第一部分 计算机基础

第3章　逻辑代数基础

3.1 逻辑代数的基本概念

所谓“逻辑”是指“条件”与“结果”的关系，数字逻辑利用数字电路的输入信号反映“条件”，而用数字电路的输出反映“结果”。从而使数字电路的输入和输出之间代表了一定的逻辑关系。

1 逻辑代数是变量按一定逻辑关系进行运算的表达式，是分析和设计数字电路的数学工具。

2 逻辑变量：逻辑代数中的变量即逻辑变量，只有0或1两种取值（称为逻辑状态）。

0和1并不表示数值的大小，而是表示两种对立的逻辑状态，如电平的高与低、事件的是与非、开关的通与断等。

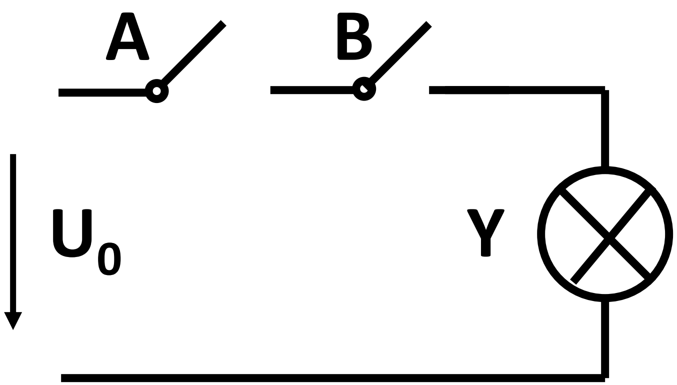
3 若输入逻辑变量为$A_1,A_2,\cdots,A_n$，输出逻辑变量为F，当$A_1,A_2,\cdots,A_n$的取值确定后，F有唯一值与之对应，则F是$A_1,A_2,\cdots,A_n$的逻辑函数，记为

$$F=f(A_1,A_2,\cdots,A_n)$$

- $A_1,A_2,\cdots,A_n$为输入逻辑变量，取值0或1；
- 逻辑函数F的取值也只能为0或1；
- 逻辑函数与逻辑变量的关系由有限个基本逻辑运算(与、或、非)决定。

3.1.1 基本逻辑运算

1 与运算：决定事件发生的各条件中，所有条件都具备，事件才会发生（成立）。



把逻辑变量所有可能的取值及其对应的结果构成的表格

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

规定：开关合为逻辑“1”

开关断为逻辑“0”

灯亮为逻辑“1”

灯灭为逻辑“0”

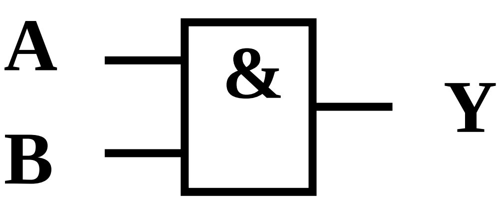
- 与运算的逻辑表达式：

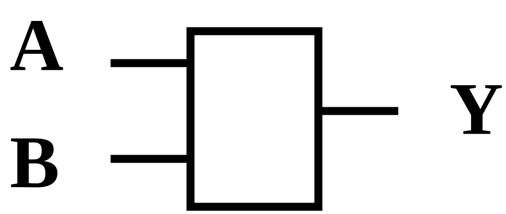
$$Y = A \bullet B = A \wedge B = AB$$ 与逻辑、 逻辑乘

