第四章

1． 如果在群G中，对于任意元素a,b有$(ab)^2=a^2b^2$，则G为交换群。

证明：对于任意元素a,b有$(ab)^2=a^2b^2$，即有$abab=aabb$，利用群中的消去律可得$ba=ab$，所以G为交换群。

2． 如果在群G中，对于任意元素a都有$a^2=e$，则G为交换群。

证明：在群G中，对于任意元素a都有$a^2=e$，则对于任意元素a,b有$(ab)^2=a^2b^2=e$，即有$abab=aabb$，利用群中的消去律可得$ba=ab$，所以G为交换群。

3． 证明：$GL_n(P)$中全体行列式为 1 的矩阵对于矩阵乘法也构成一个群。

证明思路：行列式为 1 的矩阵的乘积行列式依旧为 1（封闭）；单位矩阵的行列式为 1（有单位元）；行列式为 1 的矩阵一定可逆且逆矩阵的行列式也为 1（每个元素均有逆元）。

4． 设G是一个非空的有限集合，定义一个乘法ab在 G 上封闭，适合条件：

（i） $a(bc)=(ab)c$；

（ii） $ab=ac \Rightarrow b=c$；

（iii） $ac=bc \Rightarrow a=b$；

证明G在这个乘法下成一群。

证明：该题就是定理 4.2.2。

5． 设G是一群，$a,b\in G$，如果$a^{-1}ba=b^r$，其中r为一正整数，证明$a^{-i}ba^i=b^{r^i}$。

证明：$a^{-1}ba=b^r \Rightarrow a^{-1}b=b^r a^{-1}$，所以$a^{-i}ba^i=b^{r^i}a^{-i}a^i=b^{r^i}$

6． 设n为一正整数，$n\mathbf{Z}$为整数加法群$\mathbf{Z}$的一个子群，证明$n\mathbf{Z}$与$\mathbf{Z}$同构。

证明：令$f:\mathbf{Z}\to n\mathbf{Z}$为$f(a)=na$，很容易验证这是一个同构映射。

7． 证明：如果在一阶为$2n$的群中有一n阶子群，它一定是正规子群。

证明：设群 G 的阶为 2n，H 为群 G 的 n 阶子群，根据拉格朗日定理，H 的左陪集只有两个，即 H，aH，H 的右陪集也只有两个 H，Ha，又$G=H\cup aH=H\cup Ha$，所以有 aH=Ha，固 H 是正规子群。

8． 设i为一正整数，如果群G中任意元素a,b都适合$(ab)^k=a^kb^k, k=i,i+1,i+2$，证明：$G$为交换群。

证明：根据已知条件，对于群G中任意元素a,b有

$(ab)^{i+1}=a^{i+1}b^{i+1} \Rightarrow (ab)^i ab = aa^ib^ib \Rightarrow (ab)^i a = a(ab)^i$，又

$(ab)^{i+2}=a^{i+2}b^{i+1} \Rightarrow ab(ab)^i ab = aa^{i+1}b^{i+1}b \Rightarrow b(ab)^i a = (ab)^{i+1}$

$\Rightarrow ba(ab)^i = ab(ab)^i \Rightarrow ba = ab$

所以G为交换群。

9． 设H,K为群G的子群，证明HK为一子群当且仅当$HK=KH$。
证明：当HK为子群，$\forall hk\in HK$有$k^{-1}h^{-1}\in HK$，而$k^{-1}h^{-1}\in KH$，即HK中任意元素的逆都属于KH。又由于HK是子群，所以HK中所有的元素必然是另一元素的逆元，因此有$\forall hk\in HK$有$hk\in KH$，反之亦然。
若$HK=KH$，则对于$h_1k_1,h_2k_2\in HK$，有$h_1k_1(h_2k_2)^{-1}=h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$，又因为$HK=KH$，则存在$k_3\in K$使得$h_1k_1(h_2k_2)^{-1}=h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}=h_1h_2^{-1}k_3\in HK$，所以$HK$为子群
10. 设H,K为有限群G的子群。 证明

$$|HK|=\frac{|H|\cdot|K|}{|H\bigcap K|}$$

证明:因为子群的交集还是子群,所以$H\bigcap K$是 H 的子群,故$|H\cap K|\,\big|\,|H|$,

设$\dfrac{|H|}{|H\cap K|}=n$，并令

$$H=h_1(H\cap K)\cup h_2(H\cap K)\cup\cdots\cup h_n(H\cap K)\qquad（1）$$

是 H 关于子群$H\bigcap K$的左陪集分解式，其中

$$h_i\in H,h_i^{-1}h_j\notin K,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\ldots,n\qquad（2）$$

