

Conceitos e definições

Marco A L Barbosa

malbarbo.pro.br

Departamento de Informática

Universidade Estadual de Maringá



Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons - Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional.

<http://github.com/malbarbo/na-grafos>

Um **grafo orientado** G é um par (V, E) , onde

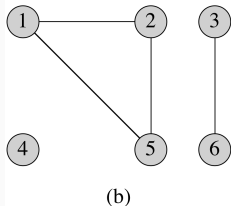
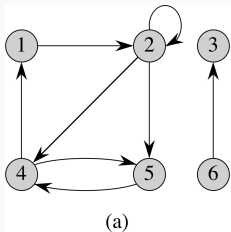
- V é um conjunto finito, chamado de **conjunto de vértices**
- E é um conjunto de pares ordenados de V , chamado de **conjunto de arestas**

Em um **grafo não orientado** $G = (V, E)$, E é um conjunto de pares de vértices não ordenados.

Os grafos podem ser representados graficamente

- Os vértices são desenhados como círculos
- As arestas são desenhadas como curvas ligando dois círculos, no caso de grafos orientados, as curvas tem um seta em uma das extremidades

Exemplos



Na figura B-2-a, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas?

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

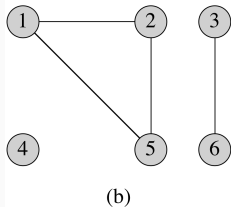
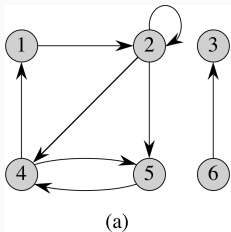
$$E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

Na figura B-2-b, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas?

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$$

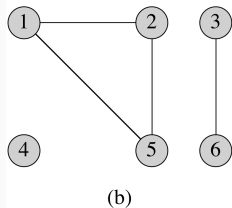
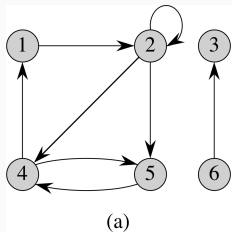
Exemplos



Em grafos orientados são permitidos **laços** (arestas de um vértice para ele mesmo – *autoloop* em inglês). Exemplo: aresta (2, 2) da figura B-2-a.

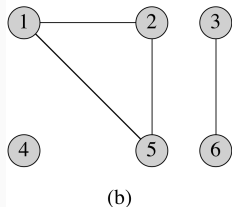
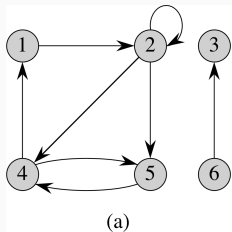
Um grafo orientado sem laços é chamado de **grafo simples**.

Exemplos



Em grafos não orientados os laços não são permitidos.

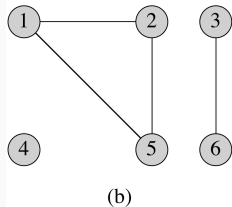
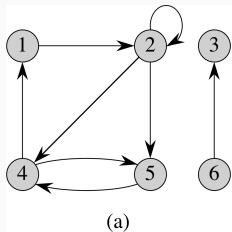
Para grafos não orientados, utilizamos a notação (u, v) para denotar uma aresta, ao invés da notação de conjunto $\{u, v\}$. Dessa forma, (u, v) e (v, u) são consideradas a mesma aresta.



Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v .

Quais as arestas que saem do vértice 2 na figura B-2-a?
 $(2, 2)$, $(2, 4)$ e $(2, 5)$.

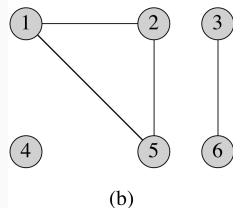
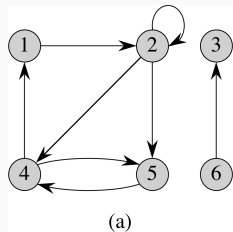
Quais as arestas que entram no vértice 2 na figura B-2-a?
 $(1, 2)$ e $(5, 2)$.



Para uma aresta (u, v) em um grafo não orientado, dizemos que (u, v) é **incidente** nos vértices u e v .

Quais são as arestas incidentes no vértice 2 da figura B-2-b?
(1, 2) e (2, 5).

Adjacência

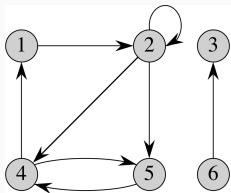


Para uma aresta (u, v) , dizemos que o vértice v é **adjacente** ao vértice u .

