补充讲义

王歆

2017.9.20

1　准备公式

不妨设在地固坐标系测站不变位置为 $\vec{R}_{site}$，t 时刻位置为 $R(t)$

$$\vec{R}(t) = R_z(-S_G(t))\vec{R}_{site} \tag{1}$$

其中 R_z 是绕 Z 轴旋转的旋转矩阵，S_G 是格林尼治恒星时。时间系统所包含的内容十分丰富，先简化采用平太阳时到平恒星时的转换。J2000.0 历元的格林尼治平恒星时由下式给出：

$$S_G = 18^h.6973746 + 879000^h.0513367t + 0.^s093104t^2 - 6^s.2 \times 10^{-6}t^3 \tag{2}$$

其中 t 是 J2000.0(JD=2451545) 起算的儒略世纪数。

在数值计算中，常采用位置、速度矢量作为基本变量，但轨道根数能直接反映轨道运动的特征，也是常用的轨道量。因此，在计算中就会遇到相互转换的问题。将根数转换为位置、速度矢量可用下面的一组公式：

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{r} & = & a(\cos E - e)\hat{P} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\hat{Q} \\ \\ \dot{\vec{r}} & = & -\dfrac{\sqrt{\mu a}}{r}\left[\sin E\hat{P} - \sqrt{1-e^2}\cos E\hat{Q}\right] \end{array}\right. \tag{3}$$

$$\hat{P} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\omega\sin i \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\ -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\ \cos\omega\sin i \end{pmatrix}$$

R_X,R_Y,R_Z 是三个旋转矩阵。若时间根数不是用 E，而是 M 或 f，则需要做一次转换，将 M 变为 E 时，转换中会遇到 Kepler 方程的求解。将根数转换为位置、速度矢量实质上是星历计算问题，即已知 t_0 时刻天体的根数 σ_0，就可给出任意时刻相应的天体位置。

利用二体问题基本关系式，不难给出位置、速度矢量到根数的转换关系。根据活力公式和 Kepler 方程可给出 a, e, M 的表达式，即

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}$$

$$\left.\begin{array}{l} e\cos E = 1 - \dfrac{r}{a} \\ e\sin E = r\dot{r}/\sqrt{\mu a} \end{array}\right\}$$

i, Ω, ω 三个根数确定了,$\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$ 三个单位矢量，而这三个矢量又由 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 确定，容易解出

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \frac{\cos E}{r}\vec{r} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}\sin E\dot{\vec{r}} \\ \hat{Q} &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{\sin E}{r}\vec{r} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}(\cos E - e)\dot{\vec{r}}\right] \\ \hat{R} &= (\vec{r}\times\dot{\vec{r}})/\sqrt{\mu a(1-e^2)} \end{aligned}$$

利用它们的分量可得

$$\begin{array}{l} \omega = tg^{-1}(P_z/Q_z) \\ \Omega = tg^{-1}[R_x/(-R_y)] \\ i = \cos^{-1} R_z \end{array}$$

计算 E, ω, Ω 时要注意象限问题，故必须用两个三角函数值，而 i 的范围是 $0 - 180^\circ$ 故一个 $\cos i$ 值就够了。

2 Laplace 方法

有测量关系：

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{R} \tag{4}$$

令 $\vec{L} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}$

上式可写作：

$$\vec{r} = \rho\vec{L} + \vec{R} \tag{5}$$

但我们并不需要求测站与卫星的距离 ρ，将上式两边叉乘 $\vec{L}$ 得：

$$\vec{r} \times \vec{L} = \vec{R} \times \vec{L} \tag{6}$$

设 t_0 时的位置、速度矢量为 $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$，则 $\vec{r}$ 满足 $\vec{r} = F\vec{r}_0 + G\dot{\vec{r}}_0$，带入上式。

$$(F\vec{r}_0 + G\dot{\vec{r}}_0) \times \vec{L} = \vec{R} \times \vec{L} \tag{7}$$

上式中只有 $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$ 是未知的。对于每一个资料，上式的三个分量可扩展为三个方程，但很容易证明其中只有两个是独立的，可任取两个。

