

# **ROČNÍKOVÁ PRÁCE**

**Gymnázium Zikmunda Wintra Rakovník, příspěvková organizace**

## **Metody aproximace Ludolfova čísla**

## **Methods of approximation of Archimedes' constant**

**Autor:** Jiří Zelenka

**Ročník a školní rok:** C3A 2018/2019

**Vedoucí práce:** Mgr. Vojtěch Delong

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu a prameny uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze ročníkové práce jsou shodné.

Nemám důvod protestovat proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Domoušicích dne datum .....

Jiří Zelenka

## **Poděkování**

Na tomto místě můžete vložit poděkování těm, kteří vám s tvorbou práce pomohli. Poděkování je vaše autorské dílo, nemá předepsanou podobu a není povinnou součástí práce. Záleží jen na vás, zda, komu a jakým způsobem poděkujete.

## **Anotace**

Cílem mé ročníkové práce je informovat o základních metodách aproximace Ludolfova čísla (dále jen „ $\pi$ “). V práci je popsán historický vývoj a metody jeho výpočtu. Každou metodu zmíněnou v textu jsem otestoval v počítačové simulaci, popřípadě jsem provedl experiment vedoucí k přibližné hodnotě  $\pi$ . Posledním téma, kterým je tu zmíněno, je využití počítačových technologií k přiblížení se skutečné hodnotě  $\pi$ .

## **Klíčová slova**

Ludolf, číslo, pí, algoritmus, účinnost výpočtu

## **Annotation**

The purpose of my thesis is to inform about the basic methods of approximation of Archimedes' constant (hereinafter " $\pi$ "). It is described the historical development and methods of its calculation. Every method which I present in the text is tested by a computer simulation. Additionally, I made an experiment which led to an approximate value of  $\pi$ . In the end, I focus on the use of computer technology for  $\pi$  calculation.

## **Keywords**

Archimedes, constant, pi, algorithm, efficiency of calculation

# OBSAH

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
1.1	Důkaz transcendentnosti $\pi$	8
<b>2</b>	<b>Historický vývoj odhadu <math>\pi</math></b>	<b>8</b>
2.1	Starověk	8
2.1.1	První numerické aproximace	9
2.1.2	Archimédův algoritmus	12
2.2	Středověk	15
2.2.1	Leonard Fibonacci	15
2.2.2	Mikuláš Kusánský	15
2.3	Novověk	18
2.3.1	François Viète	18
2.3.2	Descartesův algoritmus	21
2.3.3	Willebrord Snell	22
2.3.4	Wallisův nekonečný součin	23
2.3.5	Gregoryho algoritmus	23
2.3.6	Brounckerův řetězový zlomek	24
2.3.7	Gregoryho-Leibnizova řada	24
2.3.8	Kochaňského geometrická aproximace	25
2.3.9	Newtonovy řady	26
2.3.10	Sharpova řada	27
2.3.11	Leonhard Euler	28
2.3.12	Legendreho algoritmus	29

2.4	Moderní algoritmy s využití počítačů . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Metoda Monte Carlo</b>	<b>30</b>
3.1	Obsah kruhu . . . . .	30
3.2	Buffonova jehla . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Srovnání metod</b>	<b>32</b>
4.1	Závislost počtu operací . . . . .	33
4.2	Srovnání efektivity . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>38</b>
<b>6</b>	<b>Reference</b>	<b>39</b>
<b>7</b>	<b>Seznam obrázků</b>	<b>42</b>
<b>8</b>	<b>Seznam tabulek</b>	<b>43</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>Míra konvergence</b>	<b>44</b>

# 1 ÚVOD

Člověk si již od dob, když si začal uvědomovat tvary a velikosti, musel být vědom, že existuje jistá závislost mezi průměrem a obvodem kruhu. Nejspíš okolo 2000 př. n. l. lidé ve vyspělých civilizacích začali užívat konstantu, kterou, když ji vynásobili průměr kruhu, dostali obvod kruhu [1]. Zprvu užívali hodnoty experimentálně změřené. Až ve starověku přišel Archimédes ze Syrakus s prvním algoritmem, pomocí něhož lze nalézt hodnotu konstanty s libovolnou přesností.

Vzhledem k tomu, že ve středověku nebyl téměř žádný zájem o tuto oblast matematiky, další přínosy pocházejí až z novověku [1][12]. Velký posun kupředu byl objev nekonečného součtu a součinu a řetězových zlomků. Následkem toho vzniklo bezpočet algoritmů, nicméně většina měla pomalou konvergenci<sup>1</sup>.

Zdokonalování a vymýšlení nových algoritmů bylo podmíněno mírou poznatků matematiky, hlavně z oblasti teorie čísel a rovnic. Asi nejceněnější příspěvek z konce raného novověku je objev integrálního počtu sirem Isaacem Newtonem. Do 18. století neměla konstanta jednotné označení, až Leonhard Euler začal používat námi již známé řecké písmeno  $\pi$ .

Další velký rozkvět zažilo  $\pi$  až s příchodem počítačů v polovině 20. století. Do té doby bylo  $\pi$  spočítáno jen na 808 desetinných míst. Během několika let bylo vytvořeno mnoho rekordů. Ze začátku to bylo několik desítek tisíc desetinných míst. V roce 2016 bylo ve Švýcarsku  $\pi$  spočítáno na 22,4 biliónů desetinných míst [2].

V první části si ukážeme pomocí Lindenmannova důkazu, že  $\pi$  je iracionální, resp. transcendentní<sup>2</sup>. Tím si objasníme, proč se nikomu v historii nepovedlo a ani nepovede konečnou metodou vyjádřit celý desetinný rozvoj.

Od další části vše už bude poskládáno chronologicky. Ukážeme si, jakou hodnotu používaly jednotlivé starověké civilizace v Evropě a na Blízkém východě. Odvodíme si Archimédův algoritmus, první vedoucí k libovolné přesnosti výpočtu  $\pi$ . Ze středověku si představíme Leonarda Fibonacciho, který tento algoritmus studoval, a Mikuláše Kusánského, který přispěl světu novým algoritmem.

Čtvrtá kapitola se bude zabírat novověkem, kde si představíme Vièteův a Wallisův nekonečný součin, Snellova vylepšení Archimedova algoritmu. Jedním z témat budou i řetězové zlomky, hlavně Brounckerův řetězový zlomek. Dále bude následovat Gregoryho-Leibnizova, Newtonova, Sarpova řada. U Newtonovy řady si podrobně popíšeme odvození, protože je to první řada, která byla odvozena pomocí integrálů. Leonharda Eulera si zmíníme nejen kvůli tomu, že dal světu symbol  $\pi$ , ale i on představil veřejnosti několik řad. Svě zástupce zde budou také mít

<sup>1</sup>Konvergence je rychlost algoritmu. Vyjadřuje, jak moc se přiblížíme skutečné hodnotě s každou další iterací (provedeným krokem).

<sup>2</sup>Transcendentní iracionální čísla nelze vyjádřit zlomkem. Nemají totiž ukončený desetinný rozvoj a zároveň nemají žádnou stále se opakující část desetinného rozvoje. Od algebraických iracionálních čísel se liší tím, že nemůže být kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

i geometrické algoritmy, např.: Descartův a Gregoryho algoritmus. Historii zakončí algoritmy hraje roli při výpočtech  $\pi$  na prvních počítačích.

V předposlední části bude simulace Monte Carlo<sup>3</sup> a s tím spojena Buffonova jehla, kterou jsem i experimentálně ověřil. V poslední část všechny algoritmy porovnáám pomocí mnou definované veličiny  $\mathfrak{N}$  [mem].

## 1.1 Důkaz transcendentnosti $\pi$

Historicky první důkaz přinesl roku 1761 Johann Heinrich Lambert. Ten potvrdil, že  $\pi$  je iracionální, ale nevyvrátil, že  $\pi$  je algebraické. V roce 1794 Adrien-Marie Legendre dokázal, že  $\pi^2$  je iracionální, a byl přesvědčen, že to není algebraické iracionální číslo, ale že to půjde těžce dokázat. Až Carl Louis Ferdinand von Lindemann v roce 1882 přišel s důkazem, že  $\pi$  je transcendentní iracionální číslo.

Lindemannův důkaz vychází z Eulerovy identity:

$$e^{i\pi} + e^0 = 0.$$

Jestliže exponenty 0 a  $i\pi$  jsou různá čísla, tak musí být navzájem lineárně nezávislá<sup>4</sup>. Podle Lindemannova–Weierstrassova teorému musí být i čísla  $e^{i\pi}$  a  $e^0$  algebraicky nezávislá. Z toho také vyplývá, že alespoň 1 exponent číslo transcendentní. Již na první pohled je jasné, že 0 není transcendentní, protože může být kořenem algebraické rovnice ( $x = 0$ ). V tom případě musí být  $i\pi$  transcendentní. Aby z součinu čísel vyšlo transcendentní číslo, musí alespoň jeden činitel být také transcendentní číslo. A když lze zapsat, že:

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^2 + 1 = 0,$$

musí nutně být  $\pi$  transcendentní [1].

## 2 HISTORICKÝ VÝVOJ ODHADU $\pi$

### 2.1 Starověk

Již před 1 000 000 let si člověk začal uvědomovat tvary, velikosti (čísla) a vztahy mezi veličinami, např.: větší kámen je těžší, starší strom je větší. Někdy v době kamenné lidé začali počítat, o čemž svědčí řezy na kostech (obr. 1). V této době člověk začal vnímat monotonní funkce<sup>5</sup>, např.: dvakrát větší pole znamená dvakrát víc úrody. Jenže to u kruhu, jednoho z nepřírozenějších tvarů, neplatilo. Věděli jen, že čím větší průměr, tím větší obvod. Až někdy kolem roku 2000 př. n. l. přišli na to, že, aby tato úměra platila pro výpočet, musí průměr vynásobit konstantou, a tak začaly vznikat první aproximace  $\pi$  [1].

<sup>3</sup>Monte Carlo je libovolná numerická simulace využívající náhodnost. V tomto případě půjde o o zjištění poměru obsahu ploch.

<sup>4</sup>Dvě čísla jsou lineárně závislá právě tehdy, když jedno jde vyjádřit jako součin druhého čísla s libovolným reálným nenulovým číslem.

<sup>5</sup> $f(x) : y = x$





Obrázek 1: Zářezy na kostech [3]

### 2.1.1 První numerické aproximace

**Blízký východ** Mezi prvními oblastmi, kde se doloženě rozvíjela matematika, bylo území Blízkého východu. Hlavně u velkých řek, jako je Eufrat a Tigris, se začaly vyvíjet první civilizace. Již od 3. tisíciletí př. n. l. se začínají objevovat první písemné prameny včetně matematiky.

V roce 1936 byla nalezena přibližně 320 km od Babylonu ve městě Susa hliněná destička, která tvrdí, že podíl obvodu pravidelného šestiúhelníku a obvodu kruhu o stejném průměru je [1]:

$$\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} = \frac{96}{100}$$

Pokud víme, že obvod pravidelného šestiúhelníku  $o_s$  je šestinásobek poloměru  $r$  a že obvod kruhu  $o_k$  je poloměr krát dvojnásobek  $\pi$ , můžeme si vyjádřit hodnotu  $\pi$ .

$$\frac{o_s}{o_k} = \frac{96}{100} \Rightarrow \frac{6r}{2\pi r} = \frac{96}{100} \Rightarrow \frac{3}{\pi} = \frac{96}{100} \Rightarrow \pi = 3\frac{1}{8} \quad (1)$$

Z této destičky je jasné, že v Babylonii používali za hodnotu  $\pi$  3,125.

Na většině území zpravidla používali hodnotu 3 [3]. Na to poukazují památky Židů, například "První kniha královská" praví o Šalomounově paláci (kapitola 7, verš 23): "Udělal také moře slité, desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vůkol, a pět loket byla vysokost jeho, a okolek jeho třicíti loket vůkol." [4] nebo i samotných Babyloňanů. Na tabulce YBC 7302 ve tvaru kruhu jsou napsána čísla 3, 9 a 45, z nich jde usuzovat, že obvod je dán 3, 9 je druhá mocnina obvodu a 45 je její obsah. Tyto hodnoty se dají použít ve vzorci:

$$S = \frac{1}{12}o^2, \quad (2)$$

kde  $S$  je obsah a  $o$  je obvod [5]. Pokud si vzorec 2 rozepíšeme, dostaneme, že  $\pi$  je v této aproximaci 3.

$$S = \frac{1}{12}o^2 \Rightarrow \pi r^2 = \frac{1}{12}4\pi^2 r^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{3}\pi \Rightarrow \pi = 3$$



Obrázek 2: Tabulka YBC 7302 [5]

**Egypt** Matematika v Egyptě musela existovat již v 3. tisíciletím př. n. l., protože v přibližně té době probíhaly stavby pyramid a kanálů, na které byly potřeba pokročilé znalosti matematiky [3].

Roku 1858 poblíž Nilu byl nalezen Rhindův papyrus, který obsahuje návod na výpočet obsahu kruhu. V příkladu R50 se tvrdí, že obsah trojúhelníka  $S$  je roven  $\frac{64}{81}$  vynásobenému druhou mocninou průměru  $d$  [1].

$$S = \frac{64}{81}d^2 \quad (3)$$

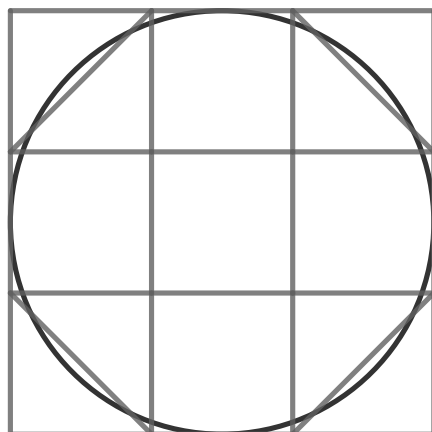
Když si vztah upravíme, dostaneme hodnotu  $\pi$ .

$$S = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \pi = 3\frac{13}{81}$$

Pomocí našeho vzorce pro obsah kruhu je jasné, že pro Egyptany byla hodnota  $\pi$  3,16. Jak ke vzorci 3 došli, zůstává záhadou, ale mnoho historiků matematiky se přiklání, že na násobek  $\frac{64}{81}$  přišli pomocí čtvercové sítě, kterou používali při projektování staveb. Když na čtvercové síti složené z 9 čtverců jako na obrázku 3 aproximujeme kruh osmiúhelníkem dostaneme, že obsah kruhu je  $\frac{7}{9}$  druhé mocniny průměru kruhu. Protože  $\frac{64}{81}$  snadno zapisovatelné pomocí kamenných zlomků, které se v té době hojně používaly, je možné, že  $\frac{63}{81}$  nahradili  $\frac{64}{81}$  [5].

