

# Teoria de grafs

## M1 - FIB

Continguts:

1. Conceptes bàsics de grafs
2. Recorreguts, connexió i distància
3. Grafs eulerians i grafs hamiltonians
4. Arbres

Anna de Mier

Montserrat Maureso

Departament de Matemàtiques

Febrer 2019

# Tema 1

## Conceptes bàsics de grafs

1. Primeres definicions
2. Graus
3. Isomorfisme de grafs
4. Tipus de grafs
5. Subgrafs

# 1. Primeres definicions

Un **graf**  $G$  és un parell  $(V, A)$  amb  $V$  un conjunt finit no buit i  $A$  un conjunt de parells no ordenats d'elements diferents de  $V$ , és a dir,  $A \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$

S'anomena

**vèrtexs** als elements de  $V$

**arestes** als elements de  $A$

**ordre** de  $G$  al nombre de vèrtexs,  $|V|$

**mida** de  $G$  al nombre d'arestes,  $|A|$

Siguin  $u, v \in V$  vèrtexs i  $a, e \in A$  arestes de  $G$ , direm que:

$u$  i  $v$  són **adjacents** o **veïns** si  $\{u, v\} \in A$ , es denota  $u \sim v$  o  $uv \in A$

$u$  i  $v$  són **independents** si no són adjacents, es denota  $u \not\sim v$  o  $uv \notin A$

$u$  i  $e$  són **incidents** si  $e = \{u, w\}$ , per algun  $w \in V$

$e$  i  $a$  són **incidents** si tenen un vèrtex en comú, altrament són **independents**

**grau** de  $u$  és el nombre de vèrtexs adjacents a  $u$ ,  $g(u) = \#\{v \in V \mid u \sim v\}$

Observació: Si  $n = |V|$  i  $m = |A|$ , aleshores  $0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

## Representació gràfica d'un graf $G = (V, A)$

Els vèrtexs es representen mitjançant un punt i les arestes mitjançant una corba que uneix els dos punts que representen els vèrtexs incidents a l'aresta

## Llista d'adjacències (o taula d'adjacències) d'un graf $G = (V, A)$

Siguin  $v_1, v_2, \dots, v_n$  els vèrtexs de  $G$ . La llista d'adjacències de  $G$  és una llista de longitud  $n$  on a la posició  $i$  hi ha el conjunt dels vèrtexs adjacents a  $v_i$ , per a tot  $i \in [n]$

Sigui  $G = (V, A)$  un graf d'ordre  $n$  i mida  $m$  amb  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

**Matriu d'adjacència de  $G$**  és la matriu  $M_A = M_A(G)$  de tipus  $n \times n$ , tal que l'element  $m_{ij}$  de la fila  $i$  columna  $j$  és

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \sim v_j \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

- $M_A$  és binària, amb zeros a la diagonal, i simètrica
- El nombre d'uns de la fila  $i$  és el grau de  $v_i$
- No és única, depèn de l'ordenació que s'escull al conjunt de vèrtexs

**Matriu d'incidència de  $G$**  és la matriu  $M_I = M_I(G)$  de tipus  $n \times m$ , tal que l'element  $b_{ij}$  de la fila  $i$  columna  $j$  és

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ i } a_j \text{ són incidents} \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

- $M_I$  és binària. El nombre de uns de la fila  $i$  és el grau de  $v_i$  i a cada columna hi ha exactament dos uns. No és única

Variants de la definició de graf:

- ▷ **Multigraf**: graf que admet arestes múltiples, és a dir, dos vèrtexs adjacents per més d'una aresta
- ▷ **Pseudograf**: graf que admet arestes múltiples i llaços (aresta que uneix un vèrtex amb ell mateix)
- ▷ **Graf dirigit**: graf on les arestes estan orientades

## 2. Graus

Sigui  $G = (V, A)$  un graf d'ordre  $n$  i  $v \in V$  un vèrtex, anomenem

grau de  $v$ ,  $g(v)$ : al nombre d'arestes incidents a  $v$

grau mínim de  $G$ ,  $\delta(G)$ : al mínim dels graus dels vèrtexs

grau màxim de  $G$ ,  $\Delta(G)$ : al màxim dels graus dels vèrtexs

seqüència de graus de  $G$ : a la successió dels graus dels vèrtexs de  $G$  ordenats de forma decreixent

graf regular: al graf tal que  $\delta(G) = \Delta(G)$ , és a dir, tots els vèrtexs tenen el mateix grau