那么 3 个资料就可得到 6 个独立的方程，求解 6 个未知数，完成定初轨。尽管上式中的 F, G 是 t_0 时的位置、速度矢量的函数，但可将 F, G 看作已知，用迭代方法来求解上式扩展成的方程组。F, G 的级数展开式为：

$$\left\{\begin{array}{lcl} F & = & 1 - \frac{1}{2}u_3\tau^2 + \frac{1}{2}u_5\sigma\tau^3 + \frac{1}{24}u_5(3V_0^2 - 2u_1 - 15u_2\sigma^2)\tau^4 + \frac{1}{8}u_7\sigma(-3V_0^2 + 2u_1 + 7u_2\sigma^2)\tau^5 \\ & & +\frac{1}{720}u_7\Big[u_2\sigma^2(630V_0^2 - 420u_1 - 945u_2\sigma^2) - (22u_2 - 66u_1V_0^2 + 45V_0^4)\Big]\tau^6 + \cdots \\ G & = & \tau - \frac{1}{6}u_3\tau^3 + \frac{1}{4}u_5\sigma\tau^4 + \frac{1}{120}u_5(9V_0^2 - 8u_1 - 45u_2\sigma^2)\tau^5 + \frac{1}{24}u_7\sigma(-6V_0^2 + 5u_1 + 14u_2\sigma^2)\tau^6 \\ & & + \cdots \end{array}\right.$$

其中 $\tau = t - t_0$ （无量纲），$\sigma = \vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0$ ，$V_0^2 = \dot{\vec{r}}_0^2$，$u_n = 1/r_0^n$。

迭代初值可取：

$$\begin{cases} F_j^{(0)} = 1 - \dfrac{1}{2r_0^3}\tau^2 \\ \\ G_j^{(0)} = \tau - \dfrac{1}{6r_0^3}\tau^3 \end{cases} \quad \text{甚至} \quad \begin{cases} F_j^{(0)} = 1 \\ G_j^{(0)} = \tau \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3$$

迭代由 $\max(\Delta F_j, \Delta G_j) < \varepsilon$ 控制。$\Delta F_j = |F_j^{(k+1)} - F_j^{(k)}|$,$\Delta G_j = |G_j^{(k+1)} - G_j^{(k)}|$

在第二次迭代时，由于已有参考的 $\vec{r}$ 和 $\dot{\vec{r}}$，可采用 F, G 封闭公式

$$F = 1 - \frac{a}{r}(1 - \cos\Delta E)$$

$$G = \tau - \frac{1}{n}(\Delta E - \sin\Delta E)$$

$$\Delta E = n\tau + (1 - \frac{r_0}{a})\sin\Delta E - \frac{r_0\dot{r}_0}{\sqrt{\mu a}}(1 - \cos\Delta E)$$

尽管定轨是短弧定轨, 但在当今技术条件下短弧段上仍可或得较多的资料。这样, 就有多于 6 个方程来求 6 个未知数。采用最小二乘法，综合全部方程形成法方程求解。这样就不会因个别资料的误差引起较大的定轨误差。

3 Kepler 方程求解

Kepler 方程

$$M = E - e\sin E$$

简单迭代方法：

$$E_n = M + e\sin E_{n-1}$$

$E_0 = M$, 带入上式，求得 E_n, 直至收敛.

牛顿迭代法本质就是微分改进：

$$f(E) = E - e\sin E - M$$

求 $f(E) = 0$ 的根。在 E_0 处展开：

$$0 = f(E) = f(E_0) + f'(E_0)\Delta E$$

$$f(E)-f(E_0)=f'(E_0)\Delta E=-f(E_0)$$

$$\Delta E=-f(E_0)/f'(E_0)$$

由此得到更新公式：

$$E_{n+1}=E_n+\Delta E=E_n-\frac{f(E_n)}{f'(E_n)}$$

4 计算单位

采用如下单位量纲 $[M]=M_e,[L]=a_e,[T]=\sqrt{a^3/\mu}$, 单位转换后 $\mu=1$. 其中 M_e 和 a_e 为地球质量和赤道半径，$\mu=GM_e=398600.4415km^3/s^2$

5 二体问题常用公式

$$r=\frac{p}{1+e\cos f}=\frac{h^2/\mu}{1+e\cos f}=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}=a(1-e\cos E)$$

$$n^2a^3=\mu,n=\frac{2\pi}{T}$$

$$v^2=\mu(\frac{2}{r}-\frac{1}{a})$$

$$r\cos f=a(\cos E-e),r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin E$$

$$e\cos E=1-\frac{r}{a},e\sin E=\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{a^2n}$$

$$\tan\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$$

$$M=E-e\sin E$$

$$\frac{\vec{A}}{\mu}=\vec{e}=\frac{1}{\mu}\dot{\vec{r}}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})-\frac{\vec{r}}{r}=\frac{1}{\mu}\left[(v^2-\frac{\mu}{r})\vec{r}-(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}}\right]$$