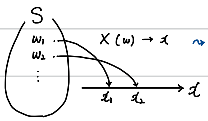
Chapter 2. Random Variables

2.2. Definition of RV (확률변수)



↝ x에 해당하는 값들을 random variable 이라고 한다.

- RV : real numbers

mapping each outcome of random experiment to a real value. $\to x = X(w)$

Prob → function
확률을 함수로 다루자.

$\Rightarrow P(A) \to P(x)$
↳ Random variable

ex) tossing a coin $\Rightarrow$ X : $H = 1$ | 0
$T = 0$ | 1 ↰ 이것도 가능.

$$P(\underset{\sim}{H}) = P(\underset{\sim}{1}) = \frac{1}{2}$$

outcome　　특정한 outcome 에 대응하는 숫자.

ex) tossing two coins

RV : # of heads ⇒ 우리가 정하는 것 random variable 은 필요에 맞게 정리할 수 있다.

$0 \Rightarrow \{TT\}$　$P(0) = P(\{\cancel{T}T\}) = \frac{1}{4}$: 0 에 대응되는 outcome 들이 어떤 event 를 형성하는지 보고 그 event 가 나타날 확률을 구하라.

↳ 자꾸 하다보면, outcome 이 어떻게 만들어지는지 모르고, 숫자 (0) 만 가지고 이야기 하게 된다.

$1 \Rightarrow \{HT, TH\}$　$P(1) = P(\{HT, TH\}) = \frac{1}{2}$

$2 \Rightarrow \{HH\}$　$P(2) = P(\{HH\}) = \frac{1}{4}$

$X(\omega_i) = x_i$　　by the conventional notion,

- RV : $X, Y, Z, \cdots$ ↝ 대문자
- a specific value of X : x, y, z ↝ 소문자

2.3. Event Defined by RV.

outcome 들을 원소로 갖는 집합 (ex. HH. TT)

Let A_x be an event.　$A_x = \{\omega \mid X(\omega) = x\}$

Random variable mapping 을 했을 때, 특정하게 x 라는 값으로 매핑이 되는 outcome 들을 모아놓은 집합.

ex) $A_0 = \{TT\}$

$A_1 = \{HT, TH\} \Rightarrow P(A_1) = \underset{\sim}{P(1)}$

P(A_1) 과 같은 식 보다는 확률이 함수인 것처럼 생각되는 기호를 자주 쓰게 된다.

$P(A_x) = P_X(X = x)$

↳ X 라는 random variable 이 x 라는 값이 될 확률

$P(a < X \leq b)$: X라는 random variable 이 특정한 값인 a와 b 사이에 들어갈 확률을 구하라.

$= P(A)$

$A = \{\omega \mid a < X(\omega) \leq b\}$

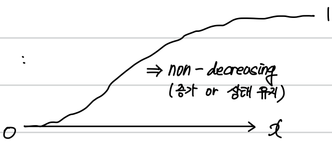
$P(X \leq 1) = P(\{TT, HT, TH\}) = \frac{3}{4} \rightarrow F_X(1) = \frac{3}{4}$

↳ # of heads

2.4. Distribution Functions.

for an RV X, a real value x. Culmalative Distribution Function (CDF) : $F_X(x) \overset{d}{=} P(X \leq x)$ → 누적 확률

$F_X(x)$:



1) if $x_1 < x_2 \rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$. (equality : $P(x_1 < X < x_2) = 0$)
2) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ ↝ 확률이니까!
3) $F_X(\infty) = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
4) $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

(5) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ RV가 Discrete 한 경우 & Continuous 한 경우

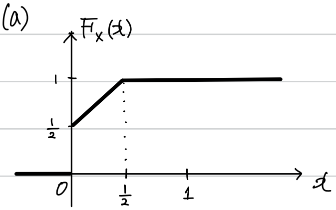
(6) $P(X > a) = 1 - F_X(a)$ 부등호에서 equality 는 구분해서 잘 따져줘야 한다.

CDF의 경우, $P(X \leq x)$ 로 정의했기 때문에 equality는 잘 확인하자.

Ex) 2.3

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x + \frac{1}{2} & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & , x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(a)



(b) $P(X > \frac{1}{4}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{4})$
$= 1 - F_X(\frac{1}{4}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X \geq \frac{1}{4}) = 1 - P(X < \frac{1}{4}) = 1 - \lim_{x \to \frac{1}{4}^-} F_X(x) = \frac{1}{4}$

$P(X = \frac{1}{4}) = 0$

(c) $P(X > 0) = 1 - F_X(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(d) $P(X \geq 0) = 1$

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

값이 차이난다.

2.5 Discrete RV.

↳ non - continuous

→ Integer

- Probability mass function (pmf)

$P_X(x) = Prob(X = x)$

$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P_X(x_i)$

ex) 2 coins tossing

RV : # of heads

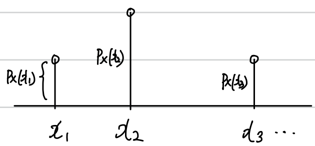
$0 \rightarrow P_X(0) = \frac{1}{4}$

$1 \rightarrow P_X(1) = \frac{1}{2}$

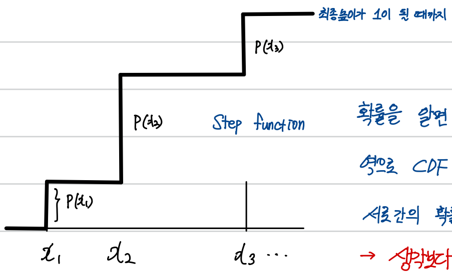
$2 \rightarrow P_X(2) = \frac{1}{4}$

$F_X(1) = P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{3}{4}$

$P_X(x)$



$F_X(x)$

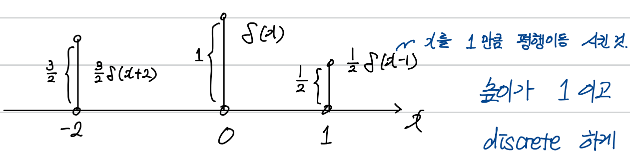


확률을 알면 CDF는 구할 수 있고,

역으로 CDF를 알면 각각의 random variable 이 발생할 확률을 구할 수 있다.

서로 간의 확률 ~~분포를~~ 완벽하게 정의해주는 방법이 된다.

→ 생각보다 CDF는 알아도 상당히 도움이 된다.



높이가 1 이고 x가 0 일때, 그 위치에서의 값이 1이면

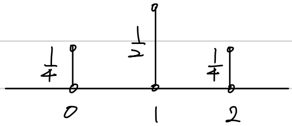
discrete 하게 δ(x) 라고 정의해준다.

$f(x) = \frac{3}{2}\delta(x+2) + \delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$

$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{else} \\ 1, & x=0 \end{cases}$

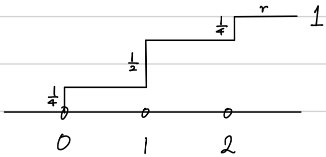
2 coin tossing

$P_X(x)$



$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x=0 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ \frac{1}{4} & x=2 \end{cases} \underset{\text{같은의미.}}{=} \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x-2)$$

$F_X(x)$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$