**Řecko** Na úplném vrcholu byla starověká matematika v Řecku a to hlavně díky velkému množství vědců z celé řady oborů. Do dnešní doby se v matematice používá mnoho jejich poznatků, např.: Archimédovy geometrické řady, Pythagorova věta, Euklidovy věty a Archimédův algoritmus na výpočet  $\pi$ , který je rozebrán v kapitole 2.2.2.

**Řím** Klaudios Ptolemaios, vědec žijící v Alexandrii 85-165 n. l. [12], ve své 1. knize „Almagest“ sestavil tabulku tětiv (sinů). Funkci sinus značí jako chord  $\alpha$ . K určení základních hodnot užívá do té doby již známých znalostí z matematiky. Pro získání malých úhlů odvodil vzorec



Obrázek 3: Síť pro aproximaci kruhu

pro chrd polovičního úhlu:

$$\text{chrd}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \text{chrd}(180^\circ - \alpha)}{2},$$

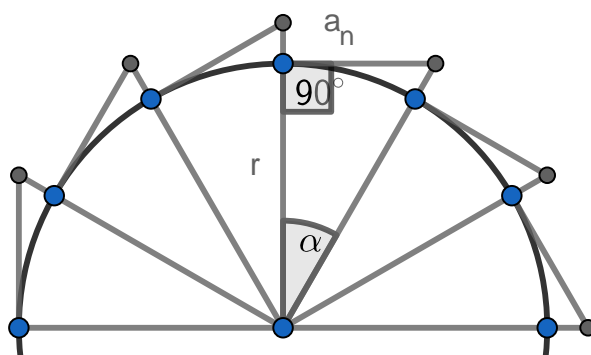
který lze zapsat dnešním zápisem jako:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Po úpravě vzorcem  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , který znal i Ptolemaios, lze dostat algoritmus pro poloviční úhel:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{2}}. \quad (4)$$

Když se dostal až na  $1^\circ$  využil novou goniometrickou funkci aproximaci obvodu kruhu  $o$ , kterou lze vidět na obrázku 4. Tato aproximace by šla zapsat dnešním moderním zápisem takto:



Obrázek 4: Ptolemaiova aproximace kruhu

$$o = \lim_{n \rightarrow \infty} nr \sin \left( \frac{360^\circ}{n} \right),$$

když to vložíme do vzorce pro  $\pi$ :

$$\pi = \frac{o}{2r},$$

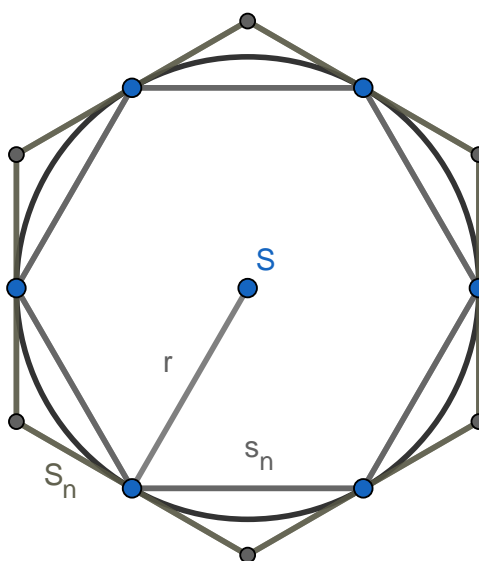
dostaneme, že:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{2}. \quad (5)$$

Ptolemaios pro  $\alpha = 1^\circ$  ( $n = 360$ ) dostal hodnotu  $\pi$  3,14166. Důvod, proč nedostal hodnotu 3,14143, je, že během svého výpočtu chrd  $1^\circ$  pomocí vzorce 4 zaokrouhloval [3].

## 2.1.2 Archimédův algoritmus

Archimédes (287-212 př. n. l.[3]) použil k výpočtu  $\pi$  úvahu, že obvod vepsaného pravidelného  $n$ -úhelníku  $o_n$  je menší než obvod kruhu  $o_k$  a že obvod opsaného pravidelného  $n$ -úhelníku  $O_n$  je větší než obvod kruhu:



Obrázek 5: Kruh s opsaným a vepsaným  $n$ -úhelníkem

$$o_n < o_k < O_n$$

$$ns_n < 2\pi r < nS_n$$

$$\frac{ns_n}{2r} < \pi < \frac{nS_n}{2r}, \quad (6)$$

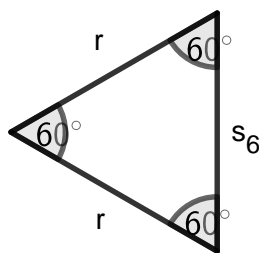
kde  $n$  je počet vrcholů/stran,  $r$  je poloměr kružnice,  $s_n$  je délka strany vepsaného  $n$ -úhelníku a  $S_n$  je délka strany opsaného  $n$ -úhelníku [1]. Princip tohoto algoritmu je ten, že čím více bude mít  $n$ -úhelník vrcholů, tím více bude opisovat kruh a tím bude menší příslušný interval.

Archimédes začal výpočet na snadno spočitatelném šestiúhelníku, kde délka strany vepsaného šestiúhelníka je poloměr kružnice<sup>6</sup>, pro jednoduchost výpočtu zavedeme jednotkový poloměr ( $r = 1$ ).

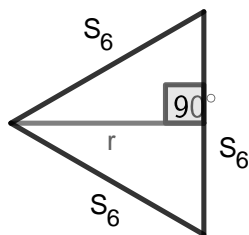
$$s_6 = r \Rightarrow s_6 = 1$$

Délka stany opsaného šestiúhelníka jde vypočítat pomocí Pythagorovy věty.

<sup>6</sup>Pravidelný šestiúhelník se skládá z šesti rovnostranných trojúhelníků. To znali již Babylóňané[1].



Obrázek 6: Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka

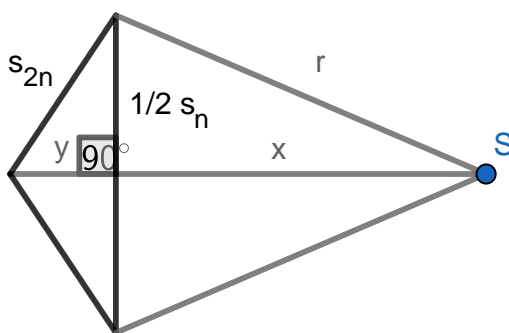


Obrázek 7: Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka

$$S_6^2 = r^2 + \left(\frac{S_6}{2}\right)^2 \Rightarrow 4S_6^2 = 4r^2 + S_6^2 \Rightarrow S_6^2 = \frac{4}{3}r^2 \Rightarrow S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

Když se hodnoty  $s_6$  a  $S_6$  vloží do vztahu 4, vyjde, že  $3 < \pi < 2\sqrt{3}$ . Archimédes u této hodnoty nevydržel, a tak počítal dál, ale protože pro víceúhelníky není výpočet tak jednoduchý<sup>7</sup>, odvodil si vztah pro  $2n$ -úhelníky.



Obrázek 8: 1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanáctiúhelníka

Z obrázku 8 můžeme sestavit soustavu 3 rovnic, ze kterých se dá vyjádřit  $s_{2n}$ :

1. Protože se jedná o mnohoúhelník vepsaný, vrcholy budou ležet vždy n kružnici ve vzdálenosti  $r$  od středu  $S$ .

$$r = x + y$$

<sup>7</sup>Za Archiméda nebyly známé goniometrické funkce. První, kdo určil jejich hodnoty, byl Ptolemaios. [3]

2. Pro pravý trojúhelník z obrázku 8 podle Pythagorovy věty platí, že:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

3. Pro levý trojúhelník z obrázku 8 podle Pythagorovy věty platí, že:

$$s_{2n}^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = y^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

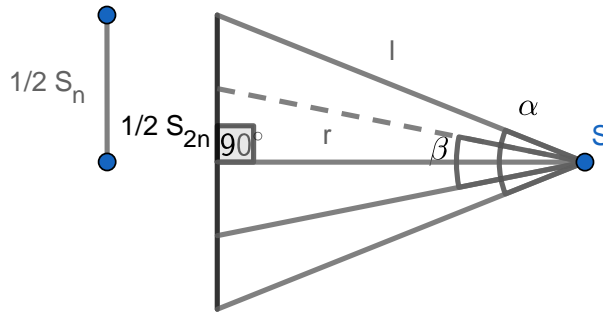
Celá soustava se dá upravit a dá se z ní vyjádřit  $s_{2n}$ . (Jednotlivé rovnice soustavy rovnic jsou zapsány ve sloupcích pod sebou a jednotlivé kroky úprav jsou vždy mezi sloupci doprava.)

$$\begin{array}{lll} x + y = r & x + y = 1 & y = 1 - x \\ x^2 + \frac{s_n^2}{4} = r^2 & x^2 + \frac{s_n^2}{4} = 1 & x = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \\ y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 & y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 & y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \end{array}$$

$$(1-x)^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \Rightarrow 1 - 2x + x^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \Rightarrow 1 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} + 1 - \frac{s_n^2}{4} + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2$$

$$\Rightarrow s_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \Rightarrow s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \quad (7)$$

Z obrázku 9 je patrné, že když se zpoloviční úhel  $\alpha$  na úhel  $\beta$  (zdvojnásobení počtu vrcholů),



Obrázek 9: 1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanáctiúhelníka

musí platit:

$$\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n - S_{2n})} = \frac{r}{l},$$

protože v libovolném trojúhelníku je poměr libovolných dvou stran svírající úhel  $\varphi$  stejný jako poměr úseček ve zbývajících straně rozdělené osou úhlu  $\varphi$ . Pomocí Pythagorovy věty lze spočítat stranu  $l$ .

$$l = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{2}S_n\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}$$

Nyní stačí dosadit a vyjádřit  $S_{2n}$  [6].

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n - S_{2n})} &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_n - S_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \\
 \Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_{2n}(\frac{S_n}{S_{2n}} - 1)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow \frac{S_n}{S_{2n}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2} \\
 \Rightarrow S_{2n} &= \frac{S_n}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow S_{2n} = \frac{2S_n}{2 + \sqrt{4 + S_n^2}} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Tímto postupem došel až k 96-úhelníku a vypočítal, že  $3\frac{10}{71} < \pi < \frac{1}{7}$ , neboli  $3.1408 < \pi < 3.1429$ . Ve výpočtu musel odmocňovat, např:  $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153}$ , ale dodnes se neví, jak to udělal.

Je možné, že Archimédes šel později ještě dál, protože v roce 1896 v Istanbulu byla nalezena Metrika z roku 60 př. n. l. od Herona z Alexandrie (10-70 n. l. [7]), kde se Heron odvolává na Archiméda s tím, že  $3.1416 < \pi < 3.1738$ . Chyba v horním intervalu vznikla asi opisem originálu. [1]

## 2.2 Středověk

Vzhledem k tomu, že během středověku probíhal souboj vědy a náboženství a starověké poznatky stačily, došlo v řadě vědeckých disciplín, včetně matematiky, k útlumu. Jediný, kdo se v této době zabýval  $\pi$ , byl Leonardo Fibonacci a Mikuláš Kusánský. [1] [12]

### 2.2.1 Leonard Fibonacci

Leonardo z Pizy/Fibonacci (1180-1250) použil ke svému výpočtu  $\pi$  Archimédovu metodu. Pomocí decimální aritmetiky, která ještě za Archiméda nebyla známá, došel u 96-úhelníku k nerovnosti  $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$ . Když se z mezních hodnot udělá průměr:

$$\frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{5}}{2} = \frac{29}{90} \doteq \frac{1}{3},$$

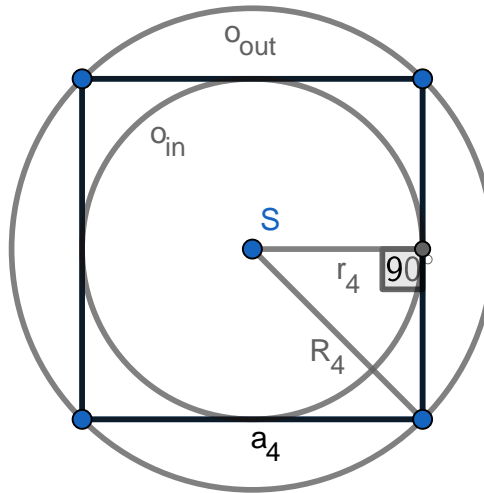
vyjde Fibonacciho hodnota  $\pi \frac{864}{275} \approx 3,141818$ . [1] [10]

### 2.2.2 Mikuláš Kusánský

Mikuláš Kusánský (1401-1464) byl německý filosof, teolog, diplomat, matematik a kardinál v Římě. Objevil novou, tzv. „sendvičovou“ metodu pro výpočet  $\pi$ . Vzal si pravidelný  $n$ -úhelník s obvodem 2, který byl vepsán a opsán kružnicemi (obr. 10), a zdvojnásobováním úhlů v mnohoúhelník o stejném obvodu zpřesňoval krajní intervaly výpočtů  $\pi$ .