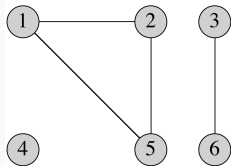
Para grafos não orientados, a relação de adjacência é simétrica.

Se v é adjacente a u em um grafo orientado, escrevemos $u \rightarrow v$.

O vértice 1 é adjacente ao vértice 2 na figura B-2-b? Sim. E na figura B-2-a? Não, pois não existe a aresta $(2, 1)$.



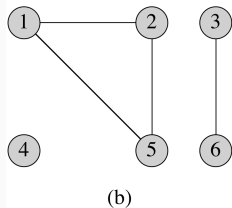
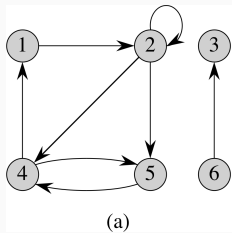
(a)



(b)

Em um grafo orientado

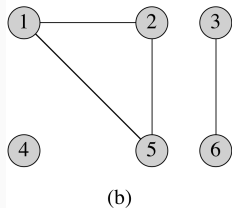
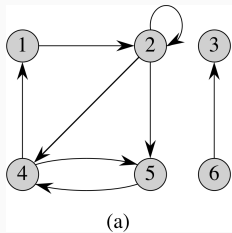
- O **grau de saída** de um vértice é o número de arestas que saem dele
- O **grau de entrada** de um vértice é o número de arestas que entram nele
- O **grau** de um vértice é soma do grau de saída e do grau de entrada
- Na figura B-2-a, qual é o grau de entrada, o grau de saída e o grau do vértice 2?
2, 3 e 5.



Em um grafo não orientado

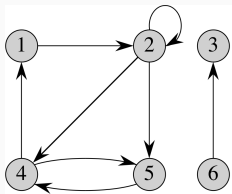
- O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele
- Na figura B-2-b, qual é o grau do vértice 2?

2

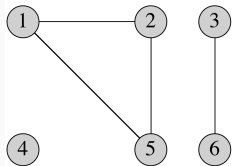


Um vértice **isolado** tem grau 0.

- Existe algum vértice isolado nos grafos da figura B-2? Sim, o vértice 4 da figura B-2-b.



(a)



(b)

Um **caminho** de **comprimento** k de um vértice u até um vértice u' em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ de vértices tal que $u = v_0$, $u' = v_k$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $i = 1, 2, \dots, k$.

O comprimento do caminho (k) é a quantidade de aresta no caminho.

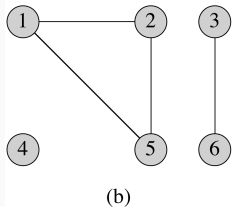
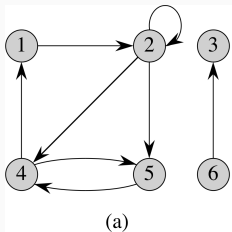
O caminho **contém** os vértice v_0, v_1, \dots, v_k e as arestas

$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$.

Se existe um caminho p de u até u' , dizemos que u' é **acessível** a partir de u via p , ou $u \xrightarrow{p} u'$ se o grafo é orientado.

Sempre existe um caminho de comprimento 0 de u para u .

Exemplos da figura B-2-a: $\langle 1, 2, 5, 4 \rangle$, $\langle 2, 5, 4, 5 \rangle$ e $\langle 3 \rangle$.



Um caminho é **simples** se todos os vértices no caminho são distintos.

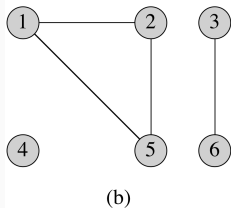
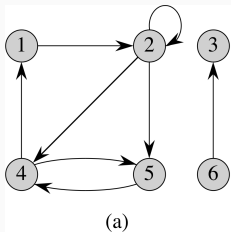
Existe um caminho de tamanho 5 no grafo da figura B-2-a?

Sim. Por exemplo, $\langle 1, 2, 5, 4, 1, 2 \rangle$

Existe um caminho simples de tamanho 5 no grafo da figura B-2-a?

Não.

Um **subcaminho** do caminho $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ é uma subsequência contígua de seus vértices. Por exemplo, o caminho $\langle 2, 5, 4 \rangle$ é um subcaminho de $\langle 1, 2, 5, 4, 1, 2 \rangle$.

