Grafs eulerians i grafs hamiltonians

PID_00174671

Joaquim Borges
Robert Clarisó
Ramon Masià
Jaume Pujol
Josep Rifà
Joan Vancells
Mercè Villanueva

Temps mínim de dedicació recomanat: 3 hores

Universitat
Oberta
de Catalunya

Índex

Introducció

Molts problemes de planificació i organització (servei de recollida d'escombraries, servei d'inspecció d'instal·lacions de gas, servei de repartiment de cartes, serveis de missatgeria) es poden tractar com a problemes d'optimització de recorreguts.

En aquest mòdul estudiarem dos problemes clàssics d'optimització de recorreguts: els recorreguts que passen per totes les arestes del graf una sola vegada (recorreguts i circuits eulerians) i els que contenen tots els vèrtexs del graf un sol cop (camins i cicles hamiltonians).

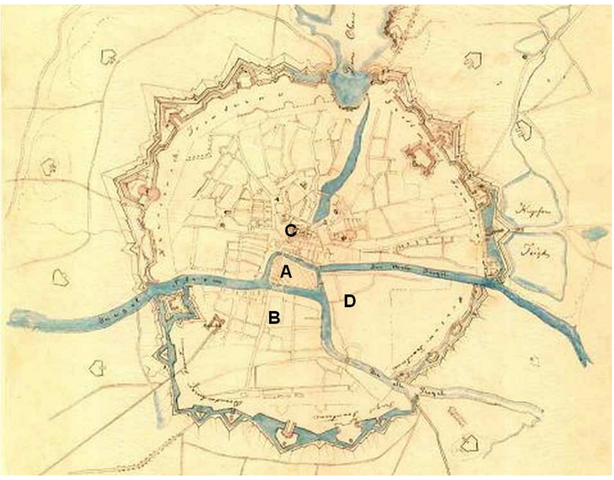
Malgrat la similitud entre els dos problemes, veurem que tenen un tractament diferenciat, de manera que el primer és un problema de resolució fàcil, mentre que el segon és un problema difícil de resoldre o, dit d'una altra manera, computacionalment intractable.

Finalment, estudiarem una generalització del problema de cercar un cicle hamiltonià en un graf. És el problema del viatjant de comerç (*TSP*, *travelling salesman problem*) que és un dels problemes més notables d'optimització en un graf. És especialment interessant perquè constitueix un dels exemples bàsics de problema de la classe *NP*, com es veurà amb més detall en el mòdul "Complexitat computacional".

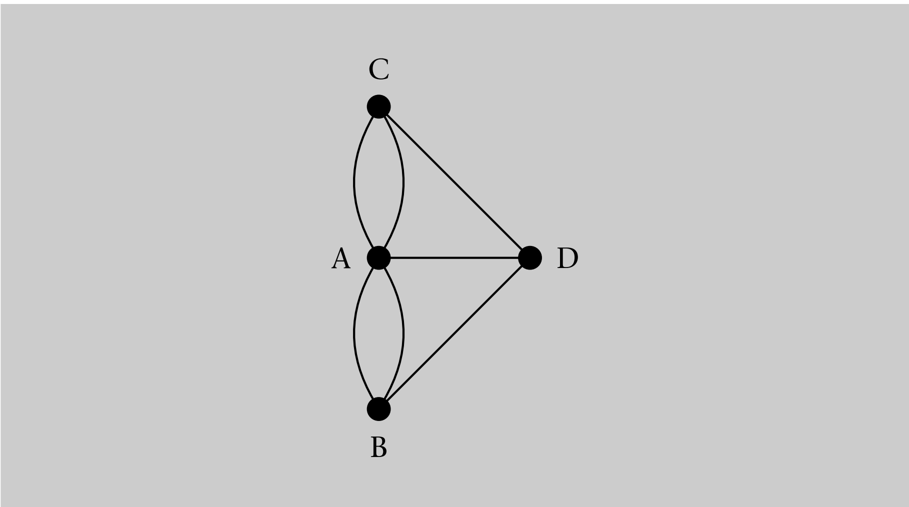
1. Grafs eulerians

1.1. Resultats fonamentals

En el segle XVIII l'antiga ciutat de Königsberg (a Prússia oriental, actual Kaliningrad) estava dividida en quatre zones pel riu Pregel. Hi havia set ponts que comunicaven aquestes zones tal com mostra el gràfic següent.



Un dels entreteniments dels ciutadans de Königsberg consistia a cercar un recorregut que travessés cada pont una vegada i tornés al punt exacte de partida. En termes de grafs, aquest entreteniment és equivalent a cercar un recorregut que passi per cada aresta del multigraf G exactament una vegada.



Leonhard Euler va demostrar que no existia cap recorregut que complís aquestes condicions i va caracteritzar els grafs (multigrafs) que sí que les compleixen; aquests són el **grafs eulerians**.

Observació

Fixeu-vos que un recorregut o circuit eulerià pot visitar el mateix vèrtex diverses vegades, si aquest té diverses arestes incidents.

Definició 1

En un graf (multigraf) $G = (V,A)$:

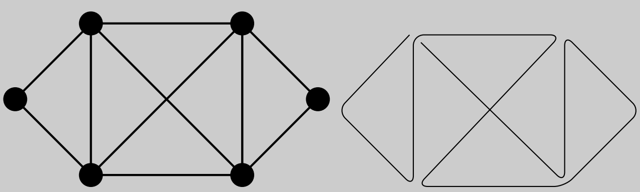
- Un **recorregut eulerià** és un recorregut obert que conté totes les arestes del graf sense repetició.
- Un **circuit eulerià** és un circuit que passa per totes les arestes del graf. Si un graf admet un circuit d'aquestes característiques, s'anomena **graf eulerià**.

Aquestes nocions només tenen sentit en el context dels grafs connexos. En cas que no ho siguin, els problemes d'eulerianitat es tracten en els components connexos del graf.

Exemple 1

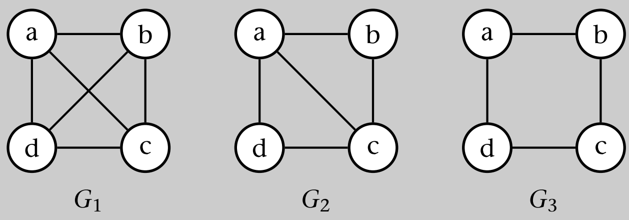
D'una manera intuïtiva podem dir que un graf és eulerià si es pot dibuixar en un sol traç sense repetir cap línia i havent començat i acabat en un mateix punt.

El graf de l'esquerra és eulerià, ja que el podem dibuixar d'un sol traç sense repetir cap línia i havent començat i acabat en un mateix punt, tal com ho mostra el dibuix de la dreta.



Exemple 2

Dels grafs representats en la figura següent, el graf G_1 no conté cap recorregut ni circuit eulerià (fixeu-vos que és K_4); el graf G_2 conté un recorregut eulerià: a,b,c,d,a,c, però no conté cap circuit eulerià; finalment, el graf G_3 conté un circuit eulerià: a,b,c,d,a, però no conté cap recorregut eulerià (fixeu-vos que es tracta de C_4).



Teorema 1

Donat un graf connex $G = (V,A)$, és eulerià si, i només si, tots els vèrtexs són de grau parell.

Demostració:

1) Suposem que el graf és eulerià i demostrem que el grau de tot vèrtex és parell. Sigui Q un circuit eulerià que, en la mesura que conté totes les arestes, passa per tots els vèrtexs. Sigui v un vèrtex qualsevol, que ha de pertànyer a Q, i que eventualment pot ser repetit. Cada ocurrència del vèrtex en el circuit contribueix en dues unitats al grau del vèrtex (hi hem de comptar l'aresta per la qual "hi arribem", que s'utilitza per primera vegada atès que no es poden repetir arestes, i hem de "sortir" per una aresta encara no utilitzada). La contribució és de dos unitats perquè les arestes adjacents que figuren en la seqüència no han estat utilitzades anteriorment. Si k és el nombre d'ocurrències del vèrtex, aleshores el grau és $g(v) = 2k$, és a dir, parell.

2) Suposem que el grau de tot vèrtex és parell i demostrem que el graf és eulerià. Hem de trobar un circuit eulerià en el graf G.

Seleccionem un vèrtex arbitrari v i formem un circuit Q que s'inicia a v tal com s'indica a continuació. Si comencem per v, cada vegada que s'assoleix un vèrtex se selecciona una aresta que hi sigui incident i que no hagi estat utilitzada anteriorment; continuem a l'altre vèrtex extrem. Atès que el grau és parell, a cada vèrtex tenim disponible una aresta de sortida per a cada aresta d'arribada. L'única excepció a aquesta regla és la del vèrtex inicial v, on s'ha utilitzat una aresta de sortida sense haver-ne utilitzat cap d'entrada i, per tant, si s'arriba a un vèrtex que ja no té més arestes amb les quals continuar el recorregut Q, aquest vèrtex és l'inicial v.

Quan això passa hi ha dues possibilitats: o bé Q ja conté totes les arestes del graf, amb la qual cosa ja hem acabat i aquest és el circuit eulerià que volíem construir, o bé no hi ha totes les arestes i en aquest cas hem produït un circuit en el graf i aleshores, per connexió, algun vèrtex del circuit és incident amb alguna altra aresta no inclosa a Q. Aquest vèrtex es pot utilitzar com a punt de partida per a la construcció d'un nou circuit Q' que no conté arestes de Q i que retorna al vèrtex de partida, ja que en $G - Q$ cada vèrtex és encara de grau parell. La reunió $Q \cup Q'$ és un circuit. Si conté totes les arestes, hem acabat; en cas contrari, es repeteix el procés fins a obtenir un circuit eulerià (el procés acaba atesa la finitud del graf).

▮

Es pot enunciar un resultat més complet de caracterització dels grafs eulerians:

Corol·lari 2

Sigui $G = (V,A)$ un graf connex. Aleshores són equivalents els enunciats següents:

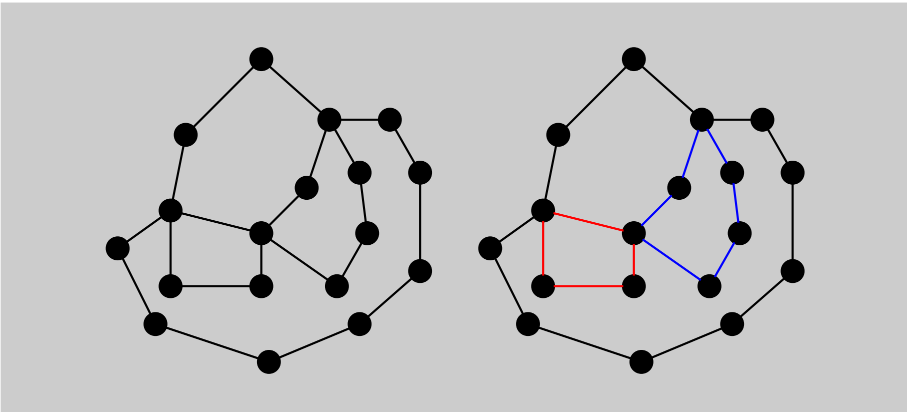
1) G és eulerià.

2) Els graus dels vèrtexs són parells.

3) El conjunt de les arestes admet una partició en circuits que no tenen arestes en comú.

Demostració: Conseqüència immediata del teorema 1 de caracterització dels grafs eulerians. ∎

La tercera propietat descriu l'estructura del graf. La figura que segueix il·lustra aquest enunciat en un cas concret. El conjunt de les arestes A es pot expressar com a $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, amb $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, i el conjunt de les arestes de cada A_i forma un circuit que no comparteix, lògicament, cap aresta amb cap dels altres circuits corresponents als altres subconjunts, tot i que els circuits esmentats poden compartir vèrtexs. A la primera figura es mostra el graf original i a la segona, una descomposició possible. La descomposició no és necessàriament única; podeu intentar trobar altres descomposicions possibles.

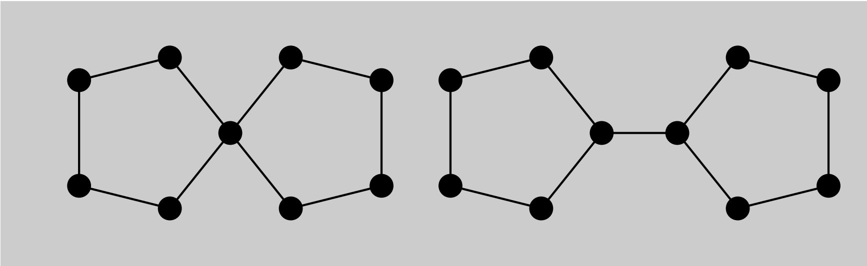


Exemple 3

A partir de la caracterització del grafs eulerians en termes dels graus dels vèrtexs, resulta trivial comprovar que el (multi)graf corresponent al problema dels ponts de Königsberg no és eulerià i, per tant, que el problema no té solució.