Začal na čtverci o straně  $a_4$ , která se rovnala  $\frac{1}{2}$ . Poloměr vepsané kružnice  $r_n$  je polovina strany čtverce, tj.  $\frac{1}{4}$ . Poloměr opsané kružnice  $R_n$  lze spočítat pomocí Pythagorovy věty.

$$R_4 = \sqrt{r_4^2 + \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



Obrázek 10: Kusánského algoritmus

Když znal poloměr vepsané a opsané kružnice, začal iterovat pomocí jeho nalezených vzorců pro obvody kružnic v  $2n$ -úhelníku.

$$r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2} \quad (9)$$

$$R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}} \quad (10)$$

Jak již bylo zmíněno, obvod opsané  $o_{in}$  a vepsané  $o_{out}$  kružnice tvoří meze intervalu, ve kterém se nachází obvod  $n$ -úhelníka  $o$ . Interval lze rozepsat do dvou nerovností.

$$\begin{aligned} o_{in} < o &\Rightarrow 2\pi r_n < o \Rightarrow \pi < \frac{2}{2r_n} \Rightarrow \pi < \frac{1}{r_n} \\ o < o_{out} &\Rightarrow o < 2\pi R_n \Rightarrow \frac{2}{2R_n} < \pi \Rightarrow \frac{1}{R_n} < \pi \end{aligned}$$

Z předchozích dvou nerovností lze udělat jednu nerovnost.

$$\frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n} \quad (11)$$

Kdyby nezvolil obvod  $n$ -úhelníku 2 ale libovolný jiný  $o$ , dostal by nerovnost pro výpočet  $\pi$ :

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n}$$

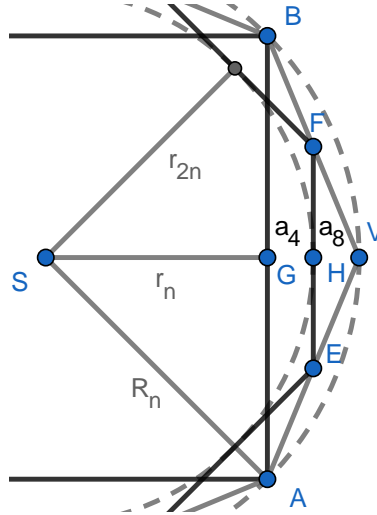
Kusánský přišel ke vzorci 9 tak, že sestrojil konstrukci, v které je čtyř- a osmiúhelník o stejné obvodu (obr. 11), takže platí, že:

$$|AB| = 2|EF| \Rightarrow a_4 = 2a_8.$$

Z tohoto tvrzení, pak vyplývá, že bod  $H$ , který je od středu  $S$  vzdálen jako poloměr vepsané kružnice  $2n$ -úhelníku<sup>8</sup>, je přesně uprostřed mezi  $G$  a  $V$ , což jde si ověřit tak, že vezmeme

<sup>8</sup>v tomto případě osmiúhelníku





Obrázek 11: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

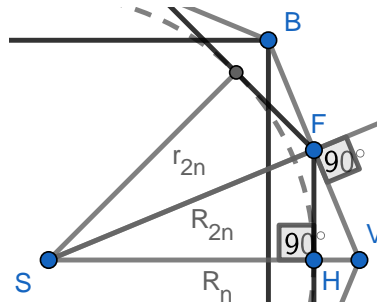
pravoúhlý trojúhelník  $GV B$ , který bude mít úhel  $\alpha$  při vrcholu  $V$ , a pomocí funkce tangens zapíšeme rovnici:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{|BG|}{|GV|}\right) &= \tan\left(\frac{|FH|}{|HV|}\right) \Rightarrow \frac{|BG|}{|GV|} = \frac{|FH|}{|HV|} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}a_4}{|GV|} = \frac{\frac{1}{2}a_8}{|HV|} \\ &\Rightarrow \frac{2}{|GV|} = \frac{1}{|HV|} \Rightarrow |GV| = 2|HV|. \end{aligned}$$

Ted' stačí délky poloměrů zprůměrovat.

$$|SH| = \frac{|SG| + |SV|}{2} \Rightarrow r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

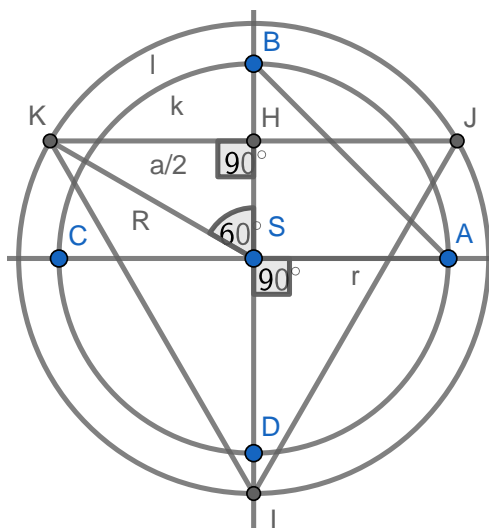
Vzorec 10 vychází z Eukleidovy věty o odvěsně (obr. 12) [9], kde:



Obrázek 12: Výpočet poloměru opsané kružnice osmiúhelníka

$$|SF|^2 = |SV||SH| \Rightarrow |SF| = \sqrt{|SV||SH|} \Rightarrow R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}}.$$

Kusánský se ještě před objevením tohoto algoritmu zabýval geometrickým přiblížením k obvodu kruhu. Vymyslel hned několik přiblížení. Pravděpodobně nej přesnější se nachází v knize „Dialogus de circuli quadratura“ z roku 1457, která je na obrázku 13. V konstrukci na obrázku hledá přiblížení obvodu  $o_k$  kružnice  $k$  se středem v bodě  $S$  a poloměrem  $r$ . Kružnice protínají kolmé přímky v bodech  $A, B, C$  a  $D$  se společným bodem  $S$ . Dále narýsoval kružnici  $l$  s



Obrázek 13: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

poloměrem  $R$ , který se rovná:

$$R = \frac{r + |AB|}{2} = \frac{r + \sqrt{r^2 + r^2}}{2} = \frac{r + \sqrt{2}r}{2} = \frac{r(1 + \sqrt{2})}{2}$$

Na kružnici  $l$  umístil bod  $K$  tak, aby platilo, že úhel  $BSK$  je  $60^\circ$ . Nakonec vepsal do kružnice  $L$  rovnostranný trojúhelník  $IJK$  se stranou  $a$ . Strana  $a$  se rovná:

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2R} \Rightarrow a = \frac{2R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{r(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2}$$

Když oba obvody porovnáme, zjistíme přibližnou hodnotu  $\pi$  [13].

$$o_k = o_{\triangle IJK} \Rightarrow 2\pi r = 3a \Rightarrow 2\pi r = \frac{3r(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2} \Rightarrow \pi = \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{4}$$

$$\pi \approx 3,136$$

## 2.3 Novověk

Konec 15. století a začátek 16. století byl ve znamení zámořských cest. Z tohoto důvodu byl požadavek na přesnější měřicí přístroje, což mělo za následek rozvoj přírodních věd včetně matematiky. [1]

### 2.3.1 François Viète

François Viète (1540–1603) jako první vymyslel algoritmus na výpočet  $\pi$  založený na nekonečném součinu (vzorec 12).

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots \quad (12)$$

Vydal ho v knize „Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII“ v roce 1593 [1]. Tento lze snadno odvodit pomocí goniometrických funkcí.

Pomocí vzorce:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

můžeme libovolně mnohokrát rozložit sinus.

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \left( 2 \sin \frac{x}{2 \cdot 2} \cos \frac{x}{2 \cdot 2} \right) \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2^3 \sin \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Již ve 3. rozkladu je vidět obecný vzorec pro rozklad.

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} \Rightarrow \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

Pravou stranu nově vzniklé rovnice rozšíříme o  $\frac{x}{x}$ .

$$\prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \quad (13)$$

Další úpravy budou za podmínky, že  $n$  se bude limitně blížit nekonečnu. A protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = 1,$$

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i}. \quad (14)$$

Když za  $x$  dosadíme  $\frac{\pi}{2}$ , vyjde nám:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots, \quad (15)$$

což lze upravit na rovnici 12. Z té samé rovnice lze vyjádřit i samotné  $\pi$ .

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \dots$$

François Viète během svého života spočítal  $\pi$  na 9 desetinných míst, ale použil k tomu Archimédův algoritmus [11].

Kromě tohoto algoritmu publikoval v tomtéž díle také geometrickou aproximaci  $\pi$  (obrázek 14). Na obrázku je kružnice  $o_k$  se středem  $S$  a poloměrem  $R$  nebo-li  $SA$ , úsečka  $AI$ , která je stejně dlouhá jako úsečka  $DH$  a dvě rovnoběžné přímky:  $IG$  a  $AJ$ . Obvod kružnice  $o_k$  je přibližně  $4SJ$ . Pomocí zmíněné aproximací můžeme dopočítat přibližnou hodnotu  $\pi$ .

Protože podle věty uuu je trojúhelník SIG podobný trojúhelníku SAJ, můžeme napsat, že

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|} \Rightarrow |SJ| = \frac{|SA| \cdot |SG|}{|SI|}$$



Nyní můžeme spočítat  $SI$ .

$$\begin{aligned} |SI| &= |SA| - |AI| = |SA| - |DH| = R - \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) R = \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) R = \\ &= \left( \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) R = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) R \end{aligned}$$

Podle věty uu je trojúhelník  $DSE$  podobný s trojúhelníkem  $DGF$ , proto

$$\frac{|DG|}{|DS|} = \frac{|GF|}{|SE|} \Rightarrow \frac{|DG|}{|GF|} = \frac{|DS|}{|SE|} = \frac{R}{\frac{1}{2}R} = 2 \Rightarrow |DG| = 2|GF|$$

Úsečku  $DG$  můžeme rozdělit na dvě úsečky se společným bodem  $S$ .

$$|DG| = |DS| + |SG| \Rightarrow 2|GF| = R + |SG| \Rightarrow G = \frac{1}{2} (R + |SG|)$$

Podle Pythagorovy věty lze napsat, že

$$\begin{aligned} |SG|^2 + |GF|^2 &= |SF|^2 \Rightarrow |SG|^2 + \left( \frac{1}{2} (R + |SG|) \right)^2 = R^2 \\ \Rightarrow |SG|^2 + \frac{1}{4} (R^2 + 2R \cdot |SG| + |SG|^2) - R^2 &= 0 \\ \Rightarrow 4|SG|^2 + R^2 + 2R \cdot |SG| + |SG|^2 - 4R^2 &= 0 \Rightarrow 5|SG|^2 + 2R \cdot |SG| - 3R^2 = 0 \\ \Rightarrow |SG| &= \frac{-2R \pm \sqrt{4R^4 + 60R^2}}{10} = \frac{-2R \pm 8R}{10} = \frac{-R \pm 4R}{5} \end{aligned}$$

Protože v tomto případě nemůže být délka záporná použijeme znaménko  $+$ .

$$|SG| = \frac{-R + 4R}{5} = \frac{3}{5}R$$

Nyní stačí dosadit do vzorce pro výpočet  $\pi$ .

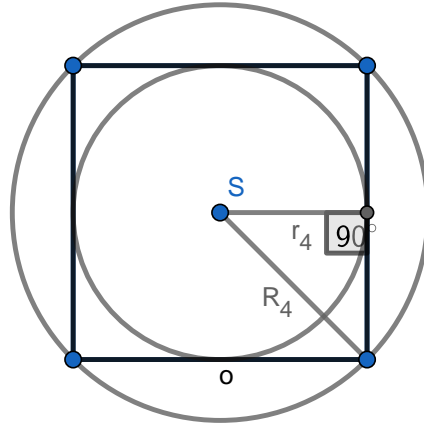
$$\pi = 2 \frac{|SG|}{|SI|} = 2 \frac{\frac{3}{5}R}{\frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) R} = \frac{12}{5 (3 - \sqrt{5})} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5} (3 + \sqrt{5})$$

Podle Vièteho geometrické aproximace přibližně vychází  $\pi$  3,14164. [14]

### 2.3.2 Descartesův algoritmus

René Descartes (1596-1650), francouzský matematik a filosof, dav světu kartézskou soustavu souřadnic a racionalistickou filosofii, která dala základ klasicismu, vymyslel nový algoritmus, který byl publikován až posmrtně v roce 1701. Spočíval v tom, že  $n$ -úhelník o poloměru  $o$  je obehnán vepsanou a opsanou kružnicí o poloměrech  $r_n$  a  $R_n$  (obrázek 16), a pomocí vzorců lze spočítat poloměry pro  $2n$ -úhelníky o stejném obvodu [11] [17].

$$r_{2n} = \frac{r_n + R_n}{2} \quad (16)$$



Obrázek 16: Descartesův algoritmus

$$R_{2n} = \sqrt{\frac{R_n(r_n + R_n)}{2}} \quad (17)$$

Když použijeme vzorec pro obvod kruhu

$$o = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{o}{2r},$$

můžeme  $\pi$  vyjádřit nerovností:

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n} \quad (18)$$

### 2.3.3 Willebrord Snell

Roku 1654 Christiaan Huygens (1629-1695) použil nerovnici od Willebrorda Snella (1580-1626) z roku 1621 k výpočtu přibližné hodnoty  $\pi$ . Nerovnice vypadala takto:

$$\frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi} < \varphi < \tan \frac{\varphi}{3} + 2 \sin \frac{\varphi}{3}, \quad (19)$$

a když do ní dosadil, že  $\varphi = \frac{\pi}{30}$ , dostal, že  $\pi$  je 3,141 592 653 .... Přesnost byla na 9 desetinných míst [11].

Snell v roce, kdy vydal předchozí nerovnost, vydal v knize „Cyclometria sive de circuli dimensione“ 2 nerovnice zvyšující účinnost Archimédovy metody. Zjistil totiž to, že v jakékoliv fázi iterování pro  $n \geq 3$  je  $\pi$  blíže spodní hranici intervalu  $q_n$  než spodní hranici intervalu  $p_n$  (obrázek 17).



Obrázek 17: Interval z Archimédovy metody

$$\pi - p_n < q_n - \pi$$

Pro jednotlivé  $n \geq 3$  pak mu vyšly 2 stálé nerovnosti.

