조건부 확률과 Bayes 정리

1) Sample Space → S (set)

주사위를 던지거나 output 이 random 하게 나올 때.

예측할 수 없는 결과들을 뽑을 때, 가능한 모든 결과들의 집합이 sample space 이다.

sample space 를 벗어나는 것은 생각할 필요가 없다.

2) Event (A) : $A \subset S$

S라고 하는 sample space 에 대해서 A라고 하는 event는 부분집합이다.

event 는 전체 집합 sample space 의 특별한 케이스들을 모은 집합이다.

$P(A) = \text{prob}(\text{outcome} \in A)$ 특정한 outcome 을 하나 뽑았을 때, outcome 이 A 라는 집합에 속할 확률

3) Conditional Probability

→ 시행을 거쳐서 얻게 되는 sample space 라는

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Leftarrow \frac{P(B\cap A|S)}{P(A|S)}$$

condition 이 있을 때 A와 B가 동시에 발생할 확률. sample 은 우리가 굳이 condition part에 넣지 않는 것이다.

A라는 condition 이 발생했을 때 B 라는 event 가 발생할 확률.

조건에 해당하는 것이 새롭게 형성된 전체집합 인 sample space 이다.

A나 B나 S라는 sample space 를 가정하고 확률들을 구한다.

P(today's weather | yesterday weather, 2-day ago weather, ⋯, 20-day ago weather)

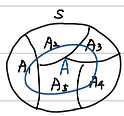
조건부 확률을 실제로 적용할 때는, 기존에 어떤 전제가 있고 그 전제가 발생했을 때 우리가 원하는 event 의 발생할 확률.

4) Total Probability 특정한 경우는 A라는 이벤트가 발생하게 될 확률로 구하자.

$$P(A) = P(A_1\cap A) + P(A_2\cap A) + \cdots + P(A_n\cap A)$$

↳ A를 서로간의 중복이 되지 않는 여러개의 배반사건으로 독립적으로 나눈다.

$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$: partition of S



$\Rightarrow P(A_1) = P(A_1\cap A)$

$= P(A|A_1)P(A_1)$ → prior : 선행적으로 알고 있는 조건부 확률

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i)P(A_i)$$

조건부 확률이 존재할 때 이 식을 쓴다.

5) Bayesian Theorem

prior probability

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

사전에 알려진 확률값을 가진 것으로 바꾸는 것.

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)\,P(A_i)}{P(A)}$$

unknown

original (input)

total probability

partition 으로부터 A에 대한 사전 조건.

조건의 위치를 서로 바꿔가면서 문제를 푸는 수학적인 방법을 Bayesian 이라고 한다.

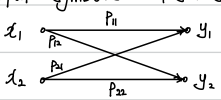
Observation data ⇝ 일종의 output 이라고 생각.

A를 받아놓고, A의 결과가 A_i로부터 오게된 것인지 아닌지 가능성을 계산해보는 것.

Ex 1.7 > Binary Symmetric channel

input symbols : $\{x_1, x_2\}$ → transmitter

output symbols : $\{y_1, y_2\}$ → receiver



$P_{11} = P_{22}$, $P_{12} = P_{21}$ ⇒ Symmetric

$P_{11} = P(y_1|x_1)$

$P_{22} = P(y_2|x_2)$

$P_{12} = P(y_2|x_1)$

$P_{21} = P(y_1|x_2)$

$\oplus = 1$

$\oplus = 1$

$P(x_1)$ $P(x_2)$

⇒ Prior (실험으로 구할 수 있다. 사전에 가질 수 있는 정보)

1) P_{error} = Prob (x_1 trans, y_2 receive) + Prob (x_2 trans, y_1 receive)

$= P(y_2|x_1)P(x_1) + P(y_1|x_2)P(x_2)$ ⇒ unconditioned error

② y_2 수신하고 ① x_1 전송하고

2) When y_2 received, what prob of x_1 transmission?

$$\Rightarrow P(x_1|y_2) = \frac{P(y_2|x_1)\,P(x_1)}{P(y_2)} = \frac{P(y_2|x_1)\,P(x_1)}{P(y_2|x_1) + P(y_2|x_2)}$$

observation data

배반사건

3) $P(x_1 | \text{error})$

확률 문제를 다룰 때, 문제를 쉽게 해준다.

1.8 Independent Events

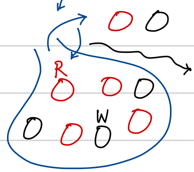
If A and B are (mutually) independent, $P(B|A) \triangleq P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$P(A|B) \triangleq P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$\Rightarrow$ repeated (restored) trials : 동일한 조건을 가지고 계속 반복하는 것.

