**ROČNÍKOVÁ PRÁCE**

**Gymnázium Zikmunda Wintra Rakovník, příspěvková organizace**

# Metody aproximace Ludolfova čísla

# Methods of approximation of Archimedes' constant

**Autor:** Jiří Zelenka
**Ročník a školní rok:** C3A 2018/2019
**Vedoucí práce:** Mgr. Vojtěch Delong

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu a prameny uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze ročníkové práce jsou shodné.

Nemám důvod protestovat proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Domoušicích dne datum . . . . . . . . . .
Jiří Zelenka

# Poděkování

Na tomto místě můžete vložit poděkování těm, kteří vám s tvorbou práce pomohli. Poděkování je vaše autorské dílo, nemá předepsanou podobu a není povinnou součástí práce. Záleží jen na vás, zda, komu a jakým způsobem poděkujete.

# Anotace

Cílem mé ročníkové práce je informovat o základních metodách aproximace Ludolfova čísla (dále jen „π“). V práci jsem popsal historický vývoj a metody jeho výpočtu. Každou metodu zmíněnou v textu jsem otestoval v počítačové simulaci, popřípadě jsem provedl experiment vedoucí k přibližné hodnotě π. Posledním tématem, kterým jsem se zabýval, bylo využití počítačových technologií k přiblížení se skutečné hodnotě π.

# Klíčová slova

Ludolfovo číslo, pí, historie, algoritmy, účinnost výpočtu

# Annotation

A purpose of my work is information of basic methods of approximation of Archimedes' constant (hereinafter "π"). In work I described a historical development and methods of its calculation. Every method which I inform in the text I tested by computing simulation or I made an experiment which led to an approximate value of π. Eventually I occupy with using of computer technology for calculation π.

# Keywords

Archimedes' constant, pi, history, algorithms, efficiency of calculation

# Obsah

# 1 ÚVOD

Člověk již od dob, když si začal uvědomovat tvary a velikosti, si musel být vědom, že existuje jistá závislost mezi průměrem a obvodem kruhu. Nejspíš okolo 2000 př. n. l. lidé ve vyspělých civilizacích začali užívat konstantu, kterou, když vynásobili průměr kruhu, dostali obvod kruhu [1].
Zprvu užívali hodnoty experimentálně změřené. Až ve starověku přišel Archimédes ze Syrakus s prvním algoritmem, pomocí něhož lze nalézt hodnotu konstanty s libovolnou přesností.

Vzhledem k tomu, že ve středověku nebyl téměř žádný zájem o tuto oblast matematiky, další přínosy pocházejí až z novověku [1][12]. Velký posun kupředu byl objev nekonečného součtu a součinu a řetězových zlomků. Následkem toho vzniklo bezpočet algoritmů, nicméně většina měla pomalou konvergenci[1].
Zdokonalování a vymýšlení nových algoritmů bylo podmíněno mírou poznatků matematiky, hlavně z oblasti teorie čísel a rovnic. Asi nejcennější příspěvek z konce raného novověku je objev integrálů Sirem Isaacem Newtonem. Do 18. století neměla konstanta jednotné označení, až Leonhard Euler začal používat námi již známé řecké písmeno $\pi$.

Další velký rozkvět zažilo $\pi$ až s příchodem počítačů v polovině 20. století. Doté doby bylo $\pi$ spočítáno jen na 808 desetinných míst. Během několika let bylo vytvořeno mnoho rekordů. Ze začátku to bylo několik desítek tisíc desetinných míst. V roce 2016 bylo ve Švýcarsku $\pi$ spočítáno na 22,4 biliónů desetinných míst [2].

V první části si ukážeme pomocí Lindenmannova důkazu, že $\pi$ je iracionální, resp. transcendentní[2]. Tím si objasníme, proč se nikomu v historii nepovedlo a ani nepovede konečnou metodou vyjádřit celý desetinný rozvoj.

Od další části vše už bude poskládáno chronologicky. Ukážeme si, jakou hodnotu používaly jednotlivé starověké civilizace v Evropě a na Blízkém východě. Odvodíme si Archimédův algoritmus, první vedoucí k libovolné přesnosti výpočtu $\pi$.
Ze středověku si představíme Leonarda Fibonacciho, který tento algoritmus studoval, a Mikuláše Kusánského, který přispěl světu novým algoritmem.
Čtvrtá kapitola se bude zaobírat novověkem, kde si představíme Viètův a Wallisův nekonečný součin, Snellova vylepšení Archimedova algoritmu. Jedním z témat budou i řetězové zlomky, hlavně Brounckerův řetězový zlomek. Dále bude následovat Gregoryho-Leibnizova, Newtonova, Sarpova řada. U Newtonovy řady si podrobně popíšeme odvození, protože je to první řada, která byla odvozena pomocí integrálů. Leonharda Eulera si zmíníme nejen kvůli tomu, že dal světu symbol $\pi$, ale i on představil veřejnosti několik řad. Své zástupce zde budou také mít i geometrické algoritmy, např.: Descartův a Gregoryho algoritmus. Historii zakončí algoritmy hrajíce roli při výpočtech $\pi$ na prvních počítačích.

V předposlední části bude simulace Monte Carlo [3] a s tím spojena Buffonova jehla, kte-

[1]Konvergence je rychlost algoritmu. Vyjadřuje, jak moc se přiblížíme skutečné hodnotě s každou další iterací (provedeným krokem).

[2]Transcendentní iracionální čísla nelze vyjádřit zlomkem. Nemají totiž ukončený desetinný rozvoj a zároveň nemají žádnou stále se opakující část desetinného rozvoje. Od algebraických iracionálních čísel se liší tím, že nemůže být kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

[3]Monte Carlo je libovolná numerická simulace využívající náhodnost. V tomto případě půjde o o zjištění poměru obsahu ploch.

rou jsem i experimentálně ověřil. V poslední část všechny algoritmy porovnám pomocí mnou definované veličiny ℶ.

## 1.1 Důkaz transcendentnosti $\pi$

Historicky první důkaz přinesl roku 1761 Johann Heinrich Lambert. Ten potvrdil, že $\pi$ je iracionální, ale nevyvrátil, že $\pi$ je algebraické. V roce 1794 Adrien-Marie Legendre dokázal, že $\pi^2$ je iracionální, a byl přesvědčen, že není algebraické iracionální číslo, ale že to půjde těžce dokázat. Až Carl Louis Ferdinand von Lindemann v roce 1882 přišel s důkazem, že $\pi$ je transcendentní iracionální číslo.
Lindemannův důkaz vychází z Eulerovy identity:

$$\mathrm{e}^{i\pi} + \mathrm{e}^0 = 0.$$

Jestliže exponenty 0 a $i\pi$ jsou různá čísla, tak musí být navzájem lineárně nezávislá[3]. Podle Lindemannova–Weierstrassova teorému musí být i čísla $\mathrm{e}^{i\pi}$ a $\mathrm{e}^0$ algebraicky nezávislá. Z toho také vyplývá, že alespoň 1 exponent číslo transcendentní. Již na první pohled je jasné, že 0 není transcendentní, protože může vyjí jako kořen algebraické rovnice ($x = 0$). V tom případě musí být $i\pi$ transcendentní. Aby z součinu čísel vyšlo transcendentní číslo, musí alespoň jeden činitel být také transcendentní číslo. A když lze zapsat, že:

$$i = \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad i^2 + 1 = 0,$$

musí nutně být $\pi$ transcendentní [1].

# 2 HISTORICKÝ VÝVOJ ODHADU $\pi$

## 2.1 Starověk

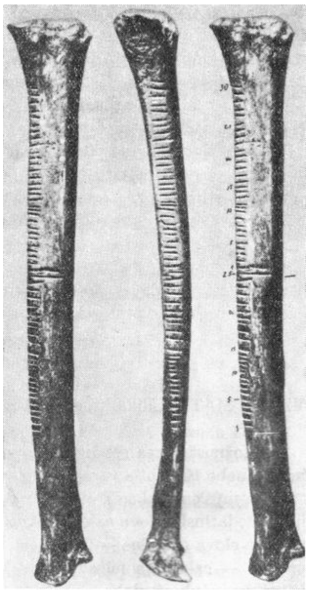
Již před 1 000 000 let si člověk začal uvědomovat tvary, velikosti (čísla) a vztahy mezi veličinami, např.: větší kámen je těžší, starší strom je větší. Někdy v době kamenné lidé začali počítat, o čemž svědčí řezy na kostech (obr. 1). V této době člověk začal vnímat monotonní funkce[4], např.: dvakrát větší pole znamená dvakrát víc úrody. Jenže to u kruhu, jednoho z nepřirozenějších tvarů, neplatilo. Věděli jen, že čím větší průměr, tím větší obvod. Až někdy kolem roku 2000 př. n. l. přišli na to, že, aby tato úměra platila pro výpočet, musí průměr vynásobit konstantou, a tak začaly vznikat první aproximace $\pi$ [1].

### 2.1.1 První numerické aproximace

**Blízký východ** Mezi prvními oblastmi, kde se doloženě rozvíjela matematika, bylo území Blízkého východu. Hlavně u velkých řek, jako je Eufrat a Tigris, se začaly vyvíjet první civilizace. Již od 3. tisíciletí př. n. l. se začínají objevovat první písemné prameny včetně matematiky. V roce 1936 byla nalezena přibližně 200 mil od Babylonu ve městě Susa hliněná destička, která

[3] Dvě čísla jsou lineárně závislá právě tehdy, když jedno jde vyjádřit jako součin druhého čísla s libovolným reálným nenulovým číslem.

