4.7 Poisson Dist

X : # of Bernoulli success (events) in a time interval

$$P_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$$E[X] = \sigma_X^2 = \lambda$$

4.8 Exponential Dist.

X : lifetime, decaying time
(방사성 동위원소가 얼마나 감쇠하는지 → 반감기)

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} = P(X \leq x)$$

↳ 최대 time x 까지 생존 확률

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

↱ geometri dist. $P(1-P)^{k-1}$

difference equation → discrete : a^k

difference equation → continuous : e^x

↳ exponential dist.

- forgetfulness (Memoryless)

⇒ Consider a system has not failed by time t, then $s>0$. 최대 $t+s$ 까지 생존.

어떤 시스템이 t 시점까지 죽지 않고 살아있을 때, 최대 $t+s$ 까지 생존할 확률?

↳ Condition. $X > t$

$$P(X \leq t+s \mid X > t)$$

$$= \frac{P(X \leq t+s \cap X > t)}{P(X>t)} = \frac{P(t < X \leq t+s)}{1 - P(X \leq t)} = \frac{F_X(t+s) - F_X(t)}{1 - F_X(t)}$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s} = F_X(s)$$

↳ t는 여기에 들어가 있지 않다.
추가로 더 생각하고자 하는 시간 s에 대해서만, 그것도 exponential dist의 모양으로만 바뀐다. ⤳ Memoryless

그동안 얼마나 생존해 있었는지 상관없고 이 시점부터 추가로 얼마나 살지에 대한 추가 시간만 exponential dist 이다.

Continuous , time ↑   Discrete , # of events ↑

◦ Relation between Exponential Distribution & Poisson Distribution

⇒ for a poisson dist with λ per unit time.
↳ 단위 시간 당 평균 시간

$$P_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots$$

⇒ for time interval t, ⇒ $\lambda \rightarrow \lambda t$ 평균이 바뀌었다.

$$P_X(x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!}e^{-\lambda t}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots$$

$P_X(X=0) = P(\text{no event}) = e^{-\lambda t}$ t라는 시간 구간 동안.

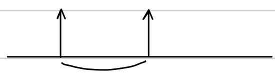
$P(\text{at least 1 event})$ t라는 시간 구간 동안

$= P_X(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-\lambda t}$

함수의 모양이 exponential distribution 의 CDF 와 모양이 똑같다.

$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ (t 시점까지 생존하게 되는 확률   or

$= P(X \leq t)$ t 시점까지 적어도 한 번 이상의 이벤트가 발생할 확률.)



시간 간격이 exponential distribution 이 된다.

time interval betwent events 들 exponential distribution 으로 표현된다.

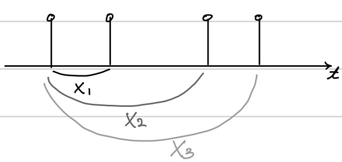
# of events in the interval 은 Poisson distribution 으로 modeling 된다.

4.9 Erlang Dist.

⇒ Erlang dist is a generalization of exponential dist.

⇒ X_k : time interval of $k+1$ successive events.

연속적인 $k+1$ 개의 event 들 사이의 time interval.



exponential dist 에 해당하는 구간을 k 개 더한 것이다.

↳ X_1 에 해당하는 것이 exponential dist.

- K - order (Erlang - K) dist.

$$f_{X_k}(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

$k = 1 \rightarrow$ exp dist.

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dx = 1$$

$$F_{X_k}(x) = \int_0^x \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} dt$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j e^{-\lambda x}}{(j)!}$$

유도해보기 !

$$E[X_k] = \int_0^\infty x \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{(k-1)!} dx \qquad \lambda x = u, \ \frac{du}{dx} = \lambda$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!} u^k e^{-u} du = \frac{1}{\lambda} \frac{k!}{(k-1)!} = \frac{k}{\lambda}$$

Gamma function.

$$\Gamma(k+1) = \int_0^\infty u^k e^{-u} du$$

$$= \left[-e^{-u} u^k\right]_0^\infty + \int_0^\infty k e^{-u} u^{k-1} du$$

$$= k \left(\left[-e^{-u} u^{k-1}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (k-1) u^{k-2} e^{-u} du \right.$$

$$\vdots$$

$$= k(k-1) \int_0^\infty u^{k-2} e^{-u} du$$

$$\vdots$$

$$= k(k-1)(k-2) \cdots 1 \underbrace{\int_0^\infty u^0 e^{-u} du}_{1} = k!$$

$$E[X_k^2] = \int_0^\infty x^2 \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dx$$

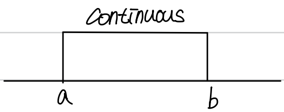
$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{(\lambda x)^{k+1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} dx \qquad \lambda x = u, \ \frac{du}{dx} = \lambda$$

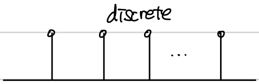
$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{(k-1)!} u^{k+1} e^{-u} du = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{(k+1)!}{(k-1)!} = \frac{k(k+1)}{\lambda^2}$$

$$\Gamma(k+1) = \int_0^\infty u^{k+1} e^{-u} du = (k+1)!$$

$k+2$

4.10 Uniform Dist.





$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma_X^2 = \int_a^b \left(\frac{1}{b-a}\right) x^2 \, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$