Remarques:

$$- 0 \leq g(v) \leq n - 1$$

- Tot graf d'ordre  $\geq 2$  té almenys dos vèrtexs amb el mateix grau

**Lema de les encaixades:**  $2|A| = \sum_{v \in V} g(v)$

**Corol·lari:** Tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar

Una seqüència d'enters decreixent és **gràfica** si hi ha algun graf que la té com a seqüència de graus

### 3. Isomorfisme de grafs

Siguin  $G = (V, A)$  i  $G' = (V', A')$  dos grafs, direm que

- ▷  $G$  i  $G'$  són **grafs iguals**,  $G = G'$ , si  $V = V'$  i  $A = A'$
- ▷  $G$  i  $G'$  són **grafs isomorfs**,  $G \cong G'$ , si existeix una aplicació bijectiva  $f : V \rightarrow V'$  tal que, per a tot  $u, v \in V$ ,

$$u \sim v \Leftrightarrow f(u) \sim f(v),$$

a l'aplicació  $f$  se l'anomena **isomorfisme** de  $G$  en  $G'$

#### Remarques:

- Un vèrtex i la seva imatge per un isomorfisme tenen el mateix grau
- Dos grafs isomorfs tenen la mateixa mida i el mateix ordre. El recíproc és fals
- Dos grafs isomorfs tenen la mateixa seqüència de graus. El recíproc és fals
- **Ser isomorfs** és una relació d'equivalència



## 4. Tipus de grafs

Siguin  $n$  un enter positiu i  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Graf nul d'ordre  $n$ ,  $N_n$ : és un graf d'ordre  $n$  i mida 0

Graf trivial:  $N_1$

Graf complet d'ordre  $n$ ,  $K_n$ : és un graf d'ordre  $n$  amb totes les arestes possibles

– Mida de  $K_n = \frac{n(n-1)}{2}$

Graf trajecte d'ordre  $n$ ,  $T_n = (V, A)$ : és un graf d'ordre  $n$  i mida  $n - 1$  amb conjunt d'arestes  $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n\}$

–  $\delta(T_n) = 1$  i  $\Delta(T_n) = 2$

Graf cicle d'ordre  $n$ ,  $n \geq 3$ ,  $C_n = (V, A)$ , amb  $n \geq 3$ : és un graf d'ordre  $n$  i mida  $n$  amb conjunt d'arestes  $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$

–  $\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$

Graf roda d'ordre  $n$ ,  $n \geq 4$ ,  $W_n = (V, A)$ : és un graf d'ordre  $n$  i mida  $2n - 2$  tal que  $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_1\} \cup \{x_nx_1, x_nx_2, \dots, x_nx_{n-1}\}$

Siguin  $r$  i  $s$  enters positius

**Graf  $r$ -regular** d'ordre  $n$ : és un graf regular on  $r$  és el grau dels vèrtexs

- El graf complet  $K_n$  és un graf  $(n - 1)$ -regular
- El graf cicle  $C_n$  és un graf 2-regular
- Si  $G = (V, A)$  és un graf  $r$ -regular:  $2|A| = r|V|$

**Graf bipartit**: és un graf  $G = (V, A)$  tal que hi ha dos subconjunts no buits  $V_1$  i  $V_2$  de  $V$  tals que  $V = V_1 \cup V_2$  i  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , i per a tota aresta  $uv \in A$  es té que  $u \in V_1$  i  $v \in V_2$ , o viceversa.

Anomenem **parts estables** del graf a  $V_1$  i  $V_2$

$$- \sum_{v \in V_1} g(v) = \sum_{v \in V_2} g(v) = |A|$$

**Graf bipartit complet**,  $K_{r,s} = (V, A)$ : graf bipartit amb parts estables  $V_1$  i  $V_2$  tals que  $|V_1| = r$  i  $|V_2| = s$  i tots els vèrtexs de  $V_1$  són adjacents a tots els vèrtexs de  $V_2$ . És a dir,  $A = \{uv | u \in V_1, v \in V_2\}$

- L'ordre de  $K_{r,s}$  és  $r + s$  i la mida és  $rs$
- El graf  $K_{1,s}$  se l'anomena **graf estrella**