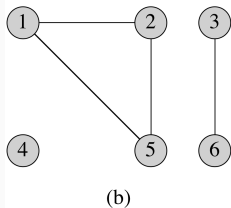
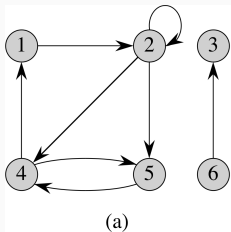


Em um grafo orientado

- Um caminho $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ forma um **ciclo** se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta.
- O ciclo é **simples** se além disso v_1, v_2, \dots, v_k são distintos.

Dois caminhos $\langle v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ e $\langle v'_0, v'_1, \dots, v'_{k-1}, v'_0 \rangle$ formam o mesmo ciclo se existe um inteiro j tal que $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$.

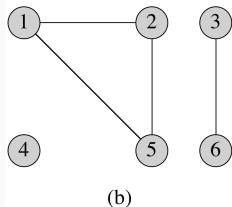
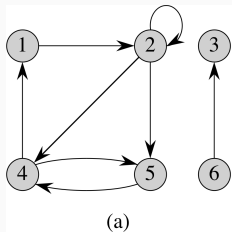
- Considerando a figura B-2-a, dê dois caminhos que formam o mesmo ciclo que o caminho $\langle 1, 2, 4, 1 \rangle$
 $\langle 2, 4, 1, 2 \rangle$ e $\langle 4, 1, 2, 4 \rangle$.



Em um grafo não orientado

- Um caminho $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ forma um **ciclo** se $k > 0$, $v_0 = v_k$ e todas as arestas do caminho são distintas. (Esta definição é diferente em algumas versões do Cormen. Vamos considerar correta a definição que estamos apresentando aqui)
- O ciclo é **simples** se v_1, v_2, \dots, v_k são distintos.

Um grafo sem ciclos é **acíclico**.



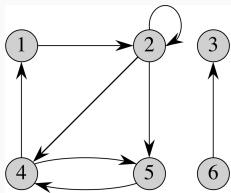
Um grafo não orientado é **conexo** (conectado) se cada vértice é acessível a partir de todos os outros.

Os **componentes conexos** de um grafo são as classes de equivalência de vértices sob a relação “é acessível a partir de”.

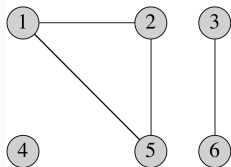
Na figura B-2-b quais são os componentes conexos?

$\{1, 2, 5\}$, $\{3, 6\}$ e $\{4\}$

Um grafo não orientado é conexo se tem exatamente um componente conexo.



(a)



(b)

Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para cada par de vértices (u, v) , v é acessível a partir de u .

Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação “são mutuamente acessíveis”.

Quais os componentes fortemente conexos da figura B-2-a?

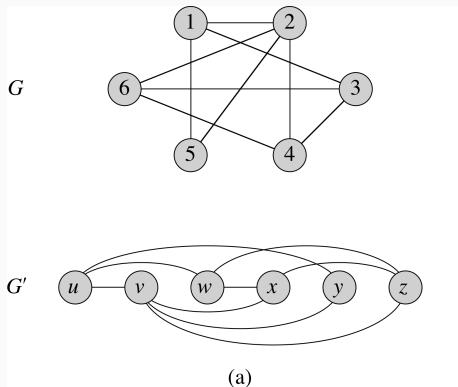
$\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$ e $\{6\}$.

- Todos os pares de vértices em $\{1, 2, 4, 5\}$ são mutuamente acessíveis.
- Os vértices $\{3, 6\}$ não formam um componente fortemente conexo por quê? O vértice 6 não é acessível a partir do vértice 3;

Um grafo orientado é fortemente conexo se ele só tem um componente fortemente conexo.

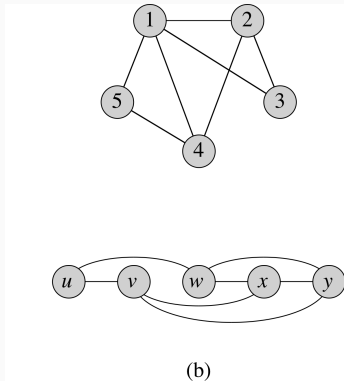
Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são **isomorfos** se existe uma bijeção $f : V \rightarrow V'$ tal que $(u, v) \in E$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in E'$

Ideia: podemos identificar os vértices de G como vértices de G' , mantendo as arestas correspondentes em G e G' .



Os grafos da figura B-3-a são isomorfos entre si?