[4] $f(x) : y = x$



Obrázek 1: Zářezy na kostech [3]

tvrdí, že podíl obvodu pravidelného šestiúhelníku a obvodu kruhu o stejném průměru je [1]:

$$\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} = \frac{96}{100}$$

Pokud víme, že obvod pravidelného šestiúhelníku $o_s$ je šestinásobek poloměru $r$ a že obvod kruhu $o_k$ je poloměr krát dvojnásobek $\pi$, můžeme si vyjádřit hodnotu $\pi$.

$$\frac{o_s}{o_k} = \frac{96}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{6r}{2\pi r} = \frac{96}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\pi} = \frac{96}{100} \quad \Rightarrow \quad \pi = 3\frac{1}{8} \tag{1}$$

Z této destičky je jasné že v Babylonii používali za hodnotu $\pi$ 3,125.
Na většině území zpravidla používali hodnotu 3 [3]. Na to poukazují památky Židů, například "První kniha královská"praví o Šalomounově paláci (kapitola 7, verš 23): "Udělal také moře slité, desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vůkol, a pět loket byla vysokost jeho, a okolek jeho třicíti loket vůkol."[4] nebo i samotných Babyloňanů. Na tabulce YBC 7302 ve tvaru kruhu jsou napsána čísla 3, 9 a 45, z nich jde usuzovat, že obvod je dán 3, 9 je druhá mocnina obvodu a 45 je její obsah. Tyto hodnoty se dají použít ve vzorci:

$$S = \frac{1}{12}o^2, \tag{2}$$

kde $S$ je obsah a $o$ je obvod [5]. Pokud si vzorec 2 rozepíšeme, dostaneme, že $\pi$ je v této aproximaci 3.

$$S = \frac{1}{12}o^2 \quad \Rightarrow \quad \pi r^2 = \frac{1}{12}4\pi^2 r^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad \pi = 3$$

**Egypt** Matematika v Egyptě musela existovat již v 3. tisíciletím př. n. l., protože v přibližně té době probíhaly tavby pyramid a kanálů, na které byly potřeba pokročilé znalosti matematiky [3].

Obrázek 2: Tabulka YBC 7302 [5]

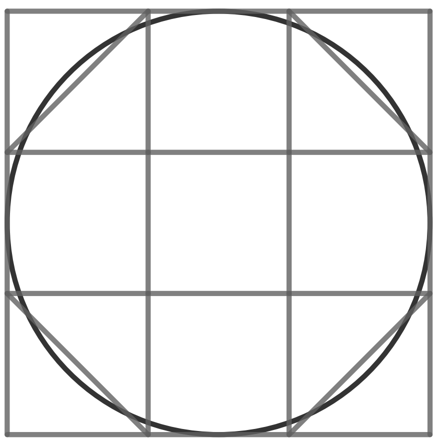
Roku 1858 poblíž Nilu byl nalezen Rhindův papyrus , který obsahuje návod na výpočet obsahu kruhu. V příkladu R50 se tvrdí, že obsah trojúhelníka $S$ je roven $\frac{64}{81}$ druhé mocnině průměru $d$ [1].

$$S = \frac{64}{81}d^2 \tag{3}$$

Když si vztah upravíme, dostaneme hodnotu $\pi$.

$$S = \frac{64}{81}d^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{64}{81}d^2 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3\frac{13}{81}$$

Pomocí našeho vzorce pro obsah kruhu je jasné, že pro Egypťany byla hodnota $\pi$ 3,16. Jak ke vzorci 3 došli, zůstává záhadou, ale mnoho historiků matematiky se přiklání, že na násobek $\frac{64}{81}$ přišli pomocí čtvercové sítě, kterou používali při projektování staveb. Když na čtvercové síti složené z 9 čtverců jako na obrázku 3 aproximujeme kruh osmiúhelníkem dostaneme, že obsah kruhu je $\frac{7}{9}$ druhé mocniny průměru kruhu. Protože $\frac{64}{81}$ snadno zapisovatelné pomocí kamenných zlomků, které se v té době hojně používaly, je možné, že $\frac{63}{81}$ nahradili $\frac{64}{81}$ [5].



Obrázek 3: Síť pro aproximaci kruhu

**Řecko** Na úplném vrcholu byla starověká matematika v Řecku a to hlavně díky velkému množství vědců z celé řady oborů. Do dnešní doby se v matematice používá mnoho jejich poznatků, např.: Archimédovy geometrické řady, Pythagorova věta, Euklidovy věty a Archimédův algoritmus na výpočet $\pi$, který je rozebrán v kapitole 2.2.2.

**Řím** Klaudios Ptolemaios, vědec žijící v Alexandrii 85-165 n. l. [12], ve své 1. knize „Almagestu" sestavil tabulku tětiv (sinů). Funkci sinus značí jako $\mathrm{chrd}\,\alpha$. K určení základních hodnot užívá do té doby již známých znalostí z matematiky. Pro získání malých úhlů odvodil vzorec pro $\mathrm{chrd}$ polovičního úhlu:

$$\mathrm{chrd}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \mathrm{chrd}\,(180^\circ - \alpha)}{2},$$

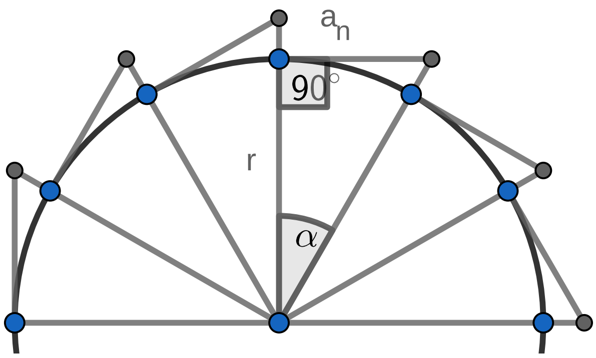
který lze zapsat dnešním zápisem jako:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}.$$

Po úpravě lze dostat algoritmus pro poloviční úhel:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin\alpha}}{2}}. \tag{4}$$

Když se dostal až na $1^\circ$ využil novou goniometrickou funkci aproximaci obvodu kruhu $o$, kterou lze vidět na obrázku 4. Tato aproximace by šla zapsat dnešním moderním zápisem takto:




Obrázek 4: Ptolemaiova aproximace kruhu

$$o = \lim_{n\to\infty} nr\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right),$$

když to vložíme do vzorce pro $\pi$:

$$\pi = \frac{o}{2r},$$

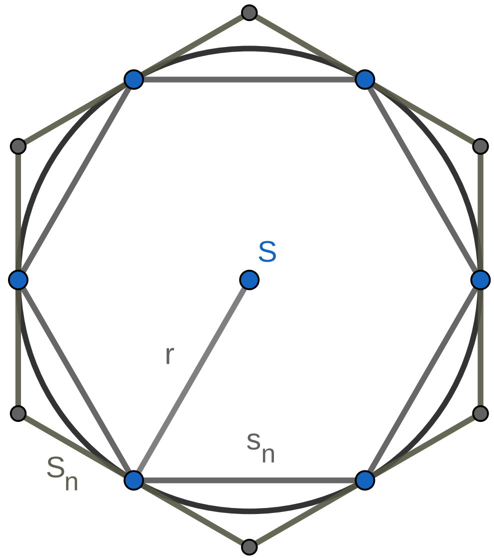
dostaneme, že:

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{2}. \tag{5}$$

Ptolemaios pro $\alpha = 1^\circ$ ($n = 360$) dostal hodnotu $\pi$ 3,14166. Důvod, proč nedostal hodnotu 3,14143, je, že během svého výpočtu $\mathrm{chrd}\,1^\circ$ pomocí vzorce 4 zaokrouhloval [3].

### 2.1.2 Archimédův algoritmus

Archimédes (287-212 př. n. l.[3]) použil k výpočtu $\pi$ úvahu, že obvod vepsaného pravidelného n-úhelníku $o_n$ je menší než obvod kruhu $o_k$ a že obvod opsaného pravidelného n-úhelníku $O_n$ je menší než obvod kruhu:




Obrázek 5: Kruh s opsaným a vepsaným n-úhelníkem

$$o_n < o_k < O_n$$
$$ns_n < 2\pi r < nS_n$$

$$\frac{ns_n}{2r} < \pi < \frac{nS_n}{2r}, \tag{6}$$

kde $n$ je počet vrcholů/stran, $r$ je poloměr kružnice, $s_n$ je délka strany vepsaného n-úhelníku a $S_n$ je délka strany opsaného n-úhelníku [1].

Princip tohoto algoritmu je ten, že čím více bude mít n-úhelník vrcholů, tím více bude opisovat kruh a tím bude menší interval.

Archimédes začal výpočet na snadno spočítatelném šestiúhelníku, kde délka strany vepsaného šestiúhelníka je poloměr kružnice[5], pro jednoduchost výpočtu zavedeme jednotkový poloměr ($r = 1$).

$$s_6 = r \quad \Rightarrow \quad s_6 = 1$$

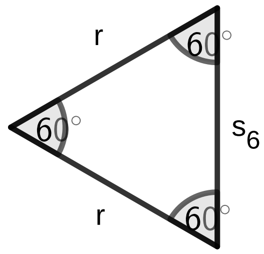
Délka stany opsaného šestiúhelníka jde vypočítat pomocí Pythagorovy věty.

$$S_6^2 = r^2 + \left(\frac{S_6}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 4S_6^2 = 4r^2 + S_6^2 \quad \Rightarrow \quad S_6^2 = \frac{4}{3}r^2 \quad \Rightarrow \quad S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$
$$\Rightarrow \quad S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

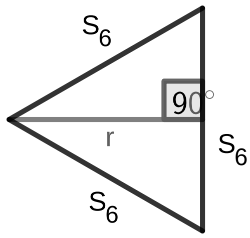
Když se hodnoty $s_6$ a $S_6$ vloží do vztahu 4, vyjde, že $3 < \pi < 2\sqrt{3}$. Archimédes u této hodnoty nevydržel, a tak počítal dál, ale, protože pro víceúhelníky není výpočet tak jednoduchý[6], odvodil

[5] Pravidelný šestiúhelník se skládá z šesti rovnostranných trojúhelníků. To znali již Babyloňané[1].

