第六章 多项式

（如无特别说明，多项式均取某个域上的多项式。）

1．用带余除法求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$：

（1） $f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$；

（2） $f(x)=x^4-2x+5, g(x)=x^2-x+2$；

（3） $f(x)=2x^5-5x^3-8x, g(x)=x+3$。

解：（1） $f(x)=(\frac{1}{3}x-\frac{7}{9})g(x)+(-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9})$

$$
\begin{array}{r|r}
 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\
\hline
3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1 \\
 & -x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x \\
\cline{2-2}
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 \\
 & \frac{7}{3}x^2-\frac{14}{9}x+\frac{7}{9} \\
\cline{2-2}
 & -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}
\end{array}
$$

（2）$f(x)=(x^2+x-1)g(x)+(-5x+7)$

$$
\begin{array}{r|r}
 & x^2+x-1 \\
\hline
x^2-x+2 & x^4-2x+5 \\
 & -x^4+x^3-2x^2 \\
\cline{2-2}
 & x^3-2x^2-2x \\
 & -x^3+x^2-2x \\
\cline{2-2}
 & -x^2-4x+5 \\
 & x^2-x+2 \\
\cline{2-2}
 & -5x+7
\end{array}
$$

（3）$f(x)=(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109)g(x)+(-327)$

$$
\begin{array}{r|r}
 & 2x^4-6x^3+13x^2-39x+109 \\
\hline
x+3 & 2x^5-5x^3-8x \\
 & -2x^5-6x^4 \\
\cline{2-2}
 & -6x^4-5x^3 \\
 & 6x^4+18x^3 \\
\cline{2-2}
 & 13x^3 \\
 & -13x^3-39x^2 \\
\cline{2-2}
 & -39x^2-8x \\
 & 39x^2+117x \\
\cline{2-2}
 & 109x \\
 & -109x-327 \\
\cline{2-2}
 & -327
\end{array}
$$

2．求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式：

（1） $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$；

（2） $f(x)=x^4-4x^3+1, g(x)=x^3-3x^2+1$。

解：（1）

$$\begin{aligned} x^4+x^3-3x^2-4x-1 &= (x^3+x^2-x-1) \cdot x + (-2x^2-3x-1) \\ x^3+x^2-x-1 &= (-2x^2-3x-1)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\right)+\left(-\tfrac{3}{4}x-\tfrac{3}{4}\right) \\ -2x^2-3x-1 &= \left(-\tfrac{3}{4}x-\tfrac{3}{4}\right)\cdot\left(\tfrac{8}{3}x+\tfrac{4}{3}\right)+0 \end{aligned}$$

所以$(f(x),g(x))=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$。

（2）

$$\begin{aligned} x^4-4x^3+1 &= (x^3-3x^2+1)\cdot(x-1)+(-3x^2-x+2) \\ x^3-3x^2+1 &= (-3x^2-x+2)\cdot\left(-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{10}{9}\right)+\left(\tfrac{16}{9}x-\tfrac{11}{9}\right) \\ -3x^2-x+2 &= \left(\tfrac{16}{9}x-\tfrac{11}{9}\right)\cdot\left(-\tfrac{27}{16}x-\tfrac{441}{256}\right)+-\tfrac{27}{256} \\ \tfrac{16}{9}x-\tfrac{11}{9} &= -\tfrac{27}{256}\cdot\left(-\tfrac{4096}{243}x+\tfrac{2816}{243}\right)+0 \end{aligned}$$

所以$(f(x),g(x))=1$

3．求 $u(x)$ 和 $v(x)$ 使得 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$：

（1） $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$；

（2） $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9, g(x)=2x^3-x^2-5x+4$；

（3） $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, g(x)=x^2-x-1$。

解：（1）

$$\begin{aligned} x^4+2x^3-x^2-4x-2 &= (x^4+x^3-x^2-2x-2)\cdot 1+(x^3-2x) \\ x^4+x^3-x^2-2x-2 &= (x^3-2x)\cdot(x+1)+(x^2-2) \\ x^3-2x &= (x^2-2)\cdot x+0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f(x),g(x)) &= x^2-2 \\ &= (x^4+x^3-x^2-2x-2)-(x^3-2x)(x+1) \\ &= (x^4+x^3-x^2-2x-2)-(x+1)(x^4+2x^3-x^2-4x-2 \\ &\quad -(x^4+x^3-x^2-2x-2)) \\ &= (x+2)g(x)-(x+1)f(x) \end{aligned}$$

