Matemática Discreta I

Lista 6 - Funções

1) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 10$. Encontre a imagem de 2, a imagem de 8 e todas as pré-imagens de 6.

2) O que ocorre com o diagrama cartesiano de uma função em relação as retas verticais? O mesmo ocorre com as retas horizontais?

3) Quantas funções $f : A \to B$ é possível construir utilizando os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$?

4) Considere $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(x) = 3x$ e $g(x) = x^2$ onde $A = \{0, 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x = 0\}$. As funções são iguais ou diferentes?

5) Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. Determine todas as funções de A em B. Verifique quais são injetoras e quais são sobrejetoras. Tem alguma bijetora?

6) Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x$ não é injetora nem sobrejetora.

7) Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x - 20$ é bijetora e calcule sua inversa.

8) Seja $S = \{(x, (x + 2, x^2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$.

a) Mostre que $(S, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ é uma função.

b) Mostre que $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é injetora.

c) Mostre que $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ não é sobrejetora.

9) Em cada uma das funções abaixo, verifique se (f, A, B) é injetora e/ou sobrejetora e faça um esboço do gráfico de f (representação cartesiana de $Gr(f)$).

a) $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ e $Gr(f) = \{(x, 3x) : x \in A\}$;

b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $Gr(f) = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}$;

c) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $Gr(f) = \{(a, 2), (b, 2), (c, 1)\}$;

d) A e B arbitrários, $b \in B$ fixo e $Gr(f) = \{(x, b) : x \in A\}$;

e) A arbitrário, $B = A$ e $Gr(f) = \{(x, x) : x \in A\}$;

f) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e $Gr(f) = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$;

g) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e $Gr(f) = \{(x, x^4) : x \in \mathbb{R}\}$.

10) Encontre as inversas das funções bijetoras abaixo.

a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 3x - 7$;

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3 + 5$;

c) $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ dada por $g(x) = \frac{2x+7}{x-3}$.

11) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = 2x$ é bijetora? E a função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ onde $g(x) = 2x$?

12) Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ funções tais que $A \cap B \neq \emptyset$, definimos:

1. a **função soma de f e g** por $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ onde $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;

2. a **função diferença de f e g** por $f - g : A \cap B \to \mathbb{R}$ onde $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;

3. a **função produto de f e g** por $f \cdot g : A \cap B \to \mathbb{R}$ onde $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

4. a **função quociente de f e g** por $f/g : (A \cap B) \setminus C \to \mathbb{R}$ onde $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ e $C = \{x \in B : g(x) = 0\}$.

Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = 1 - x^2$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $g(x) = 1 + x^2$. Determine $f + g$,$f - g$,$f \cdot g$, f/g e g/f.