[6] Za Archyméda nebyly známé goniometrické funkce. První, kdo určil jejich hodnoty, byl Ptolemaios. [3]

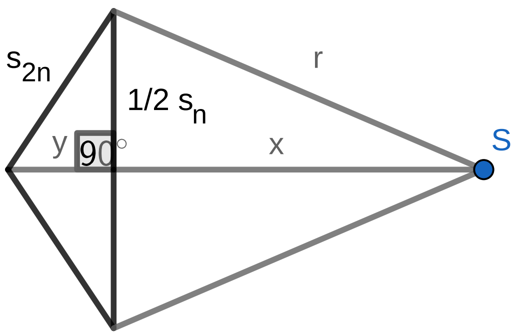



Obrázek 6: Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka




Obrázek 7: Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka

si vztah pro 2n-úhelníky.
Z obrázku 8 můžu sestavit soustavu 3 rovnic, ze kterých se dá vyjádřit $s_{2n}$:




Obrázek 8: 1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanáctiúhelníka

1. Protože se jedná o mnohoúhelník vepsaný, vrcholy budou ležet vždy n kružnici ve vzdálenosti $r$ od středu $S$.
$$r = x + y$$

2. Pro pravý trojúhelník z obrázku 8 podle Pythagorovy věty platí, že:
$$r^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

3. Pro levý trojúhelník z obrázku 8 podle Pythagorovy věty platí, že:
$$s_{2n}^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = y^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

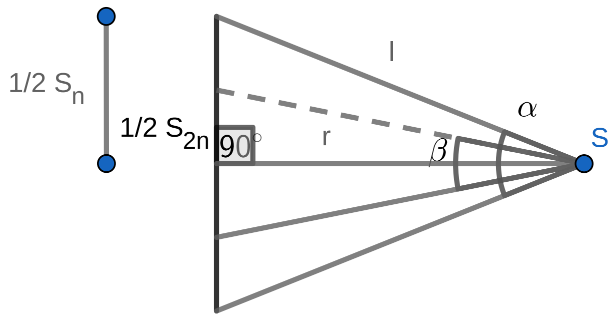
Celá soustava se dá upravit a dá se z ní vyjádřit $s_{2n}$. (Jednotlivé rovnice soustavy rovnic jsou zapsány ve sloupcích pod sebou a jednotlivé kroky úprav jsou vždy mezi sloupci doprava.)

$$\begin{aligned} x+y &= r \\ x^2+\frac{s_n^2}{4} &= r^2 \\ y^2+\frac{s_n^2}{4} &= s_{2n}^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y &= 1 \\ x^2+\frac{s_n^2}{4} &= 1 \\ y^2+\frac{s_n^2}{4} &= s_{2n}^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= 1-x \\ x &= \sqrt{1-\frac{s_n^2}{4}} \\ y^2+\frac{s_n^2}{4} &= s_{2n}^2 \end{aligned}$$

$$(1-x)^2+\frac{s_n^2}{4}=s_{2n}^2 \quad\Rightarrow\quad 1-2x+x^2+\frac{s_n^2}{4}=s_{2n}^2 \quad\Rightarrow\quad 1-2\sqrt{1-\frac{s_n^2}{4}}+1-\frac{s_n^2}{4}+\frac{s_n^2}{4}=s_{2n}^2$$

$$\Rightarrow\quad s_{2n}^2=2-2\sqrt{1-\frac{s_n^2}{4}} \quad\Rightarrow\quad s_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}} \tag{7}$$

Z obrázku 9 je patrné, že když se zpoloviční úhel $\alpha$ na úhel $\beta$ (zdvojnásobení počtu vrcholů)




Obrázek 9: 1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanáctiúhelníka

musí platit:

$$\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n-S_{2n})}=\frac{r}{l},$$

protože v libovolném trojúhelníku je poměr libovolných dvou stran svírající úhel $\varphi$ stejný jako poměr úseček ve zbývající straně rozdělené osou úhlu $\varphi$. Pomocí Pythagorovy věty lze spočítat stranu $l$.

$$l=\sqrt{r^2+\left(\frac{1}{2}S_n\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}S_n^2}$$

Nyní stačí dosadit a vyjádřit $S_{2n}$[6].

$$\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n-S_{2n})}=\frac{r}{\sqrt{r^2+\frac{1}{4}S_n^2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{S_{2n}}{S_n-S_{2n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}S_n^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{S_{2n}}{S_{2n}(\frac{S_n}{S_{2n}}-1)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}S_n^2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{S_n}{S_{2n}}-1=\sqrt{1+\frac{1}{4}S_n^2}$$

$$\Rightarrow\quad S_{2n}=\frac{S_n}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}S_n^2}} \quad\Rightarrow\quad S_{2n}=\frac{2S_n}{2+\sqrt{4+S_n^2}} \tag{8}$$

Tímto postupem došel až k 96-úhelníku a vypočítal, že $3\frac{10}{71} < \pi < \frac{1}{7}$, neboli $3.1408 < \pi < 3.1429$. Ve výpočtu musel odmocňovat, např: $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153}$, ale dodnes se neví jak to udělal.
Je možné, že Archimédes šel později ještě dál, protože v roce 1896 v Istanbulu byla nalezena Metrika z roku 60 př. n. l. od Herona z Alexandrie (10-70 n. l. [7]), kde se Heron odvolává na Archiméda s tím, že $3.1416 < \pi < 3.1738$. Chyba v horním intervalu vznikla asi opisem originálu. [1]

## 2.2 Středověk

Vzhledem k tomu, že během středověku probíhal souboj vědy a náboženství a starověké poznatky stačily, došlo v řadě vědeckých disciplín, v četně matematiky, k útlumu. Jediný, kdo se v této době zabýval $\pi$ byl Leonardo Fibonacci a Mikuláš Kusánský. [1] [12]

### 2.2.1 Leonard Fibonacci

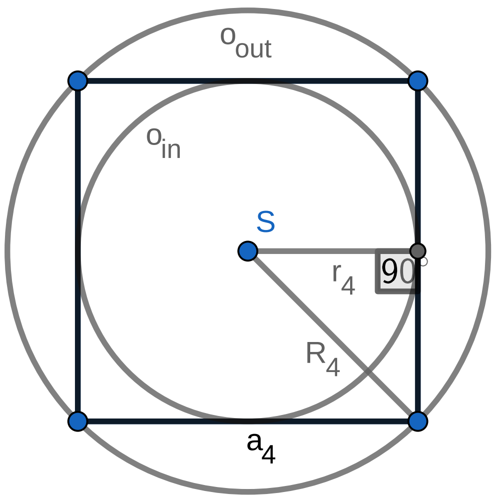
Leonardo z Pizy/Fibonacci (1180-1250) použil ke svému výpočtu $\pi$ Archimédovu metodu. Pomocí decimální aritmetiky, která ještě za Archiméda nebyla známá, došel u 96-úhelníku k nerovnosti $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$. Když se z mezních hodnot udělá průměr:

$$\frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{5}}{2} = \frac{29}{90} \doteq \frac{1}{3},$$

vyjde Fibonacciho hodnota $\pi$ $\frac{864}{275} \approx 3,141818$. [1] [10]

### 2.2.2 Mikuláš Kusánský

Mikuláš Kusánský (1401-1464) byl německý filosof, teolog, diplomat, matematik a kardinál v Římě. Objevil novou „sendvičovou“ metodu pro výpočet $\pi$. Vzal si pravidelný n-úhelník s obvodem 2, který byl vepsán a opsán kružnicemi (obr. 10), a zdvojnásobováním úhlů v mnohoúhelník o stejném obvodu zpřesňoval krajní intervaly výpočtů $\pi$.
Začal na čtverci o straně $a_4$, která se rovnala $\frac{1}{2}$. Poloměr vepsané kružnice $r_n$ je polovina strany




Obrázek 10: Kusánského algoritmus

čtverce, tj. $\frac{1}{4}$. Poloměr opsané kružnice $R_n$ lze spočítat pomocí Pythagorovy věty.

$$R_4 = \sqrt{r_4^2 + \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Když znal poloměr vepsané a opsané kružnice, začal iterovat pomocí jeho nalezených vzorců pro obvody kružnic v 2n-úhelníku.

$$r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2} \tag{9}$$

$$R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}} \tag{10}$$

Jak již bylo zmíněno, obvod opsané $o_{in}$ a vepsaná $o_{out}$ kružnice tvoří meze intervalu, ve kterém se nachází obvod n-úhelníka $o$. Interval lze rozepsat do dvou nerovností.

$$o_{in} < o \quad\Rightarrow\quad 2\pi r_n < o \quad\Rightarrow\quad \pi < \frac{2}{2r_n} \quad\Rightarrow\quad \pi < \frac{1}{r_n}$$

$$o < o_{out} \quad\Rightarrow\quad o < 2\pi R_n \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{2R_n} < \pi \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{R_n} < \pi$$