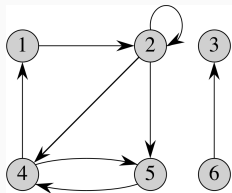
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$
- $|V| = 6$ e $|V'| = 6$; $|E| = 9$ e $|E'| = 9$
- Mapeamento de V para V' dado pela função bijetora
 $f(1) = u, f(2) = v, f(3) = w, f(4) = x, f(5) = y,$
 $f(6) = z$
- Sim, são isomorfos



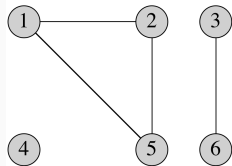
Os grafos da figura B-3-b, são isomorfos?

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y\}$
- $|V| = 5$ e $|V'| = 5$; $|E| = 7$ e $|E'| = 7$
- G tem um vértice de grau 4, mas G' não tem
- Não são isomorfos

Subgrafos



(a)



(b)

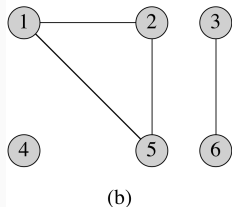
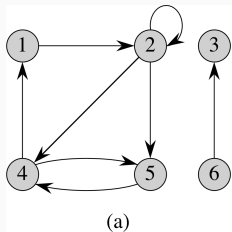
$G' = (V', E')$ é um **subgrafo** de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Dado um conjunto V' de modo que $V' \subseteq V$, o subgrafo de G **induzido** por V' é o grafo $G' = (V', E')$, onde $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$.

Qual é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 6\}$ na figura B-2-a?

$G = (\{1, 2, 3, 6\}, \{(1, 2), (2, 2), (6, 3)\})$.

Versões orientada e não orientada



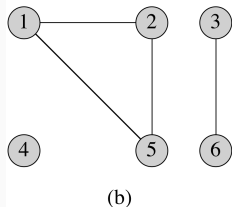
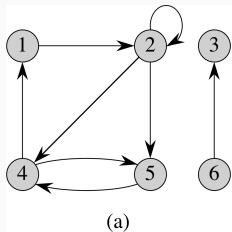
Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, a **versão orientada** de G é o grafo orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $(u, v) \in E$

- Cada aresta não orientada (u, v) em G é substituída na versão orientada pelas duas arestas orientadas (u, v) e (v, u)
- Qual é a versão orientada do grafo da figura B-2-b?

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3)\}$$

Versões orientada e não orientada

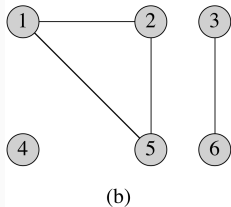
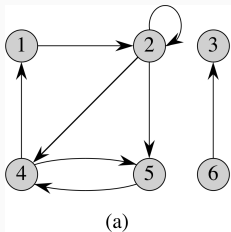


Dado um grafo orientado $G = (V, E)$, a **versão não orientada** de G é o grafo não orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in E$

- A versão não orientada contém as arestas de G “com suas orientações removidas” e laços eliminados
- Mesmo que o grafo orientado contenha as arestas (u, v) e (v, u) , o grafo não orientado conterá (u, v) somente uma vez
- Qual é a versão não orientada do grafo da figura B-2-a?

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 5)\}$$



Em um grafo orientado, um vizinho de um vértice u é qualquer vértice que seja adjacente a u na versão não orientada

- v é **vizinho** de u se $(u, v) \in E$ ou $(v, u) \in E$
- Na figura B-2-a, quais os vizinhos do vértice 2?
1, 4, 5

Em um grafo não orientado, u e v são vizinhos se são adjacentes.

Grafo completo é um grafo não orientado no qual todo par de vértices é adjacente.

Um grafo completo com n vértices é chamado de K_n .

Desenhe os grafos K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 .

Grafo bipartido é um grafo não orientado $G = (V, E)$ em que V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que $(u, v) \in E$ implica que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou $u \in V_2$ e $v \in V_1$.

- Todas as arestas ficam entre os dois conjuntos V_1 e V_2 .

Dê um exemplo de um grafo bipartido.

Um grafo conexo acíclico não orientado é uma **árvore**

- Dê um exemplo de uma árvore.

Um grafo acíclico não orientado é uma **floresta**

- Dê um exemplo de uma floresta.

Um grafo acíclico orientado é chamado de **GAO**

- Dê um exemplo de um GAO.

Semelhantes a grafos não orientados

- **Multigrafo:** pode ter várias arestas entre vértices e também laços
- **Hipergrafo:** cada **hiperaresta**, em lugar de conectar dois vértices, conecta um subconjunto arbitrário de vértices

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition. Capítulo B.4.