Exemple 4

La primera figura correspon a un graf eulerià i la segona a un graf no eulerià. Només cal trobar els graus dels vèrtexs.



També ens podem preguntar en quines condicions un graf (multigraf) connex $G = (V,A)$ conté un recorregut eulerià.

Corol·lari 3

Un graf (multigraf) connex $G = (V,A)$ conté un recorregut eulerià si, i només si, G té exactament dos vèrtexs de grau senar.

Demostració: Si G conté un recorregut eulerià $u-v$ aleshores el grau de tots els vèrtexs de G diferents de u i v serà un nombre parell (amb el mateix raonament utilitzat per als circuits eulerians) i el grau de u i v serà senar.

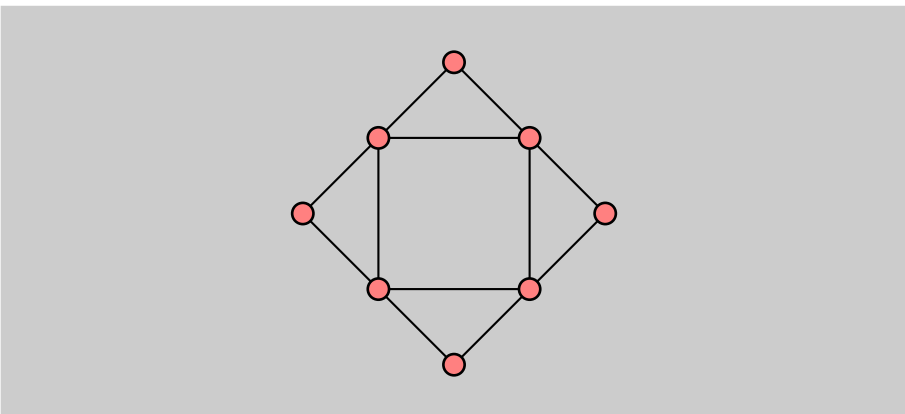
Si G conté exactament dos vèrtexs u i v de grau senar, aleshores el multigraf $G+uv$ és connex i té tots els vèrtexs de grau parell. Per tant, si apliquem el resultat de caracterització dels grafs eulerians, $G+uv$ conté un circuit eulerià C. Si d'aquest circuit C eliminem l'aresta $\{u,v\}$, obtenim un $u-v$ recorregut eulerià en el graf G. ∎

Exercicis

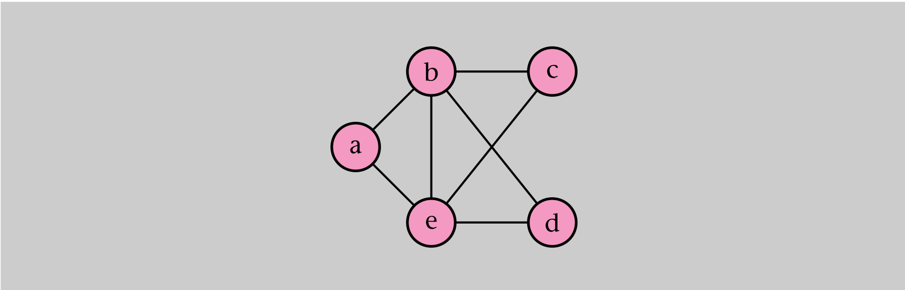
1. Un circuit eulerià conté tots els vèrtexs del graf?

2. Analitzeu per a quins valors de n,m,r,s,t són eulerians els grafs següents: K_n, R_n, E_n, C_n, $K_{n,m}$, $K_{r,s,t}$.

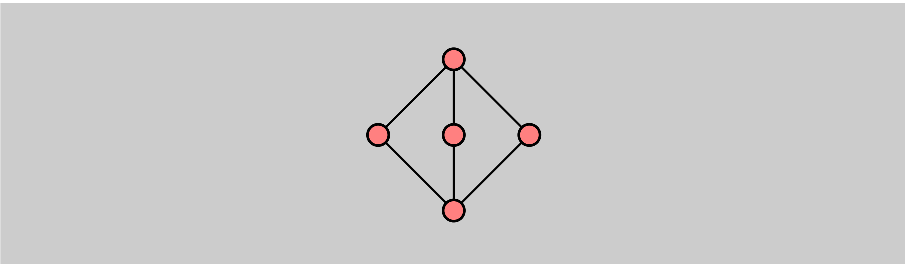
3. Com podem saber si el graf següent, es pot dibuixar d'un sol traç, sense repetir cap línia i començant i acabant en el mateix vèrtex?



4. Estudieu si el graf següent és eulerià fent servir la caracterització dels grafs eulerians en termes de la descomposició del conjunt d'arestes en circuits que no tenen arestes en comú.



5. Estudieu si el graf següent és eulerià. En cas que no ho sigui, digueu si conté un recorregut eulerià.



6. En una exposició l'entrada i la sortida es troben en una mateixa sala. Un visitant decideix travessar totes les portes que trobi per no deixar-se cap sala de l'exposició. En un moment donat arriba a un espai amb tres portes. Podrà completar la visita sense passar dos cops per la mateixa porta?

7. Quin és el nombre mínim de ponts que caldria construir (i a quin lloc) a Königsberg perquè el "problema dels ponts de Königsberg" tingui solució?

Solucions

1. Sí, ja que si passa per totes les arestes, ha de passar necessàriament per tots els vèrtexs.

2. Segons el teorema 1 de caracterització, seran eulerians quan el grau de cada vèrtex sigui parell. Així, K_n serà eulerià quan n sigui senar, ja que cada vèrtex té grau $n-1$. A R_n ($n > 3$) un vèrtex té grau $n-1$ i la resta tenen grau 3, per tant, no serà eulerià. A E_n ($n > 2$) hi ha vèrtexs de grau 1, per tant, tampoc no podrà ser eulerià.

A C_n tots els vèrtexs tenen grau 2, per la qual cosa serà eulerià per a tot n.

A $K_{n,m}$ els vèrtexs tenen grau m o n, per la qual cosa $K_{n,m}$ serà eulerià quan n i m siguin parells.

Finalment, a $K_{r,s,t}$ hi ha vèrtexs de grau $s+t$, $r+t$ i $r+s$. Per tant, serà eulerià quan r, s i t siguin tots tres parells o tots tres senars.

3. Podrem dibuixar el graf d'un sol traç si el graf és eulerià, és a dir, si cada vèrtex té grau parell, com és el cas del graf representat pel dibuix.

4. El graf és eulerià perquè tots els seus vèrtexs tenen grau parell. Una descomposició possible és $C_1 = \{a,b,c,e,a\}$, $C_2 = \{b,d,e,b\}$

5. El graf no és eulerià, ja que conté vèrtexs de grau senar. Ara bé, com que conté exactament dos vèrtexs de grau senar, podem concloure que contindrà un recorregut eulerià.

6. Si considerem el graf que té com a vèrtexs els espais de l'exposició i, com a arestes, cada una de les portes, aleshores l'espai on es troba el visitant correspon a un vèrtex de grau senar. Per tant, el graf no és eulerià i no podem construir un circuit que passi per cada aresta sense repetir-ne alguna.

7. Caldria construir dos ponts. Per exemple, un entre A i D i un altre entre B i C.

1.2. Construcció d'un circuit eulerià

En aquest subapartat caracteritzarem els grafs eulerians com aquells grafs el conjunt d'arestes dels quals admet una partició en circuits que no tenen arestes en comú. L'algorisme resultant (primerament atribuït a Hierholzer, 1873) construeix un circuit eulerià a partir de la concatenació de circuits disjunts respecte de les arestes.

1.2.1. Formulació de l'algorisme de Hierholzer

Entrada : un (multi)graf connex i eulerià $G = (V,A)$ d'ordre n i un vèrtex inicial $s \in V$.
Sortida : un circuit eulerià C de G representat com una llista de vèrtexs.

```
algorisme CircuitEulerià(G,s)
  inici
    C ← {s}
    mentre A ≠ ∅
          v ← VèrtexGrauPositiu(G,C)
          C′ ← Circuit(G,v)
          C ← Concatenar(C,C′,v)
          G ← G − C′
    fimentre
    retorn (C)
  fi
```

En l'algorisme hem utilitzat les funcions següents:

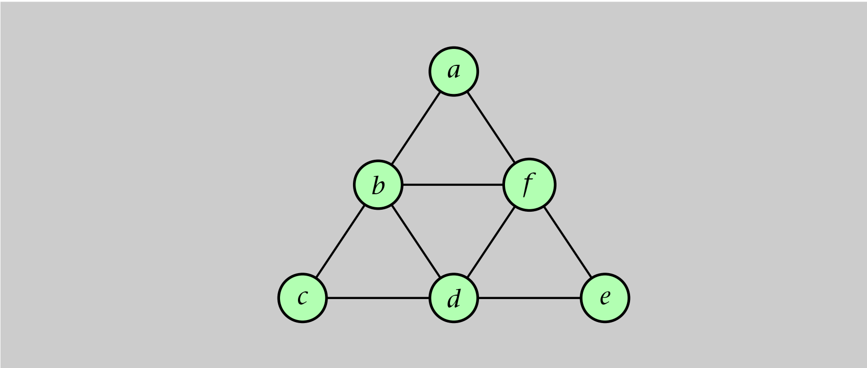
- *VèrtexGrauPositiu*(G,C) retorna el primer vèrtex de C que té grau positiu en el graf G.
- *Circuit*(G,v) retorna un circuit C' construït en el graf G a partir del vèrtex v.

- *Concatenar*(C,C',v) retorna el circuit que s'obté de substituir la primera aparició del vèrtex v en el circuit C per la totalitat del circuit C'.
- La instrucció $G \leftarrow G - C'$ elimina de G les arestes del circuit C'.

1.2.2. Simulació de l'algorisme de Hierholzer

Exemple 5

Considerem el graf eulerià definit pel gràfic següent.



Si apliquem l'algorisme de Hierholzer començant pel vèrtex a, obtindrem (hem de tenir en compte que, en cada pas, el circuit escollit podria ser un altre, depenent de la funció *Circuit(G,v)* dissenyada):

Iteració	v	C'	C
0	a		$\{a\}$
1	a	$\{a,b,f,a\}$	$\{a,b,f,a\}$
2	b	$\{b,c,d,b\}$	$\{a,b,c,d,b,f,a\}$
3	d	$\{d,e,f,d\}$	$\{a,b,c,d,e,f,d,b,f,a\}$

Així, el circuit eulerià obtingut serà $C = \{a,b,c,d,e,f,d,b,f,a\}$.

1.2.3. Anàlisi de l'algorisme de Hierholzer

En l'algorisme de Hierholzer podem distingir les següents operacions:

1) Triar un vèrtex v de grau positiu a la llista C. Aquesta és una operació lineal en la mida de C. C contindrà, com a molt, n vèrtexs diferents. Per tant, serà una operació de complexitat $O(n)$.

2) Construir un circuit C' a G a partir del vèrtex v. Aquesta és un operació que depèn del nombre d'arestes triades. En el pitjor dels casos seran tantes com la mida m del graf. Serà, doncs, una funció de complexitat $O(m)$.

3) Concatenar els circuits C i C'. Aquesta és una operació lineal en la mida de C, és a dir, de complexitat $O(n)$.

4) Eliminar de G les arestes del circuit C'. Trivialment, és una operació que, en el pitjor dels casos, tindrà una complexitat $O(m)$.

Resumint, podem concloure que la complexitat de tot l'algorisme serà

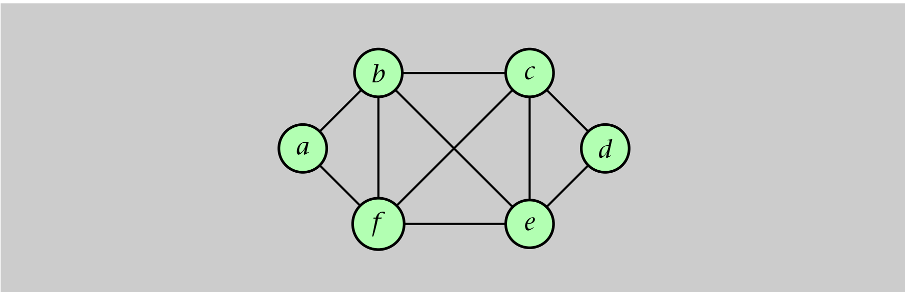
$$\max\{O(n),O(m),O(n),O(m)\} = O(m),$$

ja que el graf és connex.

