UEM

Cálculo Diferencial e Integral II 6877 (2)

Prof. Marcos Vinicius Fagundes Padilha
2019 - Ciência da Computação

Limites e derivadas para funções reais de várias variáveis.

1. Determine e represente o "melhor domínio possível" (o domínio formado pelos pontos de $\mathbb{R}^2$ onde a lei de formação da função faz sentido) para as funções abaixo.

   (a) $f(x,y) = \frac{x\sqrt{-y}}{x^2+y^2}$

   (b) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

   (c) $f(x,y) = \ln(|x| - y)$

   (d) $f(x,y) = \ln(y - x)$

   (e) $f(x,y) = \frac{1}{x^4 - yx^2 + 1}$

   (f) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 4}$.

2. Determine e descreva geometricamente o melhor domínio possível em $\mathbb{R}^3$ para a função $f(x,y,z) = \frac{3x^2 - y^3 + z}{x^2 - y^2 + z^2 + 1}$.

3. Iremos estudar a função

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = x - y^2. \end{aligned}$$

   (a) Descreva D sendo o melhor domínio de $\mathbb{R}^2$ onde a lei de formação da função faz sentido.

   (b) Calcule $f(1,2)$

   (c) Trace as curvas de nível para $z = 0$, $z = 1$ e $z = 2$

   (d) Faça um esboço do gráfico no espaço tridimensional.

4. Seja

$$\begin{aligned} f : (-1,1) \times (0,2) \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1. \end{aligned}$$

   (a) Determine a imagem da função f e a descreva geometricamente.

   (b) Faça um esboço do gráfico de f ou o descreva geometricamente (em $\mathbb{R}^3$).

5. Encontre o conjunto imagem das funções dadas.

   (a) $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$

   (b) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$

   (c) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (d) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

6. Verifique se existe limite nas funções abaixo quando a variável independente tende para a origem do espaço $\mathbb{R}^n$ o qual ela pertence.

   (a) $\frac{y}{\ln(|x|)}$

   (b) $f(x,y) = \frac{x\sqrt{-y}}{x^2+y^2}$

   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$

   (d) $f(x,y) = \frac{x^2 - 2yx + y^2}{x - y}$

   (e) $f(x,y,z,w) = \frac{x^2 w}{x^2+y^2+z^2}$

   (f) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$

   (g) $\frac{x^4 - y^2}{x^2+y^2}$

   (h) $\frac{xz}{x^2+4y^2+9z^2}$

7. Verifique e represente geometricamente qual o maior conjunto onde a funções abaixo são contínuas.

(a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{\ln(x)} \text{ se } x \geq 0 \\ \frac{y}{\ln(x)} \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

(b)
$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + 3y + 1 \text{ se } x \geq 0 \\ 3y^2 + 2x + 1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

(c)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x^2-y^2} \text{ se } x^2 + y^2 \neq 1 \\ 0 \text{ se } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

(d)
$$f(x,y) = \begin{cases} xe^2y \text{ se } x < 0 \\ \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

8.

Theorem 1. Sejam $\alpha, \beta > 0$, a função $f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$ possui limite em $(0,0)$ se, e somente se, $\alpha + \beta > 2$.

Utilize o Teorema acima para decidir se o seguintes limites existem.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6y^2}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{2/3}y^{4/3}}{x^2+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^{7/5}x^{3/4}}{x^2+y^2}$

9. Um grupo de engenheiros desejava construir um prédio com o seguinte formato:

- A parte de entrada do prédio seria metade de uma semi-esfera, ou um quarto de esfera.
- A parte dos fundos seria parte de um paraboloide elíptico cortado ao meio.
- As duas partes deveriam estar perfeitamente conectadas.

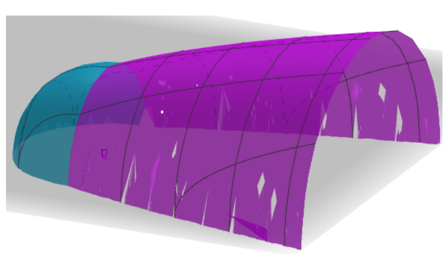
Escolha qual das funções abaixo representa tal construção de forma a preencher os requisitos e então verifique se as duas partes do prédio realmente se conectam e o melhor domínio o qual podemos definir tal função.

(a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2 + x^2 - y^2} \text{ se } y \leq 0 \\ \sqrt{2 - x^2 + y} \text{ se } y > 0 \end{cases}$$

(b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2 - x^2 - y^2} \text{ se } y \leq 0 \\ \sqrt{2 - x^2 + y} \text{ se } y > 0 \end{cases}$$

(c)
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2 - x^2 - y^2} \text{ se } y \leq 0 \\ \sqrt{2 - y + x^2} \text{ se } y > 0 \end{cases}$$

(d)
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2 + x^2 + y^2} \text{ se } y \leq 0 \\ \sqrt{2 + x^2 + y} \text{ se } y > 0 \end{cases}$$



10. Calcule todas as derivadas de ordem 2 das funções abaixo:

(a) $f(x,y) = x^2 - 5x + 6 + y^2$;

(b) $f(x,y) = x^{\ln(2y)}$;

(c) $f(x,y) = e^{2x+y}$;

(d) $f(x,y) = 2^{-x+3y^2}$;

(e) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$;

(f) $f(x,y) = \sin(xy)\cos(xy)$.

11. Encontre o plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^3 + y$ no ponto $(0,0)$.

12. Seja $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

    (a) Calcule as derivadas parciais de f em relação a x e y.

    (b) Calcule a derivada direcional na direção do vetor $\vec{u} = (32, 12)$.

    (c) Defina $h(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ e calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} h(x,y)$.

    (d) Sabendo que $g(x,y) = xy$, assinale a alternativa correta

    i. $h(x,y) = 3(f(x,y) - g(x,y))$;

    ii. $h^2(x,y) = 9(f(x,y) + g(x,y))$;

    iii. $h^2(x,y) = 6(f(x,y) - g(x,y))$;

    iv. $h(x,y) = \sqrt{f(x,y) - g(x,y)}$.

13. Considere a função $f(x,y) = \sin(xy)$ definida sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$.

    (a) Mostre que o Teorema de Clairaut-Schwarz vale para f.

    (b) Defina a curva do plano $\gamma_1(t) = (t, \frac{\pi}{2})$ e expresse os pontos sobre γ_1 tais que $f(x,y) = 0$.

    (c) Sendo $g(x,y) = -\cos(xy)$, calcule:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{f(x,y)}{\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)}.$$

14. Calcule a seguinte expressão

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big(e^{2xy} + \sin(x+y)\Big).$$

15. Dada a função $f(x,y) = \big(\cos(xy)\big)^{1/2}$ e os vetores $\vec{u} = (1,1)$ e $\vec{v} = (2,1)$. Calcule:

    (a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\frac{1}{4}, \pi)$;

    (b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\frac{1}{4}, \pi)$;

    (c) $\frac{\partial f}{\partial \nabla f(\frac{1}{4}, \pi)}(\frac{1}{4}, \pi)$

16. Determine os pontos de máximo e mínimo locais e os pontos de sela das funções abaixo:

    (a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{y^2}$;

    (b) $f(x,y) = y\tan(x)$;

    (c) $f(x,y) = 3$;

    (d) $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + z^8$;

    (e) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

    (f) $f(x,y) = e^{x^y} x^2$.