由于$(H\cap K)K=K$，故由（1）式得

$$\begin{aligned}HK&=[h_1(H\cap K)\cup\cdots\cup h_n(H\cap K)]K\\&=h_1(H\cap K)K\cup\cdots\cup h_n(H\cap K)K\qquad（3）\\&=h_1K\cup\cdots\cup h_nK\end{aligned}$$

如果有$x\in h_iK\cap h_jK(i\neq j)$，则有$k_i,k_j\in K$，使

$$x=h_ik_i=h_jk_j,\ h_i^{-1}h_j=k_ik_j^{-1}\in K$$

这与（2）式矛盾。故（3）式式关于 K 的不相交的左陪集的并，从而由（3）得

$$|HK|=n|K|=\frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}。$$

11. 设 M, N 是群 G 的正规子群。 证明：

（1） $MN = NM$；

（2） MN 是 G 的一正规子群；

（3） 如果 $M \cap N = \{e\}$，那么 MN / N 与 M 同构。

证明：

（1）对于任意元素 $mn \in MN$，根据正规子群的性质，有 $mn = nn^{-1}mn = n(n^{-1}mn) \in NM$，因此 $MN \subseteq NM$，同理可证 $NM \subseteq MN$。所以 $MN = NM$。

（2）对于任意元素 $mn \in MN$，根据正规子群的性质，对于任意元素 $g \in G$，有 $g^{-1}mng = g^{-1}mgg^{-1}ng$，因此 MN 是 G 的一正规子群。

（3）令

$$\varphi : MN \to M,\ \varphi(mn) = m$$

可以验证该映射为同态映射：

1）映射的合理性：

若有 $\varphi(mn) = m_1$，则 $\exists n_1 \in N$，使得 $mn = m_1 \cdot n_1$，从而有 $m_1^{-1}m = n_1 \cdot n^{-1} \in N$，

由已知 $M \cap N = \{e\}$，可得 $m_1^{-1}m = e$，即 $m = m_1$。也就是说在映射 φ 之下 MN 的一个元素只有唯一的像。

2）同态：$\forall m_1, m_2 \in M, n_1, n_2 \in N$，由于 N 是正规子群，所以有 $m_2^{-1}n_1m_2 \in N$，

不妨设 $m_2^{-1}n_1m_2 = n_3$，则

$$\begin{aligned}\varphi(m_1n_1 \cdot m_2n_2) &= \varphi(m_1m_2m_2^{-1}n_1m_2n_2) \\ &= \varphi(m_1m_2 \cdot n_3n_2) \\ &= m_1m_2 \\ &= \varphi(m_1n_1) \cdot \varphi(m_2n_2)\end{aligned}$$

3）核：$ker\varphi = \{mn | m \in M, n \in N, \varphi(mn) = e\}$

而 $\varphi(mn) = e$，可得 $m = e$。

因此，

$$ker\varphi = \{e \cdot n | n \in N\} = N$$

4）根据同态基本定理有

$$MN/N \cong N$$

12. 设 G 是一个群，a, b, c 是 G 中任意三个元素，证明：方程

$$xaxba = xbc$$

在 G 中有且仅有一解。

证明：首先证明该方程有解。很显然，由于 $a, b, c \in G$，因此都存在逆元。

$$xaxba = xbc \Rightarrow axba = bc \Rightarrow x = a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$$

所以方程有解。

设 x_1, x_2 都为方程的解，根据群的性质很容易验证，$x_1 = x_2 = a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$。

13. 证明：如果 a,b 是群中的任意元素，则

$$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}。$$

证明：$ab \cdot b^{-1}a^{-1} = b^{-1}a^{-1} \cdot ab = e$，所以 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$。

14. 证明：在任意群中，下列各组中的元素有相同的阶：

（1） a 与 a^{-1}；

（2） a 与 cac^{-1}；

（3） ab 与 ba；

（4） $abc, bca, cab.$

证明：（1）设 $o(a) = n, o(a^{-1}) = m$，则有

$$a^m = (\overbrace{a^{-1}\cdots a^{-1}}^{m个a^{-1}})^{-1} = ((a^{-1})^m)^{-1} = e^{-1} = e$$