所以：$u(x)=-(x+1), v(x)=x+2$。

（2）

$$\begin{aligned} 4x^4-2x^3-16x^2+5x+9 &= (2x^3-x^2-5x+4)\cdot 2x+(-6x^2-3x+9) \\ 2x^3-x^2-5x+4 &= (-6x^2-3x+9)\cdot\left(-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{3}\right)+(-x+1) \\ -6x^2-3x+9 &= (-x+1)\cdot(6x+9)+0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(f(x),g(x)) &= -x+1\\
&= g(x)-(-6x^2-3x+9)(-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{3})\\
&= g(x)-(f(x)-2xg(x))(-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{3})\\
&= -(-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{3})f(x)+(-\tfrac{2}{3}x^2+\tfrac{2}{3}x+1)g(x)
\end{aligned}
$$

所以：$u(x)=-(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}), v(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$。

（3）

$$
\begin{aligned}
x^4-x^3-4x^2+4x+1 &= (x^2-x-1)\cdot(x^2-3)+(x-2)\\
x^2-x-1 &= (x-2)\cdot(x+1)+1\\
x-2 &= 1\cdot(x-2)+0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f(x),g(x)) &= 1\\
&= g(x)-(x+1)(x-2)\\
&= g(x)-(f(x)-(x^2-3)g(x))(x+1)\\
&= (-x-1)f(x)+(x^3+x^2-3x-2)g(x)
\end{aligned}
$$

所以：$u(x)=-(x+1), v(x)=x^3+x^2-3x-2$。

4．证明：如果 $d(x)\mid f(x),\ \ d(x)\mid g(x)$，且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

证明：不妨设 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，$\forall m(x)|f(x), m(x)|g(x)$，有 $m(x)|u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$，根据最大公因式的定义，有 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

5．证明：$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$，其中 $h(x)$ 的首项系数为 1。

证明：设$(f(x),g(x))=d(x)$，则存在$u(x),v(x)$，使得$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，因此有$d(x)h(x)=u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)$，即$d(x)h(x)$可以表示成为$f(x)h(x)$和$g(x)h(x)$的一个组合。又$d(x)h(x)|f(x)h(x), d(x)h(x)|g(x)h(x)$，所以$d(x)h(x)$是$f(x)h(x)$和$g(x)h(x)$的公因式。根据第 4 题的结论有$d(x)h(x)$是$f(x)h(x)$和$g(x)h(x)$的最大公因式，即$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$。

6．如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零，证明：

$$
\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1。
$$

证明：设$(f(x),g(x))=d(x)$，则存在$u(x),v(x)$，使得$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零，所以$d(x)\neq 0$。因而有

$$
1=\tfrac{u(x)f(x)}{d(x)}+\tfrac{v(x)g(x)}{d(x)}
$$

因此$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$。

7．证明：如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零，且

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

那么$(u(x), v(x)) = 1$。

证明：因为$f(x)$与$g(x)$不全为零，所以$(f(x), g(x)) \neq 0$。因而有

$$1 = \frac{f(x)}{(f(x),g(x))}u(x) + \frac{g(x)}{(f(x),g(x))}v(x)$$

因此有$(u(x), v(x)) = 1$。

8．证明：如果$(f(x), g(x)) = 1$，$(f(x), h(x)) = 1$，那么

$$(f(x), g(x)h(x)) = 1。$$

证明：$(f(x), g(x)) = 1 \Rightarrow \exists u(x), v(x)$，使得$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ （1）。
$(f(x), h(x)) = 1 \Rightarrow \exists s(x), t(x)$，使得$s(x)f(x) + t(x)h(x) = 1$ （2）。
（1）（2）相乘可得

$$(u(x)f(x) + v(x)g(x))(s(x)f(x) + t(x)h(x)) = 1$$

即

$$(u(x)s(x)f(x) + u(x)t(x)h(x) + v(x)s(x)g(x))f(x) + v(x)t(x)g(x)h(x) = 1$$

因此有$(f(x), g(x)h(x)) = 1$。

9．判别下列多项式是否有重因式：

（1） $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$；

（2） $f(x) = x^4 + 4x^2 - 4x - 3$。

解：（1）$f'(x) = 5x^4 - 5\cdot 4x^3 + 7\cdot 3x^2 - 4x + 4 = 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4$

