {
       if      (i > mid)              a[k] = aux[j++];
       else if (j > hi)               a[k] = aux[i++];
       else if (less(aux[j], aux[i])) a[k] = aux[j++];
       else                           a[k] = aux[i++];
    }
}
```

0	1	2	3	4		5	6	7	8	9	10
A_1	A_2	A_3	B	D		A_4	A_5	C	E	F	G

Sempre toma elementos da esquerda enquanto as chaves forem iguais.

Resumo dos métodos de ordenação vistos até agora

	inplace?	stable?	best	average	worst	remarks
selection	✔		$\frac{1}{2} N^2$	$\frac{1}{2} N^2$	$\frac{1}{2} N^2$	N exchanges
insertion	✔	✔	N	$\frac{1}{4} N^2$	$\frac{1}{2} N^2$	use for small N or partially ordered
shell	✔		$N \log_3 N$	?	$c N^{3/2}$	tight code; subquadratic
merge		✔	$\frac{1}{2} N \lg N$	$N \lg N$	$N \lg N$	$N \log N$ guarantee; stable
timsort		✔	N	$N \lg N$	$N \lg N$	improves mergesort when preexisting order
?	✔	✔	N	$N \lg N$	$N \lg N$	holy sorting grail