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2 \quad (20)$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} = 4 \quad (21)$$

Když tyto nerovnosti upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2 &\Rightarrow q_n - \pi > 2\pi - 2p_n \Rightarrow -3\pi > -2p_n - q_n \Rightarrow \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \\ \frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4 &\Rightarrow \pi - p_n < 4\pi - 4p_{2n} \Rightarrow -3\pi < -4p_{2n} + p_n \Rightarrow \pi > \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n, \end{aligned}$$

získáme nerovnice pro výrazné zúžení intervalu z Archimédova algoritmu.

Snell sice tyto nerovnosti objevil, ale dokázal je až Huygens v „De circuli magnitude inventa“ v roce 1654 [15].

### 2.3.4 Wallisův nekonečný součin

John Wallis (1616 – 1703 [11]) v roce 1655 v knize „Arithmetica Infinitorum“ vydává po Viètem 2. nekonečný součin a zároveň historicky 1. algoritmus pro výpočet  $\pi$  obsahující pouze racionální operace [1].

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots} \quad (22)$$

Ten lze přepsat do moderní obecnější podoby pro  $\pi$ .

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^n \left( \frac{2i}{2i-1} \cdot \frac{2i}{2i+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^n \frac{4i^2}{4i^2 - 1} \quad (23)$$

### 2.3.5 Gregoryho algoritmus

James Gregory (1638-1675) představil v roce 1667 veřejnosti nový algoritmu založený na kružnici o poloměru  $r$  opsané a vepsané  $n$ -úhelníkem (obrázek 5). Algoritmus počítá obsah vepsaného  $s$  a opsaného  $S$   $2n$ -úhelníka pomocí vzorců [11]:

$$s_{2n} = \sqrt{s_n S_n} \quad (24)$$

$$S_{2n} = \frac{2s_n S_n}{s_n + s_{2n}}. \quad (25)$$

Když upravíme vzorec pro výpočet obsahu kruhu, dostaneme:

$$S = \pi r^2 \Rightarrow \pi = \frac{S}{r^2},$$

proto můžeme napsat, že obsah vepsaného  $s$  a opsaného  $S$   $2n$ -úhelníka pomocí vzorců [11]:

$$\frac{s_n}{r^2} < \pi < \frac{S_n}{r^2}. \quad (26)$$

### 2.3.6 Brounckerův řetězový zlomek

William Brouncker (1620-1684) objevil nový řetězový zlomek na výpočet  $\pi$ .

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}} \quad (27)$$

Neznáme jeho odvození, ale dochvalo se nám odvození od Leonharda Eulera z roku 1775. Jednotlivé členy Gregoryho-Leibnizovy řady rozložil:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + 1 \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) + 1 \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{5}{7}\right) + \dots$$

a pomocí vzorce:

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \dots = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{1 + a_2 - \frac{a_3}{1 + a_3 - \dots}}}$$

přepsal na [1]:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 - \frac{-\frac{1}{3}}{1 + (-\frac{1}{3}) - \frac{-\frac{3}{5}}{1 + (-\frac{3}{5}) - \dots}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \dots}}} \Rightarrow \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \dots}}$$

Můžeme místo poslední úpravy rovnici vynásobit 4 a dostat rovnici pro samotné  $\pi$ :

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}} \quad (28)$$

### 2.3.7 Gregoryho-Leibnizova řada

Tato nekonečná řada byla objevena nezávisle dvěma matematiky: v roce 1671 James Gregory a v roce 1674 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (29)$$

Gregory pomocí Cavalieriho vzorec a dlouhého dělení v integrandu dosáhl Taylorova rozvoje pro funkci arkus tangens. Taylorův rozvoj lze dnešním zápisem zapsat takto:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

Protože známe hodnotu arkus tangens v bodě 0 ( $\arctan(0) = 0$ ), můžeme tuto hodnotu dosadit za  $a$ :

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \frac{\arctan(a)}{1} (x-a)^0 + \frac{\frac{1}{a^2+1}}{1} (x-a)^1 + \frac{\frac{0(a^2+1)-1(2a+0)}{(a^2+1)^2}}{2} (x-a)^2 + \\ &+ \frac{\frac{-2(a^2+1)^2 - (-2a)2(a^2+1)2a}{(a^2+1)^4}}{6} (x-a)^3 + \dots \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\Rightarrow \arctan(x) &= \arctan(a) + \frac{1}{a^2 + 1}(x - a) + \frac{-2a}{2(a^2 + 1)^2}(x - a)^2 + \\
&\quad + \frac{-2(a^2 + 1)^2 + 8a^2(a^2 + 1)}{6(a^2 + 1)^4}(x - a)^3 + \dots \\
\Rightarrow \arctan(x) &= \arctan(0) + \frac{1}{0^2 + 1}(x - 0) + \frac{-2 \cdot 0}{2(0^2 + 1)^2}(x - 0)^2 + \\
&\quad + \frac{-2(0^2 + 1)^2 + 8 \cdot 0^2(0^2 + 1)}{6(0^2 + 1)^4}(x - 0)^3 + \dots \\
\Rightarrow \arctan(x) &= x + \frac{-2}{6}x^3 + \dots \Rightarrow \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots
\end{aligned}$$

Kdybychom hned ze začátku pracovali s 8 členy namísto 4, řada by vypadala takto:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Nakonec Gregory dosadil  $x = 1$  a dostal řadu v rovnici 29. Po vynásobení 4 dostaneme řadu pro samotné  $\pi$ , která lze zapsat modernějším způsobem [11][1]:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2i + 1} \quad (30)$$

### 2.3.8 Kochaňského geometrická aproximace

Roku 1685 Adam Adamandy Kochański (1631 Dobrzyniu n. Wisłą-1700 Teplice v Čechách [11][8]), polský matematik, který působil jako jezuita velkou část svého života v Čechách, vypočítal přibližnou hodnotu  $\pi$  pomocí své vlastní konstrukce, která je na obrázku 18, kde platí, že  $\vartheta = 30^\circ$  a úsečka  $CD$  je přibližně polovina obvodu kruhu o poloměru  $r$ .

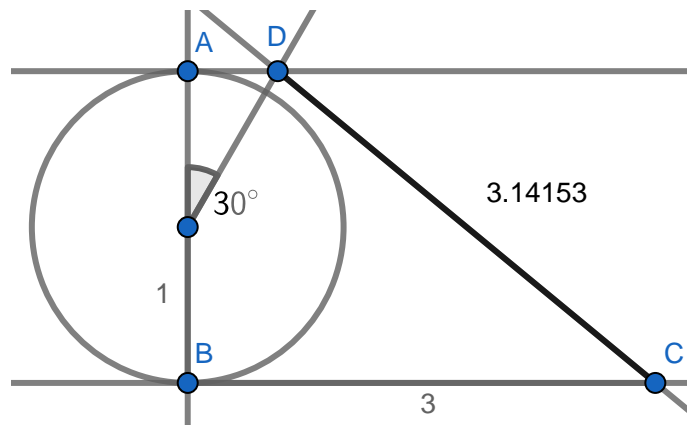
Úsečku  $CD$  lze spočítat pomocí Pythagorovi věty.

$$\begin{aligned}
|CD| &= \sqrt{|AB|^2 + (|AD| - |BC|)^2} = \sqrt{(2r)^2 + (3r - r \operatorname{tg} 30^\circ)^2} = \sqrt{4r^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2} = \\
&= \sqrt{4r^2 + \frac{(3\sqrt{3} - 1)^2}{3}r^2} = r \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \quad (31)
\end{aligned}$$

Nakonec úsečku stačí tát do vzorce pro  $\pi$ .

$$\pi = \frac{2r \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}}}{2r} = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \quad (32)$$

Ze vzorce 32 je jasné, že Kochanski došel k hodnotě  $\pi$  3,141533. [1]



Obrázek 18: Kochanského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem

### 2.3.9 Newtonovy řady

Sir Issac Newton (1642-1727 [11]), zakladatel integrálního a diferenciálního počtu, objevil hned několik řad. Nejznámější vychází z jím objeveného vzorce:

$$\arcsin x = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}},$$

který jde s použitím jeho objevu binomické věty upravit na:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots\right)dx = \\ &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Po dosazení  $x = \frac{1}{2}$ , dostaneme vzorec pro výpočet  $\pi$  [1]:

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi = 6 \arcsin \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \pi = 6 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots \right), \quad (33)$$

který jde moderním způsobem zapsat jako [17]:

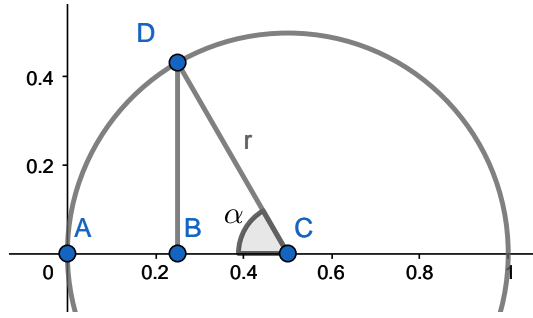
$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \sum_{i=0}^n \frac{(2i)!}{2^{4i+1} (i!)^2 (2i+1)} \quad (34)$$

Další známou řadu publikoval 1737 v „Treatise on the Method of Fluxions and Infinite Series“. Vychází z rovnice kružnice:

$$y = \sqrt{x - x^2},$$

kterou lze vidět na obrázku 19. Pomocí binomické věty vyřešil obsah  $a$  poloviční úseče  $ABD$ :

$$a = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{1}{5} \sqrt{x^5} - \frac{1}{28} \sqrt{x^7} - \frac{1}{72} \sqrt{x^9} - \dots \right]_0^{\frac{1}{4}} =$$



Obrázek 19: Kružnice  $y = \sqrt{x - x^2}$  s výsečí

$$= \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots \quad (35)$$

Plocha poloviční úseče je obsah  $S_v$  výseče  $ACD$  bez obsahu  $S_t$  trojúhelníku  $BCD$

$$a = S_v - S_t \quad (36)$$

Nejdříve spočítal úsečku  $|BD|$ :

$$|BD| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4-1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

a pak úhel  $\alpha$ :

$$\alpha = \arctg\left(\frac{|BD|}{|BC|}\right) = \arctg\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}\right) = \arctg \sqrt{3} = 60^\circ.$$

Z úhlu  $\alpha$  je jasné, že  $a$  je  $\frac{1}{6}$  obsahu kruhu. S těmito znalosti lze spočítat vzorec 36.

$$a = S_v - S_t = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{|BD| \cdot |BC|}{2} = \frac{\pi \frac{1}{4}}{6} - \frac{\frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} \Rightarrow \pi = 24 \left( \frac{\sqrt{3}}{32} + a \right) \quad (37)$$

Do vzorce 37 dosadil za  $a$  vzorec 35 [1].

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots \right) \quad (38)$$

Vzorec 38 lze zapsat moderním způsobem jako [17]:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \sum_{i=0}^n \frac{(2i)!}{2^{4i+2}(i!)^2(2i-1)(2i+3)} \quad (39)$$

### 2.3.10 Sharpova řada

Abraham Sharp (1651-1742) zrychlil Gregoryho-Leibnizovu řadu tím, že do Teylorova rozvoje pro  $\arctg(x)$  dosadil za  $x$   $\frac{1}{\sqrt{3}}$  [1].

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \pi = 2\sqrt{3} \left( 1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{3} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{3^i(2i+1)} \quad (40)$$

### 2.3.11 Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) sjednotil matematický zápis a symboliku do dnešní podoby, např.:  $f(x)$ ,  $\int dx$ ,  $i$ ,  $e$ ,  $\sum$ . Od jeho doby se řeckým písmenem  $\pi$  označuje konstanta, o které je tato práce.

Dalším výsledkem jeho celoživotní práce je objev několika nekonečných řad vedoucích k  $\pi$ , z nichž je neznámější vyřešení v roce 1736 řady převrácených dvojmocí, kterou před tím se marně snažilo vyřešit celá desetiletí spousta matematiků, např. G. W. Leibniz nebo J. Bernoulli I. Použil k tomu řadu pro  $\sin x$  (Taylorův rozvoj), která byla známa už za Newtona.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Řadu řešil pro  $\sin x = 0$ , vydělil ji  $x$  ( $x \neq 0$ ) a následně substituoval  $y = x^2$ .

$$0 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \Rightarrow 0 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \Rightarrow 0 = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \dots \quad (41)$$

Jestliže rovnice 41 měla před úpravou dělením kořeny:  $x = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , tak po substituci má kořeny:  $y = (n\pi)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pomocí teorie rovnic vymyslel upravenou rovnici, dnes známou jako Vietovy vztahy, která zní: součet převrácených hodnot kořenů ( $\frac{1}{(n\pi)^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) je roven záporně vzatému podílu lineárního a absolutního členu ( $\frac{1}{3!}$ ) [1].

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad (42)$$

Vzorec 42 lze přepsat pro samotné  $\pi$

$$\pi = \sqrt{6} \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}} \quad (43)$$

Stejným způsobem odvodil řadu pomocí funkce  $\cos x$ .

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \Rightarrow 0 = 1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} - \frac{y^3}{6!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2!} = \frac{1}{(0,5\pi)^2} + \frac{1}{(1,5\pi)^2} + \frac{1}{(2,5\pi)^2} + \dots \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad (44)$$

Odečtením rovnice 42 od dvojnásobku 44 dostal další řadu:

$$\frac{2\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{2}{1^2} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{1}{3^2} - \dots \Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots \quad (45)$$

Z rovnic 44 a 45 jde vyjádřit  $\pi$ .

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt{2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)^2}} \quad (46)$$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt{3 \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}} \quad (47)$$

### 2.3.12 Legendreho algoritmus

Adrien Legendry (1752-1833) v roce 1794 publikoval dílo „Éléments de géométrie“ podobným algoritmem jako M. Kusánský jen s rozdíle, že kromě poloměru opsané a vepsané kružnice  $R$  a  $r$  k  $2n$ -úhelníku počítá ještě koeficient  $s$ .

$$R_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2} \quad (48)$$

$$r_{n+1} = \sqrt{r_n R_n} \quad (49)$$

$$s_{n+1} = s_n - 2^n (R_n - R_{n+1})^2 \quad (50)$$

Za počáteční hodnoty zvolíme  $R_0 = 1$ ,  $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  a  $s_0 = \frac{1}{4}$ .