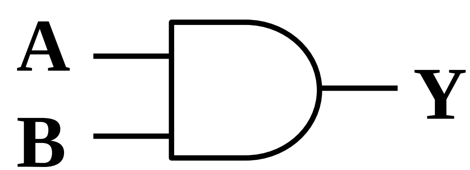
- 与运算的运算规则：

$0 \bullet 0=0$	$0 \bullet 1=0$
$1 \bullet 0=0$	$1 \bullet 1=1$

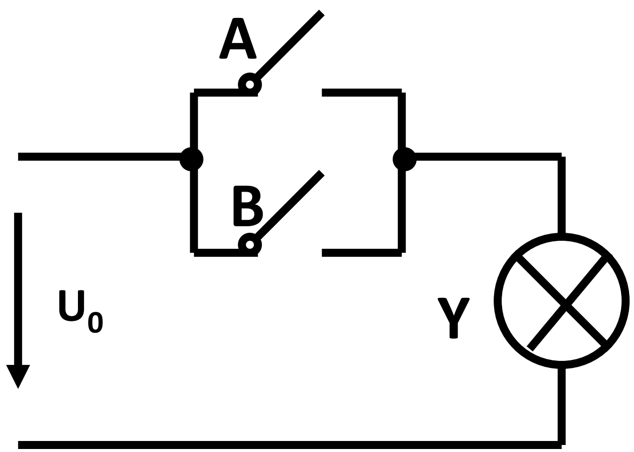
- 实现与运算的逻辑电路称为与门，其逻辑符号为：







2 或运算：决定事件发生的各条件中，有一个或一个以上的条件具备，事件就会发生（成立）。



真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

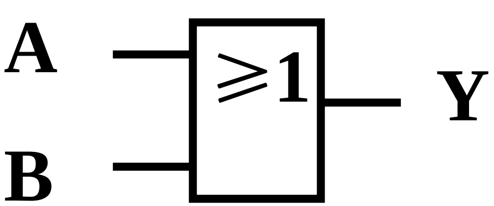
- 或运算的逻辑表达式:

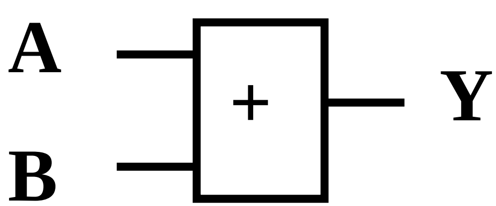
$$Y=A+B=A\vee B$$ 或逻辑、 逻辑加

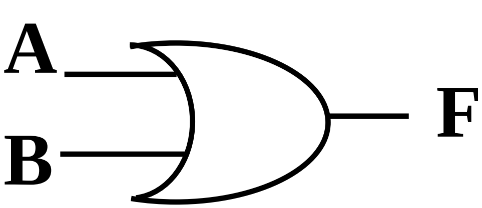
- 或运算的运算规则:

0+0=0	0+1=1
1+0=1	1+1=1

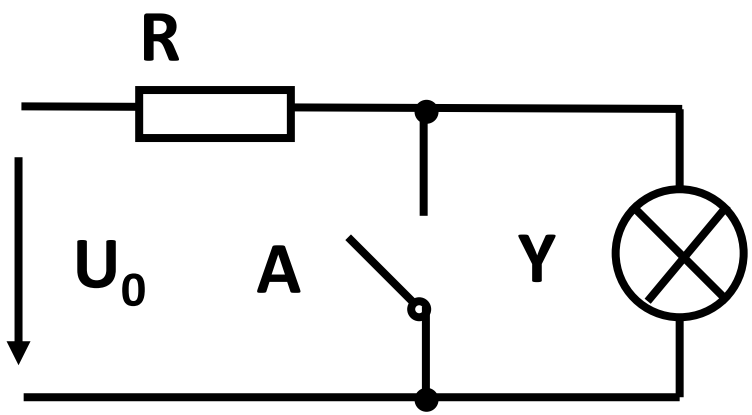
- 实现或运算的逻辑电路称为**或门**，其逻辑符号为:







3 非运算：决定事件发生的条件只有一个，条件不具备时事件发生（成立），条件具备时事件不发生。



真值表

A	Y
0	1
1	0

- 非运算的逻辑表达式:

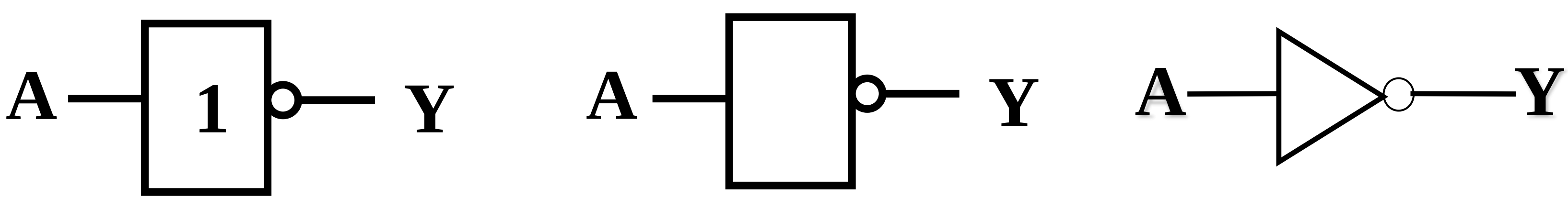
$$Y = \overline{A}$$ 非逻辑、 逻辑反

- 非运算的运算规则:

$$\overline{0} = 1$$

$$\overline{1} = 0$$

- 实现非运算的逻辑电路称为非门，其逻辑符号为:



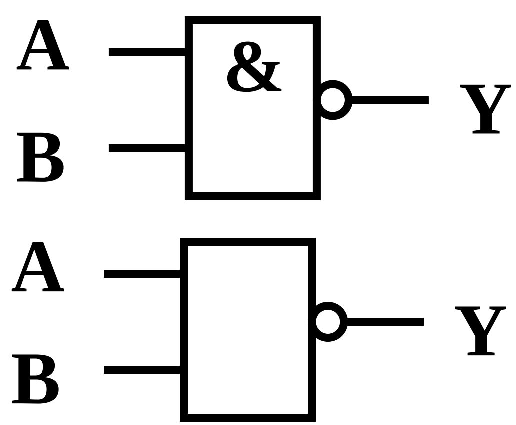
3.1.2 复合逻辑运算

将基本逻辑门加以组合，可构成“与非” “或非” “异或”等门电路。

1 与非门

如，$Y = \overline{AB}$

符号：



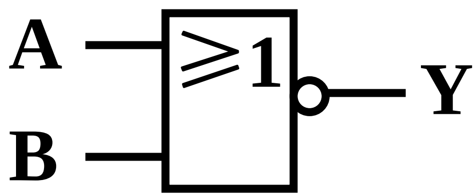
多个逻辑变量时：$Y=\overline{ABC}$

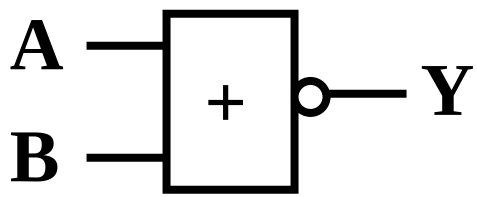
真值表

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

② 或非门　　如，$Y=\overline{A+B}$

符号：





真值表

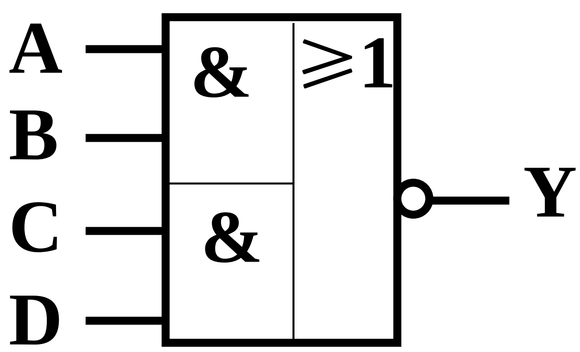
A	B	A+B	Y
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