복원



R 이 나올지 W가 나올지 확률 계산.

꺼낸 공을 다시 집어넣음.

(복원 X : dependent)

t 날의 weather

$P(W_t \mid W_{t-1}, W_{t-2}, \cdots W_{t-n})$

$= P(W_t \mid W_{t-1}, W_{t-2})$ 나머지는 오늘의 날씨에 영향 X 이라고 판단.

나머지는 independent. 제외할 수 있다.

- Independent $\neq$ exclusive
  : 서로 영향을 주지 않는다. : 공통된 요소가 없다. 교집합이 없다.

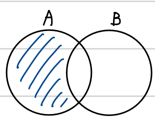
- If A and B are independent,
  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

complement

$$\left.\begin{array}{cc} A & \bar{B} \\ \bar{A} & B \\ \bar{A} & \bar{B} \end{array}\right\} \text{indep!}$$

independent 임을 증명. $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 인 것을 알고있다.



$\Rightarrow P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) - P(A)P(B)$

$= P(A)\underbrace{(1 - P(B))}_{= \bar{B}}$

독립사건과 확률

1.9 Combined Experiments

두 가지 이상의 시행을 하는 것.

- for two experiments with S_1, S_2

$\Rightarrow S = S_1 \times S_2$

Cartesian Product : 순서쌍을 얻는 것.

$= \{(x_i, y_j) \mid x_i \in S_1, y_j \in S_2\}$

ex) 3 coins tossing (동전 3번 던지기)

$\Rightarrow$ 3 experiments of 1 coin tossing (동전 1개 던지는 것을 3번 Combine 했다고 생각하면 된다.)

$S_1 = \{H, T\}$

$S_2 = \{H, T\}$

$S_3 = \{H, T\}$

$\Rightarrow S = S_1 \times S_2 \times S_3$ $\quad$ $S = \{\underbrace{HHH, \cdots, TTT}_{8가지}\}$

1.10 Combinatorial Analysis

(순열. 조합)

1.10.1 Permutation (순열)

$\Rightarrow$ line arrangement of n different objects : 서로 다른 n개의 object를 일렬로 나열하는 방법

*order

$\overbrace{\bigcirc \; \bigcirc \; \bigcirc \; \bigcirc \; \cdots \; \bigcirc}^{n}$

$n \;\; (n-1) \;\; (n-2) \; \cdots \; \cdots \; 2 \;\; 1 = n!$

$0! = 1$: 아무것도 나열하지 않는 방법은 1가지

r out of n objects $(n \geq r)$: r개의 objects를 뽑아서 일렬로 나열하자.

$\overbrace{\bigcirc \; \bigcirc \; \bigcirc \; \cdots \; \bigcirc}^{r}$

$n \;\; (n-1) \; \cdots \; \cdots \; (n-r+1) = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

- Group Permutation : 중복이 있는 것의 순열.

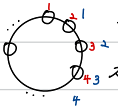
$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

$10 = \underbrace{(R=5)}_{Group} + \underbrace{(W=3)}_{Group} + \underbrace{(B=2)}_{Group} \Rightarrow \frac{10!}{5!\,3!\,2!}$

RRRRR WWW BB

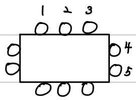
$\Rightarrow \frac{n!}{n_1!\,n_2! \cdots n_k!}$

- Circular Permutation : 원순열



$\frac{n!}{n}$ → 순서대로 shift가 되면서 원래의 자리로 되돌아오는 가짓수 = n가지

자유롭게 회전하더라도 같은 것으로 본다.



$\frac{10!}{10} \times 5$

10 : 원순열이라 생각

5 : 1의 위치가 다섯번이 지나고 나면 반복된다.

1.10.4 Combination

⇒ Select r objects out of n ones : n개의 objects 에서 서로 다른 것들을 r개만큼 뽑아내겠다.

order 고려 X

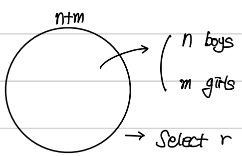
$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} $$

1→2 & 2→1 을 하나로 본다.

$$ = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} $$

$$ \binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} $$

$r<n,\ r<m$



n boys	m girls	
0	r	$\binom{n}{0}\binom{m}{r}$
1	r−1	$\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}$
⋮	⋮	
r	0	