Exercicis

8. El circuit eulerià obtingut per l'algorisme de Hierholzer és únic?

9. Aplicant l'algorisme de Hierholzer trobeu un circuit eulerià del graf següent.



10. Com podríem utilitzar l'algorisme de Hierholzer per a obtenir un recorregut eulerià d'un graf G?

Solucions

8. No, dependrà de la manera en què la funció *circuit()* construeix cada un dels circuits. En l'exemple 5 podríem haver construït els circuits $\{a,b,c,d,e,f,a\}$ i $\{b,d,f,b\}$, i haguéssim obtingut el circuit eulerià $C = \{a,b,d,f,b,c,d,e,f,a\}$.

9. La taula següent mostra l'aplicació de l'algorisme de Hierholzer que comença pel vèrtex a:

Iteració	v	C'	C
0	a		$\{a\}$
1	a	$\{a,b,f,a\}$	$\{a,b,f,a\}$
2	b	$\{b,c,d,e,b\}$	$\{a,b,c,d,e,b,f,a\}$
3	c	$\{c,e,f,c\}$	$\{a,b,c,e,f,c,d,e,b,f,a\}$

Així, el circuit eulerià obtingut serà $C = \{a,b,c,e,f,c,d,e,b,f,a\}$.

10. Si el graf G conté un recorregut eulerià, aleshores conté exactament dos vèrtexs de grau senar. Siguin u i v aquests vèrtexs. Construïm el graf $G' = G+uv$ i apliquem l'algorisme de Hierholzer a G' (ja que G' serà eulerià). En el circuit obtingut només cal eliminar l'aresta $\{u,v\}$ per a obtenir el recorregut eulerià de G.

2. Grafs hamiltonians

2.1. Resultats fonamentals

L'origen dels grafs hamiltonians es troba en el joc de Hamilton, en el qual s'ha de seguir un recorregut tancat en un dodecaedre regular, sense repetició de vèrtexs i mitjançant les arestes. Altres problemes, com el del tauler d'escacs, el del viatjant de comerç i el del robot de soldadura controlat per ordinador, han motivat l'estudi d'aquests grafs.

Observació

Fixeu-vos que el recorregut hamiltonià (a diferència de l'eulerià) no té perquè contenir totes les arestes del graf.

Definició 2

En un graf $G = (V,A)$:

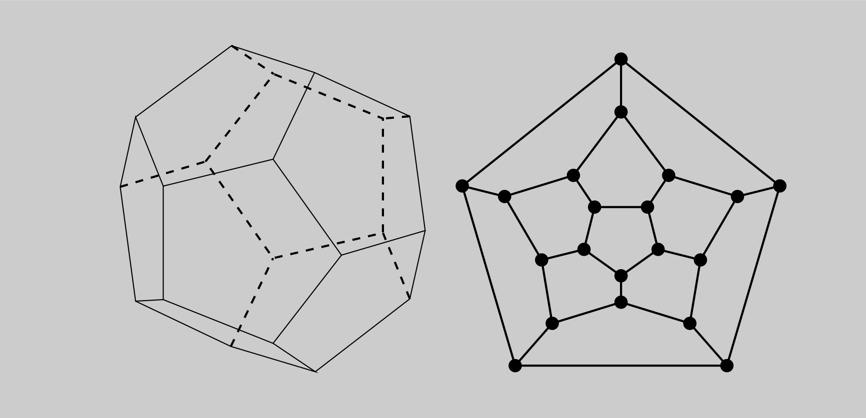
- Un recorregut és un **camí hamiltonià** si passa per tots els vèrtexs sense repetició.
- Un **cicle hamiltonià** és un cicle que passa per tots els vèrtexs del graf. Si el graf admet un cicle d'aquestes característiques, s'anomena **graf hamiltonià**.

Aquestes definicions només tenen sentit en el cas d'un graf connex; en cas contrari, s'apliquen a cadascun dels components connexos.

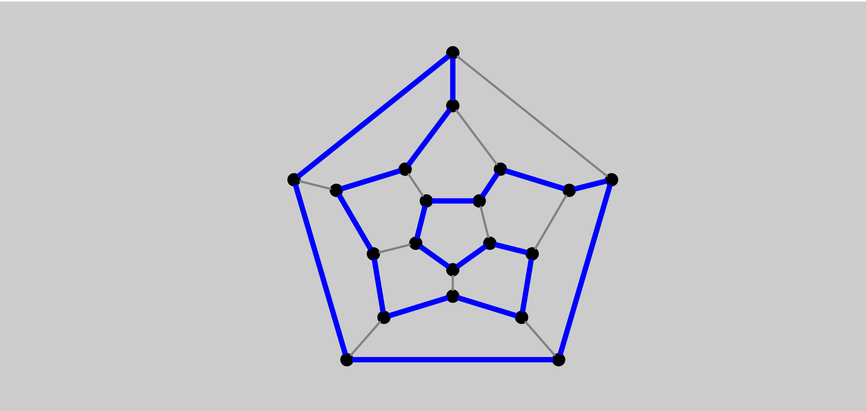
Exemple 6

El matemàtic W. R. Hamilton inventà el 1856 un joc anomenat *The traveller's dodecahedron*, que consistia en un dodecàedre els vèrtexs del qual representaven les principals ciutats del món d'aquella època; s'havia de trobar un recorregut tancat al llarg de les arestes del poliedre que passés per tots els vèrtexs sense repetició.

Observem que es pot considerar un model en termes de teoria de grafs per a aquest entreteniment, com es veu a l'esquema adjunt: els vèrtexs del graf corresponen als vèrtexs del dodecaedre i les arestes del graf es corresponen amb les arestes del poliedre; es tracta de buscar un recorregut tancat sobre el graf que passi per tots els vèrtexs exactament una vegada.



En aquest cas, el problema té solució, com es pot veure en el gràfic següent.

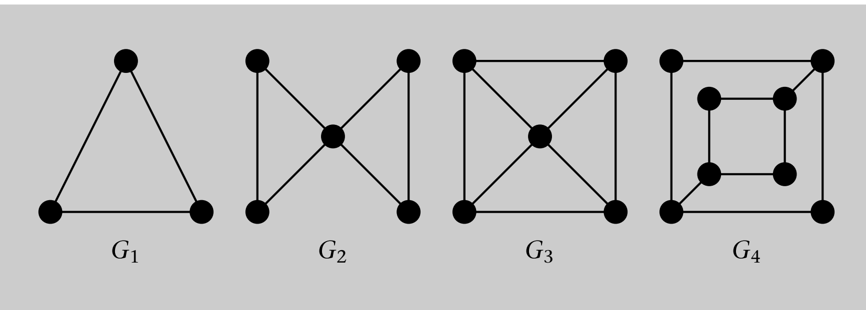


Sabríeu trobar una solució diferent de la que us hem presentat?

A pesar de la similitud entre les definicions de graf eulerià i graf hamiltonià, l'exemple següent mostra que les dues condicions són independents.

Exemple 7

Estudiem si són eulerians i/o hamiltonians els grafs següents.



G_1 és eulerià, perquè tots els vèrtexs són de grau parell. També és hamiltonià perquè fàcilment podem construir un cicle hamiltonià.

A G_2 tots els vèrtexs són de grau parell i, per tant, és euleria. En canvi, no és hamiltonià. En efecte, si fos hamiltonià, hi hauria d'haver un cicle hamiltonià, al qual contribuirien tots els vèrtexs amb exactament dues arestes. Considerant, doncs, la contribució dels vèrtexs de grau 2, resultaria que totes les arestes incidents al vèrtex de grau 4 serien d'aquest cicle, cosa que no té sentit.

G_3 no es eulerià (conté vèrtexs de grau senar) però sí que és hamiltonià. Fàcilment es pot trobar un cicle hamiltonià.

Finalment, G_4 ni és eulerià ni hamiltonià. No és eulerià perquè conté vèrtexs de grau senar. Si hi hagués un cicle hamiltonià, contindria totes les arestes dels vèrtexs de grau 2, i per a cada vèrtex pot contenir exactament dues arestes incidents. S'han de descartar, per tant, les arestes que connectin els vèrtexs de grau 3 del graf i, en conseqüència, el suposat "cicle hamiltonià" seria reunió de dos cicles!

A diferència dels grafs eulerians, no hi ha cap resultat que doni la condició necessària i suficient perquè un graf sigui hamiltonià. Hi ha condicions necessàries de hamiltoneïtat i n'hi ha també, independentment, de suficients; moltes d'aquestes tenen poca aplicabilitat pràctica en molts casos concrets.

De manera intuïtiva podem observar en l'exemple anterior que un graf hamiltonià és un graf dens, és a dir, conté moltes arestes necessàries per a connectar els vèrtexs del graf.

Primer, donem una definició que ens permetrà establir condicions necessàries perquè un graf sigui hamiltonià.

Definició 3

Un graf $G = (V,A)$ és **2-connex** si cada parell de vèrtexs u i v de G està connectat per un mínim de dos camins disjunts, és a dir, dos camins que els únics vèrtexs que tenen en comú són el extrems u i v

Exemple 8

Si ens fixem en els grafs de l'exemple anterior, podem observar:

G_1 és 2-connex, ja que tots els vèrtexs formen part d'un cicle.

G_2 no és 2-connex. En efecte, qualsevol camí que uneixi dos vèrtexs oposats en diagonal ha de passar pel vèrtex central.

Aquesta noció de 2-connectivitat és necessària per a l'existència d'un cicle hamiltonià.

Teorema 4

Si $G = (V,A)$ és un graf hamiltonià:

1) G és connex i tots els seus vèrtexs tenen grau major o igual a 2.

2) G és 2-connex.

3) Per a tot $S \subset V$, $S \neq \emptyset$ es verifica $c(G-S) \leq |S|$ on $c(G-S)$ representa el nombre de components connexos del graf obtingut de G després d'eliminar els vèrtexs (i les arestes incidents) de S.

4) Si G és (V_1,V_2)-bipartit aleshores $|V_1| = |V_2|$.

Demostració: Si G és hamiltonià podem disposar tots els vèrtexs de G formant un cicle $C : v_1,v_2,\ldots,v_n,v_1$. Així, cada vèrtex v_i es connecta, almenys, amb v_{i-1} i v_{i+1}. Per tant, $g(v_i) \geq 2$.

De la mateixa manera, entre v_i i v_j $(i < j)$ hi haurà, almenys, dos camins disjunts: el camí $v_i,v_{i+1},\ldots,v_j$ i el camí $v_j,v_{j+1},\ldots,v_n,v_1,\ldots,v_i$. Per tant, serà 2-connex.

Si en un cicle eliminem r vèrtexs aleshores es produeixen, com a molt, r components connexos. Per tant, perquè un graf sigui hamiltonià, sempre que eliminem un conjunt de vèrtexs S, el nombre de components connexos produïts no pot superar el cardinal de S.

La darrera condició és conseqüència de la distribució dels vèrtexs del graf G en un cicle. Necessàriament els vèrtexs han de pertànyer alternativament a V_1 i a V_2, i això implica que $|V_1| = |V_2|$. ∎

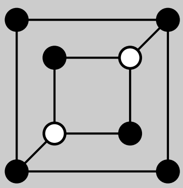
Exemple 9

Aquestes condicions necessàries de hamiltoneïtat se solen utilitzar per a demostrar que un graf no és hamiltonià.

El grafs amb vèrtexs de grau 1 no poden ser hamiltonians. Així, tots els grafs trajectes i tots els arbres no són grafs hamiltonians.

El graf G_2 de l'exemple 7 no és hamiltonià, ja que no és 2-connex.

El graf G_4 del mateix exemple tampoc no és hamiltonià. Si eliminem el conjunt de dos vèrtexs de color blanc obtenim un graf amb tres components connexos.



G_4

Totes aquestes condicions serveixen per a demostrar que un graf no és hamiltonià, però no permeten assegurar que sí ho sigui. Hi ha algunes condicions suficients per a l'existència de cicles hamiltonians, però tampoc no serveixen per a trobar explícitament el cicle. Des d'un punt de vista algorísmic el problema de cercar un cicle hamiltonià en un graf G és un problema difícil; és a dir, un problema computacionalment intractable. Això no significa que no puguem trobar cicles hamiltonians en un graf, però cal utilitzar algorismes que explorin totes les possibilitats amb tècniques de tornada enrera (*backtracking*, en anglès).