$$x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = \left(5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4\right)\cdot\left(\tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{5}\right) + \left(-\tfrac{6}{5}x^3 + 3x^2 + \tfrac{12}{5}x - \tfrac{36}{5}\right)$$
$$5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4 = \left(-\tfrac{6}{5}x^3 + 3x^2 + \tfrac{12}{5}x - \tfrac{36}{5}\right)\cdot\left(-\tfrac{25}{6}x + \tfrac{25}{4}\right) + \left(\tfrac{49}{4}x^2 - 49x + 49\right)$$
$$-\tfrac{6}{5}x^3 + 3x^2 + \tfrac{12}{5}x - \tfrac{36}{5} = \left(\tfrac{49}{4}x^2 - 49x + 49\right)\cdot\left(-\tfrac{24}{245}x - \tfrac{36}{245}\right) + 0$$

所以$(f(x), f'(x)) \neq 0$，因此$f(x)$有重因式。

（2）$f'(x) = 4x^3 + 8x - 4$

$$x^4 + 4x^2 - 4x - 3 = \left(4x^3 + 8x - 4\right)\cdot\tfrac{1}{4}x + \left(2x^2 - 3x - 3\right)$$
$$4x^3 + 8x - 4 = \left(2x^2 - 3x - 3\right)\cdot\left(2x + 3\right) + \left(23x + 5\right)$$
$$2x^2 - 3x - 3 = \left(23x + 5\right)\cdot\left(\tfrac{2}{23}x - \tfrac{79}{529}\right) + -\tfrac{1192}{529}$$
$$23x + 5 = -\tfrac{1192}{529}\cdot\left(-\tfrac{12167}{1192}x - \tfrac{2645}{1192}\right) + 0$$

所以$(f(x), f'(x)) = 1$，因此$f(x)$没有重因式。

10． 求多项式$x^3 + px + q$有重根的条件。

解：令$f(x) = x^3 + px + q$。$f(x)$有重根即$f(x)$有重因式。

则有$\gcd(f(x), f'(x)) \neq 1$，而$f'(x) = 3x^2 + p$

$$x^3 + px + q = (\tfrac{1}{3}x)(3x^2 + p) + (\tfrac{2}{3}px + q)$$

$3x^2+p=(\frac{9}{2p}x-\frac{27q}{4p^2})(\frac{2}{3}px+q)+(p+\frac{27q^2}{4p^2})$

要使$f(x)$有重因式，则要求$p+\frac{27q^2}{4p^2}=0$，即$4p^3+27q^2=0$。

所以多项式x^3+px+q有重根的条件是$4p^3+27q^2=0$。

11. 求t值使$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$有重根。

解：要使$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$有重根，则有$(f(x),f'(x))\neq 1$。$f'(x)=3x^2-6x+t$。

$f(x)=(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})f'(x)+\frac{2t-6}{3}x+\frac{t-3}{3}$

当$t=3$时，$f'(x)|f(x)$，$f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$有三重根。

当$t\neq 3$时，有

$f'(x)=(\frac{9}{2t-6}x-\frac{45}{4(t-3)})(\frac{2t-6}{3}x+\frac{t-3}{3})+t+\frac{15}{4}$

若$f(x)$有重根，则必须$t=-\frac{15}{4}$。

12. 在$Z_5[x]$中，$f(x)=x^{214}+3x^{152}+2x^{47}+1$，求$f(3)$。

解：在$\mathbb{Z}_5$有$3^4\equiv 1(mod 5)$，所以

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^{214}+3\cdot 3^{152}+2\cdot 3^{47}+1 \\ &= (3^4)^{53}\cdot 3^2+(3^4)^{38}\cdot 3+2\cdot(3^4)^{11}\cdot 3^3+1 \\ &= 6+3+18+1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

13. 设p是素数，$a\in Z_p$，证明：对于任意正整数n，多项式$f(x)=x^p-x+a$在Z_p上总能整除$g(x)=x^{p^n}-x+na$。

证明：**题目似乎有点问题。在$\mathbb{Z}_p$中所有的元素都满足方程$x^p=x$，因此，将$f(x)$限制在$\mathbb{Z}_p$上可得$f(x)=a$。**