Nyní stačí pro výpočet  $\pi$  použít následující vzorec [11][16]:

$$\frac{R_{2n}^2}{s_n} < \pi < \frac{R_n^2}{s_n}. \quad (51)$$

## 2.4 Moderní algoritmy s využití počítačů

V září roku 1949 v Laboratořích balistického výzkumu v Pensylvánii byl zřejmě proveden historicky první výpočet hodnoty  $\pi$ . Počítač ENIAC spočítal pomocí Machinova vzorce

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \quad (52)$$

za 70 hodin  $\pi$  s přesností na 2037 desetinných míst. Tento rekord byl několikrát překonán. Poprvé 1954/1955 v Dahlgrenu ve Virginii, kdy počítač NORC spočítal za 13 minut  $\pi$  na 3089 platných míst.

Pro změnu jiný vzorec byl použit v březnu 1957 v Počítačovém centru v Londýně. Za 53 hodin zvládl počítač Pegasus výpočet  $\pi$  s užitím Strassenitzkého vzorce

$$\pi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \quad (53)$$

na 10 021 desetinných míst. Bohužel od 7480. místa byla chyba, protože vzorec v počítači nebyl identický. Na jaře dalšího roku byl výpočet zopakován správně.

Na kombinaci Machinava a Gregoryho vzorce

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 16 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(2i+1) \cdot 5^{2i+1}} - 4 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(2i+1) \cdot 239^{2i+1}} \quad (54)$$

vsadili v červenci 1960 v Data Processing Centre v Paříži a z počítače IBM704 získali prvních 10 000 desetinných míst za 1 hodinu 40 minut.

Poslední vzorec zde popsany bude Strömerův:

$$\pi = 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \quad (55)$$

Byl použit v červenci 1961 na počítači IBM 7090 v IBM Processing Centre v New Yorku a za 8 hodin a 43 minu měli  $\pi$  na 100 265 platných míst. Ten samý vzorec spolu s Shanksonovo-Wrenchovou metodou byl základem výpočtu  $\pi$  na 500 000 desetinných míst v KPAE v Paříži počítačem CDC6600 v únoru 1967. [1][20]

### 3 METODA MONTE CARLO

Monte Carlo, zkráceně MC, je metoda numerického výpočtu pomocí generování náhodné veličiny<sup>9</sup>. Použití našla hlavně s rozvoje výpočetní techniky, protože do té doby jsme nemohli generovat pseudonáhodná čísla jinak než ručními výpočty, což mělo za následek nedostatek hodnot pro seriózní výsledek za rozumný čas. Pro generování jde sice použít i fyzikální experiment, např. hod kostkou, ale i ten není čistě náhodný, protože je ovlivněn, jak házíme. V dnešní době metoda nachází hlavní užití pro fyzikální simulace pravděpodobnostních jevu, např. v kvantové fyzice, nebo k výpočtu poměru obsahů. [1][19]

#### 3.1 Obsah kruhu

Pomocí MC sice přímo nemůžeme spočítat určitý integrál, ale můžeme si vyjádřit obsah plochy pod křivkou z daného poměru. Pokud budu znát obsah výseče, která zaujímá čtvrtinu kruhu (obrázek 20), mohu si  $\pi$  spočítat.

Principem této metody je, že budu generovat pseudonáhodné body na určité ploše o obsahu  $S_1$  a budu zjišťovat jestli bod leží pod křivkou na ploše o obsahu  $S_2$ . Poměr počtu všech bodů na pod křivkou  $m$  s celkovým počtem bodů  $n$  je pro velké  $n$  rovný poměru obsahu  $S_1$  s  $S_2$ .

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{n}{m}, \quad n \rightarrow \infty \quad (56)$$

Protože s rovnicí kruhu budu zacházet jako s funkcí

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

budu pracovat s částí nad osou  $x$ , přesněji v 1. kvadrantu. Plocha, ve které budu generovat body, má tvar čtverce o straně  $a$  rovné 1, protože kruh o rovnici  $y^2 = 1 - x^2$  má poloměr  $r$  rovný 1, proto generované body mají tvar  $X_i[x_i, y_i]$ , kde  $x_i$  a  $y_i$  jsou pseudonáhodná čísla od 0 do 1. Body, jestli leží ve výseči, prověřím pomocí funkce:

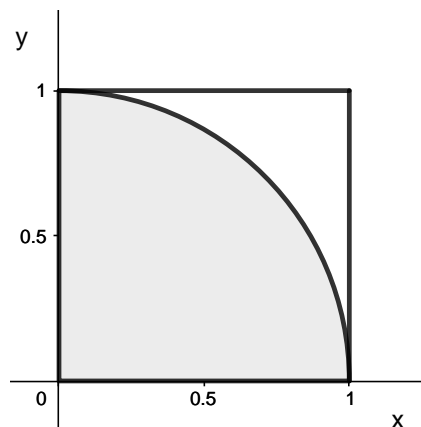
$$y_i \leq y(x_i) \quad \Rightarrow \quad y_i \leq \sqrt{1 - x_i^2}$$

Po vygenerování velkého množství bodů dostanu čísla  $n$  a  $m$ , ze kterých si vyjádřím  $\pi$ .

$$\frac{n}{m} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{4n}{m} \quad (57)$$

---

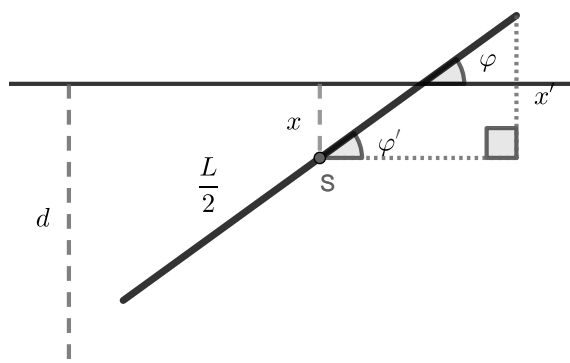
<sup>9</sup>Náhodná veličina je veličina s přiřazenou náhodnou hodnotou. Protože většinou je získávána pomocí algoritmu, nikoliv dílem náhody, označuje se jako pseudonáhodná.



Obrázek 20: Integrace  $\frac{1}{4}$  kruhu  $y^2 = 1 - x^2$

## 3.2 Buffonova jehla

Georges Louis Leclerc, kníže de Buffon, známý svým šokujícím sdělením o stáří světa<sup>10</sup>, navrhl experiment vedoucí k hodnotě  $\pi$  pomocí pravděpodobnosti. Experiment, ilustrovaný na obrázku 21, spočívá v házení jehel o délce  $L$  se středem v bodě  $S$  na rovnou plochu rozdělenou rovnoběžnými přímkami ve vzdálenosti  $d$ , která nepřekračuje délku samotné jehly. Pravděpodobnost



Obrázek 21: Buffonův experiment s jehlou

$P$ , že špejle protne přímkou, lze vyjádřit vztahem:

$$P = \frac{2L}{d\pi} \quad (58)$$

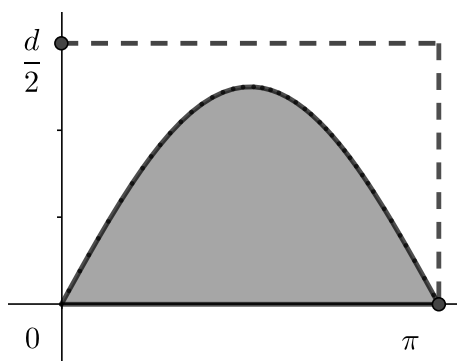
Vztah 54 jde odvodit pomocí jednoho integrálu. Jestliže  $S$  je vzdálen od přímkou vzdáleností  $x$ , platí, že, když je  $x$  menší než vzdálenost  $x'$  od  $S$  na ose kolmé k přímkám, jehla protнула přímkou.

$$x < x' \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{2}L \sin \varphi$$

Protože je stejně pravděpodobné, jakou jehla protne přímkou, stačí spočítat pravděpodobnost protnutí jedné konkrétní přímkou. Jestliže úhel náklonu jehly  $\varphi$  je v rozsahu od 0 do  $\pi$  (z obou

<sup>10</sup>Svým tvrzením, že svět je starý 75000 let, šokoval vzdělance té doby. V 18. století se stále věřilo že svět není starší více jak 6000 let.

stran je stejná) a  $x$  je v rozsahu od 0 do  $\frac{d}{2}$ , mohou všechny možnosti dopadu interpretovat grafem na obrázku 22. Plocha  $S_1$  pod křivkou, představující rovnici  $x = \frac{1}{2}L \sin \varphi$ , znázorňuje všechny



Obrázek 22: Graf protnutí přímky

případy protnutí přímky jehlou. Pravděpodobnost protnutí se dá spočítat z podílu  $S_1$  a plchy  $S_2$ , znázorňující všechny případy hodů:

$$P = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}L \sin \varphi d\varphi}{\frac{1}{2}d\pi} = \frac{L \left[ -\cos \varphi \right]_0^\pi}{d\pi} = \frac{L(1+1)}{d\pi} = \frac{2L}{d\pi}$$

Ze vztahu 54 lze vyjádřit  $\pi$ . [1]

$$\pi = \frac{2L}{dP} \quad (59)$$

## 4 SROVNÁNÍ METOD

V této kapitole budu srovnávat efektivitu algoritmů zmíněných v předchozích kapitolách podle mnou definované veličiny  $\mathfrak{N}$ . Protože  $\mathfrak{N}$  závisí na rychlosti konvergence algoritmu  $\beta(n)$ , která je nespojitá funkce závislá na počtu iterací  $n$ , kde  $n$  náleží přirozeným číslům, použiji sumaci v intervalu všech iterací, a tím dostanu hodnotu veličiny nezávislou na aktuální iteraci.

$$\mathfrak{N} = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^a \beta(n)$$

Vzhledem k tomu, že chci, aby platilo, čím vyšší hodnota, tím lepší algoritmus, definuji rychlosti konvergence algoritmu jako podíl čísla 2 umocněného na zápornou diferenci míry konvergence  $p$  a čísla 2 umocněného na diferenci počtu operací od začátku výpočtu  $O^{11}$ :

$$\beta(n) = \frac{2^{-\frac{\Delta p}{\Delta n}}}{2^{\frac{\Delta O}{\Delta n}}} = \frac{2^{-\frac{p_{n+1}-p_n}{n+1-n}}}{2^{\frac{O_{n+1}-O_n}{n+1-n}}} = \frac{2^{p_n-p_{n+1}}}{2^{O_{n+1}-O_n}}$$

Čítatel vyjadřuje čím větší skoky v konvergenci, tím je vyšší hodnota čitatele a tím je vyšší hodnoty rychlosti konvergence algoritmu v dané iteraci. Vynásobením mocniny -1 je abych dodržel pravidlo zmíněné v předchozím souvětí, protože u konvergujícího algoritmu vždy platí, že

<sup>11</sup>V této práci  $O(n)$  neznamená složitost algoritmu, ale počet operací provedených od počátku výpočtu až do  $n$ -té iterace.



$p_{n+1} < p_n$ . Důvod, proč je základ mocniny číslo 2, je zmíněn v dalším odstavci u jmenovatele. Kdyby čitatel nebyl ve stejném tvaru jako jmenovatel (mocnina čísla 2), byla by dána mnohem vyšší váha počtu operací.

U jmenovatele platí, že čím větší skoky v počtu operací, tím je vyšší hodnota jmenovatele a tím je menší celková hodnota rychlosti konvergence algoritmu v dané iteraci. Aby veličina byla matematicky robustní, např: vůči algoritmům, který mají iterace neobsahující žádné operace. Dám podíl počtu operací a čísla iterace do jmenovatele hlavního zlomku jako mocninu dvou, čím se zachová pravidlo u jmenovatele čím vyšší tím horší. Funkci  $2^x$  lze považovat za elementární funkci stejně jako  $e^x$  jen s rozdílem, že je jednodušší výpočet funkční hodnoty. Zlomek nenásobím -1, protože na rozdíl od míry konvergence u algoritmů, které něco dělají platí, že  $O_{n+1} > O_n$ .

$$\mathfrak{R} = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^a \frac{2^{p_n - p_{n+1}}}{2^{O_{n+1} - O_n}} \quad (60)$$

**Míra konvergence** Míru konvergence  $p_n$  zavádím jako matematikou veličinu vyjadřující vzdálenost odhadu čísla  $x_n$  v n-té iteraci od nějaké hodnoty čísla  $x$ , kterou považuji za skutečnou hodnotu limity dané posloupnost, v tomto případě  $\pi$ .

$$p_n = |x_n - x|, \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Uvedený vzorec je použit v tabulce 1, 2 a 3 na všech dosud představených algoritmech pro prvních 10 iterací. V příloze A „Míra konvergence“ jsou tabulky rozšířeny na 30 iterací.

číslo iterace hr. intervalu	Archimedes		Descartes		Kusánský		Gregory	
	spodní	horní	spodní	horní	spodní	horní	spodní	horní
1	3.13e-1	8.58e-1	3.13e-1	8.58e-1	3.13e-1	8.58e-1	1.14e+0	8.58e-1
2	8.01e-2	1.72e-1	8.01e-2	1.72e-1	8.01e-2	1.72e-1	3.13e-1	1.72e-1
3	2.01e-2	4.10e-2	2.01e-2	4.10e-2	2.01e-2	4.10e-2	8.01e-2	4.10e-2
4	5.04e-3	1.01e-2	5.04e-3	1.01e-2	5.04e-3	1.01e-2	2.01e-2	1.01e-2
5	1.26e-3	2.53e-3	1.26e-3	2.53e-3	1.26e-3	2.53e-3	5.04e-3	2.53e-3
6	3.15e-4	6.31e-4	3.15e-4	6.31e-4	3.15e-4	6.31e-4	1.26e-3	6.31e-4
7	7.89e-5	1.58e-4	7.89e-5	1.58e-4	7.89e-5	1.58e-4	3.15e-4	1.58e-4
8	1.97e-5	3.94e-5	1.97e-5	3.94e-5	1.97e-5	3.94e-5	7.89e-5	3.94e-5
9	4.93e-6	9.86e-6	4.93e-6	9.86e-6	4.93e-6	9.86e-6	1.97e-5	9.86e-6
10	1.23e-6	2.46e-6	1.23e-6	2.46e-6	1.23e-6	2.46e-6	4.93e-6	2.46e-6

Tabulka 1: Míra konvergence

Hodnoty jednotlivých algoritmu jsou ještě prezentovány v grafech na obrázcích 23 a 24. Větší měřítko těchto grafů se nachází v příloze A.

