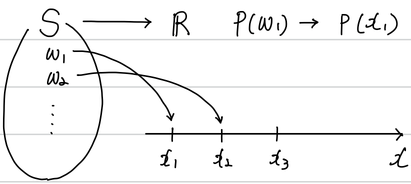
• Definition of RV.



사실 discrete case 인 경우는 CDF가 아주 중요한게 아니다. 그러나, continuous 한 경우는 CDF function을 정의하지 않으면, 확률 분포 자체를 정의하기가 어렵다.

CDF : $F_X(x) \overset{d}{\triangleq} P(X \leq x)$

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) $F_X(\infty) \rightarrow P(S) = 1$ (sample space)

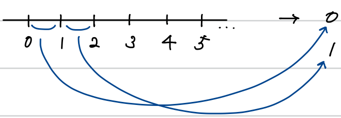
3) $F_X(-\infty) \rightarrow P(\phi) = 0$

4) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

5) $P(X > a) = 1 - F_X(a)$

Discrete RV

$x_1, x_2, x_3 \rightarrow$ discrete !



continuous outcome → discrete RV

$\underline{P_X(X = x_i)}$ x_i : finite (유한)

↳ defined ($\neq 0$)
: 0이 아닌 확률 값을 구할 수 있다.

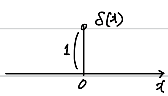
infinite (무한)

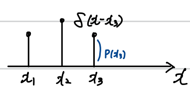
countable

↳ ex) 1. 2. 3. 4. …

⇒ PMF

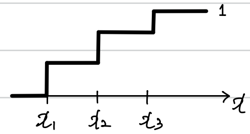
: $P_X(x) = \sum_i P(x = x_i)\,\delta(x - x_i)$





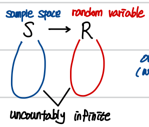
Discrete CDF

일반적으로 discrete 한 경우는 확률을 정의해주고, CDF를 많이 이용하지는 않는다.

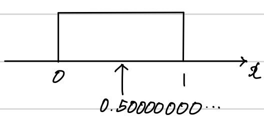


2.6 Continuous RV.

↝ outcome 들을 모든 real number 에 완전히 대응시키는 것.



outcome 과 ($w_1, w_2, \cdots$) 거기에 대응하는 random variable도 셀 수 없이 많이 존재할 때 continuous random variable 이라고 한다.



$$P(0.5) = \frac{1}{\infty} = 0$$

완전히 0은 아닌데, 극한의 개념으로 0이 된다.

확률 자체를 define 하는 것은 continuous variable 에서는 어렵다.

$P(x = \cancel{x_i})$

$P(x) = 0$

↓ undefined

- for continuous RVs, $P(x) \to 0$

it is not possible to define. a probability value for each x.

$P(X = x) \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} \to \frac{0}{0}$$

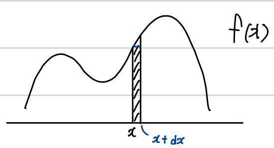
$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = F_X'(x)$$

→ Probability density function (pdf)

$$f_X(x) = F_X'(x)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x} = P(X \le x)$$

$$f_X(x)\, dx = P(x < X \le x + \Delta x)$$



(1) $f_X(x) \geq 0$ (non-negative)

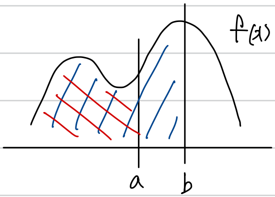
$F_X(x) \rightarrow$ non-decreasing

$F'(x)$. 기울기 ≥ 0

└ $f(x) \geq 0$ 　　$f_X(x)$ to be pdf → (1) and (2) should be satisfied!

(2) $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}_{F_X(\infty)} = 1$

$\sum_{x_i} P_X(x_i) = 1, \quad 0 \leq P(x_i) \leq 1$



(3) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

$= \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

$= \int_{a}^{b} f_X(x)\,dx$

(4) $P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = F_X(a)$

$\because P(X = a) \rightarrow 0$

Ex 2.11) $f_X(x) = \begin{cases} A(2x - x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

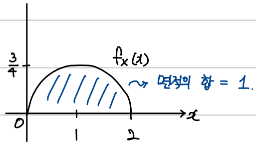
(1) $A = ?$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$= \int_{0}^{2} A(2x - x^2)\,dx = 1 \rightarrow A = \frac{3}{4}$

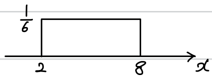
(2) $P(X > 1) = \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$

$= \int_{1}^{2} \frac{3}{4}(2x - x^2)\,dx = \frac{1}{2}$



Ex 2.15) Uniform distribution

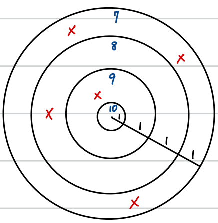
$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 2 \le t \le 8 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



(a) CDF

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^{t} f_T(\tilde{t})\, d\tilde{t}$$

$$= \begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_2^t \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6}(t-2) & 2 \le t \le 8 \\ 1 & t>8 \end{cases}$$



10점을 맞힐 확률은? $P(10) = \frac{\pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 4^2}$

$P(9) = \frac{\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 4^2}$

⋮

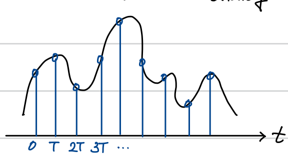
uniform

X 표시 한 곳이 random variable에 해당하는 특정한 좌표값이다.

특정한 좌표값에 해당하는 위치를 맞출 확률은 0에 가깝지만 그런 부분들을 맞출 수 있는 density는 동일하다. uniform!

└ 동일하지 않으면, 확률 계산이 훨씬 복잡해진다. density를 구하고, 그것을 사용해서 적분해야 한다.

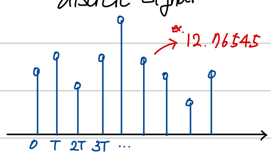
오디오 신호 Continuous or analog



일정한 시간 간격으로 파형의 높이값을 뽑아낸다.

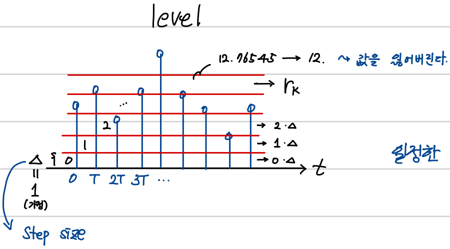
⇓ Sampling

discrete signal



파형이 사라진다.

⇓ Quantization



일정한 구간으로 나눈다.

⇓ binarization

digital ~ 0과 1의 조합

이 공간 안에 error가 존재할 확률이 uniform 하다고 가정.

$x - r_K = e$, $-\frac{\Delta}{2} < e \le \frac{\Delta}{2}$

original signal (x), quantization error (e)

• jpg ~ 이것을 만들기 위해 양자화 과정을 거친다.

Step size를 키우면, Quality는 낮아지지만 level의 수가 줄어들어 데이터 양이 줄어든다.

줄이면, Quality는 올라가고 data 양은 늘어난다.