Matemática Discreta I

Lista 2 - Predicados

1. Encontre as negações de cada uma das seguintes proposições:
   (a) Todas as cobras são répteis.
   (b) Alguns músicos não são sociáveis.
   (c) Alguns cavalos são dóceis.
   (d) Todo número par maior que 2 não é primo.

2. Escreva em linguagem simbólica as seguintes proposições:
   (a) Para qualquer natural x, existe um número natural y menor do que x.
   (b) Para quaisquer números naturais x e y, x é menor ou igual a y ou y é menor ou igual a x.
   (c) O número dois é menor número natural.
   (d) Zero é elemento neutro da soma.
   (e) Dados dois números reais distintos, sempre existe um número real entre eles.

3. Considere os predicados

$$P(x): \text{“}x^2 - 2 = 0\text{”}, \quad Q(x): \text{“}x > 3\text{”} \quad e \quad R(x): \text{“}x^2 - 9 = 0\text{”}.$$

   Determine o valor verdade das proposições abaixo.

   (a) $(\exists x \in \mathbb{N})(P(x))$
   (b) $(\exists x \in \mathbb{R})(P(x))$
   (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(R(x) \to Q(x))$
   (d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\sim Q(x))$
   (e) $(\forall x \in \mathbb{R})(Q(x) \to R(x))$
   (f) $(\exists x \in \mathbb{Z})[\sim Q(x) \wedge (P(x) \to R(x))]$
   (g) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sim Q(x) \vee \sim R(x))$

4. Determine o valor verdade das proposições abaixo.

   (a) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(x + y = 0)$
   (b) $(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})(x + y = 0)$
   (c) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(xy = 1)$
   (d) $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1)$
   (e) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(x \leq y)$
   (f) $(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})(x \leq y)$
   (g) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(\exists z \in \mathbb{Z})(y < x < z)$
   (h) $(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})(x + y = y)$
   (i) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x = y^2)$
   (j) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{R})(x = y^2)$
   (k) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[(xy > 0) \to (x > 0 \wedge y > 0)]$
   (l) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})(\exists z \in \mathbb{Z})(x - y = z)$
   (m) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N})(x - y = z)$

5. Escreva a negação de cada um dos predicados abaixo sem utilizar o símbolo $\sim$.

(a) $(\forall x \in \mathbb{Z})(x + 2 = 5)$ (b) $(\exists x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(x + y < 0)$ (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x - y = 0)$

(d) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + 3 > 10)$ (e) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(x + 2 > y)$ (f) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy \geq 0)$

6. Seja U o conjunto de todas as pessoas do mundo e G(x), C(x) e I(x) os seguintes predicados sobre este conjunto universo U:

G(x): x é gaúcho;

C(x): x conta estórias;

I(x): x é inteligente.

(a) Escreva em termos lógicos a inferência " Todos os gaúchos contam estórias. Todos os contadores de estórias são inteligentes. João é gaúcho. Portanto, alguém é gaúcho e inteligente."

(b) Justifique usando propriedades (lei transitiva, modus tollens, silogismo disjuntivo, exemplificação universal, etc) a inferência do item (a).

7. Justifique que as seguintes inferências são válidas (usando propriedades):

(a) $(\exists x \in U)(P(x) \wedge R(x)),\ (\forall x \in U)(P(x) \rightarrow Q(x)),\ (\forall x \in U)(\sim Q(x) \vee S(x))$
$\vdash\ (\exists x \in U)(R(x) \wedge S(x))$.

(b) $(\exists x \in U)(A(x) \wedge R(x)),\ (\forall x \in U)(R(x) \rightarrow L(x))\ \vdash\ (\exists x \in U)(A(x) \wedge L(x))$.