## 4.1 Závislost počtu operací

Počet operací  $O_n$  zavádím jako matematikou veličinu vyjadřující počet operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování) od počátku výpočtu až do n-té iterace.

č. iterace hr. intervalu	Snell		Legendry		Ptolem.	Viete	Wallis	Brounck.
	spodní	horní	spodní	horní				
1	2.45e-3	7.74e-2	2.27e-1	8.58e-1	3.13e-1	1.14e+0	4.75e-01	8.58e-01
2	1.55e-4	3.96e-3	1.01e-3	4.61e-2	8.01e-2	3.13e-1	2.97e-01	4.75e-01
3	9.72e-6	2.37e-4	7.38e-9	8.76e-5	2.01e-2	8.01e-2	2.16e-01	3.25e-01
4	6.08e-7	1.46e-5	4.98e-18	3.06e-10	5.04e-3	2.01e-2	1.69e-01	2.46e-01
5	3.80e-8	9.13e-7	4.80e-18	4.79e-18	1.26e-3	5.04e-3	1.39e-01	1.98e-01
6	2.37e-9	5.70e-8	4.80e-18	4.80e-18	3.15e-4	1.26e-3	1.18e-01	1.66e-01
7	1.48e-10	3.56e-9	4.80e-18	4.80e-18	7.89e-5	3.15e-4	1.03e-01	1.42e-01
8	9.28e-12	2.23e-10	4.80e-18	4.80e-18	1.97e-5	7.89e-5	9.10e-02	1.25e-01
9	5.80e-13	1.39e-11	4.80e-18	4.80e-18	4.93e-6	1.97e-5	8.16e-02	1.11e-01
10	3.65e-14	8.70e-13	4.80e-18	4.80e-18	1.23e-6	4.93e-6	7.39e-02	9.98e-02

Tabulka 2: Míra konvergence 2

č. iterace	Leibniz	Newton	Sharp	Euler	Euler 2	Euler 3
1	8.58e-01	1.42e-1	3.23e-1	6.92e-01	3.13e-01	3.23e-01
2	4.75e-01	1.66e-2	6.24e-2	4.03e-01	1.60e-01	1.42e-01
3	3.25e-01	2.53e-3	1.46e-2	2.84e-01	1.07e-01	7.30e-02
4	2.46e-01	4.38e-4	3.74e-3	2.19e-01	8.02e-02	4.59e-02
5	1.98e-01	8.15e-5	1.01e-3	1.78e-01	6.41e-02	3.07e-02
6	1.66e-01	1.59e-5	2.84e-4	1.50e-01	5.34e-02	2.23e-02
7	1.42e-01	3.23e-6	8.17e-5	1.30e-01	4.57e-02	1.67e-02
8	1.25e-01	6.71e-7	2.39e-5	1.14e-01	4.00e-02	1.31e-02
9	1.11e-01	1.42e-7	7.12e-6	1.02e-01	3.55e-02	1.05e-02
10	9.98e-02	3.07e-8	2.14e-6	9.22e-02	3.20e-02	8.62e-03

Tabulka 3: Míra konvergence 3

Faktoriál z  $x$ , pokud  $x$  nebude 0, budu počítat za  $x$  operací, protože pro nenulové  $x$  platí, že:

$$x! = \prod_{i=1}^x i,$$

v opačném případě budu  $x!$  ( $0!$ ) počítat za 1 operaci.

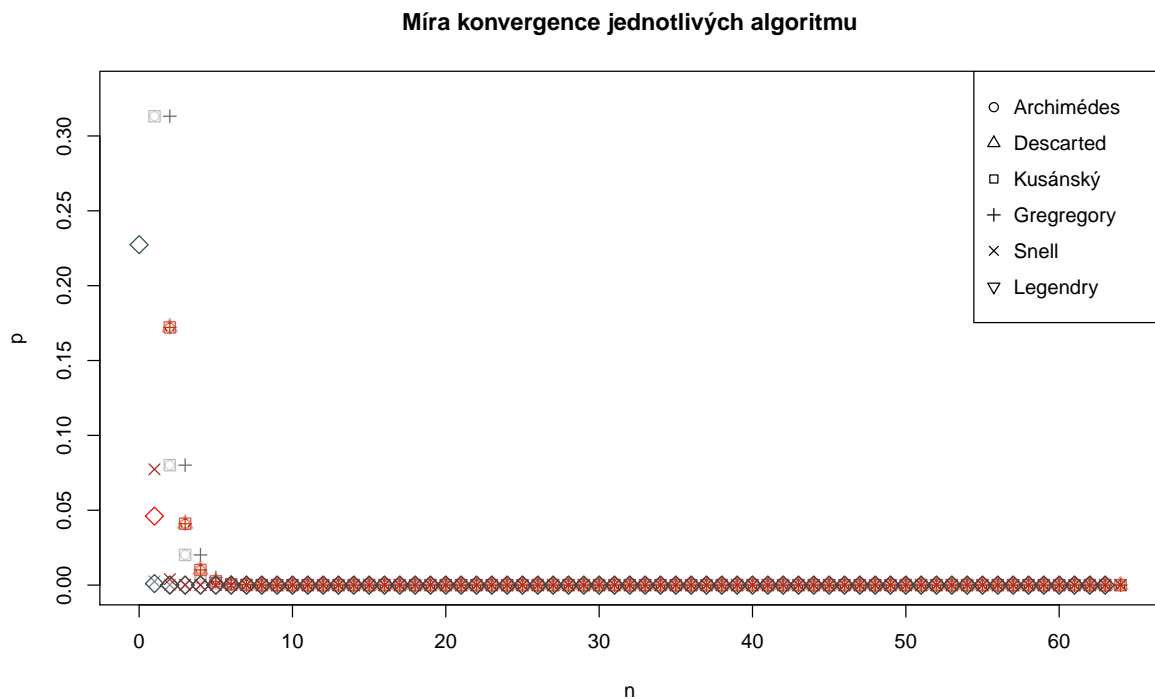
$n$	1	2	3
$O_{sh}(n)$	5+3	10+3	15+3
$O_{hh}(n)$	6+3	12+3	18+3

Tabulka 4: Počet operací - Archimédův algoritmus (podle vzorce 6, 9 a 10)

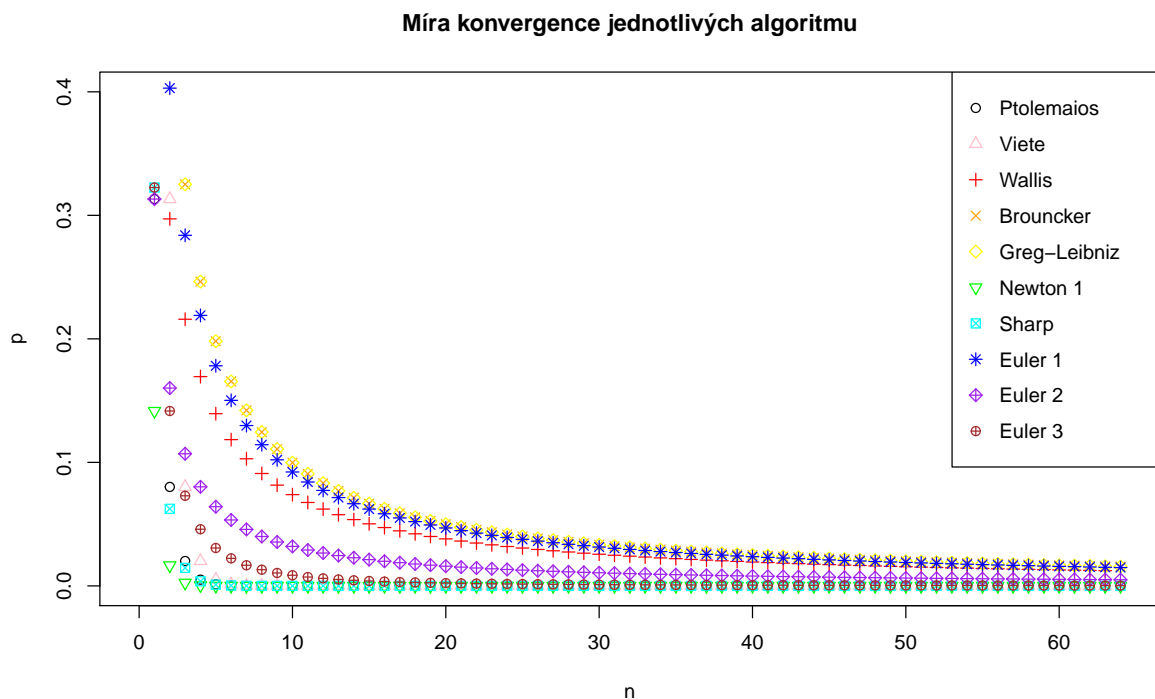
**Archimedes** Při každé iteraci, viz 4. tabulka, se musí vykonat 5 operací pro výpočet 1 strany vepsaného k-úhelníku a 6 operací pro výpočet 1 strany opsaného k-úhelníku. Pro výpočet spodní nebo horní hranice ( $sh$  a  $hh$ )  $\pi$  je potřeba provést ještě 3 operace. Výsledné vzorce pro počet operací Archimédova algoritmu jsou:

$$O_{sh}(n) = 5n + 3$$

$$O_{hh}(n) = 6n + 3$$



Obrázek 23: Graf míry konvergence zde popsaných algoritmu s intervalovým výstupem (čern.-sh, červ.-hh)



Obrázek 24: Graf míry konvergence zbytku algoritmu popsaných v této práci

**Ptolemaios** Vzorce algoritmu:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n}}{2}} \Rightarrow O(n) = 5n + a$$

$$\pi_n = \frac{2^{2+n}x_n}{2} = 2^{1+n}x_n \Rightarrow a = 3$$

Vzorec pro výpočet počtu operací v Ptolemaiově algoritmu:

$$O(n) = 5n + 3$$

**Kusánský** Vzorce algoritmu:

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

$$R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$$

Protože  $r$  je závislý i na  $R$  a naopak, musím počet operací v 1 iteraci pro  $r$  a  $R$  počítat z obou vzorců. Z  $r$  a  $R$  se na hranice intervalu pro  $\pi$  dostanu 2 operacemi. Vzorce pro výpočet počtu

$n$	1	2	3
$O_{sh}(n)$	2+2	6+2	10+2
$O_{hh}(n)$	4+2	8+2	12+2

Tabulka 5: Počet operací - Kusánského algoritmus

operací v Kusánském algoritmu z tabulky č. 5:

$$O_{sh}(n) = 4(n - 1) + 2 + 2 = 4n$$

$$O_{hh}(n) = 4(n - 1) + 4 + 2 = 4n + 2$$

**Viète** Jako 1 iteraci беру výpočet zlomku a jeho vynásobení s již vypočítaným odhadem  $\pi$  z předchozí iterace, pokud to není 1. iterace, kdy se ničím nenásobí. Ze 6. tabulky plyne, že

$n$	1	2	3	4
$O(n)$	1	4	9	16
zpět. difference	-	3	5	7

Tabulka 6: Počet operací - Vietèho algoritmus

složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = n^2.$$

**Descartes** Stejný systém výpočtu složitosti jako u Kusánského algoritmu. Vzorce pro složi-

$n$	1	2	3
$O_{sh}(n)$	2+2	8+2	14+2
$O_{hh}(n)$	4+2	10+2	16+2

Tabulka 7: Počet operací - Descartův algoritmus (podle vzorce 20, 21 a 22)

tost algoritmu z tabulky č. 7:

$$O_{sh}(n) = 6(n - 1) + 2 + 2 = 6n - 2$$

$$O_{hh}(n) = 6(n - 1) + 4 + 2 = 6n$$

**Snell** Spodní hranice intervalu závisí na Archimédově spodní hranici odhadu  $\pi$  s využitím  $n$ - a  $2n$ -úhelníka ( $2 * (5 * 1 + 3) = 10 + 6$ ) a pro každou další iteraci stačí spočítat o jedničku vyšší mocninu  $2^i n$ -úhelníku ( $5(n - 1) + 16 = 5n + 11$ ). Samotná Snelliho nerovnost 21 pro výpočet  $\pi$  přidává 3 operace, a proto  $O_{sh} = 5n + 14$ . Horní hranice intervalu závisí na Archimédově spodní a horní hranici odhadu  $\pi$  s využitím  $n$ -úhelníka ( $5n + 3 + 6n + 3 = 11n + 6$ ). Samotná Snelliho nerovnost 20 přidává 3 operace, a proto  $O_{sh} = 11n + 9$ .