所以 $n \mid m$。同理可证 $m \mid n$。因此有 $n = m$。

（2）设 $o(a) = n, o(cac^{-1}) = m$，则有

$$a^m = (c^{-1}\overbrace{(cac^{-1})\cdots(cac^{-1})}^{m个cac^{-1}}c = c^{-1}(cac^{-1})^m c = cec^{-1} = e$$

所以 $n \mid m$。同理可证 $m \mid n$。因此有 $n = m$。

（3）设 $o(ab) = n, o(ba) = m$，则有

$$(ab)^m = \overbrace{abab\cdots ab}^{m个ab}aa^{-1} = \overbrace{abab\cdots aba}^{m个ba}a^{-1} = aea^{-1} = e$$

所以 $n \mid m$。同理可证 $m \mid n$。因此有 $n = m$。

（4）设 $o(abc) = n, o(bca) = m, o(cab) = k$，则有

$$(abc)^m = \overbrace{abcabc\cdots abc}^{m个abc}aa^{-1} = \overbrace{abcabc\cdots abca}^{m个bca}a^{-1} = aea^{-1} = e$$

所以 $n \mid m$。同理可证 $m \mid k,\ k \mid n$。因此有 $n = m = k$。

15. 设 G 是 n 阶有限群。 证明对于任意元 $a \in G$，都有 $a^n = e$。

证明：对于任意元素 $a \in G$，取子群 $H = \langle a \rangle$，则 $|H| = o(a)$。而根据拉格朗日定理有 $|H| \mid |G|$，所以 $o(a) \mid n$，因此有 $a^n = e$。

16. 证明：群 G 的两个子群的交集也是 G 的子群。

证明：设 H, K 是 G 的两个子群。设 $a, b \in H \cap K$，

$$a,b \in H \cap K \Rightarrow (a \in H, b \in H) \wedge (a \in K, b \in K)$$
$$\Rightarrow ab^{-1} \in H \wedge ab^{-1} \in K \Rightarrow ab^{-1} \in H \cap K$$

根据子群判定的充要条件，$H \cap K$ 是 G 的子群。

17. 证明：$f(ab)=f(a)f(b)$ 将一个群映射为另一个群。

证明：设 G 为群，$G' = \{f(a) \mid a \in G\}$。在 G' 中定义运算为

$$f(a)f(b) = f(ab)$$

容易验证该运算为二元运算，且满足结合律。

其次，G' 有单位元 $f(e)$，其中 e 是 G 的单位元，这是因为对于任意 $f(a) \in G'$，有

$$f(a)f(e) = f(e)f(a) = f(ae) = f(a)$$

再次，对于任意 $f(a) \in G'$，有 $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$，这是因为

$$f(a)f(a^{-1}) = f(a^{-1})f(a) = f(aa^{-1}) = f(e)$$

综上所述，$G' = \{f(a) \mid a \in G\}$ 是群，即 $f(ab)=f(a)f(b)$ 将一个群映射为另一个群。

18. 分别求出 13,16 阶循环群各个元素的阶，指出其中的生成元。

解：（1）设 $G = \langle g \rangle = \{g^0 = g^{13} = e, g^1, g^2, \ldots, g^{12}\}$。根据引理 4.5.2，可知 g^k 的阶为 $\frac{13}{(13,k)}$，由于 13 为素数，所以 $(13,k) = 1$，其中 $k = 1,2,\ldots,12$，即 $o(g^k) = 13$，$k = 1,2,\ldots,12$。所有的 g^k，$k = 1,2,\ldots,12$ 都是 G 生成元。

（2）设 $G = \langle g \rangle = \{g^0 = g^{16} = e, g^1, g^2, \ldots, g^{15}\}$。根据引理 4.5.2，可知 g^k 的阶为 $\frac{16}{(16,k)}$，经过计算可知

$$o(g) = o(g^3) = o(g^5) = o(g^7) = o(g^9)$$
$$= o(g^{11}) = o(g^{13}) = o(g^{15}) = 16$$