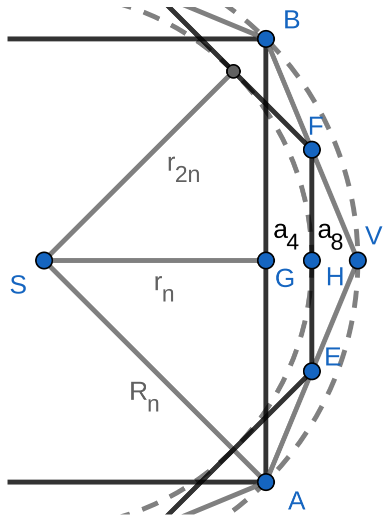
Z předchozích dvou nerovností lze udělat jednu nerovnost.

$$\frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n} \tag{11}$$

Kdyby nezvolil obvod n-úhelníku 2 ale libovolný jiný $o$, dostal by nerovnost pro výpočet $\pi$:

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n}$$

Kusánský přišel ke vzorci 9 tak, že sestrojil konstrukci, v které je čtyř a osmiúhelník o stejné obvodu (obr. 11), takže platí, že:




Obrázek 11: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

$$|AB| = 2|EF| \quad\Rightarrow\quad a_4 = 2a_8.$$

Z tohoto tvrzení, pak vyplývá, že bod $H$, který je od středu $S$ vzdálen jako poloměr vepsané kružnice 2n-úhelníku[7], je přesně uprostřed mezi $G$ a $V$, což jde si ověřit tak, že vezmeme pravoúhlý trojúhelník $GVB$, který bude mít úhel $\alpha$ při vrcholu $V$, a pomocí funkce tangens zapíšeme rovnici:

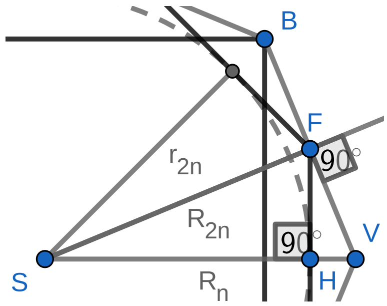
$$\tan\left(\frac{|BG|}{|GV|}\right) = \tan\left(\frac{|FH|}{|HV|}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{|BG|}{|GV|} = \frac{|FH|}{|HV|} \quad\Rightarrow\quad \frac{\frac{1}{2}a_4}{|GV|} = \frac{\frac{1}{2}a_8}{|HV|}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{2}{|GV|} = \frac{1}{|HV|} \quad\Rightarrow\quad |GV| = 2|HV|.$$

Teď stačí délky poloměrů zprůměrovat.

$$|SH| = \frac{|SG| + |SV|}{2} \quad\Rightarrow\quad r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

Vzorec 10 vychází z Eukleidovy věty o odvěsně (obr. 12) [9], kde:




Obrázek 12: Výpočet poloměru opsané kružnice osmiúhelníka

$$|SF|^2 = |SV||SH| \quad\Rightarrow\quad |SF| = \sqrt{|SV||SH|} \quad\Rightarrow\quad R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}}.$$

Kusánský se ještě před pře objevením tohoto algoritmu zabýval geometrickým přiblížením k obvodu kruhu. Vymyslel hned několik přiblížení. Pravděpodobně nejpřesnější se nachází v knize „Dialogus de circuli quadratura" z roku 1457, která je na obrázku 13. V konstrukci na obrázku hledá přiblížení obvodu $o_k$ kružnice $k$ se středem v bodě $S$ a poloměrem $r$. Kružnice protínají kolmé přímky v bodech $A$, $B$, $C$ a $D$ se společným bodem $S$. Dále narýsoval kružnici $l$ s poloměrem $R$, který se rovná:

$$R = \frac{r + |AB|}{2} = \frac{r + \sqrt{r^2 + r^2}}{2} = \frac{r + \sqrt{2}r}{2} = \frac{r(1 + \sqrt{2})}{2}$$

Na kružnici $l$ umístil bod $K$ tak, aby platilo, že úhel $BSK$ je 60°. Nakonec vepsal do kružnice $L$ rovnostranný trojúhelník $IJK$ se stanou $a$. Strana $a$ se rovná:

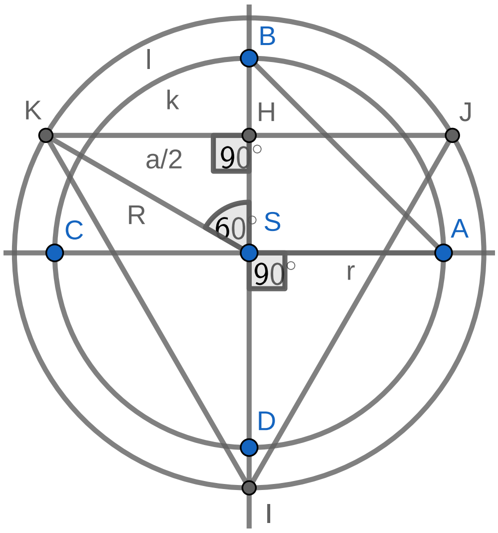
$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2R} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{2R\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{r(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2}$$

Když oba obvody porovnáme, zjistíme přibližnou hodnotu π [13].

$$o_k = o_{\triangle IJK} \quad\Rightarrow\quad 2\pi r = 3a \quad\Rightarrow\quad 2\pi r = \frac{3r(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2} \quad\Rightarrow\quad \pi = \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{4}$$

$$\pi \approx 3,136$$

[7] v tomto případě osmiúhelníku




Obrázek 13: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

## 2.3 Novověk

Konec 15. století a začátek 16. století byl ve znamení zámořských cest. Z tohoto důvodu byl požadavek na přesnější měřící přístroje, což mělo za následek rozvoj přírodních věd včetně matematiky. [1]

### 2.3.1 François Viète

François Viète (1540–1603) jako vymysle algoritmus na výpočet π založený na nekonečném součinu (vzorec 12).

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots \tag{12}$$

Vydal ho v knize „Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII“ v roce 1593. [1] Tento lze snadno odvodit pomocí goniometrický funkcí. Pomocí vzorce:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

můžeme libovolně mnohokrát rozložit sinus.

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \left( 2 \sin \frac{x}{2 \cdot 2} \cos \frac{x}{2 \cdot 2} \right) \cos \frac{x}{2} =$$
$$= 2^3 \sin \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2}$$

Již ve 3. rozkladu je vidět obecný vzorec pro rozklad.

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{i=1}^{n} \cos \frac{x}{2^i} \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n} \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

Pravou stranu nově vzniklé rovnice rozšíříme o $\frac{x}{x}$.

$$\prod_{i=1}^{n} \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \tag{13}$$

Další úpravy budou za podmínky, že $n$ se bude limitně blížit nekonečnu. A protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = 1,$$

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \cos\frac{x}{2^i}. \tag{14}$$

Když za $x$ dosadíme $\frac{\pi}{2}$, vyjde nám:

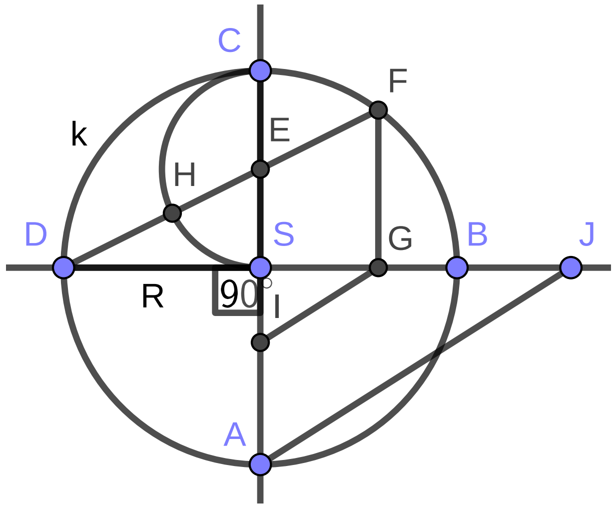
$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot ..., \tag{15}$$

což lze upravit na rovnici 12. Z té samé rovnice lze vyjádřit i samotné $\pi$.

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot ...$$

François Viète během svého života spočítal $\pi$ na 9 desetinných míst, ale použil k tomu Archimédův algoritmus [11].

Kromě toho to algoritmu publikoval v tomtéž díle také geometrickou aproximaci $\pi$ (obrázek




Obrázek 14: Viètova geometrická aprogimace

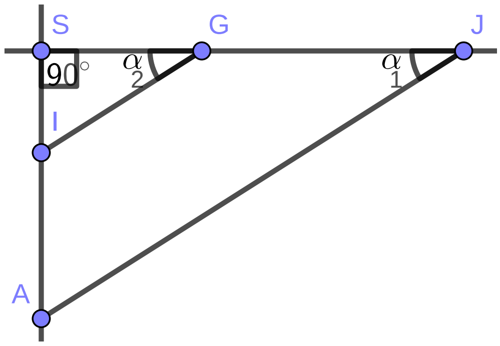
14). Na obrázku je kružnice $o_k$ se středem $S$ a poloměrem $R$ nebo-li $SA$, úsečka $AI$, která je stejně dlouhá jako úsečka $DH$ a dvě rovnoběžné přímky: $IG$ a $AJ$. Obvod kružnice $o_k$ je přibližně $4SJ$. Pomocí zmíněné aproximací můžeme dopočítat přibližnou hodnotu $\pi$.