Exemple 10

Si G és un graf de n vèrtexs, podríem generar tots els cicles formats pels n vèrtexs. Això és equivalent a formar totes les permutacions de n elements que ja sabem que són $n!$ Naturalment, no totes aquestes permutacions donen lloc a cicles, ja que hi pot haver vèrtexs no adjacents. A més, podem fixar un vèrtex per començar sempre pel mateix lloc. També podem fixar una orientació en el cicle, la qual cosa ens redueix el nombre total de permutacions que cal explorar. En total, haurem d'explorar $\frac{(n-1)!}{2}$ possibles cicles.

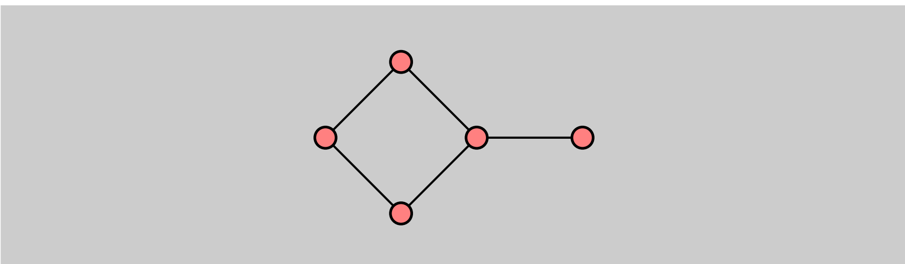
Per a n petit, el nombre de possibilitats és reduït (per exemple, 20.160 per a $n = 9$) i un ordinador les pot analitzar en pocs segons. No obstant això, quan n augmenta, el nombre de possibilitats fa que aquest mètode sigui computacionalment inviable. Per exemple, per a $n = 20$ ja s'haurien d'analitzar més de 10^{16} possibilitats.

Exercicis

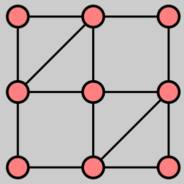
11. És cert que tot graf hamiltonià conté un camí hamiltonià? El recíproc és cert?

12. Tot cicle hamiltonià és circuit eulerià?

13. És hamiltonià el graf següent?



14. Estudieu si el graf següent és eulerià; analitzeu també si és hamiltonià.



15. La condició de 2-connectivitat és necessària per a la hamiltoneïtat. Proposeu algún exemple que mostri que no és suficient.

Solucions

11. Si $v_1,\dots,v_n,v_1$ és un cicle hamiltonià a G, aleshores $v_1,\dots,v_n$ és un camí hamiltonià a G. El recíproc, però, no és cert. Per exemple, el graf trajecte T_n conté un camí hamiltonià, però no és un graf hamiltonià.

12. No, perquè no s'inclouen necessàriament totes les arestes.

13. No, perquè conté un vèrtex de grau 1.

14. El graf és eulerià perquè tots els vèrtexs tenen grau parell. En canvi, no és hamiltonià. Si considerem el conjunt S format pels quatre vèrtexs situats en els punts mitjans dels quatre costats, aleshores $|S| = 4$ mentre que $c(G-S) = 5$, en contradicció amb la condició 3 del teorema 4.

15. El graf de l'exercici anterior és 2-connex però no és hamiltonià. Un altre exemple seria el graf G_4 de l'exemple 7.

2.2. Construcció d'una aproximació a un cicle hamiltonià

Mentre que el problema de trobar un circuit eulerià és senzill, i l'algorisme de Hierholzer el resol eficientment, el problema de trobar un cicle hamiltonià és difícil, computacionalment intractable. Podem, però, trobar una aproximació prou bona a la solució i afitar l'error comès en usar aquesta aproximació. Malauradament, només trobarem aquestes aproximacions si els grafs compleixen determinades condicions.

La recerca d'un cicle hamiltonià d'un graf està íntimament relacionada amb un altre problema, les característiques del qual són molt interessants de cara a trobar l'aproximació (al cicle hamiltonià) de què parlàvem. Descrivim a continuació aquest problema.

Considerem un conjunt de n ciutats que un representant d'una companyia d'assegurances ha de visitar per tal de donar a conèixer les novetats de l'empresa. Naturalment, el representant haurà de tornar al punt de partida. El viatge entre cada parell de ciutats té un cost que dependrà de la distància entre les dues ciutats. El representant es planteja quin itinerari ha de seguir per tal de visitar totes les ciutats amb el menor cost possible.

La manera natural d'enfocar el problema és considerar un graf connex i ponderat (G,w) on els vèrtexs són les ciutats i les arestes representen les distàncies entre les ciutats.

Aquest problema és un exemple de l'anomenat **problema del viatjant de comerç** (*travelling salesman problem*, TSP, en anglès) i, sota certes condicions, és equivalent a cercar un cicle hamiltonià en el graf G.

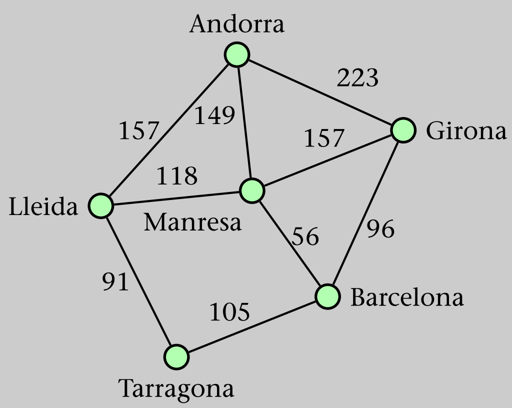
Formulació del problema *TSP*. Enunciat 5

Donat un graf (G,w) connex i ponderat, amb pesos no negatius a les arestes, es tracta de trobar un cicle hamiltonià del graf de pes (o longitud) total mínim.

El TSP és un problema difícil, però, no obstant això, en determinades situacions és possible aproximar la solució òptima de manera eficient.

Exemple 11

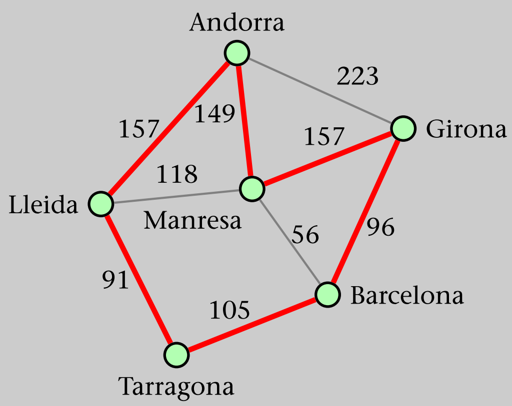
Determineu la ruta òptima (que passi per cada ciutat una sola vegada) que ha de seguir el representant de la companyia d'assegurances en el mapa següent.



En aquest cas que només hi ha sis ciutats podríem mirar les $\frac{5!}{2} = 60$ possibilitats de combinar les sis ciutats (algunes combinacions no són rutes reals), i triar la més econòmica.

Si utilitzem un algorisme *greedy* i cerquem les cinc arestes de pes més petit que no formen cicle (l'arbre generador minimal) obtindrem un graf format per les arestes {Barcelona,Manresa}, {Lleida,Tarragona}, {Barcelona,Girona}, {Barcelona,Tarragona} i {Manresa,Andorra} amb una longitud total de 497. Aquest és el mínim valor possible per a la solució que cerquem. En aquest cas, però, aquestes arestes no formen un cicle hamiltonià i, per tant, no són solució del nostre problema. Són solament una fita inferior.

En aquest cas, la solució òptima estaria formada pel cicle següent amb una longitud total de 755, és a dir, el representant recorrerà 755 km com a mínim.



2.2.1. El TSP amb desigualtat triangular

La majoria de problemes reals en els quals cal cercar un cicle hamiltonià òptim corresponen a situacions en què intervenen distàncies (viatges per una xarxa de carreteres, temps transcorreguts, repartiments de feines, etc.). En totes aquestes situacions es verifica la *desigualtat triangular*, cosa que significa que si comparem la distància (cost, temps) entre tres punts x, y, z sempre serà més curt anar directament de x a y que passar per z. De manera més precisa, presentem la definició a continuació.

Definició 4

Un graf ponderat (G,w) satisfà la propietat de la **desigualtat triangular** si per a tota terna de vèrtexs de G, u, v, x,

$$w(u,v) \leq w(u,x) + w(x,v).$$

En particular, tot graf que satisfà la desigualtat triangular ha de ser complet.

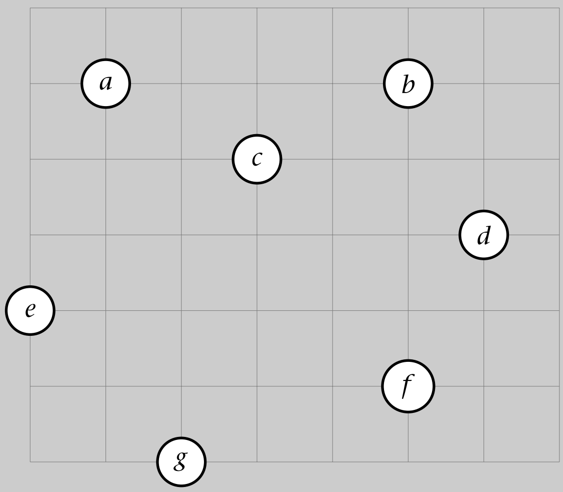
Per a aquesta classe de grafs, el problema del viatjant de comerç (*TSP*) es formularia de la manera següent:

Formulació del problema *TSP amb desigualtat triangular*. Enunciat 6

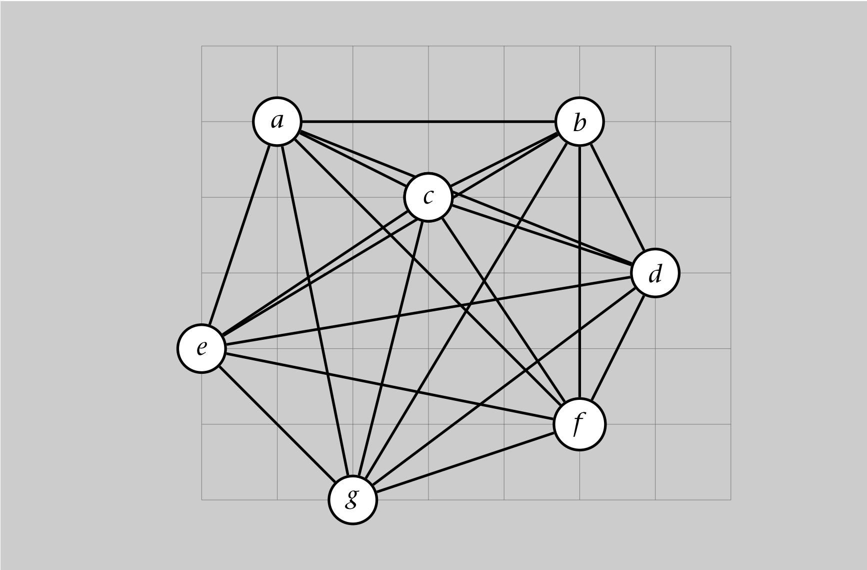
Donat un graf (G,w) connex i ponderat, amb pesos no negatius a les arestes, que satisfà la desigualtat triangular, es tracta de trobar un cicle hamiltonià del graf de pes (o longitud) total mínim.

Exemple 12

Un graf ponderat que satisfà la desigualtat triangular el podem representar en una graella, és a dir, com una porció de pla euclidià:



Cada vèrtex del graf queda determinat per un parell de coordenades (v_x,v_y) i el pes de cada aresta serà donat per la distància euclidiana entre els vèrtexs. En aquest exemple hem representat el graf K_7 ponderat i que satisfà la desigualtat triangular:



El vèrtex e està situat a la posició (0,2) i el vèrtex b, a la posició (5,5). El pes de l'aresta $\{e,b\}$ és $w(e,b) = d(e,b) = \sqrt{(5-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$.

Encara que la formulació del problema del viatjant de comerç que satisfà la desigualtat triangular sembla més simple, continua essent un problema difícil, és a dir, computacionalment intractable. No obstant això, en el subapartat següent desenvoluparem un algorisme eficient que permet d'obtenir una solució aproximada al problema. A la pràctica, i especialment si el nombre de vèrtexs del graf és elevat, n'hi pot haver prou de construir una solució aproximada al problema (tan bona com sigui possible) en lloc d'obtenir la solució òptima. Per exemple, si tenim un mètode per a trobar una solució de manera eficient que no s'allunya més d'un 2% de la solució òptima, segurament serà una "bona solució" per a la majoria d'aplicacions pràctiques (observem que en aplicacions reals –distàncies, per exemple– hi poden haver errors de mesurament que permetin menysprear errors petits en la solució).