**Gregory** Opět stejný systém výpočtu složitosti jako u Descartova a Kusánského algoritmu. Vzorce pro složitost algoritmu z tabulky č. 8:

$n$	1	2	3
$O_{sh}(n)$	2+2	8+2	14+2
$O_{hh}(n)$	6+2	12+2	18+2

Tabulka 8: Počet operací - Gregoryho algoritmus (podle vzorce 23, 24 a 25)

$$O_{sh}(n) = 6(n - 1) + 2 + 2 = 6n - 2$$

$$O_{hh}(n) = 6n$$

$n$	1	2	3
$O(n)$	6+1	13+1	20+1

Tabulka 9: Počet operací - Wallisův algoritmus

**Wallis** Ze 9. tabulky plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = 7n.$$

**Brouncker** Jako 1. iteraci je brána  $\frac{4}{1}$  a každá další zlomek ( $+\frac{i^2}{2}$ ) Ze 10. tabulky plyne, že

$n$	1	2	3
$O(n)$	1	4	7

Tabulka 10: Počet operací - Brounckerův algoritmus

složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = 3(n - 1) + 1 = 3n - 2.$$

$n$	1	2	3
$O(n)$	4+1	9+1	14+1

Tabulka 11: Počet operací - Gregoryho-Leibnizův algoritmus

**Gregory-Leibniz** Ze 11. tabulky plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = 5n.$$

$n$	1	2	3	4
$O(n)$	14	34	60	92
zpět. difference	-	20	26	32

Tabulka 12: Počet operací - Newtonův 1. algoritmus

**Newton 1** Ze 12. tabulky plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = 3n^2 + 11n.$$

Zpětná difference z tabulky 12 dává posloupnost:

$$d(O(n)) = 6n + 8.$$

**Newton 2** Druhý Newtonův algoritmus bohužel k 0.54, nikoliv k  $\pi$ . Pravděpodobně je v zápisu připsaného z literatury chyba, a proto nemá smysl se zabývat jeho vlastnostmi.

**Sharp** Ze vzorce 40 lze sestavit tabulku celkového počtu operací v závislosti na iteraci. Z 13.

$n$	1	2	3
$O(n)$	7+2	14+2	21+2

Tabulka 13: Počet operací - Sharpův algoritmus

tabulky plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = 7n + 2.$$

**Euler** Ze sumace ve vzorci 43 lze vydedukovat, že pro  $i + 1$  je potřeba provést 2 operace ve zlomku (dělení a umocňování) a k tomu ještě přičtení hodnoty zlomku k doposud vypočítané hodnotě ( $O(n) = 3n + b$ ). Pro získání samotného  $\pi$  je třeba výsledek ještě odmocnit ( $b = 1$ ). Vzorec 1. algoritmu pro počet operací provedených do  $n$ -té iterace je:

$$O(n) = 3n + 1.$$

U druhého algoritmu se ve zlomku vyskytují 4 operace plus přičtení zlomku ( $O(n) = 5n + b$ ). Samotné  $\pi$  se získá odmocněním a vynásobením dvěma ( $b = 2$ ). Vzorec 2. algoritmu pro počet operací je:

$$O(n) = 5n + 2.$$

Ve zlomku 3. algoritmu jsou opět 4 operace a následné osamocnění  $\pi$  si vyžádá další 2 operace, proto vzorec 3. algoritmu pro počet operací je:

$$O(n) = 5n + 2.$$

## 4.2 Srovnání efektivity

Srovnání efektivity podle veličiny  $\mathfrak{n}$  se nachází v tabulce 15.

## 5 ZÁVĚR

Dopsat

algoritmus	závislost počtu operací $O(n)$	zpětná diference
Archimedův (s. / h.)	$5n + 3 / 6n + 3$	5 / 6
Ptolemaiův	$5n + 3$	5
Kusánského (s. / h.)	$4n / 4n + 2$	4 / 4
Vièteho	$n^2$	$2n - 1$
Descartesův (s. / h.)	$6n - 2 / 6n$	6 / 6
Gregoryho (s. / h.)	$6n - 2 / 6n + 2$	6 / 6
Snellův (s. / h.)	$5n + 14 / 11n + 9$	5 / 11
Wallisův	$7n$	7
Brounckerův	$3n - 1$	3
Gregorho-Leibnizův	$5n$	5
Newtonův 1	$3n^2 + 11n$	$6n + 8$
Sharp	$7n + 2$	7
Euler 1	$3n + 1$	3
Euler 2	$5n + 2$	5
Euler 3	$5n + 2$	5

Tabulka 14: Počet operací v závislosti na iteraci v jednotlivých algoritmech

algoritmus	efektivita algoritmu $\eta$
Archimedův (s. / h.)	
Ptolemaiův	0.00027
Kusánského (s. / h.)	
Vièteho	
Descartesův (s. / h.)	
Gregoryho (s. / h.)	
Snellův (s. / h.)	
Wallisův	0.00043
Brounckerův	0.043
Gregorho-Leibnizův	0.0058
Newtonův 1	2.58e-10
Sharp	0.00029
Euler 1	0.034
Euler 2	0.0021
Euler 3	0.0022

Tabulka 15: Srovnání efektivity algoritmů

## 6 REFERENCE

- [1] BECKMANN, Petr. Historie čísla  $\pi$ . Praha: Academia, 1998. ISBN 80-200-0655-9.
- [2] THUMSHIRN, Christian. Der Schweizer, der 22,4 Billionen Dezimalstellen von  $\pi$  berechnet hat. Neue Zürcher Zeitung [online]. Zürich, 2017, 21.3.2017, , 1 [cit. 2018-06-21]. Dostupné z: <https://www.nzz.ch/wissenschaft/video-serie-nerdzz-der-wahrscheinlich-laengste-rekord-der-welt-ld.152445-november-2016/>
- [3] KOLMAN, Arnošt a Marcela HEDRLÍNOVÁ. Dějiny matematiky ve starověku. Praha: Academia, 1968. ISBN 978-80-87287-77-4.

- [4] Bible kralická: Písmo svaté Starého a Nového zákona : podle posledního vydání z roku 1613. 5. vyd. v ČBS. Praha: Česká biblická společnost, 2014. ISBN 978-80-87287-77-4.
- [5] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4.
- [6] VEJCHODSKÝ, Tomáš. Archimédův výpočet čísla  $\pi$  [přednáška]. Praha: Akademie věd České republiky, 11.11.2016. In: Youtube.com [online]. [vid. 17. 5. 2018]. Záznam dostupný z: <https://www.youtube.com/watch?v=8XaM9ZYxCqU>
- [7] WILLERS, Michael. Algebra bez (m)učení: Od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě : fascinující čísla a rovnice. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4123-9.
- [8] Adam Adamandy Kochański. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Adam-Adamandy-Kocha%C5%84ski>
- [9] POSAMENTIER, Alfred S. a Ingmar LEHMANN. [Pi]: A Biography of the World's Most Mysterious Number. II. Title. Amherst, N.Y.: Prometheus Books, 2004. ISBN 15-910-2200-2.
- [10] BEČVÁŘ, Jindřich. Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-232-5.
- [11] BEČVÁŘ, Jindřich, FUCHS, Eduard, ed. Matematika v 16. a 17. století: Seminář Historie matematiky III. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-150-7.
- [12] JÁCHIM, František. Jak viděli vesmír: [po stopách velkých astronomů]. Olomouc: Rubico, 2003. ISBN 80-85839-48-2.
- [13] BEČVÁŘOVÁ, Martina, Jindřich BEČVÁŘ, Magdalena HYKŠOVÁ, Oldřich HYKŠ, Martin MELCER, Martina ŠTĚPÁNOVÁ, Miroslava OTAVOVÁ a Irena SÝKOROVÁ. Matematika ve středověké Evropě: pozdní středověk a renesance. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2018. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-01-06403-0.
- [14] FUCHS, Eduard, ed. Mathematics throughout the ages. Prague: Prometheus, 2001. History of mathematics. ISBN 80-7196-219-8.
- [15] BEČVÁŘ, Jindřich a Eduard FUCHS, ed. Matematika v proměnách věků III. Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. Dějiny matematiky. ISBN 80-728-5040-7.
- [16] BRENT, Richard P. The Borwein Brothers,  $\pi$  and the AGM [online]. Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra a University of Newcastle, Callaghan, 8. 8. 2018, , 7-8 [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1802.07558>



- [17] GOURÉVITCH, Boris. Newton's Formula. The world of pi [online]. [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: <http://www.pi314.net/eng/newton.php>
- [18] PROKOP, Vladimír. Dějiny literatury od starověku do počátku 19. století: aneb od Mezopotámie po naše národní obrození. Sokolov: O.K.-Soft, 2001.
- [19] VIRIUS, Miroslav. Metoda Monte Carlo. V Praze: České vysoké učení technické, 2010. ISBN 978-80-01-04595-4.
- [20] ENIAC: Electronic Numerical Integrator and Computer. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-12-12]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/ENIAC>

## 7 SEZNAM OBRÁZKŮ

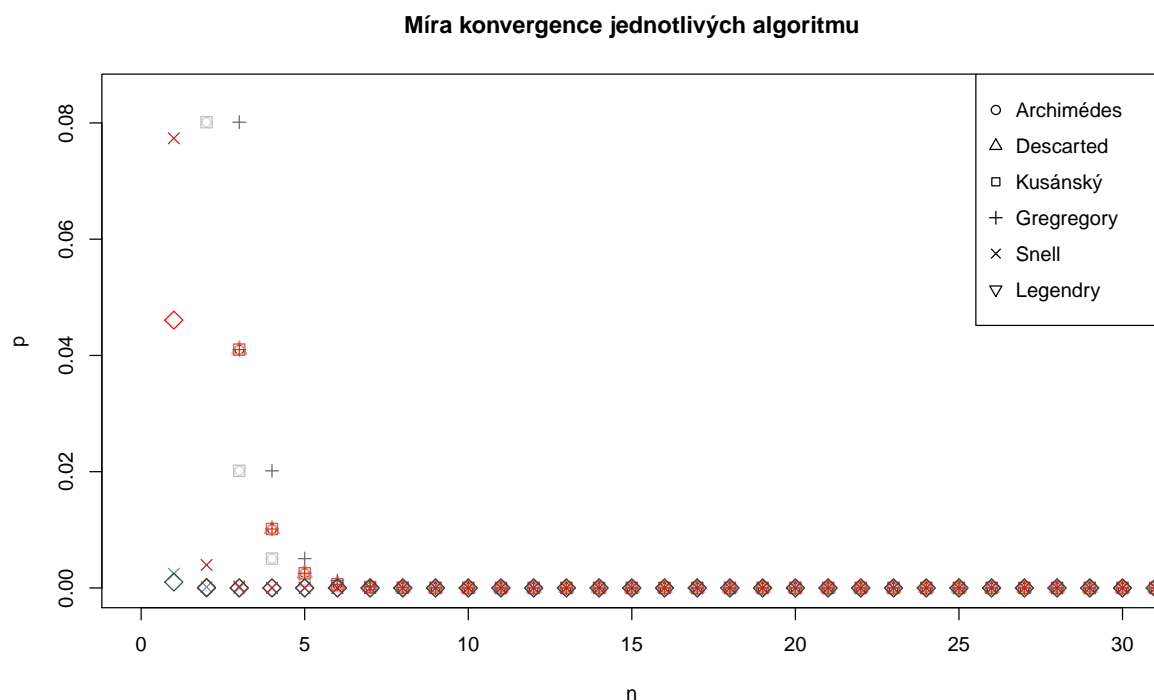
1	Zářezy na kostech [3] . . . . .	9
2	Tabulka YBC 7302 [5] . . . . .	10
3	Sít' pro aproximaci kruhu . . . . .	11
4	Ptolemaiova aproximace kruhu . . . . .	11
5	Kruh s opsaným a vepsaným n-úhelníkem . . . . .	12
6	Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka . . . . .	13
7	Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka . . . . .	13
8	1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanácti- úhelníka . . . . .	13
9	1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanáctiúhel- níka . . . . .	14
10	Kusánského algoritmus . . . . .	16
11	Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka . . . . .	17
12	Výpočet poloměru opsané kružnice osmiúhelníka . . . . .	17
13	Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka . . . . .	18
14	Viètova geometrická aproximace . . . . .	20
15	Pravoúhlý trojúhelník SIG a SAJ . . . . .	20
16	Descartesův algoritmus . . . . .	22
17	Interval z Archimédovy metody . . . . .	22
18	Kochanského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem	26
19	Kružnice $y = \sqrt{x - x^2}$ s výsečí . . . . .	27
20	Integrace $\frac{1}{4}$ kruhu $y^2 = 1 - x^2$ . . . . .	31
21	Buffonův experiment s jehlou . . . . .	31
22	Graf protnutí přímky . . . . .	32

23	Graf míry konvergence zde popsaných algoritmů s intervalovým výstupem (čern.-sh, červ.-hh) . . . . .	35
24	Graf míry konvergence zbytku algoritmů popsaných v této práci . . . . .	35
25	Graf míry konvergence popsaných s intervalovým výstupem (čern.-sh, červ.-hh) ve větším měřítku . . . . .	44
26	Graf míry konvergence zbytku algoritmů popsaných v této práci ve větším měřítku	44