多个逻辑变量时：$Y=\overline{A+B+C}$

3 与或非门

如， $Y=\overline{AB+CD}$

符号：



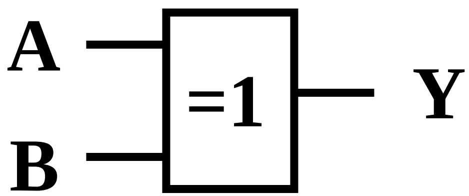
ABCD	Y
0000	1
0001	1
0010	1
0011	0
0100	1
0101	1
0110	1
0111	0
1000	1
1001	1
1010	1
1011	0
1100	0
1101	0
1110	0
1111	0

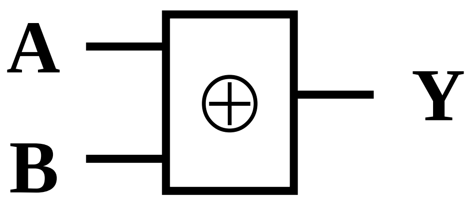
3 异或门

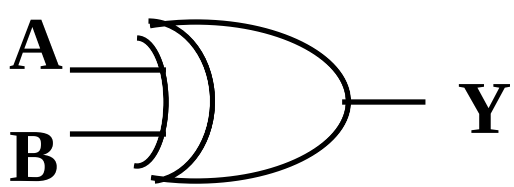
真值表

如， $Y=A\oplus B=\bar{A}B+A\bar{B}$

符号：





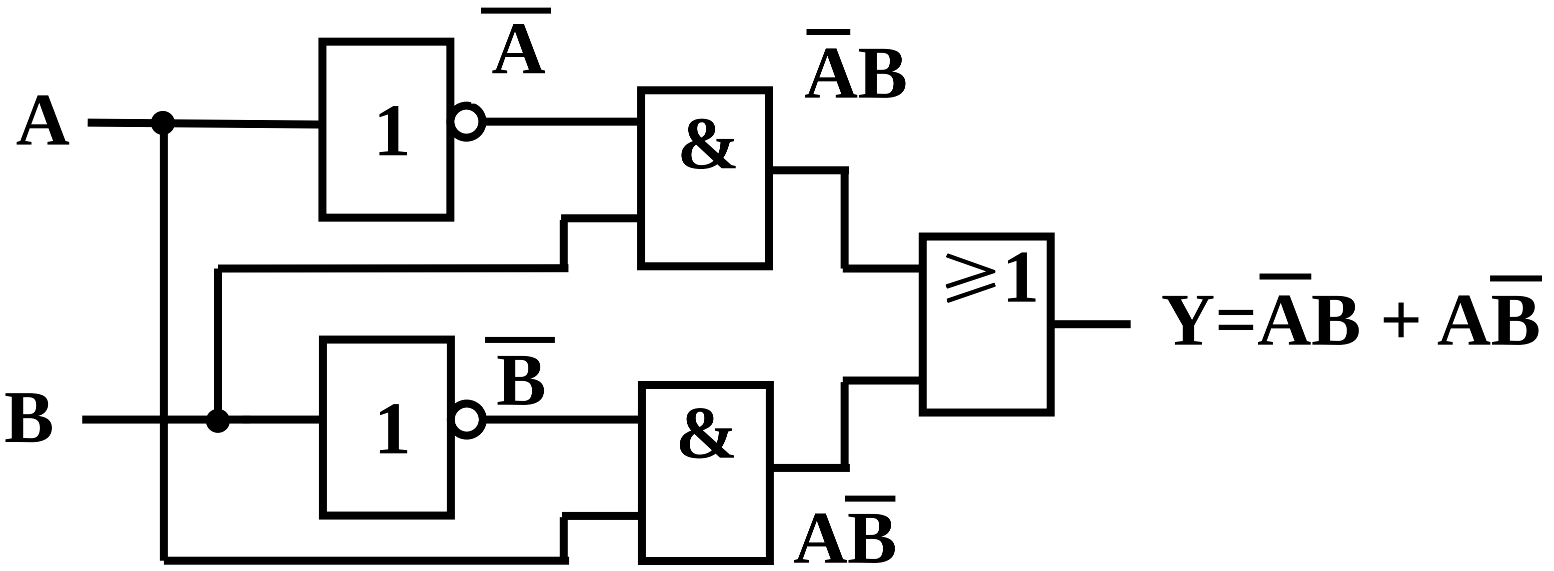


A	B	$\bar{A}B$	$A\bar{B}$	Y
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

