Continuous RVs.

pdf. $f(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x)$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x}$

PDF가 되기 위한 조건.

① $f_X(x) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$

이 두가지 조건을 만족하면, x라는 변수에 대해서 확률 분포를 정의할 수 있다.

③ $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$

④ $0 \leq P(x_i) \leq 1$

$w_1, w_2, \cdots, w_n$

$\sum w_i = 1$, $0 \leq w_i \leq 1$ 일 때 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 는 확률 분포를 나타내는 weight 이다.

Chapter 3. Moments of RVs.

- Arithmetic average (산술 평균)

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

- different frequencies w_i (x_i의 빈도수가 다 다르다.)

$$\bar{X} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_N x_N}{w_1 + w_2 + \cdots + w_N}$$

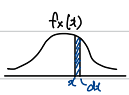
↳ $n(S)$: Sample Space의 총 개수

$w_i = n(A_i)$: Event 의 개수

$$\frac{n(A_i)}{n(S)} = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = P(x_i)$$

3.2 Expectation (mean)

$$E[X] = \sum_i x_i P(x_i)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$



Ex 3.3

$$P_K(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

→ discrete 한 random variable

⇒ Poisson distribution. (포아송 분포)

⇒ Bank / Post office 은행 직원에게 사람들이 한명씩 온다. 한명,한명 오는 것이 바로 event가 발생하는 것. 1시간 동안 창구 직원에게 몇 명의 사람이 올까?

↓ 횟수를 세면 확률이 나온다.

⇒ # of event occurrences in a time interval. time interval 동안에 Event가 발생한 횟수를 random variable 로 정의한다.

⇒ Internet / Server → access / packet. 서버가 시간당 감당할 수 있는 용량이 있는데, 너무나 많은 access 또는 packet이 오게 되면 처리할 수 없다.

↓ Event

↯ 확률적으로 modeling을 해볼 수 있다.

$$E[K] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = \lambda.$$

Poisson distribution 의 확률 식에서 λ : 일정한 시간 동안에 몇 번 발생했는지에 해당하는 평균적인 숫자가 들어있다.

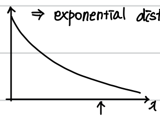
Tayler Series : 어떤 함수는 x에 대한 다항식으로 표현할 수 있다.

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$
$$f(x-a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Ex 3.4)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ exponential distribution. (지수분포)

$\Rightarrow$ life time 과 관련이 많다.
life time 이 exponential distribution 으로 modeling 이 된다.

어떤 system 이 어떤 시점부터 동작을 하고 어느 순간까지 잘 동작하게 될 확률 = life time.
시간이 오래될 수록 생존할 확률이 떨어진다.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \quad (\lambda > 0)$$
$$= \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

확률 분포를 Poisson distribution 이나 exponential distribution 으로 가정할 경우 평균과 관련된 parameter λ만 알면, 수학적으로 완전하게 modeling 이 된다.

parameter 를 구하는 것이 특정한 확률 모델을 전제로 해서 구한다고 해서, (Parametric probability density estimation) 이라고 한다.

우리가 구하고자 하는 random 한 현상들이 어떤 형태의 확률분포를 갖는지 구하고 싶다! $\Rightarrow$

- parameter 를 구할 필요가 있을 때는 확률 분포가 정해진다.
- parameter 가 정해지지 않을 때는 특정한 확률 분포를 정의하기 어렵기 때문이다.

3.4 Moments of RV.

- n^{th} – order moment. (n차 moment)

$$E[X^n] = \sum x_i^n \cdot P(x_i)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx$$

$n=1 \Rightarrow$ mean $= E[X] = \mu$

- Central moments.

$$E[(X-\mu)^n] = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^n P(x_i) & : \text{Discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n f_X(x)\, dx & : \text{Continuous} \end{cases}$$

$n=1.$

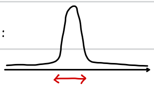
$$E[X-\mu] = \int (x-\mu) f_X(x)\, dx$$
$$= \underbrace{\int x f_X(x)\, dx}_{\text{평균값}} - \mu \int f_X(x)\, dx$$
$$= \mu - \mu \cdot 1 = 0$$

$n=2.$

$E[(X-\mu)^2] = \sigma_X^2$: Variance

≥ 0 (0이 되는 경우: 발생할 수 있는 숫자가 딱 하나만 나오는 것.)

Variance 가 작다:



특정한 좁은 구간에 데이터가 몰려있다.
random 하게 data 를 생성해서 값이 얼마인지 뽑아낼 때 주로 평균값 근처의 값이 나온다.

Variance 가 크다:

어디든지 나올 확률이 비슷하다.
Variance 가 크면 정확하게 예측하기 더 어려워진다.

Variance 가 data 가 얼마나 분포해 있느냐를 판단하는 것 정도로만 생각하지 말고, 예측 가능성에 대해서도 검토해보자.

Proposition 3.3

$g_1(X)$, $g_2(X)$.
X^2 $\quad$ $\sin X$

$$E[a g_1(X) + b g_2(X)] = \int (a g_1(x) + b g_2(x)) f_X(x)\, dx$$
$$= a \int g_1(x) f_X(x)\, dx + b \int g_2(x) f_X(x)\, dx$$
$$= \underline{a E[g_1(x)] + b E[g_2(x)]}$$

Linear !

Linearty 는 두 가지 조건을 만족해야 한다.

1) homogeniety

$f(ax) = a \cdot f(x)$ ⇒ Linearity 를 보장하기 위해서는 함수 또는 벡터 공간들은 반드시 'Linearity' 라는 단어를 쓴다.

2) superposition

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$\Downarrow$

$f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)$

⇒ 1) 원점을 지나는 직선 $y = mx$

2) Operations → 미 / 적분

→ $Ax = b$ (행렬 변환) Euclidean

3) Expectation

$E[b] = \int b f(x) dx = b$

$E[aX+b] = aE[X] + b$

$\sigma_X^2 = E[(x-\mu)^2] = E[x^2 - 2x\mu + \mu^2]$

$= E[x^2] - 2\mu \underbrace{E[x]}_{\mu} + \mu^2 = E[x^2] - \mu^2$

Ex 3.7

$P_K(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad E[X] = \lambda$

$E[K^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{(k!)} e^{-\lambda}$

$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot \lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1+1) \cdot \lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) \cdot \lambda^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$

(k-1) 이 겹쳐서 식을 변형한다.

$= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$

$= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^2 \cdot \lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$= \lambda^2 + \lambda$

$\sigma_K^2 = E[K^2] - \mu^2 = (\lambda^2 + \lambda) - (\lambda)^2 = \lambda$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{\lambda}$

$\frac{d}{d\lambda} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{\lambda}(\lambda+1)$