14. 证明：x^3-x在Z_6中有 6 个根。

证明：将$\mathbb{Z}_6$中分别代入方程验证即可得知，

$$0^3-0=1^3-1=2^3-2=3^3-3=4^3-4=5^3-5\equiv 0(mod 6)$$

所以方程x^3-x在$\mathbb{Z}_6$中有 6 个根。

15. 证明定理 6.2.3。

（1）若$(f(x),g(x))=1$，且$f(x)|g(x)h(x)$，则有

$$f(x)|h(x)。$$

证明：$f(x)|g(x)h(x)$，则存在$k(x)$，满足$g(x)h(x)=k(x)f(x)$。

$(f(x),g(x))=1$，则存在$u(x),v(x)$，满足$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$。

上式两边同乘以$h(x)$可得

$$\begin{aligned} u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=h(x) &\Rightarrow u(x)f(x)h(x)+v(x)k(x)f(x)=h(x) \\ &\Rightarrow f(x)(u(x)h(x)+v(x)k(x))=h(x) \end{aligned}$$

即$f(x)|h(x)$。

（2）若 $f(x)|h(x)$， $g(x)|h(x)$，且 $(f(x),g(x))=1$，则有

$$f(x)g(x)|h(x)。$$

证明： $f(x)|h(x), g(x)|h(x)$， 则存在 $k_1(x), k_2(x)$， 满足 $h(x)=k_1(x)f(x)$, $h(x)=k_2(x)g(x)$。

$(f(x),g(x))=1$，则存在 $u(x),v(x)$，满足 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$。

$$\begin{aligned} u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=h(x) &\Rightarrow u(x)f(x)k_2(x)g(x)+v(x)g(x)k_1(x)f(x)=h(x) \\ &\Rightarrow f(x)g(x)(u(x)k_2(x)+v(x)k_1(x))=h(x) \end{aligned}$$

因此，$f(x)g(x)|h(x)$。

16. 证明定理 6.2.5。

定理 6.2.5（因式分解唯一性定理）域 F 上的任意次数大于等于 1 的多项式 $f(x)$ 都可以表示成 $F[x]$ 中一些不可约多项式的乘积。更进一步，若

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_l(x)$$

是将 $f(x)$ 分解成不可约多项式的积的两种形式，则一定有 $s=l$ 且适当排序后有 $p_i(x)=c_iq_i(x)$，其中 $c_i(1\le i\le s)$ 是域 F 中不等于零的元素。

证明 先证分解式的存在 我们对 $f(x)$ 的次数作数学归纳法

因为一次多项式都是不可约的，所以 $n=1$ 时结论成立

设 $\partial(f(x))=n$，并设结论对于次数低于 n 的多项式已经成立

如果 $f(x)$ 是不可约多项式，结论是显然的，无妨设 $f(x)$ 不是不可约的，即有

$$f(x)=f_1(x)f_2(x),$$

其中 $f_1(x),f_2(x)$ 的次数都低于 n 由归纳法假定 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都可以分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积. 把 $f_1(x),f_2(x)$ 的分解式合起来就得到 $f(x)$ 的一个分解式

再证唯一性 设 $f(x)$ 可以分解成不可约多项式的乘积

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

如果 $f(x)$ 还有另一个分解式

$$f(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

其中 $q_i(x)(i=1,2,\cdots,t)$ 都是不可约多项式，于是

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x) \quad (1)$$

我们对 s 作归纳法 当 $s=1$，$f(x)$ 是不可约多项式，由定义必有

$$s=t=1,$$

且

$$f(x)=p_1(x)=q_1(x).$$

设不可约因式个数为 s-1 时结论成立。

由(1)，$p_1(x) \mid q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$，因此，$p_1(x)$必能除尽其中的一个，无妨设