2.2.2. Aproximació al TSP amb desigualtat triangular

Una manera d'aproximar la solució al problema que ens ocupa consisteix a considerar la manera més curta d'unir tots els vèrtexs del graf G sense generar un cicle. Ja sabem que per a aconseguir això hem de calcular l'arbre generador minimal de G. La idea de l'algorisme que proposem serà construir un cicle hamiltonià a G fent servir el nombre màxim possible de les arestes d'un arbre generador minimal de G.

Formulació de l'algorisme TSP aproximat

Entrada : un graf connex i ponderat (G,w) d'ordre n que satisfà la desigualtat triangular.
Sortida : un cicle hamiltonià H de G representat per una llista de vèrtexs.
algorisme *TSP-aproximat*(G)
  inici
    Seleccionem $r \in V(G)$ /* l'arrel de l'arbre */
    $T \leftarrow$ *ArbreGenerador*(G,r)
    $P \leftarrow$ *Preordre*(T)
    $H \leftarrow$ *CicleHamiltonià*(P)
    retorn (H)
  fi

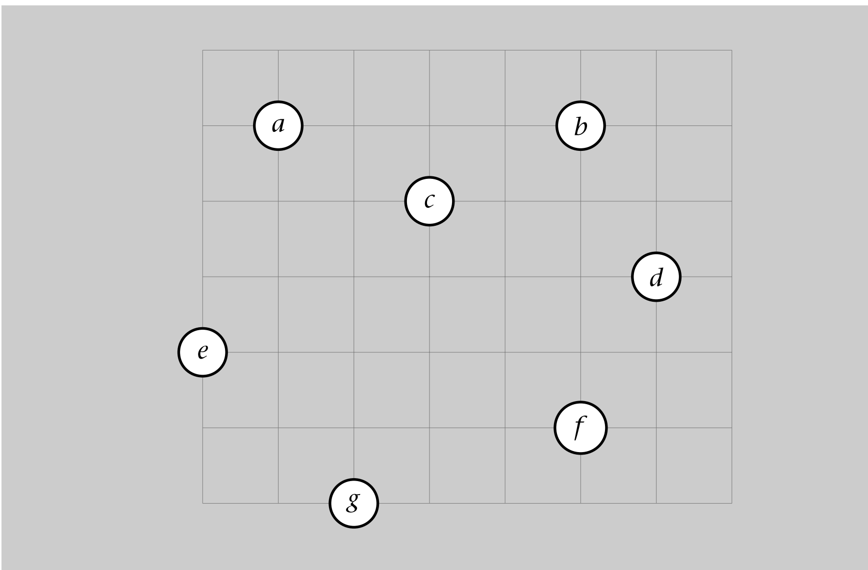
En l'algorisme hem utilitzat les funcions següents:

- *ArbreGenerador*(G,r) retorna un arbre generador de G a partir de l'arrel r usant l'algorisme de Prim.
- *Preordre*(T) retorna un recorregut en preordre de l'arbre amb arrel T. Aquest recorregut contindrà tots el vèrtexs de G en un determinat ordre, $P = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$.
- *CicleHamiltonià*(P) retorna el cicle que s'obté d'afegir l'aresta $\{v_n, v_1\}$ al recorregut P, és a dir, $H = \{v_1,v_2,\ldots,v_n,v_1\}$.

Simulació de l'algorisme TSP aproximat

Exemple 13

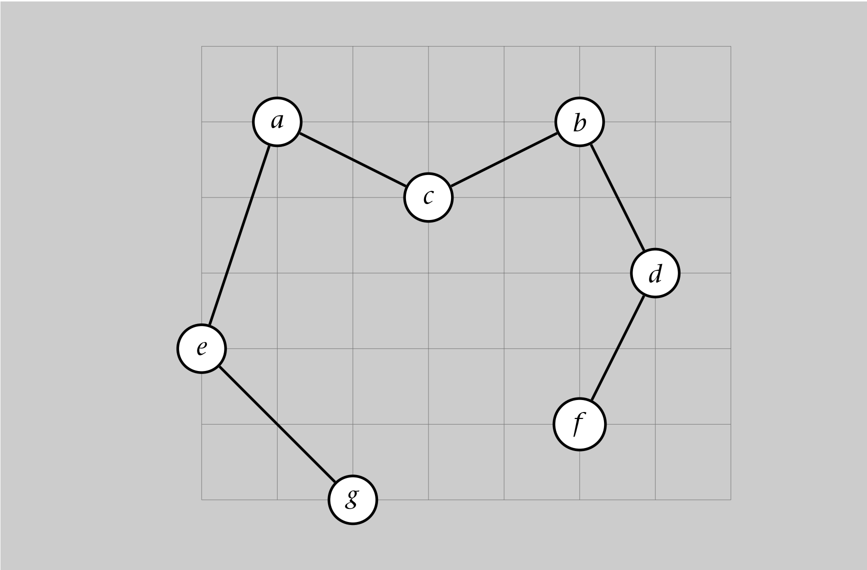
Considerem el graf de l'exemple 12.



Anem a aplicar l'algorisme *TSP-aproximat* a aquest graf:

1) Seleccionem un vèrtex inicial, $a \in G$, com a arrel de l'arbre.

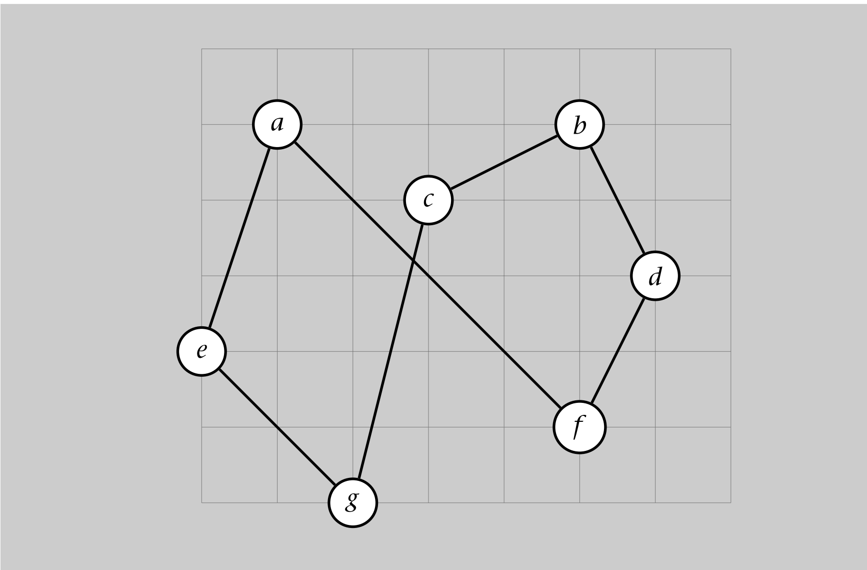
2) Construïm l'arbre generador minimal T de G començant per a:



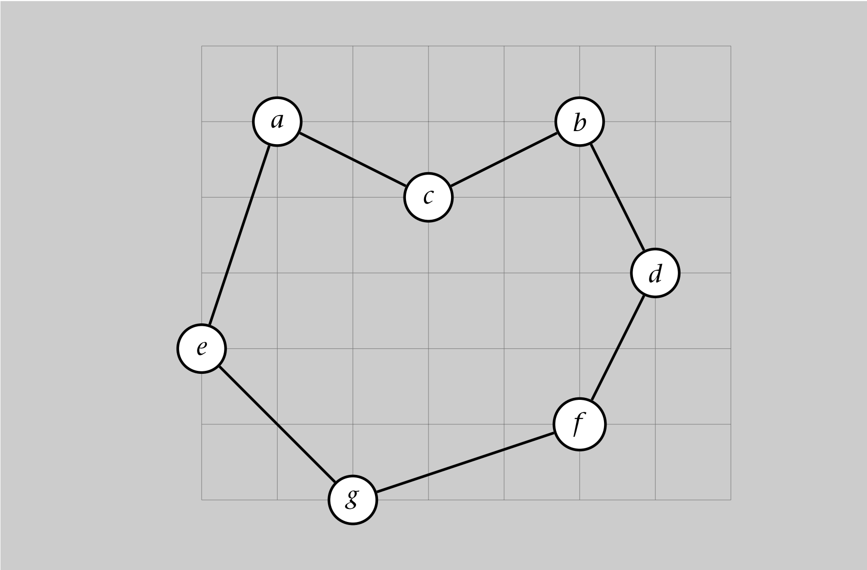
Aquest arbre generador minimal té una longitud $w(T) = 4\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{8} = 14{,}935$.

3) Obtenim el recorregut en preordre de T: $P = \{a,e,g,c,b,d,f\}$.

4) I finalment, el cicle hamiltonià $H = \{a,e,g,c,b,d,f,a\}$ que tindrà un longitud $w(H) = \sqrt{10} + \sqrt{8} + \sqrt{17} + 3\sqrt{5} + \sqrt{32} = 22{,}4789$.



En aquest exemple, el cicle hamiltonià òptim és $H^* = \{a,c,b,d,f,g,e,a\}$ amb una longitud $w(H^*) = 18{,}0973$.



Observem que un nombre important de les arestes (en aquest exemple concret, totes) de l'arbre generador minimal també pertanyen al cicle hamiltonià òptim. A més, moltes de les arestes de l'arbre generador minimal pertanyen al cicle aproximat.

Anàlisi de l'algorisme TSP aproximat

L'algorisme *TSP-aproximat* duu a terme dues operacions fonamentals:

1) Calcula l'arbre generador minimal de G amb l'algorisme de Prim. Aquesta és una operació que té, com ja sabem, una complexitat $O(n^2)$.

2) Calcula el recorregut en preordre d'un arbre amb arrel. Com ja sabem, aquest algorisme visita cada vèrtex una sola vegada i té una complexitat que és funció lineal de l'ordre de l'arbre, és a dir, una complexitat $O(n)$.

En total, l'algorisme tindrà una complexitat $O(n^2)$.

Podem afirmar, doncs, que aquest és un algorisme eficient que obté una solució aproximada al problema del *TSP amb desigualtat triangular* (que és un problema intractable). Naturalment, aquest guany en eficiència provoca una pèrdua de precisió en la solució. Caldria, però, que ens asseguréssim que aquesta pèrdua de precisió no supera certs límits, és a dir, que la diferència entre la solució aproximada i l'òptima es manté afitada.

Proposició 7

Sigui H el cicle hamiltonià obtingut per l'algorisme *TSP-aproximat* i denotem per H^* el cicle hamiltonià òptim (mínim) de G. Aleshores

$$w(H) \leq 2 \cdot w(H^*).$$

Demostració: Sigui T l'arbre generador de pes mínim de G obtingut per l'algorisme. Aleshores $w(T) \leq w(H^*)$, ja que $w(T)$ és el pes total d'unir tots els vèrtexs de G de la manera més curta possible.

Demostrarem que $w(H) \leq 2 \cdot w(T)$ on H és el cicle hamiltonià obtingut per l'algorisme *TSP-aproximat*. El recorregut en preordre d'un arbre es pot entendre com un recorregut en profunditat de l'arbre en el qual es retrocedeix quan s'arriba a una fulla i es visita cada vèrtex el primer cop que es troba en el recorregut. El pes d'un recorregut fet d'aquesta manera serà exactament $2 \cdot w(T)$, ja que cada aresta és recorreguda dues vegades. Com que en el cicle hamiltonià que retorna l'algorisme se substitueix el retrocés en l'arbre T per una aresta directa al proper vèrtex del seu recorregut en preordre i com que G compleix la desigualtat triangular, necessàriament $w(H) \leq 2 \cdot w(T)$. De les dues desigualtats s'obté $w(H) \leq 2 \cdot w(T) \leq 2 \cdot w(H^*)$ ∎

Com que sempre $w(H^*) \leq w(H)$, aquesta proposició ens assegura que fent servir el *TSP-aproximat* podem esperar que la solució obtinguda no sigui més del doble de la solució òptima. A la pràctica, però, sol ser solament un 15% o un 20% pitjor que l'òptima (Skiena, 1998).