Protože podle věty uuu je trojúhelník SIG podobný trojúhelníku SAJ, můžeme napsat, že

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|} \quad \Rightarrow \quad |SJ| = \frac{|SA| \cdot |SG|}{|SI|}$$

To lze dokázat pomocí obrázku 15, kde platí:

$$|SI| = |SG| \tan\alpha$$




Obrázek 15: Pravoúhlý trojúhelník SIG a SAJ

$$|SA| = |SJ| \tan \alpha$$

První rovnici můžeme vydělit tou druhou a dostaneme:

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|}$$

π se dá pak vyjádřit:

$$\pi = \frac{o_k}{2R} = \frac{4|SJ|}{2R} = \frac{2\frac{|SA|\cdot|SG|}{|SI|}}{R} = \frac{2\frac{R\cdot|SG|}{|SI|}}{R} = 2\frac{|SG|}{|SI|}$$

K výpočtu $SI$ použijeme délku úsečky $DE$ z trojúhelníku $DSE$. Podle Pythagorovy věty

$$|DE|^2 = |DS|^2 + |SE|^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = R^2 + \frac{1}{4}R^2 = \frac{5}{4}R^2 \quad \Rightarrow \quad |DE| = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

Dále potřebujeme délku úsečky $DH$.

$$|DH| = |DE| - |HE| = \frac{\sqrt{5}}{2}R - \frac{1}{2}R = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) R$$

Nyní můžeme spočítat $SI$.

$$|SI| = |SA| - |AI| = |SA| - |DH| = R - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) R = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) R =$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) R = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) R$$

Podle věty uuu je trojúhelník $DSE$ podobný s trojúhelníkem $DGF$, proto

$$\frac{|DG|}{|DS|} = \frac{|GF|}{|SE|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|DG|}{|GF|} = \frac{|DS|}{|SE|} = \frac{R}{\frac{1}{2}R} = 2 \quad \Rightarrow \quad |DG| = 2|GF|$$

Úsečku $DG$ můžeme rozdělit na dvě úsečky se společným bodem $S$.

$$|DG| = |DS| + |SG| \quad \Rightarrow \quad 2|GF| = R + |SG| \quad \Rightarrow \quad G = \frac{1}{2}\left(R + |SG|\right)$$

Podle Pythagorovy věty lze napsat, že

$$|SG|^2 + |GF|^2 = |SF|^2 \quad \Rightarrow \quad |SG|^2 + (\frac{1}{2}\,(R + |SG|))^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \quad |SG|^2 + \frac{1}{4}(R^2 + 2R \cdot |SG| + |SG|^2) - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4|SG|^2 + R^2 + 2R \cdot |SG| + |SG|^2 - 4R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5|SG|^2 + 2R \cdot |SG| - 3R^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad |SG| = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^4 + 60R^2}}{10} = \frac{-2R \pm 8R}{10} = \frac{-R \pm 4R}{5}$$

Protože v tomto případě nemůže být délka záporná použijeme znaménko $+$.

$$|SG| = \frac{-R + 4R}{5} = \frac{3}{5}R$$

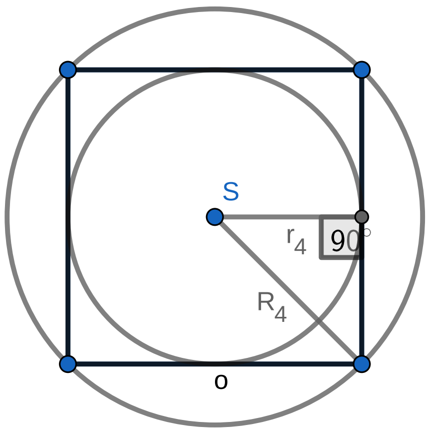
Nyní stačí dosadit do vzorce pro výpočet $\pi$.

$$\pi = 2\frac{|SG|}{|SI|} = 2\frac{\frac{3}{5}R}{\frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)R} = \frac{12}{5\left(3 - \sqrt{5}\right)} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}(3 + \sqrt{5})$$

Podle Vièteho geometrické aproximace přibližně vychází $\pi$ 3,14164. [14]

### 2.3.2 Descartesův algoritmus

René Descartes (1596-1650), francouzský matematik a filosof, který dal světu kartézskou soustavu souřadnic a racionalistickou filosofii, která dala základ klasicismu, vymyslel nový algoritmus, který byl publikován až posmrtně v roce 1701. Spočíval v tom, že n-úhelník o poloměru $o$ je obehnán vepsanou a opsanou kružnicí o poloměrech $r_n$ a $R_n$ (obrázek 16), a pomocí vzorců lze spočítat poloměry pro 2n-úhelníky o stejném obvodu [11] [17].




Obrázek 16: Descartesův algoritmus

$$r_{2n} = \frac{r_n + R_n}{2} \tag{16}$$

$$R_{2n} = \sqrt{\frac{R_n(r_n + R_n)}{2}} \tag{17}$$

Když použijeme vzorec pro obvod kruhu

$$o = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{o}{2r},$$

můžeme π vyjádřit nerovností:

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n} \tag{18}$$

### 2.3.3 Willebrord Snell

Roku 1654 Christiaan Huygens (1629-1695) použil nerovnici od Willebrorda Snella (1580-1626) z roku 1621 k výpočtu přibližné hodnoty π. Nerovnice vypadala takto:

$$\frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi} < \varphi < \tan\frac{\varphi}{3} + 2\sin\frac{\varphi}{3}, \tag{19}$$

a když do ní dosadil, že $\varphi = \frac{\pi}{30}$, dostal, že π je 3,141 592 653 .... Přesnost byla na 9 desetinných míst [11].
Snell v roce, kdy vydal předchozí nerovnost, vydal v knize „Cyklometrius“ 2 nerovnice zvyšující účinnost Archimédovy metody. Zjistil totiž to, že v jakékoliv fázi iterování pro $n >= 3$ je π blíže spodní hranici intervalu $q_n$ než spodní hranici intervalu $p_n$ (obrázek 17).


Obrázek 17: Interval z Archimédovy metody

$$\pi - p_n < q_n - \pi$$

Pro jednotlivé $n \geq 3$ pak mu vyšli 2 stálé nerovnosti.

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2, \ \lim_{n\to\infty} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2 \tag{20}$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4, \ \lim_{n\to\infty} \frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} = 4 \tag{21}$$

Když tyto nerovnosti upravíme:

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2 \quad \Rightarrow \quad q_n - \pi > 2\pi - 2p_n \quad \Rightarrow \quad -3\pi > -2p_n - q_n \quad \Rightarrow \quad \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4 \quad \Rightarrow \quad \pi - p_n < 4\pi - 4p_{2n} \quad \Rightarrow \quad -3\pi < -4p_{2n} + p_n \quad \Rightarrow \quad \pi > \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n,$$

získáme nerovnice pro výrazné zúžení intervalu z Archimédova algoritmu.
Snell sice tyto nerovnosti objevil, ale dokázal je až „Huygens v De circuli magnitude inventa“ v roce 1654 [15].

### 2.3.4 Wallisův nekonečný součin

John Wallis (1616 – 1703 [11]) v roce 1655 v knize „Arithmetica Infinitorum“ vydává po Vièteм 2. nekonečný součin a zároveň historicky 1. algoritmus pro výpočet π obsahující pouze racionální operace [1].

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot ...}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ...} \tag{22}$$

Ten lze přepsat do moderní obecnější podoby pro π.

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2 \prod_{i=1}^{n} \left( \frac{2i}{2i-1} \cdot \frac{2i}{2i+1} \right) = \lim_{n\to\infty} 2 \prod_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{4i^2-1} \tag{23}$$

### 2.3.5 Gregoryho algoritmus

James Gregory (1638-1675) představil v roce 1667 veřejnosti nový algoritmu založený na kružnici o poloměru $r$ opsáné a vepsáné n-úhelníkem (obrázek 5). Algoritmus počítá obsah vepsaného $s$ a opsaného $S$ 2n-úhelníka pomocí vzorců [11]:

$$s_{2n} = \sqrt{s_n S_n} \tag{24}$$

$$S_{2n} = \frac{2 s_n S_n}{s_n + s_{2n}}. \tag{25}$$

Když upravíme vzorec pro výpočet obsahu kruho, dostaneme:

$$S = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{S}{r^2},$$

proto můžeme napsat, že obsah vepsaného $s$ a opsaného $S$ 2n-úhelníka pomocí vzorců [11]:

$$\frac{s_n}{r^2} < \pi < \frac{S_n}{r^2}. \tag{26}$$

### 2.3.6 Brounckerův řetězový zlomek

William Brouncker (1620-1684) objevil nový řetězový zlomek na výpočet π.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + ...}}} \tag{27}$$

Neznáme jeho odvození, ale dochvalo se nám odvození od Leonharda Eulera z roku 1775. Jednotlivé členy Gregoryho-Leibnizovy řady rozložil:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + 1\left(-\frac{1}{3}\right) + 1\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) + 1\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{7}\right) + ...$$

a pomocí vzorce:

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + ... = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{1 + a_2 - \frac{a_3}{1 + a_3 - ...}}}$$

přepsal na [1]:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 - \frac{-\frac{1}{3}}{1+\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{-\frac{3}{5}}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)-...}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{3^2}{2+...}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2+...}}$$

Můžeme místo poslední úpravy rovnici vynásobit 4 a dostat rovnici pro samotné $\pi$:

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2+\frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+...}}}} \tag{28}$$

### 2.3.7 Gregoryho-Leibnizova řada

Tato nekonečná řada byla objevena nezávisle 2 matematiky: v roce 1671 James Gregory a v roce 1674 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... \tag{29}$$