$$p_1(x) \mid q_1(x)$$

因为 $q_1(x)$也是不可约多项式，所以有

$$p_1(x) = c_1 q_1(x), \tag{2}$$

在(1)式两边消去 $q_1(x)$，就有

$$p_2(x)\cdots p_s(x) = c_1^{-1} q_2(x)\cdots q_t(x)$$

由归纳法假定，有

$$s-1 = t-1, \text{即 } s = t, \tag{3}$$

并且适当排列次序之后有

$$p_2(x) = c'_2 c_1^{-1} q_2(x), \text{即 } p_2(x) = c_2 q_2(x),$$

$$p_i(x) = c_i q_i(x) \ (i = 3, \cdots, s) \tag{4}$$

(2)，(3)，(4)合起来即为所要证的 这就证明了分解的唯一性 ▍

17.　　证明定理 6.3.2。

定理 6.3.2（同余的性质）对于所有 $g(x), h(x), g_1(x), h_1(x), s(x) \in F[x]$，以下事实成立

（1）（自反性）$g(x) \equiv g(x) (\bmod f(x))$；

（2）（对称性）如果 $g(x) \equiv h(x) (\bmod f(x))$，则 $h(x) \equiv g(x) (\bmod f(x))$；

（3）（传递性）如果 $g(x) \equiv h(x) (\bmod f(x))$ 且 $h(x) \equiv s(x) (\bmod f(x))$，则 $g(x) \equiv s(x) (\bmod f(x))$；

（4）如果 $g(x) \equiv g_1(x) (\bmod f(x))$ 且 $h(x) \equiv h_1(x) (\bmod f(x))$，则 $g(x) + h(x) \equiv g_1(x) + h_1(x) (\bmod f(x))$ 且 $g(x) \cdot h(x) \equiv g_1(x) \cdot h_1(x) (\bmod f(x))$。

证明：

（1）$f(x)|0 = g(x) - g(x) \Rightarrow g(x) \equiv g(x)(mod\ f(x))$。

（2）

$$\begin{aligned} g(x) \equiv h(x)(mod\ f(x)) \quad &\Rightarrow f(x)|g(x) - h(x) \\ &\Rightarrow f(x)|h(x) - g(x) \\ &\Rightarrow h(x) \equiv g(x)(mod\ f(x)) \end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned} g(x) \equiv h(x)(mod\ f(x)), h(x) \equiv s(x)(mod\ f(x)) \quad &\Rightarrow f(x)|g(x) - h(x), f(x)|h(x) - s(x) \\ &\Rightarrow f(x)|g(x) - h(x) + h(x) - s(x) \\ &\Rightarrow f(x)|g(x) - s(x) \\ &\Rightarrow g(x) \equiv s(x)(mod\ f(x)) \end{aligned}$$

（4）同上，利用同余的定义和整除的性质可以证明结论。过程略。

18. 设F是域，$f(X,Y,Z), g_1(X,Y,Z), g_2(X,Y,Z) \in F[X,Y,Z]$，$G=\{g_1, g_2\}$，令

$$f(X,Y,Z) = -X^2Z^4 + Y^3Z^3 - X^2Y^2Z + X^2YZ^2 - XZ^3 + Z^4 + X^3 + XY^2 + Y^2Z,$$

$g_1(X,Y,Z) = XZ^3 - Y^2Z^2$，$g_2(X,Y,Z) = Y^2Z - YZ^2$，在次数字典序下，计算 $f \xrightarrow{G} h$。

解：由于$lt(g_1) = XZ^3, lt(f) = -X^2Z^4, lt(g_1) | lt(f)$，所以

$$\begin{aligned} h_1 &= f - \frac{lt(f)}{lt(g_1)} g_1 \\ &= -X^2Z^4 + Y^3Z^3 - X^2Y^2Z + X^2YZ^2 - XZ^3 + Z^4 + X^3 + XY^2 + Y^2Z \\ &\quad - (-X^2Z^4 + XY^2Z^3) \\ &= -XY^2Z^3 + Y^3Z^3 - X^2Y^2Z + X^2YZ^2 - XZ^3 + Z^4 + X^3 + XY^2 + Y^2Z \end{aligned}$$

由于$lt(g_2) = Y^2Z, lt(h_1) = -XY^2Z^3, lt(g_2) | lt(h_1)$，所以

$$\begin{aligned} h_2 &= h_1 - \frac{lt(h_1)}{lt(g_2)} g_2 \\ &= -XY^2Z^3 + Y^3Z^3 - X^2Y^2Z + X^2YZ^2 - XZ^3 + Z^4 + X^3 + XY^2 + Y^2Z \\ &\quad - (-XY^2Z^3 + XYZ^4) \\ &= -XYZ^4 + Y^3Z^3 - X^2Y^2Z + X^2YZ^2 - XZ^3 + Z^4 + X^3 + XY^2 + Y^2Z \end{aligned}$$

即$f \xrightarrow{G} h$为

$-XYZ^4 + Y^3Z^3 - X^2Y^2Z + X^2YZ^2 - XZ^3 + Z^4 + X^3 + XY^2 + Y^2Z$。