Exercicis

16. La solució al problema del viatjant de comerç (*TSP*) formulat a l'enunciat 5 no sempre és la millor solució perquè un viatjant visiti totes les ciutats de la seva zona de representació. Considerem que el viatjant ha de visitar cinc ciutats $\{A,B,C,D,E\}$ i que la taula següent ens dóna les distàncies entre aquestes ciutats:

	A	B	C	D	E
A	0	10	1	10	0
B	10	0	1	0	10
C	1	1	0	1	1
D	10	0	1	0	10
E	0	10	1	10	0

a) Trobeu la solució al problema *TSP* és a dir, trobeu un cicle hamiltonià de pes mínim en el graf ponderat G determinat per la taula de distàncies anterior.

b) Demostreu que és possible trobar un circuit sobre el graf anterior (que passi per totes les ciutats) amb un pes més petit que el que s'ha obtingut en l'apartat anterior.

17. Si fem servir la mateixa tècnica que en l'exemple 11, trobeu una fita inferior per a la solució al problema *TSP* del graf definit per la taula

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	57	64	8	26
B	57	0	88	54	34
C	64	88	0	57	56
D	8	54	57	0	23
E	26	34	56	23	0

18. Doneu un exemple d'un graf en el qual l'algorisme *TSP-aproximat* permeti obtenir la solució òptima al problema *TSP* amb desigualtat triangular.

19. Podríem utilitzar l'algorisme de Kruskal en lloc de l'algorisme de Prim en l'algorisme *TSP-aproximat*?

20. En l'exemple 11 hem afirmat que el nombre total de possibles cicles hamiltonians diferents que hi ha en un graf d'ordre n és, com a màxim, $\frac{(n-1)!}{2}$.

Feu una taula comparativa dels temps d'execució entre un algorisme que cerqui tots els possibles cicles hamiltonians (algorisme *TSP-força bruta*) i l'algorisme *TSP-aproximat* en un graf que satisfà la desigualtat triangular:

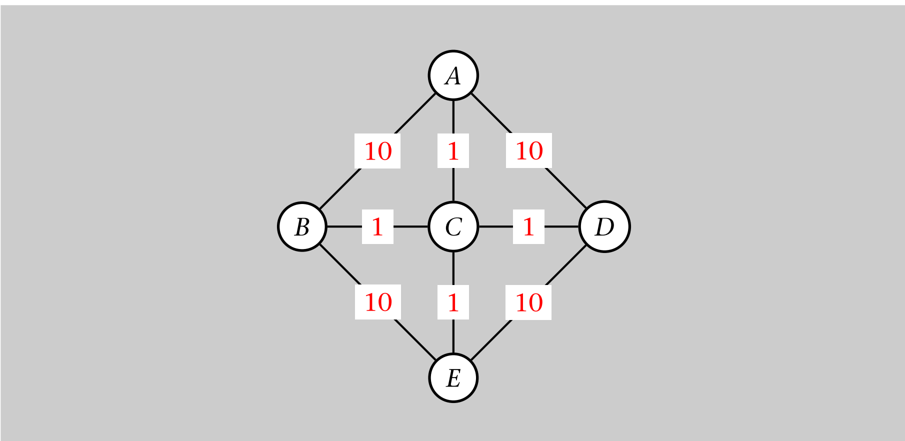
n	*TSP-força bruta*	*TSP-aproximat*
5		
10		
50		
100		
500		
1.000		

Vegeu també

Podeu veure la demostració del resultat de l'exemple 11 en l'exercici d'autoavaluació 5.

Solucions

16. El graf G determinat per la taula de distàncies serà:



a) Una solució al problema *TSP* en aquest graf és el cicle $H = \{A,B,C,E,D,A\}$ amb un pes total $w(H) = 32$.

b) El viatjant, però, podria seguir el circuit $C = \{A,C,B,C,D,C,E,C,A\}$ amb un pes total $w(C) = 8$, que és menor que l'anterior. Naturalment, en aquest cas hem repetit vèrtexs i arestes.

Observem que aquest graf no satisfà la desigualtat triangular. Aquesta variant del problema *TSP* s'anomena problema *TSP generalitzat*.

17. En l'exemple 11 hem utilitzat un arbre generador minimal com a aproximació a la solució al problema *TSP*. Si T és l'arbre generador minimal del graf ponderat G construït a partir de la taula de l'enunciat, aleshores $w(T) \leq w(H^*)$ on H^* és la solució òptima.

Si apliquem els algorisme de Prim o de Kruskal en aquest graf obtindrem un arbre T de pes $w(T) = 121$. Per tant, la fita mínima de $w(H^*)$ serà 121.

18. Podem considerar, per exemple, K_4 sobre el pla euclidià amb els vèrtexs situats sobre els punts de coordenades (1,1), (–1,1), (–1,–1) i (1,–1). El pes de cada aresta vindria donat per la distància euclidiana entre els vèrtexs que determinen l'aresta. En aquest graf la solució donada per l'algorisme *TSP-aproximat* és òptima.

19. Sí. Si l'arbre obtingut és el mateix aleshores la solució obtinguda també serà la mateixa.

20. Un algorisme que utilitzi la força bruta (tots els possibles cicles hamiltonians) per a cercar l'òptim en un graf G d'ordre n que satisfà la desigualtat triangular haurà d'analitzar $\frac{(n-1)!}{2}$ cicles per a trobar la solució òptima. En canvi, l'algorisme *TSP-aproximat* troba un aproximació amb un temps proporcional a n^2. Si comparem aquest dos valors en la taula proposada obtindrem:

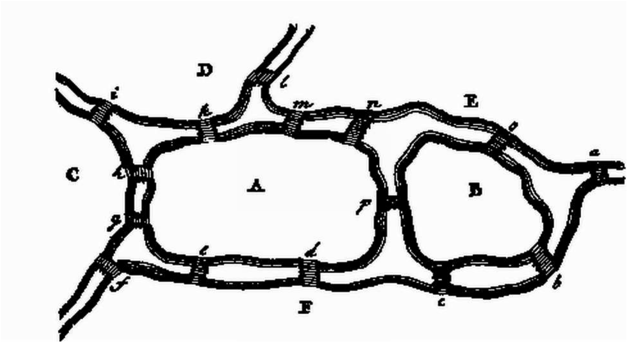
n	*TSP-força bruta*	*TSP-aproximat*
5	12	25
10	181.440	100
50	$3{,}041 \times 10^{62}$	2.500
100	$4{,}666 \times 10^{155}$	10.000
500	$1{,}220 \times 10^{1.131}$	250.000
1.000	$2{,}011 \times 10^{2.564}$	1×10^6

Aquests resultats mostren que, per a grafs molts petits, podria ser millor utilitzar un algorisme que cerqués totes les possibilitats en lloc del *TSP-aproximat*. Però, de seguida, quan n augmenta, la "força bruta" esdevé intractable mentre que el *TSP-aproximat* es manté dins d'uns valors acceptables.

Naturalment, aquesta millora s'aconsegueix a costa d'apartar-nos de la solució òptima. En moltes aplicacions, però, aquest pèrdua podria no ser significativa. En canvi, el temps necessari per a obtenir la millor solució sí que pot ser una dificultat insalvable.

Exercicis d'autoavaluació

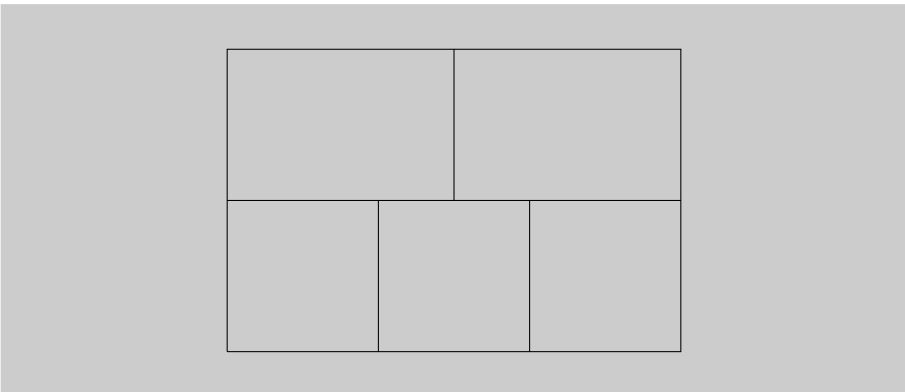
1. En el graf següent, versió alternativa del graf dels ponts de Königsberg, decidiu si és possible fer un recorregut tancat que passi per tots els ponts sense repetició.



2. Suposant que un (multi)graf connex $G = (V,A)$ està emmagatzemat mitjançant la seva matriu d'adjacències; com es pot decidir fàcilment si el graf és eulerià? Quina complexitat tindrà un algorisme que comprovi que el graf G és eulerià? I si està emmagatzemat mitjançant la llista d'adjacències?

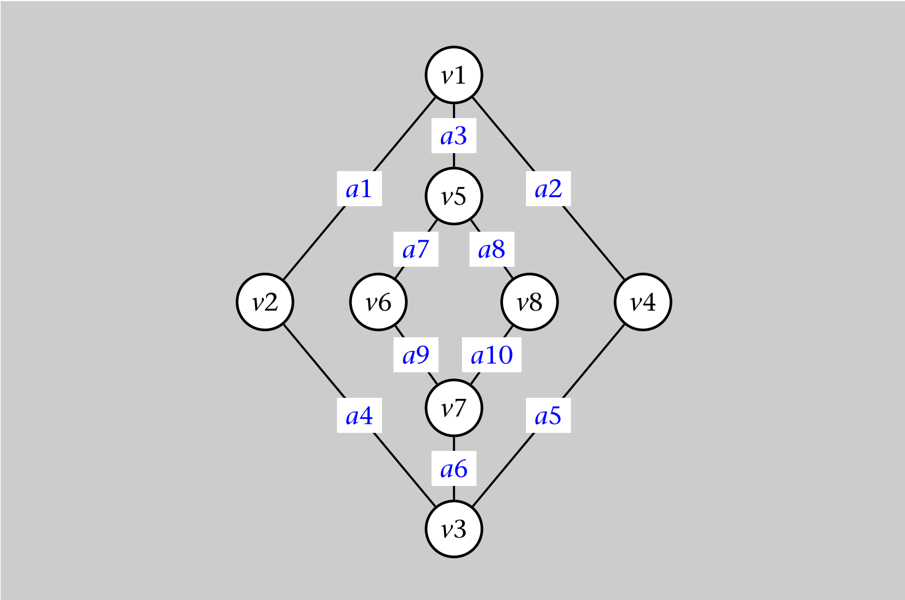
3. Sigui $G = (V,A)$ un graf r-regular, amb $|V|$ parell i $|A|$ senar. Demostreu que no és eulerià.

4. Considereu el recinte tancat amb habitacions que s'indica en la figura que segueix (per exemple, una sala d'exposicions). S'obren portes a través de les parets que comuniquen habitacions contigües. Es tracta d'analitzar si hi ha algun recorregut tancat que comenci i acabi a la mateixa habitació i que passi per totes les portes exactament una vegada.

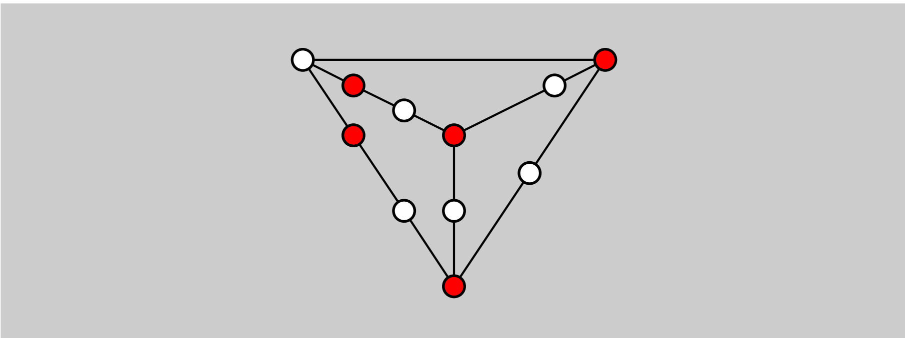


5. Demostreu que K_n és hamiltonià i calculeu el nombre de cicles hamiltonians que té, considerant que dos cicles són diferents si contenen almenys una aresta diferent.

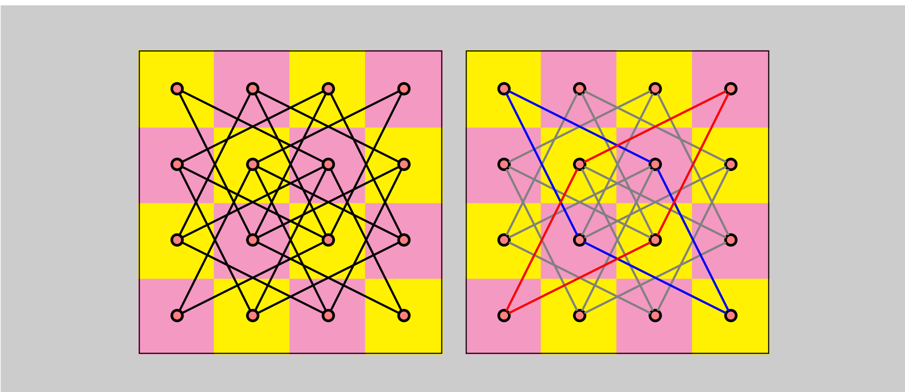
6. Considereu el graf de la figura adjunta. Estudieu si és hamiltonià per més d'un mètode.