Gregory pomocí Cavalieriho vzorec a dlouhého dělení v integrandu dosáhl Taylorůva rozvoje pro funkci arkus tangens. Taylorův rozvoj lze dnešním zápisem zapsat takto:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Protože známe hodnotu arkus tangens v bodě 0 ($\arctan(0) = 0$), můžeme tuto hodnotu dosadit za $a$:

$$\arctan(x) = \frac{\arctan(a)}{1}(x-a)^0 + \frac{\frac{1}{a^2+1}}{1}(x-a)^1 + \frac{\frac{0(a^2+1)-1(2a+0)}{(a^2+1)^2}}{2}(x-a)^2 +$$

$$+\frac{\frac{-2(a^2+1)^2-(-2a)2(a^2+1)2a}{(a^2+1)^4}}{6}(x-a)^3 + ...$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(x) = \arctan(a) + \frac{1}{a^2+1}(x-a) + \frac{-2a}{2(a^2+1)^2}(x-a)^2 +$$

$$+\frac{-2(a^2+1)^2 + 8a^2(a^2+1)}{6(a^2+1)^4}(x-a)^3 + ...$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(x) = \arctan(0) + \frac{1}{0^2+1}(x-0) + \frac{-2\cdot 0}{2(0^2+1)^2}(x-0)^2 +$$

$$+\frac{-2(0^2+1)^2 + 8\cdot 0^2(0^2+1)}{6(0^2+1)^4}(x-0)^3 + ...$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(x) = x + \frac{-2}{6}x^3 + ... \quad \Rightarrow \quad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + ...$$

Kdybychom hned ze začátku pracovali s 8 členy namísto 4, řada by vypadala takto:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

Nakonec Gregory dosadil $x = 1$ a dostal řadu v rovnici 29. Po vynásobení 4 dostaneme řadu pro samotné $\pi$, která lze zapsat modernějším způsobem [11][1]:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 4 \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2i+1} \tag{30}$$

### 2.3.8 Kochańskiho geometrická aproximace

Roku 1685 Adam Adamandy Kochański (1631 Dobrzyniu n. Wisłą-1700 Teplice v Čechách [11][8]), převážně polský matematik, který působil jako jezuita v Čechách, vypočítal přibližnou hodnotu $\pi$ pomocí své vlastní konstrukce, která je na obrázku 18, kde platí, že $\vartheta = 30°$ a úsečka $CD$ je přibližně polovina obvodu kruhu o poloměru $r$.
Úsečku $CD$ lze spočítat pomocí Pythagorovi věty.

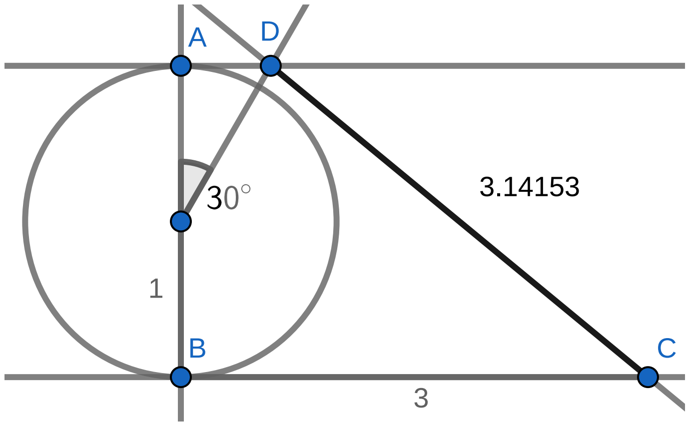
$$|CD| = \sqrt{|AB|^2 + (|AD| - |BC|)^2} = \sqrt{(2r)^2 + (3r - r\,\mathrm{tg}\,30°)^2} = \sqrt{4r^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4r^2 + \frac{(3\sqrt{3}-1)^2}{3}r^2} = r\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}} \tag{31}$$

Nakonec úsečku stačí tát do vzorce pro $\pi$.

$$\pi = \frac{2r\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}}}{2r} = \sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}} \tag{32}$$

Ze vzorce 32 je jasné, že Kochanski došek k hodnotě $\pi$ 3,141533. [1]




Obrázek 18: Kochanského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem

### 2.3.9 Newtonovy řady

Sir Issac Newton (1642-1727 [11]), zakladatel integrálního a diferenciálního počtu, objevil hned několik řad. Nejznámější vychází z jím objeveného vzorce:

$$\arcsin x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}},$$

který jde s použitím jeho objevu binomické věty upravit na:

$$\arcsin x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}} = \int (1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + ...)\mathrm{d}x =$$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + ...$$

Po dosazení $x = \frac{1}{2}$, dostaneme vzorec pro výpočet π [1]:

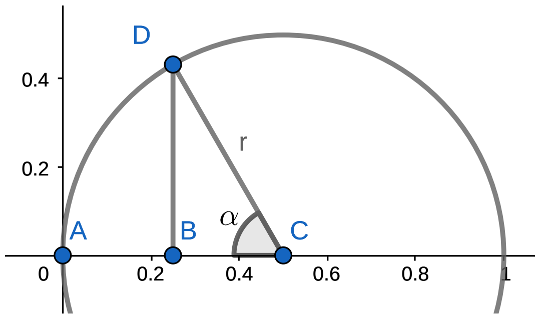
$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \pi = 6\arcsin\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{7\cdot 2^7} + \ldots\right), \tag{33}$$

který jde moderním způsobem zapsat jako [17]:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 6\sum_{i=0}^{n} \frac{(2i)!}{2^{4i+1}(i!)^2(2i+1)} \tag{34}$$

Další známou řadu publikoval 1737 v „Treatise on the Method of Fluctions and Infinite Series“.




Obrázek 19: Kružnice $y = \sqrt{x - x^2}$ s výsečí

Vychází z rovnice kružnice:

$$y = \sqrt{x - x^2},$$

kterou lze vidět na obrázku 19. Pomocí binomické věty vyřešil obsah $a$ poloviční úseče $ABD$:

$$a = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\sqrt{1-x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{5}\sqrt{x^5} - \frac{1}{28}\sqrt{x^7} - \frac{1}{72}\sqrt{x^9} - \ldots\right]_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \ldots \tag{35}$$

Plocha poloviční úseče je obsah $S_v$ výseče $ACD$ bez obsahu $S_t$ trojúhelníku $BCD$

$$a = S_v - S_t \tag{36}$$

Nejdříve spočítal úsečku $|BD|$:

$$|BD| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4-1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

a pak úhel $\alpha$:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{|BD|}{|BC|}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60°.$$

Z úhlu $\alpha$ je jasné, že $a$ je $\frac{1}{6}$ obsahu kruhu. S těmito znalosti lze spočítat vzorec 36.

$$a = S_v - S_t = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{|BD| \cdot |BC|}{2} = \frac{\pi \frac{1}{4}}{6} - \frac{\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} \quad \Rightarrow \quad \pi = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{32} + a\right) \tag{37}$$

Do vzorce 37 dosadil za $a$ vzorec 35 [1].

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - ...\right) \tag{38}$$

Vzorec 38 lze zapsat moderním způsobem jako [17]:

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \sum_{i=0}^{n} \frac{(2i)!}{2^{4i+2}(i!)^2(2i-1)(2i+3)} \tag{39}$$

### 2.3.10 Sharpova řada

Abraham Sharp (1651-1742) zrychlil Gregoryho-Leibnizovu řadu tím, že do Teylorova rozvoje pro $\mathrm{arctg}(x)$ dosadil za $x$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ [1].

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + ...\right)$$

$$\Rightarrow \quad \pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + ...\right) = \lim_{n \to \infty} 2\sqrt{3} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{3^i(2i+1)} \tag{40}$$

### 2.3.11 Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) sjednotil matematický zápis a symboliku do dnešní podoby, např.: $f(x)$, $\int \mathrm{d}x$, i, e, $\sum$. Od jeho doby se řeckým písmenem $\pi$ odznačuje konstanta, o které je tato práce.
Dalším výsledkem jeho celoživotní práce je objev několika nekonečných řad vedoucích k $\pi$, z nichž je neznámější vyřešení v roce 1736 řady převrácených dvojmocí, kterou před tím se marně snažilo vyřešit celá desetiletí spousta matematiků, např. G. W. Leibnitz nebo J. Bernaulli I. Použil k tomu řadu pro $\sin x$ (Taylorův rozvoj), která byla známa už za Newtona.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Řadu řešil pro $\sin x = 0$, vydělil ji $x$ ($x \neq 0$) a následně substituoval $y = x^2$.

$$0 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ... \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + ... \tag{41}$$

Jestliže rovnice 41 měla před úpravou dělením kořeny: $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, tak po substituci má kořeny: $y = (n\pi)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Pomocí teorie rovnic vymyslel upravu ronice, dnes známou jako

Vietovy vztahy, která zní: součet převrácených hodnot kořenů ($\frac{1}{(n\pi)^2}$, $n \in \mathbb{N}$) je roven záporně vzatému podílu lineárního a absolutního členu ($\frac{1}{3!}$) [1].

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + ... \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... \tag{42}$$

Vzorec 42 lze přepsat pro samotné $\pi$

$$\pi = \sqrt{6}\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}} \tag{43}$$

Stejným způsobem odvodil řadu pomocí funkce $\cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} - \frac{y^3}{6!} + ...$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2!} = \frac{1}{(0,5\pi)^2} + \frac{1}{(1,5\pi)^2} + \frac{1}{(2,5\pi)^2} + ... \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... \tag{44}$$

Odečtením rovnice 42 od dvojnásobku 44 dostal další řadu:

$$\frac{2\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{2}{1^2} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{1}{3^2} - ... \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - ... \tag{45}$$

Z rovnic 44 a 45 jde vyjádři $\pi$.