## 5. Subgrafs

Sigui  $G = (V, A)$  un graf

Subgraf de  $G$ ,  $G' = (V', A')$ : és un graf amb  $V' \subseteq V$  i  $A' \subseteq A$

Subgraf generador de  $G$ ,  $G' = (V', A')$ : és un subgraf tal que  $V' = V$

Subgraf induït (o generat) per  $S \subseteq V$ : és el graf  $G[S] = (S, A')$  tal que  $A' = \{uv \in A : u, v \in S\}$

## 5.1. Grafs derivats d'un graf

Sigui  $G = (V, A)$  un graf d'ordre  $n$  i mida  $m$

**Graf complementari de  $G$** ,  $G^c = (V^c, A^c)$ : és el graf amb conjunt de vèrtexs  $V^c = V$  i conjunt d'arestes  $A^c = \{uv \mid u, v \in V \text{ i } uv \notin A\}$

- Ordre de  $G^c = \text{Ordre de } G$
- Mida de  $G^c = \frac{n(n-1)}{2} - |A|$
- $(G^c)^c = G$
- Sigui  $H$  un graf. Aleshores:  $G \cong H \Leftrightarrow G^c \cong H^c$

El graf  $G$  és **autocomplementari** si  $G \cong G^c$

Graf que s'obté per la **supressió dels vèrtexs de  $S$** ,  $S \subset V$ : graf denotat per  $G - S$  amb conjunt de vèrtexs  $V \setminus S$  i arestes les de  $G$  que no són incidents a cap vèrtex de  $S$ . En cas que  $S = \{v\}$ , el denotem per  $G - v$

- Ordre de  $(G - u) = n - 1$ . Mida de  $(G - u) = m - g(u)$

Graf que s'obté per la **supressió de les arestes de  $S$** ,  $S \subseteq A$ : graf denotat per  **$G - S$**  amb conjunt de vèrtexs  $V$  i conjunt d'arestes  $A \setminus S$ . En cas que  $S = \{a\}$ , el denotem per  **$G - a$**

– Ordre de  $(G - a) = n$ . Mida de  $(G - a) = m - 1$

Graf que s'obté per l'**addició d'una aresta  $a \notin A$** : graf denotat per  **$G + a$**  amb conjunt de vèrtexs  $V$  i conjunt d'arestes  $A' = A \cup \{a\}$

– Ordre de  $(G + a) = n$ . Mida de  $(G + a) = m + 1$

## 5.2. Operacions amb grafs

Siguin  $G = (V, A)$  i  $G' = (V', A')$  dos grafs

**Graf reunió de  $G$  i  $G'$ ,  $G \cup G'$ :** graf amb conjunt de vèrtexs  $V \cup V'$  i conjunt d'arestes  $A \cup A'$

– Si  $V \cap V' = \emptyset$ , l'ordre de  $G \cup G'$  és  $|V| + |V'|$  i la mida  $|A| + |A'|$

**Graf producte  $G \times G'$ :** graf amb conjunt de vèrtexs  $V \times V'$  i les adjacències  
 $(u, u') \sim (v, v') \Leftrightarrow (uv \in A \text{ i } u' = v') \text{ o } (u = v \text{ i } u'v' \in A')$

– L'ordre de  $G \times G'$  és  $|V| |V'|$  i la mida és  $|V| |A'| + |V'| |A|$

## Tema 2

### Recorreguts, connexió i distància

1. Recorreguts
2. Grafs connexos
3. Vèrtexs de tall i arestes pont
4. Distància
5. Caracterització de grafs bipartits

# 1. Recorreguts

Sigui  $G = (V, A)$  un graf, i siguin  $u, v \in V$

Un recorregut de  $u$  a  $v$  o un  $u$ - $v$  recorregut de longitud  $k$  és una seqüència de vèrtexs i arestes del graf

$$\mathcal{R} : u_0 a_1 u_1 a_2 u_2 \dots u_{k-1} a_k u_k$$

tals que  $u_0 = u$ ,  $u_k = v$  i  $a_i = u_{i-1}u_i \in A$ , per a tot  $i \in [k]$ . En general, el denotarem per  $u_0 u_1 u_2 \dots u_{k-1} u_k$