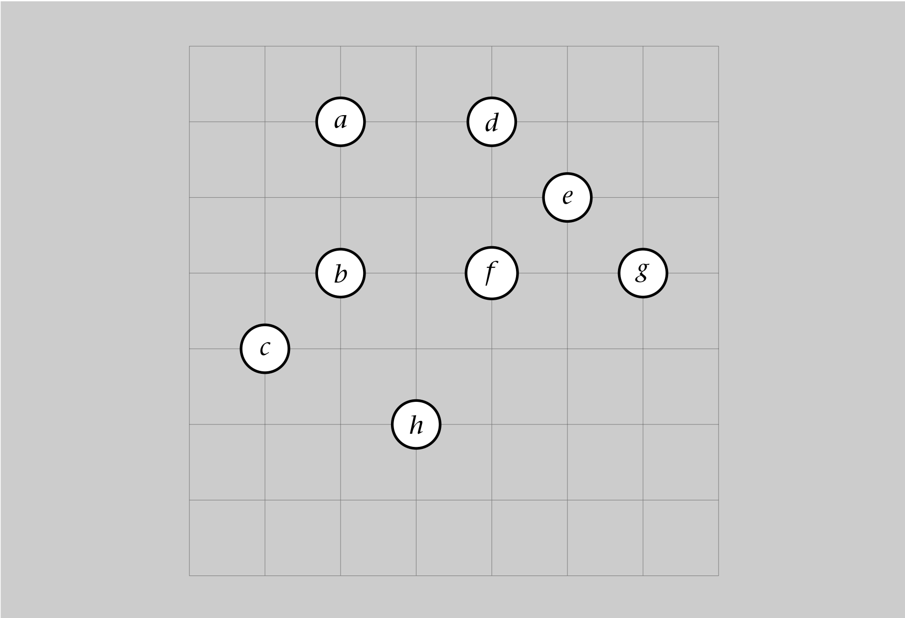
7. Estudieu si el graf de la figura que segueix és hamiltonià o no.



8. Proveu que el problema del recorregut del cavall en un tauler d'escacs de 4×4 no té solució (és a dir, que el graf corresponent no és hamiltonià). Estudieu també el problema amb un tauler de 3×3 i un de 5×5. Indicació: s'han d'incloure necessàriament les arestes adjacents als vèrtexs de grau 2.



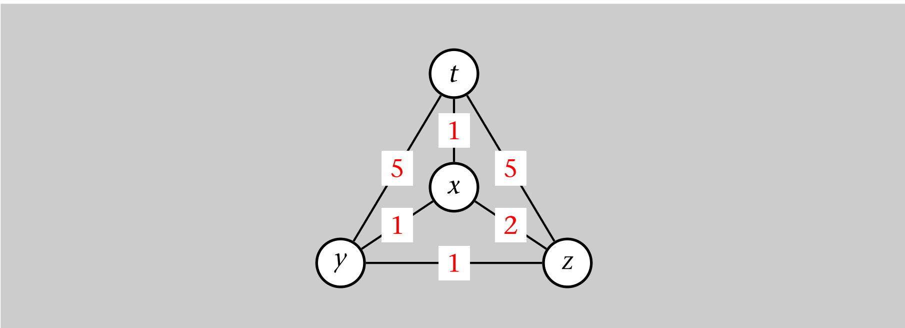
9. El gràfic següent mostra la xarxa de punts de repartiment que una empresa de correspondència internacional ha de cobrir per mitjà d'una línia aèria (cada unitat representa 1.000 quilòmetres):



Si el repartiment comença al punt *a* i ha de retornar al mateix punt sense passar dues vegades pel mateix aeroport, doneu, de manera aproximada, la ruta que ha de seguir i els quilòmetres que ha de fer l'avió per a lliurar tota la correspondència.

10. Considereu el problema *TSP generalitzat* en el qual, donat un graf (G,w) ponderat i connex d'ordre n, es vol cercar un recorregut tancat de pes mínim que passi per cada vèrtex (no necessàriament una única vegada).

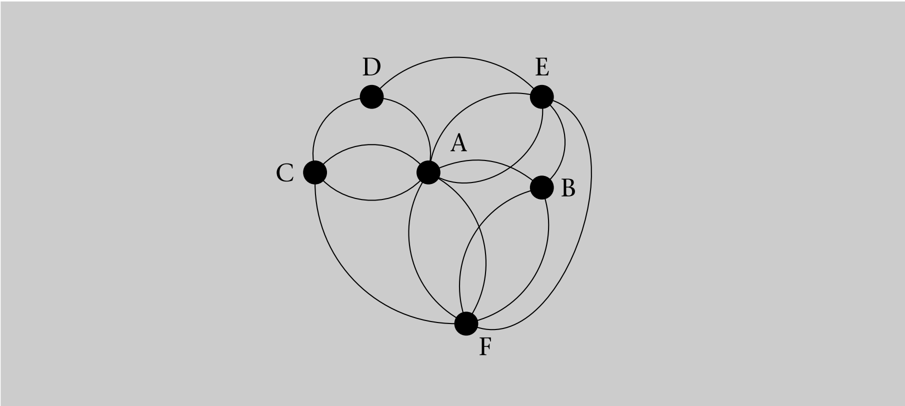
a) Comproveu que la solució al problema *TSP generalitzat* en el graf següent no coincideix amb la solució al problema *TSP*.



b) Proposeu un mètode amb el qual es pugui resoldre el problema *TSP generalitzat* a partir del problema *TSP amb desigualtat triangular*. Indicació: Considereu el graf de distàncies de G, és a dir, el graf que s'obté de G considerant les distàncies entre tots els parells de vèrtexs.

Solucionari

1. El multigraf corresponent a la versió alternativa del ponts de Königsberg és el següent.



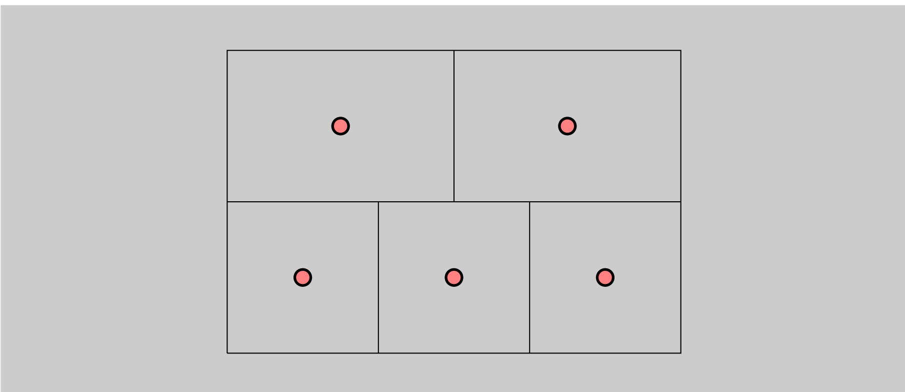
Com que hi ha vèrtexs de grau senar (el D i el E), no és possible fer un recorregut tancat que passi per tots els ponts sense repetició. En canvi, com que hi ha exactament dos vèrtexs de grau senar, sí que podem fer un recorregut que passi per tots els ponts sense repetició començant a D i acabant a E.

2. Si està representat per la matriu d'adjacències, el grau del vèrtex *i*-èsim és la suma de la fila *i*-èsima de la matriu. Per tant, el graf serà eulerià si, i només si, les sumes de totes les files són nombres parells. Un algorisme per a comprovar si el graf és eulerià hauria de calcular les sumes de totes les files i, si l'ordre de G és n, ens donarà un total de n^2 operacions de suma. En definitiva, tindrà un complexitat $O(n^2)$.

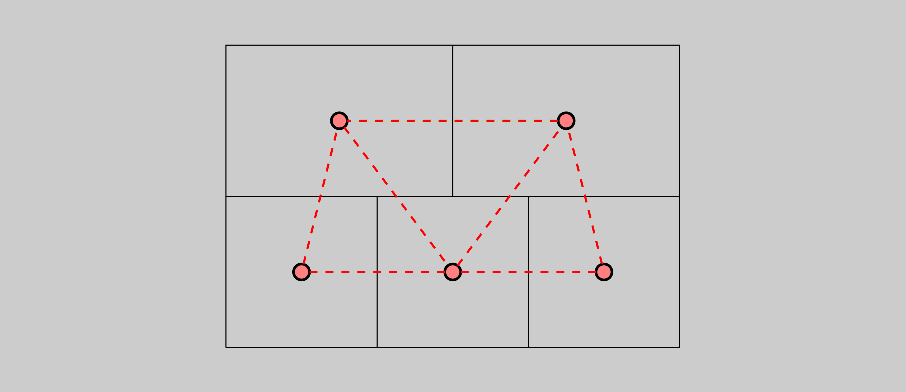
Si està emmagatzemat com una llista d'adjacències aleshores caldrà verificar si cada llista té un nombre parell d'elements. Si el graf té ordre n i mida m necessitarem fer $n+2m$ operacions, cosa que dóna una complexitat $O(n+m)$.

3. Apliquem el lema de les encaixades: $2|A| = \sum_{v\in V} g(v) = r|V|$. Si l'ordre del graf és parell, aleshores és $|V| = 2k$, per a algun k, i en conseqüència, substituint la igualtat anterior, resulta: $2|A| = 2rk$, d'on $|A| = rk$. Ara bé, essent senar la mida del graf, r també és senar i, en aplicació del teorema de caracterització de grafs eulerians (un graf és eulerià si, i només si, tots els vèrtexs són de grau parell), podem concloure que el graf no és eulerià.

4. Plantegem el problema en termes de teoria de grafs. Associem a cada habitació un vèrtex del graf que cal construir, com a l'esquema que segueix:



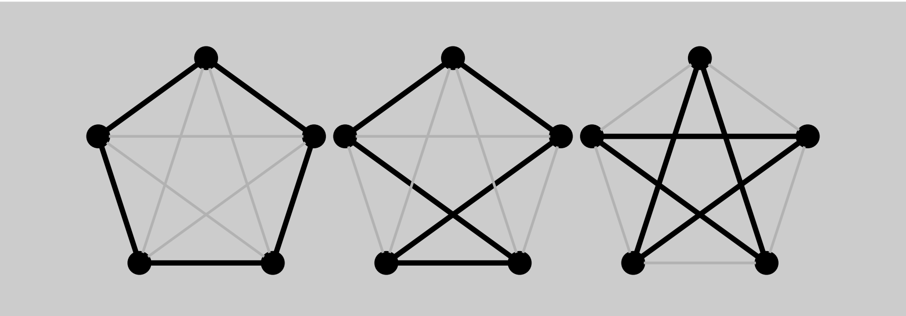
Y posteriorment representem per una aresta la comunicabilitat entre habitacions mitjançant una porta compartida, de manera que el graf associat al problema és el del gràfic següent, on les arestes s'han indicat amb línia discontínua:



I ara el problema inicial es planteja com un problema de recorreguts sobre el graf associat i, més concretament, es demana si el graf associat és o no eulerià. D'acord amb el teorema de caracterització de grafs eulerians que diu que un graf és eulerià si, i només si, tot vèrtex és de grau parell, resulta que el graf no és eulerià i, per tant, no és possible organitzar un recorregut com el que es demana.

Observem que, en canvi, atès que hi ha exactament dos vèrtexs de grau senar, és possible organitzar un recorregut que travessi totes les portes exactament una vegada i comenci i acabi a les habitacions que tenen un nombre senar de portes.

5. Com que tots els vèrtexs de K_n són adjacents qualsevol permutació dels n vèrtexs de K_n, $v_1, \ldots, v_n$, formarà un camí hamiltonià. Afegint l'aresta $\{v_n, v_1\}$ obtindrem un cicle hamiltonià a K_n. El gràfic següent mostra diversos cicles hamiltonians a K_5.



Per a comptar el nombre de cicles hamiltonians diferents a K_n podem fixar un vèrtex v i considerar tots els cicles que comencen a v. En total n'hi ha $(n-1)!$. D'aquests, però, la meitat tenen les mateixes arestes amb l'orientació canviada. Així, el nombre total de cicles hamiltonians diferents a K_n és $\frac{(n-1)!}{2}$.