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)^2}} \tag{46}$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{3\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}} \tag{47}$$

### 2.3.12 Legendreho algoritmus

Adrien Legendry (1752-1833) v roce 1794 publikoval dílo „Éléments de géométrie“ podobným algoritmem jako M. Kusánský jen s rozdíle, že kromě poloměru opsané a vepsané kružnice $R$ a $r$ k 2n-úhelníku počítá ještě koeficient $s$.

$$R_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2} \tag{48}$$

$$r_{n+1} = \sqrt{r_n R_n} \tag{49}$$

$$s_{n+1} = s_n - 2^n (R_n - R_{n+1})^2 \tag{50}$$

Za počáteční hodnoty zvolíme $R_0 = 1$, $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $s_0 = \frac{1}{4}$.
Nyní stačí pro výpočet $\pi$ použít následující vzorec [11][16]:

$$\frac{R_{2n}^2}{s_n} < \pi < \frac{R_n^2}{s_n}. \tag{51}$$

## 2.4 Moderní algoritmy s využití počítačů

# 3 METODA MONTE CARLO

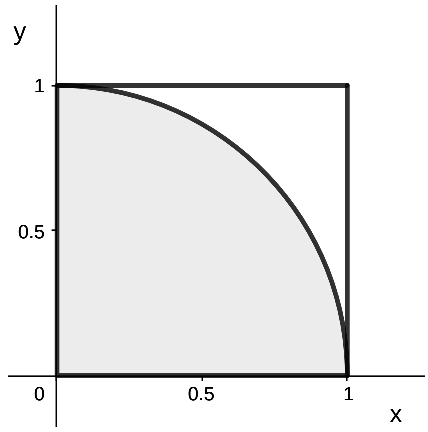
Monte Carlo, zkráceně MC, je metoda numerického výpočtu pomocí generování náhodné veličiny[4]. Použití našla hlavně s rozvoje výpočetní techniky, protože do té doby jsme nemohli generovat pseudonáhodná čísla jinak než ručními výpočty, což mělo za následek nedostatek hodnot pro seriozní výsledek za rozumný čas. Pro generování jde sice použít i fyzikální experiment, např. hod kostkou, ale i ten není čistě náhodný, protože je ovlivněn, jak házíme. V dnešní době metoda nachází hlavní užití pro fyzikální simulace pravděpodobnostních jevu, např. v kvantové fyzice, nebo k výpočtu poměru obsahů. [1][19]

## 3.1 Integrace kruhu

Pomocí MC sice přímo nemůžeme spočítat určitý integrál, ale můžeme si vyjádřit obsah plochy pod křivkou z poměru.
(Přepsat!) Pokud známe na numerickou integraci, a proto může π spočítat pomocí obsahu výseče, která zaujímá čtvrtinu kruhu (obrázek 20). Principem MC integrace, že budu generovat pseudonáhodné body na určité ploše o obsahu $S_1$ a budu zjišťovat jestli bod leží na integrované ploše o obsahu $S_2$. Poměr počtu všech bodů na integrované ploše $m$ s celkovým počtem bodů $n$ je pro velké $n$ rovný poměru obsahu $S_1$ s $S_2$.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{n}{m},\ n \to \infty \tag{52}$$

Protože s rovnicí kruhu budu zacházet jako s funkcí




Obrázek 20: Integrace $\frac{1}{4}$ kruhu $y^2 = 1 - x^2$

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

budu integrovat část nad osou x, přesněji v 1. kvadrantu. Plocha ve, které budu integrovat, má tvar čtverce o straně $a$ rovné 1, protože kruh o rovnici $y^2 = 1 - x^2$ má poloměr $r$ rovný 1, proto

[4]Náhodná veličina je veličina s přiřazenou náhodnou hodnotou. Protože většinou je získávána pomocí algoritmu, nikoliv dílem náhody, označuje se jako pseudonáhodná.

generované body mají tvar $X_i[x_i, y_i]$, kde $x_i$ a $y_i$ jsou pseudonáhodná čísla od 0 do 1. Body, jestli leží ve výseči, prověřím pomocí funkce:

$$y_i \leq y(x_i) \quad \Rightarrow \quad y_i \leq \sqrt{1 - x_i^2}$$

Po vygenerování velkého množství bodů dostanu čísla $n$ a $m$, ze kterých si vyjádřím $\pi$.

$$\frac{n}{m} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{4n}{m} \tag{53}$$

## 3.2 Buffonova jehla

# 4 Srovnání metod

V této kapitole budu srovnávat efektivitu algoritmy zmíněné v předchozích kapitolách podle mnou definované veličiny מ [mem]. Protože מ závisí na rychlosti konvergence algoritmu $\beta(n)$, která je nespojitá funkce závislá na počtu iterací $n$, kde $n$ náleží přirozeným číslům, použiji sumaci v intervalu všech iterací, a tím dostanu hodnotu veličiny nezávislou na aktuální iteraci.

$$\text{מ} = \lim_{a \to \infty} \sum_{n=1}^{a} \beta(n)$$

Vzhledem k tomu, že chci, aby platilo, čím vyšší hodnota, tím lepší algoritmus, definuji rychlosti konvergence algoritmu jako podíl záporné diference míry konvergence $p$ a čísla 2 umocněného na diferenci počtu operací $O$:

$$\beta(n) = \frac{-\frac{\Delta p}{\Delta n}}{2^{\frac{\Delta O}{\Delta n}}} = \frac{-\frac{p_{n+1} - p_n}{n+1-n}}{2^{\frac{O_{n+1} - O_n}{n+1-n}}} = \frac{p_n - p_{n+1}}{2^{O_{n+1} - O_n}}$$

Čitatel vyjadřuje čím větší skoky v konvergenci, tím je vyšší hodnota čitatele a tím je vyšší hodnoty rychlosti konvergence algoritmu v dané iteraci. Vynásobení -1 je abych dodržel pravidlo zmíněné v předchozím souvětí, protože u konvergujícího algoritmu vždy platí, že $p_{n+1} < p_n$. U jmenovatele platí, že čím větší skoky v počtu operací, tím je vyšší hodnota jmenovatele a tím je menší celková hodnota rychlosti konvergence algoritmu v dané iteraci. Aby veličina byla matematicky robustní, např: vůči algoritmům, který mají iterace neobsahující žádné operace. Dám podíl složitosti algoritmu a čísla iterace do jmenovatele hlavního zlomku jako mocninu dvou, čím se zachová pravidlo u jmenovatele čím vyšší tím horší. Funkce je $2^x$ je často používaná aproximace exponenciální funkce $\mathrm{e}^x$, kterou lze považovat za elementární funkci. Zlomek nenásobím -1, protože na rozdíl od míry konvergence u algoritmů, který něco dělají platí, že $O_{n+1} > O_n$.

$$\text{מ} = \lim_{a \to \infty} \sum_{n=1}^{a} \frac{p_n - p_{n+1}}{2^{O_{n+1} - O_n}} \tag{54}$$

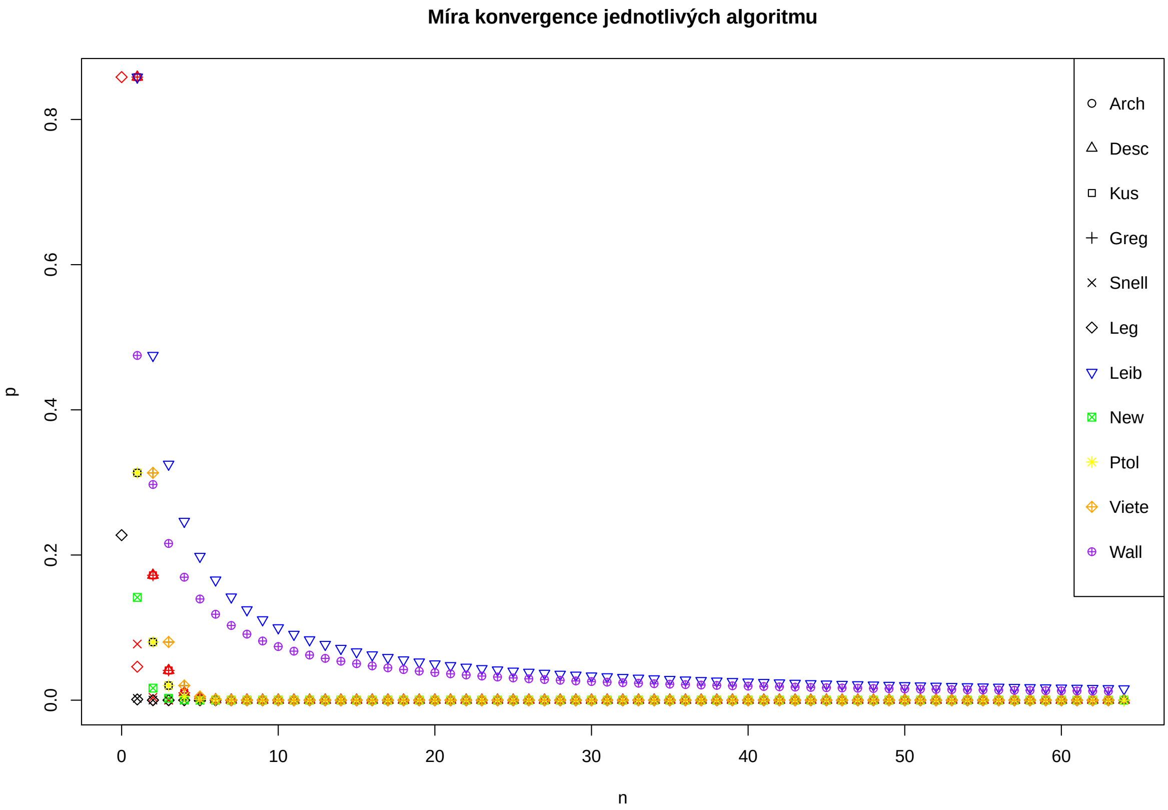
## 4.1 Míra konvergence

Míru konvergence $p_n$ zavádím jako matematikou veličinu vyjadřující vzdálenost odhadu čísla $x_n$ v n-té iteraci od nějaké hodnoty čísla $x$, kterou považuji za skutečnou hodnotu limity dané posloupnost, v tomto případě π.

$$p_n = |x_n - x|, \quad x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

| **číslo iterace** | **Archimedes** | | **Descartes** | |
|---|---|---|---|---|
| hr. intrvalu | spodní | horní | spodní | horní |
| 1 | 0.31316 | 0.85840 | 0.31316 | 0.85840 |

Tabulka 1: Míra konvergence




Obrázek 21: Graf míry konvergence všech algoritmu popsaných v této práci

## 4.2 Závislost počtu operací

Počet operací $O_n$ zavádím jako matematikou veličinu vyjadřující počet operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování) od počátku výpočtu až do n-té iterace. Faktoriál z $x$, pokud $x$ nebude 0, budu počítat za $x$ operací, protože pro nenulové $x$ platí, že:

$$x! = \prod_{i=1}^{x} i,$$

v opačné případě budu $x!$ (0!) počítat za 1 operaci.