Direm que el recorregut  $\mathcal{R}$  passa pels vèrtexs  $u_i$  i passa per les arestes  $a_i = u_{i-1}u_i$

Si  $u = v$  direm que és un recorregut tancat, i si  $u \neq v$  direm que és un recorregut obert

Un vèrtex es considera un recorregut de longitud zero



Tipus de recorreguts: un  $u$ - $v$  recorregut és un

- **camí** si tots els vèrtexs són diferents
- **cicle** si és un recorregut tancat de longitud  $\geq 3$  amb tots els vèrtexs diferents (llevat del primer i l'últim, que coincidiran per ser tancat)

Un vèrtex es considera un **camí de longitud zero**

Remarca Un cicle passa per dos vèrtexs  $u$  i  $v$  si, i només si, hi ha dos  $u$ - $v$  camins que no tenen cap vèrtex en comú llevat de  $u$  i de  $v$

Un graf sense cicles s'anomena **graf acíclic**

### **Proposició 1**

Siguin  $G = (V, A)$  un graf i  $u, v$  vèrtexs diferents. Si a  $G$  hi ha un  $u$ - $v$  recorregut de longitud  $k$ , aleshores hi ha un  $u$ - $v$  camí de longitud  $\leq k$

### **Proposició 2**

Siguin  $G = (V, A)$  un graf i  $u, v$  vèrtexs diferents. Si  $G$  té dos  $u$ - $v$  camins diferents, llavors  $G$  conté un cicle

## 2. Grafs connexos

Un graf  $G = (V, A)$  direm que és **connex** si per a tot parell de vèrtexs diferents  $u$  i  $v$  hi ha un  $u-v$  camí. Altrament direm que el graf és **no connex**

Remarca Si  $G = (V, A)$  és un graf connex d'ordre més gran que 1, llavors  $g(v) \geq 1$ , per a tot  $v \in V$

Definim la relació **R** a  $V$ : per a tot  $x, y \in V$

$$xRy \Leftrightarrow \text{existeix un } x - y \text{ camí a } G$$

**R** és una **relació d'equivalència**:

- Reflexiva,  $xRx$ : existeix un  $x-x$  camí de longitud zero
- Simètrica: Si  $xRy$ , llavors  $yRx$ : tot  $x-y$  camí recorregut en sentit invers és un  $y-x$  camí
- Transitiva: Si  $xRy$  i  $yRz$ , llavors  $xRz$ . Amb un  $x-y$  camí  $xx_1 \dots x_ny$  i un  $y-z$  camí  $yy_1 \dots y_mz$ , es construeix un  $x-z$  recorregut  $xx_1 \dots x_nyy_1 \dots y_mz$ , per tant, hi ha un  $x-z$  camí

Si  $G = (V, A)$  és un graf no connex hi ha una partició de  $V$  en  $k > 1$  subconjunts  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , les classes d'equivalència de la relació **R**. Per tant, per tot  $1 \leq i, j \leq k$ ,

1.  $V_i \neq \emptyset$ ,  $V_i \cap V_j = \emptyset$  per a tot  $i \neq j$ , i  $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$
2.  $G[V_i]$  (el subgraf induït per  $V_i$ ) és connex
3. No hi ha cap camí entre vèrtexs de  $G[V_i]$  i els de  $G[V_j]$ , amb  $i \neq j$
4.  $G = \bigcup_{i=1}^k G[V_i]$

Anomenem **components connexos** del graf  $G$  als subgrafs  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$

### Remarca

Sigui  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ , on  $G_i$  són els components connexos de  $G$ , llavors

$$\begin{aligned} \text{ordre } G &= \text{ordre } G_1 + \dots + \text{ordre } G_k \\ \text{mida } G &= \text{mida } G_1 + \dots + \text{mida } G_k \end{aligned}$$

### Proposició 3

Un graf és 2-regular si, i només si, els seus components connexos són cicles

### Proposició 4

Sigui  $G = (V, A)$  un graf connex i siguin  $e = xy \in A$  i  $u \in V$ . Aleshores

1. el graf  $G - e$  té com a molt 2 components connexos; si en té 2, a un hi ha el vèrtex  $x$  i a l'altre el vèrtex  $y$
2. el graf  $G - u$  té com a molt  $g(u)$  components connexos

