Matemática Discreta II
Prof$^{\text{o}}$ Pablo Henrique Perondi

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

1) Considere as operações em $\mathbb{R}$ definidas por

$$-: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x - y \qquad (x, y) \mapsto x$$

a) Estas operações são associativas?
b) Estas operações são comutativas?
c) Estas operações possuem elemento neutro? Se sim, qual?
d) Quais elementos de $\mathbb{R}$ são simetrizáveis em relação a estas operações?
e) Quais elementos de $\mathbb{R}$ são regulares em relação a estas operações?

2) Denote por $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de ordem 2 por 3 com entradas reais. Considere

$$+ : M_{2\times3}(\mathbb{R}) \times M_{2\times3}(\mathbb{R}) \to M_{2\times3}(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \mapsto A + B$$

a soma usual entre matrizes. $(M_{2\times3}(\mathbb{R}), +)$ é um grupo?

3) Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Considere

$$\circ : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

a operação de composição de funções em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
a) Verifique se esta operação é associativa, se é comutativa, se possui elemento neutro e quais são os elementos simetrizáveis.
b) $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \circ)$ é um grupo? Qual subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é um grupo com esta operação?

4) Fixado $m \geq 2$ inteiro, seja $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ o conjunto das classes de equivalência módulo m. Considere as operações de soma e multiplicação em $\mathbb{Z}_m$ definidas por

$$+ : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m \qquad \cdot : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x + y} \qquad (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x \cdot y}$$

a) Estas operações são associativas?
b) Estas operações são comutativas?
c) Estas operações possuem elemento neutro? Se sim, qual?
d) Quais elementos de $\mathbb{Z}_m$ são simetrizáveis em relação a operação de soma?

e) Quais elementos de $\mathbb{Z}_m$ são simetrizáveis em relação a operação de multiplicação?
f) $(\mathbb{Z}_m, +)$ é um grupo?
g) $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ é um grupo?
h) Quais elementos de $\mathbb{Z}_m$ são regulares em relação a operação de soma?
i) Quais elementos de $\mathbb{Z}_m$ são regulares em relação a operação de multiplicação?

5) Fixado $m \geq 2$ inteiro, considere

$$\mathbb{Z}_m^* = \mathbb{Z}_m \backslash \{\overline{0}\} = \{\overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}.$$

a) Se m é um número composto, então a multiplicação usual entre classes de equivalências é uma operação em $\mathbb{Z}_m^*$?
b) Se m é um número primo, então a multiplicação usual entre classes de equivalências é uma operação em $\mathbb{Z}_m^*$?
c) Mostre que se m é um número primo, então $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ é um grupo comutativo.

6) Considere a operação $*$ definida por

$$* : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$
$$\big((a,b),(c,d)\big) \mapsto (ac - bd, ad + bc)$$

Mostre que $\big(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, *\big)$ é um grupo comutativo onde (1,0) é o elemento neutro e a inversa de um elemento (a,b) é $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

7) Verifique que o conjunto $H = \{a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R}^* : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um subgrupo de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

8) Considere o grupo comutativo $(\mathbb{R}^2, +)$, onde a soma é definida por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Verifique se os subconjuntos abaixo são subgrupos de $(\mathbb{R}^2, +)$ ou não.
a) $H_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$;
b) $H_2 = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$;
c) $H_3 = \{(x, y) : x + y = 0\}$.