同或门，$Y=A\odot B=AB+\bar{A}\bar{B}=\overline{A\oplus B}$

用基本逻辑门组成异或门

如，$Y=A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$



3.2 逻辑代数的基本运算规则

1 基本逻辑关系

- $0+0=0$ ， $0+1=1$ ， $1+0=1$， $1+1=1$

  $A+0=A$， $A+1=1$， $A+A=A$， $A+\overline{A}=1$

- $0\cdot0=0$ $0\cdot1=0$ $1\cdot0=0$ $1\cdot1=1$

  $A\cdot0=0$ $A\cdot1=A$ $A\cdot A=A$ $A\cdot\overline{A}=0$

- $\overline{0}=1$ $\overline{1}=0$

  $\overline{\overline{A}}=A$

2 基本定律

- 交换律: $A+B = B+A$

  $AB=BA$

- 结合律: $A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$

  $ABC=(AB)C=A(BC)$

分配律: $A(B+C)=AB+AC$

$A+BC=(A+B)(A+C)$

证明: 右边 $=(A+B)(A+C)$

$=AA+AB+AC+BC$

$=A+A(B+C)+BC$

$=A(1+B+C)+BC$

$=A\cdot 1+BC$; $1+B+C=1$

$=A+BC$; $A\cdot 1=1$

=左边

利用真值表证明

A B C	A(B+C)	AB+AC
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	0	0
1 0 0	0	0
1 0 1	1	1
1 1 0	1	1
1 1 1	1	1

A(B+C)=AB+AC

3 基本运算规则

- 吸收规则

$$A+AB=A$$

$$A+\overline{A}B=A+B$$

$$\overline{A}+AB=\overline{A}+B$$

证明: $A+\overline{A}B=A+AB+\overline{A}B$

$$=A+(A+\overline{A})B$$

$$=A+1\bullet B$$

$$=A+B$$

并项规则

- $AB+A\overline{B}=A$，　$(A+B)(A+\overline{B})=A$
- $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$$

证明: $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$

$$=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$$

$$=AB(1+C)+\overline{A}C(1+B)$$

$$=AB+\overline{A}C$$

推广： $AB+\overline{A}C+BC\cdots=AB+\overline{A}C$

德摩根定理

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

证明:

A B	$\overline{A \bullet B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0 0	1	1
0 1	1	1
1 0	1	1
1 1	0	0

3.3 逻辑函数的表示及变换

设有两个逻辑函数：

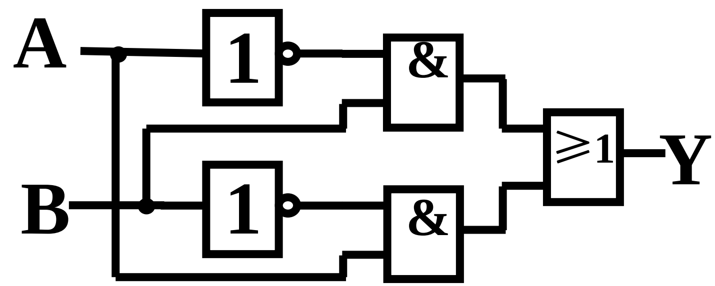
$$F=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)\ ,\quad G=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

其变量都为$X_1,X_2,\cdots,X_n$，如果对应于变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$的任何一组取值，F，G的值都相等，则称这两个函数相等，记为F=G。