### Proposició 5

Tot graf connex d'ordre  $n$  té com a mínim  $n - 1$  arestes

## 2.1 Algoritme DFS: Cerca en profunditat (Depth-first search)

```
Llista DFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf G i un vèrtex v (Suposarem que els vèrtexs del graf són enters)
/* Post: la llista dels vèrtexs de G que pertanyen al mateix component connex que v
{
    Pila P;
    P.empilar(v);
    Llista W;
    W.afegir(v);
    int x;
    while (not P.es_buida) {
        x=P.cim;
        if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
            P.empilar(y);
            W.afegir(y);
        }
        else {
            P.desempilar;
        }
    }
    return W;
}
```

**Teorema 6** Sigui  $G = (V, A)$  un graf i  $v$  un vèrtex de  $G$ . El subgraf  $G[W]$  induït pels vèrtexs de  $G$  visitats emprant l'algorisme DFS és el component connex de  $G$  que conté  $v$

### 3. Vèrtexs de tall i arestes pont

Sigui  $G = (V, A)$  un graf. Siguin  $v \in V$  i  $a \in A$ , direm que

- $v$  és un **vèrtex de tall** o **vèrtex d'articulació** si  $G - v$  té més components connexos que  $G$
- $a$  és una **aresta pont** si  $G - a$  té més components connexos que  $G$
- $G$  és un graf **2-connex** si és connex, té almenys 3 vèrtexs i no té vèrtexs de tall

#### Remarques

1. Si  $G$  és connex i  $u$  és un vèrtex de tall, llavors  $G - u$  és un graf no connex amb com a molt  $g(u)$  components connexos
2. Els vèrtexs de grau 1 no són vèrtex de tall
3. Si  $G$  és connex i  $a$  és una aresta pont, llavors  $G - a$  és un graf no connex amb exactament 2 components connexos

### **Teorema 7** Caracterització dels vèrtexs de tall

Sigui  $G = (V, A)$  un graf connex. Un vèrtex  $u$  de  $G$  és de tall si, i només si, existeixen un parell de vèrtexs  $x, y$  diferents d' $u$  tals que tot  $x$ - $y$  camí passa per  $u$

### **Teorema 8** Caracterització de les arestes pont

Sigui  $G = (V, A)$  un graf connex i  $a = uv$  una aresta de  $G$ . Són equivalents:

- (a)  $a$  és una aresta pont
- (b) existeixen un parell de vèrtexs  $x, y$  tals que tot  $x$ - $y$  camí passa per  $a$
- (c) per l'aresta  $a$  no passa cap cicle

### Remarques

1. Un graf pot tenir vèrtexs de tall però cap aresta pont
2. Sigui  $a = uv$  una aresta pont. Si  $g(u) = 1$ ,  $u$  no és un vèrtex de tall;  
si  $g(u) \geq 2$ , el vèrtex  $u$  és de tall
3. L'únic graf connex amb una aresta pont i cap vèrtex de tall és el  $K_2$

## 4. Distància

Siguin  $G = (V, A)$  un graf i  $u, v$  vèrtexs de  $G$

- Si  $u, v$  són al mateix component connex, definim **distància entre  $u$  i  $v$** ,  $d(u, v)$ , com el valor mínim entre les longituds de tots els  $u$ - $v$  camins. **Altrament** direm que la distància és infinit
- **Excentricitat del vèrtex  $u$** ,  $e(u)$ : la distància més gran entre  $u$  i qualsevol altre vèrtex de  $G$ , és a dir,  $e(u) = \max\{d(u, v) | v \in V\}$
- **Diàmetre de  $G$** ,  $D(G)$ : la màxima de les distàncies entre els vèrtexs de  $G$ , és a dir,

$$D(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V\} = \max\{e(u) | u \in V\}$$

Remarca Si  $xy \in A$ , llavors  $d(x, y) = 1$

En un graf  $G = (V, A)$  (connex) per a tots  $u, v, z$  vèrtexs es satisfà:

1.  $d(u, v) \geq 0$ , i  $d(u, v) = 0$  si, i només si,  $u = v$
2.  $d(u, v) = d(v, u)$
3.  $d(u, v) + d(v, z) \geq d(u, z)$  (desigualtat triangular)