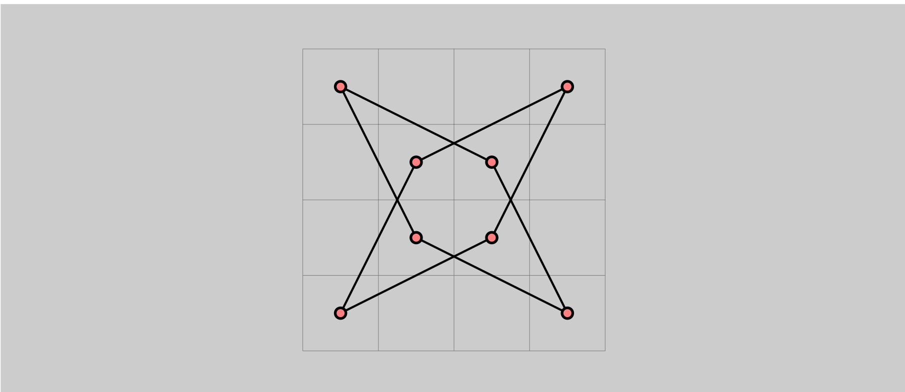
6. Mètode 1. Si hi hagués un cicle hauria de contenir tots els vèrtexs, cosa que significa que hauria de contenir totes les arestes dels vèrtexs de grau 2. Per tant, s'haurien d'incloure en un possible cicle, si existís, les arestes incidents als vèrtexs de grau 2, que serien en aquest cas: $a1,a2,a4,a5,a7,a8,a9,a10$. Ara bé, en un cicle hamiltonià, en la mesura que és un cicle, cada vèrtex només hi contribueix amb exactament dues arestes, cosa que significa que necessàriament s'han d'excloure les arestes $a3$ i $a6$ de l'hipotètic cicle. Això significa que el cicle hamiltonià hauria de ser finalment $C_4 \cup C_4$, cosa que és evidentment absurda.

Mètode 2. Busquem un conjunt de vèrtexs l'eliminació dels quals produeixi un nombre de components connexos estrictament superior al nombre de vèrtexs eliminats; aleshores podrem concloure que no hi pot haver cap cicle hamiltonià. Hi ha més d'una possibilitat: un d'aquests grups de vèrtexs està format pels vèrtexs $v5,v7$, dos vèrtexs l'eliminació dels quals produeix tres components connexos; l'altre grup està format pels vèrtexs $v1,v3$.

7. Aquest és un exemple de graf $G = (V,A)$ bipartit, com es pot veure ja directament sobre l'esquema donat: en efecte, si indiquem per V_1 el conjunt dels vèrtexs blancs i per V_2 el conjunt dels vèrtexs negres, aleshores el graf és (V_1,V_2)-bipartit. Ara bé, el nombre de vèrtexs negres és 5 i el nombre de vèrtexs blancs és 6. En conseqüència, en aplicació del criteri 4 del teorema 4, el graf no és hamiltonià.

8. En termes de grafs podem definir el problema de la manera següent: comprovar si el graf $G = (V,A)$, definit per $V = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq 5\}$ on les arestes estan formades per parells $\{(i,j),(i',j')\}$ amb $|i-i'| = 1$ i $|j-j'| = 2$ o $|i-i'| = 2$ i $|j-j'| = 1$, és hamiltonià o no.

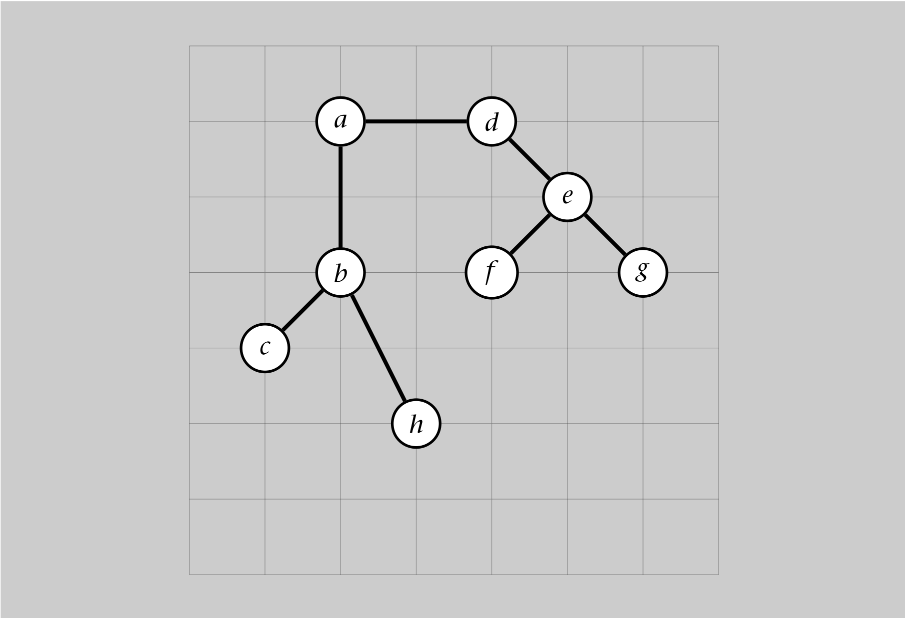
Si el graf fos hamiltonià, les arestes incidents als quatre vèrtexs de les cantonades, que tenen grau 2, haurien de ser al cicle. Aquestes arestes determinen dos cicles disjunts (vegeu el gràfic), la qual cosa impedeix que formin part del mateix cicle hamiltonià.



De manera semblant es pot comprovar que el tauler de 3×3 i el de 5×5 tampoc no són hamiltonians.

9. El mapa proposat es pot modelitzar com un graf ponderat i connex G que compleix la desigualtat triangular. Utilitzarem l'algorisme *TSP-aproximat* per a obtenir una bona aproximació al cicle hamiltonià òptim.

- Començant pel vèrtex a, apliquem l'algorisme de Prim per a obtenir un arbre generador minimal T:

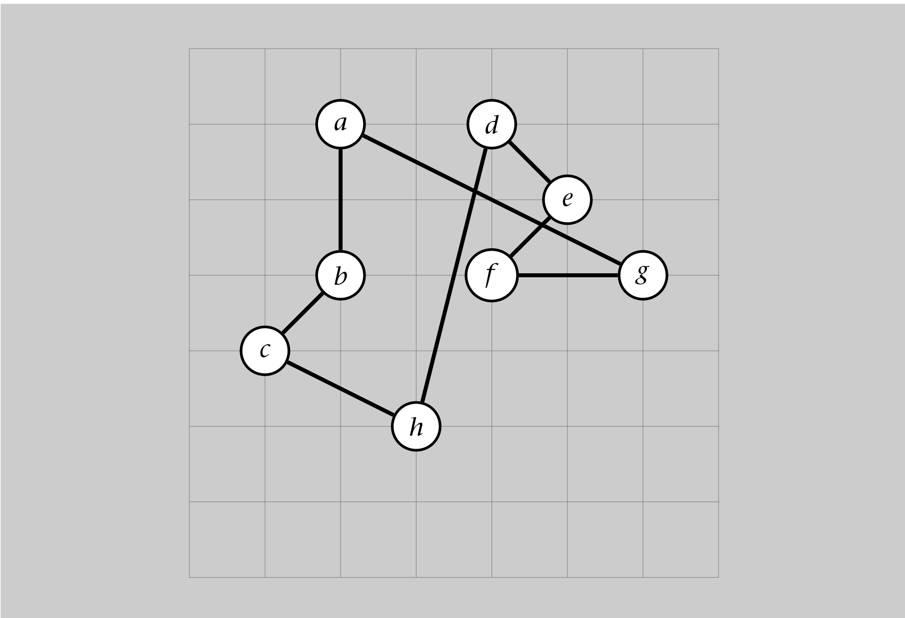


- El recorregut en preordre d'aquest arbre començant pel vèrtex a serà

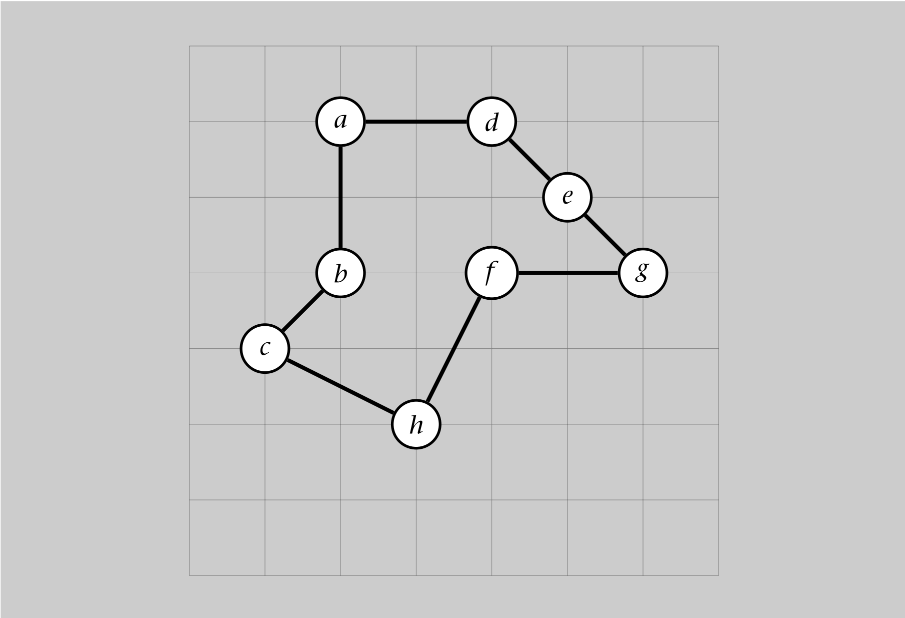
$$P = \{a,b,c,h,d,e,f,g\}.$$

- A partir de P construïm el cicle hamiltonià $H = \{a,b,c,h,d,e,f,g,a\}$ que té una longitud total $w(H) = 19{,}07$.

Així, doncs, l'avió haurà de recórrer 19.070 quilòmetres seguint la ruta següent.



Aquesta, però, no és la ruta òptima. Podríem millorar-la si seguíssim la ruta següent ja que només hauria de fer 14.715 quilòmetres.



10. Aquest exercici relaciona tres problemes aparentment diferents: *TSP*, *TSP generalitzat* i *TSP amb desigualtat triangular*.

1) La solució al problema *TSP* per a aquest graf vindria donada pel cicle $H_1 = \{t,x,y,z,t\}$ amb una longitud total de 8. En canvi, la solució al problema *TSP generalitzat* serà el circuit $H_2 = \{t,x,y,z,x,t\}$ amb una longitud de 6. Observem que aquest graf no satisfà la desigualtat triangular.

2) Considerem el graf de distàncies del graf G. Aquest graf serà K_4 amb el mateix conjunt de vèrtexs de G i amb totes les arestes possibles. El pes de l'aresta $\{u,v\}$ serà $w(u,v) = d(u,v)$ a G. Podem calcular la matriu $D = (d_{i,j})$ de distàncies del graf G a partir de la seva matriu de pesos $W = (w_{i,j})$ aplicant l'algorisme de Floyd.

A partir de la matriu W de pesos:

	x	y	z	t
x	0	1	2	1
y	1	0	1	5
z	2	1	0	5
t	1	5	5	0

obtenim la matriu de distàncies D aplicant l'algorisme de Floyd:

	x	y	z	t
x	0	1	2	1
y	1	0	1	2
z	2	1	0	3
t	1	2	3	0

El graf ponderat (K_4,d) obtingut a partir de la matriu D és un graf que satisfà la desigualtat triangular. Per tant, podem cercar la solució al problema *TSP amb desigualtat triangular* en aquest graf: $H_3 = \{t,y,z,x,t\}$ amb una longitud igual a 6.

Aquest exercici mostra que és possible reduir el problema *TSP generalitzat* al problema *TSP amb desigualtat triangular* i que la solució a aquest dóna una solució al primer. També mostra que es tan difícil resoldre el primer com el segon, és a dir, juntament amb el *TSP*, són problemes difícils.

Bibliografia

Biggs, N. L. (1994). *Matemática Discreta*. (1a. edición, traducción de M. Noy). Barcelona: Ediciones Vicens Vives.

Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Stein, C. (2001). *Introduction to Algorithms*. Cambridge: MIT Press.

Garey, M. R.; Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York: W.H. Freeman and Company.

Skiena, S. S. (1998). *The Algorithm Design Manual*. Berlín: Springer-Verlag