- ## 1.10.5 Binomial Theorem : 이항정리

$$ (a+b)^n = A_0 a^n + A_1 a^{n-1} b^1 + A_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + A_n b^n $$

$$ = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k $$

$$ f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k $$

$$ x = 1 \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} $$

$$ x = -1 \Rightarrow 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k $$

$\oplus$ ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots = 2^{n-1}$

$\ominus$ ${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots = 2^{n-1}$

$$ f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} $$

$$ x = 1 \Rightarrow n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = {}_nC_1 + 2\cdot{}_nC_2 + 3\cdot{}_nC_3 + \cdots $$

$$ f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2} $$

⇓ 위의 사실이 이항분포를 유도할 때 필요하다.

$$ B(n,p) \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} $$: 이항분포

$m = np,\ \sigma^2 = np(1-p)$

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

$$|x| < 1, \quad -)\ x f(x) = 1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$$

$$(1-x) f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

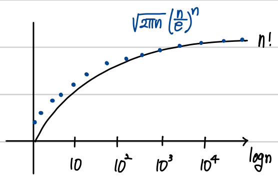
⇒ 등비수열의 단순한 합으로 표현이 돼서 쉽게 f(x)를 유도할 수 있다.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

1.10.6 Stirling's formula

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$



1.11 Reliability 신뢰도

- Reliability : duration of useful function of system : 어떤 시스템이 유용하게 동작하는 기간.

$R(t)$: probability that a system will be functioning at time t. : 어떤 시스템이 미래의 특정한 시점 t까지 잘 동작하고 있을 확률.

어떤 시스템이 1시간 후에도 올바르게 동작할 확률이 99%. ⤳ 신뢰도 = 99%

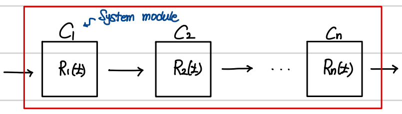
1% 의 확률로 1시간이 되는 시점에 고장이 난다.

1시간이 딱 되는 시점에 고장나는 것이 아니라, 고장은 언제 날지 모른다.

단지, 1시간이 되는 시점까지 잘 생존해서 동작하고 있을 확률을 99% 라고 하는 것.

- Series Connection

$R(t)$: 전체 system이 t라는 시점일때까지 잘 동작하고 있을 확률은 ?



: 직렬연결

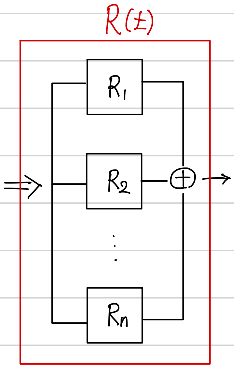
C_1 이 고장나면 C_2에 입력이 제대로 들어오지 않아 전체 시스템의 결과가 안나오는 것이지 C_2 모듈 자체에서 고장난 것이 아니다.

⇒ assume that all modules are independent !

$$R(t) = R_1(t) R_2(t) \cdots R_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

⤳ 상당히 위험.
틀하면 망가질 것이다.

- Parallel Connection : 병렬 연결



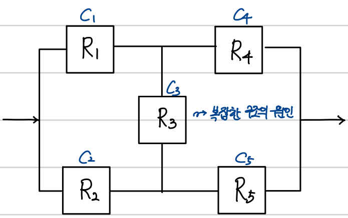
$R(t) \Rightarrow$ at least 1 module functioning.

적어도 1개의 모듈이 동작하면 된다.

$$1 - \underbrace{(1-R_1)(1-R_2)\cdots(1-R_n)}_{\text{all mal-functioning}}$$

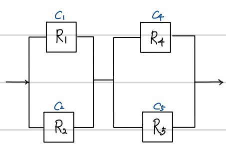
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t))$$

Ex 1.36



(i) 시간 t 일 때, C_3 가 동작하는 경우.

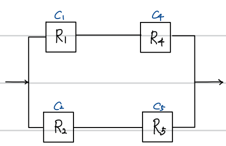
$R_X = P(R(t) \mid C_3 \text{ functioning})$



$R_X = \left(1-(1-R_1)(1-R_2)\right)\left(1-(1-R_4)(1-R_5)\right)$

(ii) C_3 가 동작하지 않는 경우

$R_Y = P(R(t) \mid C_3 \text{, mal-functioning})$



$R_Y = 1-(1-R_1R_4)(1-R_2R_5)$

$\therefore R = R_X R_3 + R_Y(1-R_3)$

$R = R_1R_4 + R_2R_5 + R_1R_3R_5 + \cdots + R_1R_2R_3R_4R_5$