## 4.1 Algorisme BFS: Cerca en amplada (Breadth First Search)

```
vector BFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf connex G d'ordre n i un vertex v (Suposarem que els vèrtexs del graf són enters)
/* Post: un vector D tal que D[x]=d(v,x)
{
    Cua C;
    C.demanar_torn(v);
    Llista W;
    W.afegir(v);
    vector<int> D(n);
    D[v]=0;
    int x;
    while (not C.es_buida) {
        x=C.primer;
        if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
            C.demanar_torn(y);
            W.afegir(y);
            D[y]=D[x]+1;
        }
        else {
            C.avançar;
        }
    }
    return D;
}
```

**Teorema 9** Sigui  $G = (V, A)$  un graf i  $v \in V$ . El vector  $D$  donat per l'algorisme BFS emmagatzema la distància del vèrtex  $v$  a qualsevol altre vèrtex del graf

## 5. Caracterització dels grafs bipartits

### Lema 10

Sigui  $G = (V, A)$  un graf

1. Si a  $G$  hi ha un recorregut tancat de longitud senar, a  $G$  hi ha un cicle de longitud senar
2. L'existència de recorreguts tancats de longitud parella a  $G$  no assegura la existència de cicles a  $G$ .

### Teorema 11 Caracterització dels grafs bipartits

Un graf d'ordre  $\geq 2$  és bipartit si, i només si, no té cicles de longitud senar

## **Tema 3**

### **Grafs eulerians i grafs hamiltonians**

1. Grafs eulerians
2. Grafs hamiltonians

# 1. Grafs eulerians

Un recorregut d'un graf s'anomena **senderó** si és obert i no repeteix arestes, i s'anomena **circuit** si és tancat, no trivial i no repeteix arestes

Sigui  $G$  un graf connex, s'anomena

- **senderó eulerià** a un senderó que passa per totes les arestes de  $G$
- **circuit eulerià** a un circuit que passa per totes les arestes de  $G$
- **graf eulerià** a  $G$  si té un circuit eulerià

## **Teorema** Caracterització dels grafs eulerians

Sigui  $G$  un graf connex no trivial. Aleshores,

$G$  és eulerià si, i només si, tots els vèrtexs tenen grau parell

## **Corol·lari**

Un graf connex té un senderó eulerià si, i només si, té exactament dos vèrtexs de grau senar

En aquest cas, el senderó eulerià comença en un vèrtex de grau senar i acaba en l'altre vèrtex de grau senar

## 2. Grafs hamiltonians

Sigui  $G$  un graf connex, s'anomena

- **camí hamiltonià** a un camí no tancat que passa per tots els vèrtexs de  $G$
- **cicle hamiltonià** a un cicle que passa per tots els vèrtexs de  $G$
- **graf hamiltonià** a  $G$  si té un cicle hamiltonià

### Condicions necessàries

Sigui  $G = (V, A)$  un graf hamiltonià d'ordre  $n$ , aleshores

- (1)  $g(v) \geq 2$ , per a tot  $v \in V$
- (2) si  $S \subset V$  i  $k = |S|$ , el graf  $G - S$  té com a molt  $k$  components connexos

### Condicions suficients

**Teorema de Ore**  $G = (V, A)$  graf d'ordre  $n \geq 3$  tal que per a tot  $u, v \in V$  diferents i no adjacents es té  $g(u) + g(v) \geq n$ . Aleshores,  $G$  és un graf hamiltonià

**Teorema de Dirac**  $G = (V, A)$  graf d'ordre  $n \geq 3$  tal que  $g(u) \geq n/2$ , per a tot  $u \in V$ . Aleshores,  $G$  és hamiltonià

## **Tema 4**

### **Arbres**

1. Arbres i teorema de caracterització
2. Arbres generadors
3. Enumeració d'arbres

# 1. Arbres i teorema de caracterització

Anomenarem

- arbre a un graf connex i acíclic
- bosc a un graf acíclic
- fulla a tot vèrtex d'un arbre o d'un bosc que tingui grau 1

Observació: Els components connexos d'un bosc són arbres

Remarques: Siguin  $T = (V, A)$  un arbre,  $a$  una aresta i  $u$  un vèrtex de  $T$ .

Llavors

1.  $T$  conté almenys una fulla
2.  $a$  és aresta pont
3.  $T - a$  és un bosc de 2 components connexos
4. si  $g(u) \geq 2$ ,  $u$  és un vèrtex de tall
5.  $T - u$  és un bosc de  $g(u)$  components connexos
6. si  $u$  és una fulla, aleshores  $T - u$  és un arbre

### Proposició 1

Tot graf acíclic d'ordre  $n$  té mida com a molt  $n - 1$ .