3.3.1 逻辑函数的表示方法

四种表示方法

- 逻辑电路图



- 逻辑代数式(逻辑表达式)

$$Y=\bar{A}B + A\bar{B}$$

- 真值表， n个输入变量有2^n种组合

- 卡诺图

真值表

A	Y
0	d
1	d

一输入变量，二种组合

A	B	Y
0	0	d
0	1	d
1	0	d
1	1	d

二输入变量，四种组合

A	B	C	Y
0	0	0	d
0	0	1	d
0	1	0	d
0	1	1	d
1	0	0	d
1	0	1	d
1	1	0	d
1	1	1	d

三输入变量，八种组合

四输入变量，16种组合

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	d
0	0	0	1	d
0	0	1	0	d
0	0	1	1	d
0	1	0	0	d
0	1	0	1	d
0	1	1	0	d
0	1	1	1	d

A	B	C	D	Y
1	0	0	0	d
1	0	0	1	d
1	0	1	0	d
1	0	1	1	d
1	1	0	0	d
1	1	0	1	d
1	1	1	0	d
1	1	1	1	d

3.3.2 各种表示方法之间的转换

1 由真值表求逻辑表达式

（1）把真值表中逻辑函数值为1的变量组合挑出来；
（2）若输入变量为1，则写成原变量，若输入变量为0，则写成反变量；
（3）把每个组合中各个变量相乘，得到一个乘积项；
（4）将各乘积项相加，就得到相应的逻辑表达式（与或式）。

ABC	Z
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

$$Z = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

2 由逻辑表达式列出真值表

按照逻辑表达式，对逻辑变量的各种取值进行计算，求出相应的函数值，再把变量取值和函数值一一对应列成表格。

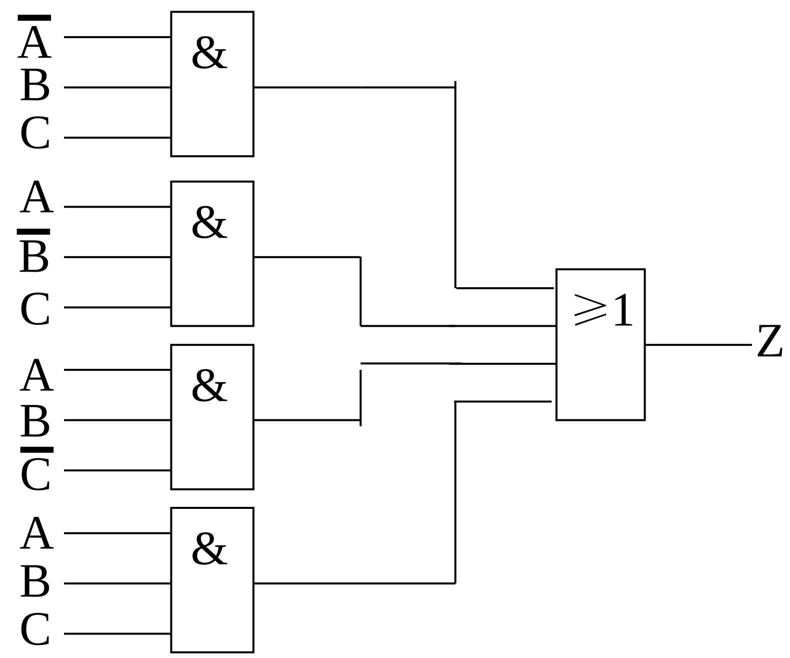
$$Z = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

ABC	Z
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

3 由逻辑函数式求逻辑电路

（1）画出所有的逻辑变量；
（2）用“非门”实现非变量；
（3）用“与门”对有关变量的乘积项，实现逻辑乘；
（4）用“或门” 实现逻辑加；

$$Z = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$



4 由逻辑图求逻辑表达式

由输入到输出，按照每个门的符号写出每个门的逻辑函数，直到最后得到整个逻辑电路的表达式。