$$o(g^2) = o(g^6) = o(g^{10}) = o(g^{14}) = 8$$

$$o(g^4) = o(g^{12}) = 4, o(g^8) = 2$$

其生成元为 $g, g^3, g^5, g^7, g^9, g^{11}, g^{13}, g^{15}$。

19. 分别求出 15,20 阶循环群的真子群。

证明：由于子群的阶整除群的阶，所以 15 阶循环群的真子群的阶只有可能是 1,3,5。

20 阶循环群的真子群的阶只有可能是 1,2,4,5,10。

（1）设$G =< g >= \{g^0 = g^{15} = e, g^1, g^2, \dots, g^{14}\}$，则

$$o(g^3) = 5, o(g^5) = 3, o(g^0) = 1$$

所以 15 阶循环群的真子群有 3 个，5 阶群$< g^3 >$，3 阶群$< g^5 >$，和 1 阶群$< e >$。

（2）设$G =< g >= \{g^0 = g^{20} = e, g^1, g^2, \dots, g^{19}\}$，则

$$o(g^2) = o(g^6) = o(g^{14}) = o(g^{18}) = 10$$

$$o(g^4) = o(g^8) = o(g^{12}) = o(g^{16}) = 5$$

$$o(g^5) = o(g^{15}) = 4$$

$$o(g^{10}) = 2$$

所以 20 阶循环群的真子群有 5 个$< e >, < g^2 >, < g^4 >, < g^5 >, < g^{10} >$，分别是 1 阶、10 阶、5 阶、4 阶和 2 阶群。

20. 证明：设 p 是一个素数，任意两个 p 阶群都同构。

证明思路：首先证明素数阶群一定是循环群，然后根据定理 4.5.5，p 阶群一定同构于 Z_p 加群。

21. 证明：$Z_m \cong Z / mZ$。

见例题 4.4.4。

22. 设$G = \langle a \rangle$是循环群，H 是 G 的子群，证明：商群G/H是循环群，且aH是商群G/H的生成元。

证明思路：首先证明G/H中任意一个陪集都可以表示成$(aH)^k$的形式，其次证明aH的阶为$|G|/|H|$。

23. 证明：设 p 是一个素数，则阶是 p^m 的群一定有一个阶为 p 的子群。

证明：设 G 为群，$|G| = p^m$。任取 G 中的非单位元 a，它的阶整除$|G| = p^m$，所以存在$1 \le k \le m$使得 a 的阶为 p^k。令$b = a^{p^{k-1}}$，则 b 的阶为 p，所以 G 中 b 生成的循环子群的阶为 p。

24. a, b是一个群G的元素，并且$ab = ba$，又假设a的阶为m，b的阶为n，且$(m, n) = 1$。证明ab的阶为mn。

证明：设$o(ab) = l$。

$$(ab)^{mn} = a^{mn} b^{mn} = e \Rightarrow l \mid mn$$

反之，$(ab)^l = a^l b^l = e \Rightarrow a^l = b^{-l} \Rightarrow \frac{m}{(m,l)} = \frac{n}{(n,l)}$，由于$(m,n)=1$，所以

$(m,l)=m$，$(n,l)=n$，即$m \mid l, n \mid l$，因此有$mn \mid l$。

综上所述，有$mn = l$。

25. 求出三次对称群S_3的所有子群.

见例 4.7.4。

26. 把三次对称群S_3的所有元素写成不相交的循环乘积。

见例 4.7.4。

27. 把置换(4 5 6)(5 6 7)(6 7 1)(1 2 3)(2 3 4)(3 4 5)写为不相交循环乘积。

解：$(456)(567)(671)(123)(234)(345)=(127)(3)(4)(5)(6)=(127)$

28. 设$\tau=$(3 2 7)(2 6)(1 4)，$\sigma=$(1 3 4)(5 7)求$\sigma\tau\sigma^{-1}$和$\sigma^{-1}\tau\sigma$。

解：$\tau=(327)(26)(14)=(2673)(14)$，$\sigma^{-1}=((134)(57))^{-1}=(143)(57)$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma=(143)(57)(2673)(14)(134)(57)=(1265)(34)(7)$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1}=(134)(57)(2673)(14)(143)(57)=(13)(2654)(7)$$

29. 四次对称群S_4的一个 4 阶子群如下：

$$H=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$$

求出H的全部左陪集。

解：
$$\begin{aligned}S_4=\{&(1),(12),(13),(14),(23),(24),(34),(123),(124),(134),(132)\\&(142),(143),(234),(243),(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)\\&(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}\end{aligned}$$

直接计算可得 H 的左陪集有 6 个，分别是$(1)H,(12)H,(13)H,(14)H,(123)H,(124)H$。

30. 证明：两个正规子群的交还是正规子群。

证明思路：根据正规子群的等价条件直接验证。

31. 证明：指数是 2 的子群一定是正规子群。

证明：指数是 2 的子群 H 其左陪集只有两个，H 和 aH，右陪集也只有两个 H 和 Ha。而$G=H\cup aH=H\cup Ha$，所以$aH=Ha$，即 H 是正规子群。