**Archimedes** Při každé iteraci, viz 2. tabulka, se musí vykonat 5 operací pro výpočet 1 strany vepsaného k-úhelníku a 6 operací pro výpočet 1 strany opsaného k-úhelníku. Pro výpočet spodní

| $n$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $O_{sh}(n)$ | 5+3 | 10+3 | 15+3 |
| $O_{hh}(n)$ | 6+3 | 12+3 | 18+3 |

Tabulka 2: Složitost Archimédova algoritmu podle vzorce 6, 9 a 10

nebo horní hranice ($sh$ a $hh$) π je potřeba provést ještě 3 operace. Výsledné vzorce pro složitost Archimédova algoritmu jsou:

$$O_{sh}(n) = 5n + 3$$

$$O_{hh}(n) = 6n + 3$$

**Ptolemaios** Vzorce algoritmu:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n}}{2}} \quad \Rightarrow \quad O(n) = 5n + a$$

$$\pi_n = \frac{2^{2+n} x_n}{2} = 2^{1+n} x_n \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Vzorec pro složitost Ptolemaiova algoritmu:

$$O_{sh}(n) = 5n + 3$$

**Kusánský** Vzorce algoritmu:

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

$$R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$$

Protože $r$ je závislý i na $R$ a na opak, musím složitost 1 iterace pro $r$ a $R$ počítat z obou vzorců. Z $r$ a $R$ se na hranice intervalu pro π dostanu 2 operacemi. Vzorce pro složitost Kusánského

| $n$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $O_{sh}(n)$ | 2+2 | 6+2 | 10+2 |
| $O_{hh}(n)$ | 4+2 | 8+2 | 12+2 |

Tabulka 3: Složitost Kusánského algoritmu

algoritmu z tabulky č. 3:

$$O_{sh}(n) = 4(n-1) + 2 + 2 = 4n$$

$$O_{hh}(n) = 4(n-1) + 4 + 2 = 4n + 2$$

**Viete** Jako 1 iteraci beru výpočet zlomku a jeho vynásobení s již vypočítaným odhadem π z předchozí iterace, pokud to není 1. iterace, kdy se ničím nenásobí. Ze 4. tabulky plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = n^2.$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $O(n)$ | 1 | 4 | 9 | 16 |
| zpět. diference | - | 3 | 5 | 7 |

Tabulka 4: Složitost Vieteho algoritmu algoritmu

| $n$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $O_{sh}(n)$ | 2+2 | 8+2 | 14+2 |
| $O_{hh}(n)$ | 4+2 | 10+2 | 16+2 |

Tabulka 5: Složitost Descartova algoritmu podle vzorce 20, 21 a 22

**Descartes** Stejný systém výpočtu složitosti jako u Kusánského algoritmu. Vzorce pro složitost algoritmu z tabulky č. 5:

$$O_{sh}(n) = 6(n-1) + 2 + 2 = 6n - 2$$

$$O_{hh}(n) = 6(n-1) + 4 + 2 = 6n$$

**Gregory** Opět stejný systém výpočtu složitosti jako u Descartova a Kusánského algoritmu. Vzorce pro složitost algoritmu z tabulky č. 6:

| $n$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $O_{sh}(n)$ | 2+2 | 8+2 | 14+2 |
| $O_{hh}(n)$ | 6+2 | 12+2 | 18+2 |

Tabulka 6: Složitost Gregoryho algoritmu podle vzorce 23, 24 a 25

$$O_{sh}(n) = 6(n-1) + 2 + 2 = 6n - 2$$

$$O_{hh}(n) = 6n$$

| **algoritmus** | **zápis posloupnosti O(n)** | **zpětná diference posloupnosti O(n)** |
|---|---|---|
| Archimedes (s. / h.) | $5n+3$ / $6n+3$ | 5 / 6 |
| Ptolemaios | $5n+3$ | 5 |
| Kusánský (s. / h.) | $4n$ / $4n+2$ | 4 / 4 |
| Viète | $n^2$ | $2n-1$ |
| Descartes (s. / h.) | $6n-2$ / $6n$ | 6 / 6 |
| Gregory (s. / h.) | $6n-2$ / $6n+2$ | 6 / 6 |
| Snell (s. / h.) | $--$ / $--$ | 10 / 11 |
| Wallis | $7n$ | 7 |
| Brouncker | $3n-1$ | 3 |
| Gregory-Leibnitz | $5n$ | 5 |
| Newton 1 | $3n^2+11n$ | ?? $6n+11$ ?? |

Tabulka 7: Složitost algoritmu

# 5 ZÁVĚR

# 6 REFERENCE


[1] BECKMANN, Petr. Historie čísla pí. Praha: Academia, 1998. ISBN 80-200-0655-9.

[2] THUMSHIRN, Christian. Der Schweizer, der 22,4 Billionen Dezimalstellen von Pi berechnet hat. Neue Zürcher Zeitung [online]. Zürich, 2017, 21.3.2017, , 1 [cit. 2018-06-21]. Dostupné z: https://www.nzz.ch/wissenschaft/video-serie-nerdzz-der-wahrscheinlich-laengste-rekord-der-welt-ld.152445 -november-2016/

[3] KOLMAN, Arnošt a Marcela HEDRLÍNOVÁ. Dějiny matematiky ve starověku. Praha: Academia, 1968. ISBN 978-80-87287-77-4.

[4] Bible kralická: Písmo svaté Starého a Nového zákona : podle posledního vydání z roku 1613. 5. vyd. v ČBS. Praha: Česká biblická společnost, 2014. ISBN 978-80-87287-77-4.

[5] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4.

[6] VEJCHODSKÝ, Tomáš. Archimédův výpočet čísla pí [přednáška]. Praha: Akademie věd České republiky, 11.11.2016. In: Youtube.com [online]. [vid. 17. 5. 2018]. Záznam dostupný z: https://www.youtube.com/watch?v=8XaM9ZYxCqU

[7] WILLERS, Michael. Algebra bez (m)učení: Od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě : fascinující čísla a rovnice. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4123-9.

[8] Adam Adamandy Kochański. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Adam-Adamandy-Kocha%C5%84ski

[9] POSAMENTIER, Alfred S. a Ingmar LEHMANN. [Pi]: A Biography of the World's Most Mysterious Number. II.Title. Amherst, N.Y.: Prometheus Books, 2004. ISBN 15-910-2200-2.

[10] BEČVÁŘ, Jindřich. Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-232-5.

[11] BEČVÁŘ, Jindřich, FUCHS, Eduard, ed. Matematika v 16. a 17. století: Seminář Historie matematiky III. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-150-7.

[12] JÁCHIM, František. Jak viděli vesmír: [po stopách velkých astronomů]. Olomouc: Rubico, 2003. ISBN 80-85839-48-2.

[13] BEČVÁŘOVÁ, Martina, Jindřich BEČVÁŘ, Magdalena HYKŠOVÁ, Oldřich HYKŠ, Martin MELCER, Martina ŠTĚPÁNOVÁ, Miroslava OTAVOVÁ a Irena SÝKOROVÁ. Matematika ve středověké Evropě: pozdní středověk a renesance. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2018. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-01-06403-0.

[14] FUCHS, Eduard, ed. Mathematics throughout the ages. Prague: Prometheus, 2001. History of mathematics. ISBN 80-7196-219-8.

[15] BEČVÁŘ, Jindřich a Eduard FUCHS, ed. Matematika v proměnách věků III. Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. Dějiny matematiky. ISBN 80-728-5040-7.

[16] BRENT, Richard P. The Borwein Brothers, Pi and the AGM [online]. Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra a University of Newcastle, Callaghan, 8. 8. 2018, , 7-8 [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: https://arxiv.org/abs/1802.07558

[17] GOURÉVITCH, Boris. Newton's Formula. The worlf of pi [online]. [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: http://www.pi314.net/eng/newton.php

[18] PROKOP, Vladimír. Dějiny literatury od starověku do počátku 19. století: aneb od Mezopotámie po naše národní obrození. Sokolov: O.K.-Soft, 2001.

[19] VIRIUS, Miroslav. Metoda Monte Carlo. V Praze: České vysoké učení technické, 2010. ISBN 978-80-01-04595-4.

# 7 SEZNAM OBRÁZKŮ

# 8 SEZNAM TABULEK

# PŘÍLOHA A: PRVNÍ PŘÍLOHA