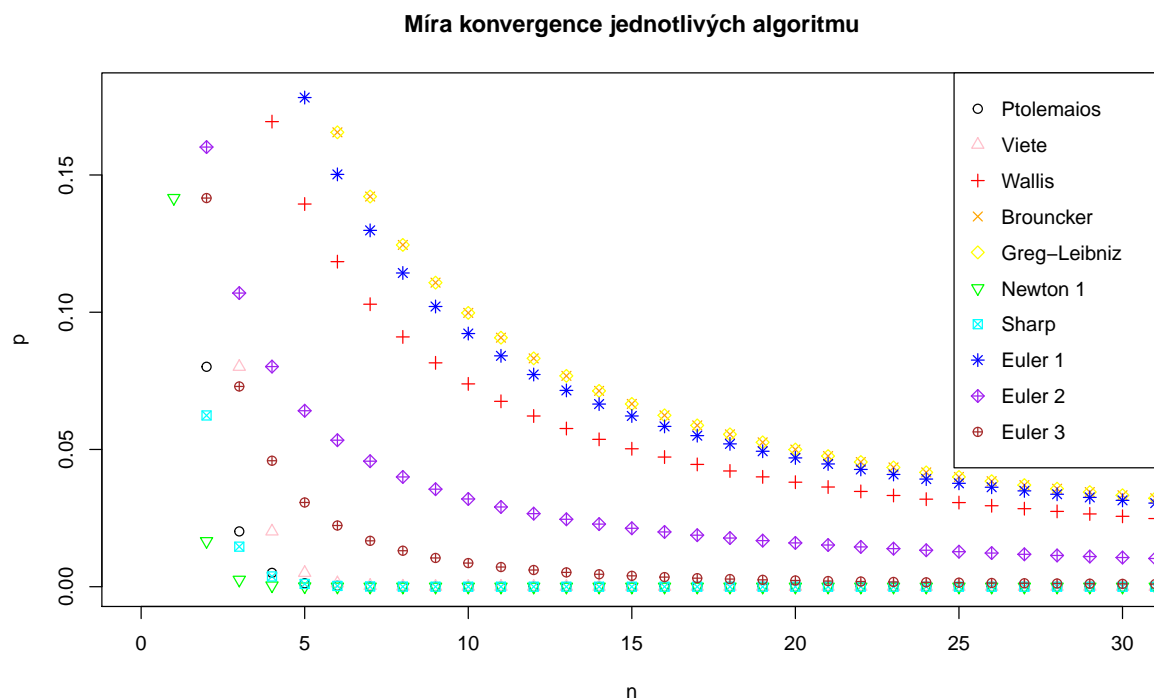
## 8 SEZNAM TABULEK

1	Míra konvergence . . . . .	33
2	Míra konvergence 2 . . . . .	34
3	Míra konvergence 3 . . . . .	34
4	Počet operací - Archimédův algoritmus (podle vzorce 6, 9 a 10) . . . . .	34
5	Počet operací - Kusánského algoritmus . . . . .	36
6	Počet operací - Vietèho algoritmus . . . . .	36
7	Počet operací - Descartův algoritmus (podle vzorce 20, 21 a 22) . . . . .	36
8	Počet operací - Gregoryho algoritmus (podle vzorce 23, 24 a 25) . . . . .	37
9	Počet operací - Wallisův algoritmus . . . . .	37
10	Počet operací - Brounckerův algoritmus . . . . .	37
11	Počet operací - Gregoryho-Leibnizův algoritmus . . . . .	37
12	Počet operací - Newtonův 1. algoritmus . . . . .	38
13	Počet operací - Sharpův algoritmus . . . . .	38
14	Počet operací v závislosti na iteraci v jednotlivých algoritmech . . . . .	39
15	Srovnání efektivity algoritmů . . . . .	39
16	Míra konvergence (rozšířená verze) . . . . .	45
17	Míra konvergence 2 (rozšířená verze) . . . . .	46
18	Míra konvergence 3 (rozšířená verze) . . . . .	47

# PŘÍLOHA A: MÍRA KONVERGENCE



Obrázek 25: Graf míry konvergence popsaných s intervalovým výstupem (čern.-sh, červ.-hh) ve větším měřítku



Obrázek 26: Graf míry konvergence zbytku algoritmů popsaných v této práci ve větším měřítku

číslo iterace hr. intervalu	Archimedes		Descartes		Kusánský		Gregory	
	spodní	horní	spodní	horní	spodní	horní	spodní	horní
1	3.13e-1	8.58e-1	3.13e-1	8.58e-1	3.13e-1	8.58e-1	1.14e+0	8.58e-1
2	8.01e-2	1.72e-1	8.01e-2	1.72e-1	8.01e-2	1.72e-1	3.13e-1	1.72e-1
3	2.01e-2	4.10e-2	2.01e-2	4.10e-2	2.01e-2	4.10e-2	8.01e-2	4.10e-2
4	5.04e-3	1.01e-2	5.04e-3	1.01e-2	5.04e-3	1.01e-2	2.01e-2	1.01e-2
5	1.26e-3	2.53e-3	1.26e-3	2.53e-3	1.26e-3	2.53e-3	5.04e-3	2.53e-3
6	3.15e-4	6.31e-4	3.15e-4	6.31e-4	3.15e-4	6.31e-4	1.26e-3	6.31e-4
7	7.89e-5	1.58e-4	7.89e-5	1.58e-4	7.89e-5	1.58e-4	3.15e-4	1.58e-4
8	1.97e-5	3.94e-5	1.97e-5	3.94e-5	1.97e-5	3.94e-5	7.89e-5	3.94e-5
9	4.93e-6	9.86e-6	4.93e-6	9.86e-6	4.93e-6	9.86e-6	1.97e-5	9.86e-6
10	1.23e-6	2.46e-6	1.23e-6	2.46e-6	1.23e-6	2.46e-6	4.93e-6	2.46e-6
11	3.08e-7	6.16e-7	3.08e-7	6.16e-7	3.08e-7	6.16e-7	1.23e-6	6.16e-7
12	7.70e-8	1.54e-7	7.70e-8	1.54e-7	7.70e-8	1.54e-7	3.08e-7	1.54e-7
13	1.93e-8	3.85e-8	1.93e-8	3.85e-8	1.93e-8	3.85e-8	7.70e-8	3.85e-8
14	4.81e-9	9.63e-9	4.81e-9	9.63e-9	4.81e-9	9.63e-9	1.93e-8	9.63e-9
15	1.20e-9	2.41e-9	1.20e-9	2.41e-9	1.20e-9	2.41e-9	4.81e-9	2.41e-9
16	3.01e-10	6.02e-10	3.01e-10	6.02e-10	3.01e-10	6.02e-10	1.20e-9	6.02e-10
17	7.52e-11	1.50e-10	7.52e-11	1.50e-10	7.52e-11	1.50e-10	3.01e-10	1.50e-10
18	1.88e-11	3.76e-11	1.88e-11	3.76e-11	1.88e-11	3.76e-11	7.52e-11	3.76e-11
19	4.70e-12	9.40e-12	4.70e-12	9.40e-12	4.70e-12	9.40e-12	1.88e-11	9.40e-12
20	1.18e-12	2.35e-12	1.18e-12	2.35e-12	1.17e-12	2.35e-12	4.70e-12	2.35e-12
21	2.94e-13	5.88e-13	2.94e-13	5.87e-13	2.94e-13	5.88e-13	1.17e-12	5.88e-13
22	7.37e-14	1.47e-13	7.35e-14	1.47e-13	7.33e-14	1.47e-13	2.94e-13	1.47e-13
23	1.86e-14	3.68e-14	1.84e-14	3.67e-14	1.82e-14	3.68e-14	7.33e-14	3.68e-14
24	4.82e-15	9.30e-15	4.62e-15	9.15e-15	4.47e-15	9.30e-15	1.82e-14	9.30e-15
25	1.38e-15	2.42e-15	1.18e-15	2.26e-15	1.02e-15	2.42e-15	4.47e-15	2.42e-15
26	5.19e-16	6.96e-16	3.20e-16	5.40e-16	1.64e-16	6.96e-16	1.02e-15	6.96e-16
27	3.04e-16	2.66e-16	1.05e-16	1.10e-16	5.07e-17	2.66e-16	1.64e-16	2.66e-16
28	2.50e-16	1.58e-16	5.15e-17	2.25e-18	1.05e-16	1.58e-16	5.07e-17	1.58e-16
29	2.37e-16	1.31e-16	3.81e-17	2.46e-17	1.18e-16	1.31e-16	1.05e-16	1.31e-16
30	2.33e-16	1.25e-16	3.47e-17	3.14e-17	1.21e-16	1.25e-16	1.18e-16	1.25e-16

Tabulka 16: Míra konvergence (rozšířená verze)

č. iterace	Snell		Legendry		Ptolem.	Viete	Wallis	Brounck.
hr. intervalu	spodní	horní	spodní	horní				
1	2.45e-3	7.74e-2	2.27e-1	8.58e-1	3.13e-1	1.14e+0	4.75e-01	8.58e-01
2	1.55e-4	3.96e-3	1.01e-3	4.61e-2	8.01e-2	3.13e-1	2.97e-01	4.75e-01
3	9.72e-6	2.37e-4	7.38e-9	8.76e-5	2.01e-2	8.01e-2	2.16e-01	3.25e-01
4	6.08e-7	1.46e-5	4.98e-18	3.06e-10	5.04e-3	2.01e-2	1.69e-01	2.46e-01
5	3.80e-8	9.13e-7	4.80e-18	4.79e-18	1.26e-3	5.04e-3	1.39e-01	1.98e-01
6	2.37e-9	5.70e-8	4.80e-18	4.80e-18	3.15e-4	1.26e-3	1.18e-01	1.66e-01
7	1.48e-10	3.56e-9	4.80e-18	4.80e-18	7.89e-5	3.15e-4	1.03e-01	1.42e-01
8	9.28e-12	2.23e-10	4.80e-18	4.80e-18	1.97e-5	7.89e-5	9.10e-02	1.25e-01
9	5.80e-13	1.39e-11	4.80e-18	4.80e-18	4.93e-6	1.97e-5	8.16e-02	1.11e-01
10	3.65e-14	8.70e-13	4.80e-18	4.80e-18	1.23e-6	4.93e-6	7.39e-02	9.98e-02
11	2.50e-15	5.42e-14	4.80e-18	4.80e-18	3.08e-7	1.23e-6	6.75e-02	9.07e-02
12	3.74e-16	3.28e-15	4.80e-18	4.80e-18	7.70e-8	3.08e-7	6.22e-02	8.32e-02
13	2.41e-16	9.84e-17	4.80e-18	4.80e-18	1.93e-8	7.70e-8	5.76e-02	7.68e-02
14	2.33e-16	1.01e-16	4.80e-18	4.80e-18	4.81e-9	1.93e-8	5.37e-02	7.13e-02
15	2.32e-16	1.13e-16	4.80e-18	4.80e-18	1.20e-9	4.81e-9	5.03e-02	6.66e-02
16	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	3.01e-10	1.20e-9	4.72e-02	6.24e-02
17	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	7.52e-11	3.01e-10	4.46e-02	5.88e-02
18	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	1.88e-11	7.52e-11	4.22e-02	5.55e-02
19	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	4.70e-12	1.88e-11	4.00e-02	5.26e-02
20	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	1.18e-12	4.70e-12	3.81e-02	5.00e-02
21	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	2.94e-13	1.17e-12	3.63e-02	4.76e-02
22	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	7.38e-14	2.94e-13	3.47e-02	4.54e-02
23	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	1.87e-14	7.33e-14	3.32e-02	4.35e-02
24	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	4.91e-15	1.82e-14	3.19e-02	4.16e-02
25	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	1.47e-15	4.47e-15	3.06e-02	4.00e-02
26	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	6.08e-16	1.02e-15	2.95e-02	3.84e-02
27	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	3.93e-16	1.64e-16	2.84e-02	3.70e-02
28	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	3.40e-16	5.07e-17	2.74e-02	3.57e-02
29	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	3.26e-16	1.05e-16	2.65e-02	3.45e-02
30	2.32e-16	1.14e-16	4.80e-18	4.80e-18	3.23e-16	1.18e-16	2.56e-02	3.33e-02

Tabulka 17: Míra konvergence 2 (rozšířená verze)

č. iterace	Leibniz	Newton	Sharp	Euler	Euler 2	Euler 3
1	8.58e-01	1.42e-1	3.23e-1	6.92e-01	3.13e-01	3.23e-01
2	4.75e-01	1.66e-2	6.24e-2	4.03e-01	1.60e-01	1.42e-01
3	3.25e-01	2.53e-3	1.46e-2	2.84e-01	1.07e-01	7.30e-02
4	2.46e-01	4.38e-4	3.74e-3	2.19e-01	8.02e-02	4.59e-02
5	1.98e-01	8.15e-5	1.01e-3	1.78e-01	6.41e-02	3.07e-02
6	1.66e-01	1.59e-5	2.84e-4	1.50e-01	5.34e-02	2.23e-02
7	1.42e-01	3.23e-6	8.17e-5	1.30e-01	4.57e-02	1.67e-02
8	1.25e-01	6.71e-7	2.39e-5	1.14e-01	4.00e-02	1.31e-02
9	1.11e-01	1.42e-7	7.12e-6	1.02e-01	3.55e-02	1.05e-02
10	9.98e-02	3.07e-8	2.14e-6	9.22e-02	3.20e-02	8.62e-03
11	9.07e-02	6.71e-9	6.51e-7	8.41e-02	2.91e-02	7.17e-03
12	8.32e-02	1.48e-9	1.99e-7	7.73e-02	2.66e-02	6.09e-03
13	7.68e-02	3.31e-10	6.14e-8	7.15e-02	2.46e-02	5.21e-03
14	7.13e-02	7.45e-11	1.90e-8	6.65e-02	2.28e-02	4.53e-03
15	6.66e-02	1.69e-11	5.93e-9	6.22e-02	2.13e-02	3.96e-03
16	6.24e-02	3.84e-12	1.86e-9	5.84e-02	2.00e-02	3.50e-03
17	5.88e-02	8.80e-13	5.83e-10	5.50e-02	1.88e-02	3.11e-03
18	5.55e-02	2.03e-13	1.84e-10	5.20e-02	1.77e-02	2.79e-03
19	5.26e-02	4.67e-14	5.80e-11	4.93e-02	1.68e-02	2.51e-03
20	5.00e-02	1.08e-14	1.84e-11	4.69e-02	1.60e-02	2.27e-03
21	4.76e-02	2.42e-15	5.84e-12	4.47e-02	1.52e-02	2.06e-03
22	4.54e-02	4.77e-16	1.86e-12	4.27e-02	1.45e-02	1.88e-03
23	4.35e-02	2.37e-17	5.93e-13	4.09e-02	1.39e-02	1.73e-03
24	4.16e-02	8.25e-17	1.90e-13	3.92e-02	1.33e-02	1.59e-03
25	4.00e-02	1.07e-16	6.06e-14	3.77e-02	1.28e-02	1.47e-03
26	3.84e-02	1.13e-16	1.95e-14	3.62e-02	1.23e-02	1.36e-03
27	3.70e-02	1.15e-16	6.19e-15	3.49e-02	1.18e-02	1.26e-03
28	3.57e-02	1.15e-16	2.07e-15	3.37e-02	1.14e-02	1.17e-03
29	3.45e-02	1.15e-16	5.87e-16	3.25e-02	1.10e-02	1.10e-03
30	3.33e-02	1.15e-16	2.68e-16	3.15e-02	1.06e-02	1.03e-03

Tabulka 18: Míra konvergence 3 (rozšířená verze)