

Matemática Discreta I

Lista 5 - Relações

- 1) Encontre todas as relações de A em B onde $A = \{1\}$ e $B = \{a, b, c\}$.
- 2) Determine as relações inversas das relações abaixo.
- a) $H = \{(b, 2), (a, 1), (a, 3), (d, 2)\}$;
 - b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$;
 - c) $T = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x > y - 1\}$;
 - d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 > y\}$.
- 3) Represente geometricamente as relações do Exercício 2 através do diagrama cartesiano.
- 4) Verifique se as relações abaixo satisfazem as propriedades reflexiva, simétrica, transitiva e anti-simétrica.
- a) $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, b)\}$;
 - b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = 1\}$;
 - c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x > y^3\}$;
 - d) $A = \{x : x \text{ é uma reta do plano cartesiano}\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times A : x \text{ é paralela a } y\}$;
 - e) $A = \{x : x \text{ é um ser humano}\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times A : x \text{ ama } y\}$.
- 5) Sejam R e S relações de equivalência sobre um mesmo conjunto A . Mostre que a classe de equivalência de x em $R \cap S$ é a interseção das classes de equivalência de x em R e S , ou seja,
- $$C_x(R \cap S) = C_x(R) \cap C_x(S).$$
- 6) Verifique quais das relações a seguir são relações de equivalência sobre o conjunto A dado.
- a) $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$;
 - b) $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a), (c, c)\}$;
 - c) A um conjunto qualquer e a relação $A \times A$;
 - d) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e R a relação em A onde $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$.
- 7) Seja A um conjunto não-vazio e E um subconjunto fixo de A . Dados X e Y no conjunto das partes de A , denotado por $P(A)$, mostre que a relação R em $P(A)$ definida por $X R Y \iff X \cap E = Y \cap E$

é uma relação de equivalência em $P(A)$.

8) Determine o conjunto A e a relação R conhecendo o conjunto quociente $A \setminus R$.

a) $A \setminus R = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}\};$

b) $A \setminus R = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}\};$

c) $A \setminus R = \{\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}, \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\}\}.$

9) Determine o conjunto quociente das relações de equivalência abaixo.

a) O produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

b) A relação identidade $I_{\mathbb{R}}$;

c) $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\};$

d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x - y \text{ é divisível por } 10\}.$

10) É possível uma relação ser de equivalência e de ordem ao mesmo tempo?

11) Determine se as relações abaixo são relações de ordem parcial, ordem total, ou nenhum dos dois.

a) $A = \{a, b, c, d\}$ e $R = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, d), (c, d)\};$

b) $A = \{a, b, c, d\}$ e $R = \{(a, a), (a, b), (d, d), (b, b), (b, d), (c, c)\};$

c) $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (c, a), (c, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}.$

12) Considere a relação \preceq em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff (x_1 < x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \geq y_2).$$

Mostre que \preceq é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

13) Uma relação R em um conjunto A é denominada **relação de ordem estrita** se satisfaz a propriedade transitiva e a propriedade $(\forall x \in A)(\sim (xRx))$, denominada **irreflexiva**, (uma relação é irreflexiva se nenhum elemento de A está relacionado consigo mesmo).

a) Mostre que toda relação de ordem estrita satisfaz a propriedade antissimétrica;

b) A relação no conjunto dos números reais dada por “ $x R y$ se, e somente se, x é menor que y ” é uma relação de ordem estrita.

14) Faça o diagrama de linhas das seguintes relações de ordem em $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

a) Ordem usual em \mathbb{N} ;

b) Ordem por divisibilidade.

15) Dado $A = \{a, b, c, d\}$, considere R a relação de ordem sobre o conjunto das partes de A definida por $X R Y \iff X \subset Y$. Construa o diagrama de linhas dessa relação.