### Teorema 2 Caracterització d'arbres

Sigui  $T = (V, A)$  un graf d'ordre  $n$  i mida  $m$ . Aleshores, són equivalents

- (a)  $T$  és un arbre
- (b)  $T$  és acíclic i  $m = n - 1$
- (c)  $T$  és connex i  $m = n - 1$
- (d)  $T$  és connex i tota aresta és pont
- (e) per cada parell de vèrtexs  $u$  i  $v$  hi ha un únic  $u$ - $v$  camí a  $T$
- (f)  $T$  és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle

### Corol·lari 3

Un bosc  $G$  d'ordre  $n$  i  $k$  components connexos té mida  $n - k$

### Corol·lari 4

Si  $T$  és un arbre d'ordre  $n \geq 2$ ,  $T$  té almenys dos vèrtexs de grau 1



## 2. Arbres generadors

Anomenarem **arbres generadors** (o **d'expansió**) als subgrafs d'un graf que són subgrafs generadors i a més arbres

### **Teorema 5**

$G = (V, A)$  és un graf connex si, i només si,  $G$  té un arbre generador

## 2.1 Algoritme DFS per a obtenir arbres generadors

```
arbre DFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf G i un vertex v
/* Post: un arbre generador del component connex de G al que pertany v
{
  Pila P;
  P.empilar(v);
  Llista W;
  W.afegir(v);
  Llista B;
  int x;
  while (not P.es_buida) {
    x=P.cim;
    if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
      P.empilar(y);
      W.afegir(y);
      B.afegir(xy);
    }
    else {
      P.desmpilar;
    }
  }
  return (W,B);
}
```

### **Teorema 6**

$T = (W, B)$  és un arbre generador del component connex de  $G$  que conté  $v$

## 2.2 Algoritme BFS per a obtenir arbres generadors

```
arbre BFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf connex G d'ordre n i un vertex v
/* Post: un arbre generador del component connex de G al que pertany v
{
  Cua C;
  C.demanar_torn(v);
  Llista W;
  W.afegir(v);
  Llista B;
  int x;
  while (not C.es_buida) {
    x=C.primer;
    if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
      C.demanar_torn(y);
      W.afegir(y);
      B.afegir(xy);
    }
    else {
      C.avançar;
    }
  }
  return (W,B);
}
```

### **Teorema 7**

$T = (W, B)$  és un arbre generador del component connex de  $G$  que conté  $v$

### 3. Enumeració d'arbres

#### Teorema de Cayley

El nombre d'arbres generadors diferents del graf complet  $K_n$  és  $n^{n-2}$

El teorema equival a dir que el nombre d'arbres diferents d'ordre  $n$  amb conjunt de vèrtexs  $[n]$  és  $n^{n-2}$

La prova es basa en la construcció d'una aplicació bijectiva

$$Pr : \{ T : T \text{ arbre generador de } K_n \} \longrightarrow [n]^{n-2},$$

suposant que el conjunt de vèrtexs de  $K_n$  és  $[n]$

S'anomena **seqüència de Prüfer de  $T$**  a la imatge de  $T$  per l'aplicació  $Pr$ :

$$Pr(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$$

- Construcció de la seqüència de Prüfer d'un arbre  $T = ([n], A)$

### Construcció recursiva

```
vector seqPrufer(arbre T, int n)
/* Pre: un arbre T amb conjunt de vèrtexs {1,2,...,n}
/* Post: un vector de longitud n-2 contenint la seqüència de Prüfer de T

{
  arbre Taux=T;
  int k=0;
  int fulla;
  vector<int> seq(n);
  while(k < n-2) {
    fulla=''fulla de Taux amb etiqueta més petita'';
    seq[k]=''vèrtex adjacent a fulla'';
    Taux=Taux-fulla;
    k++;
  }
  return seq;
}
```

Observacions:

Siguin  $b_1, \dots, b_{n-2}$  els vèrtexs de  $T$  que en algun moment han estat fulla en l'algorisme

- Taux és un arbre en cada pas de l'algorisme
- els vèrtexs  $b_1, \dots, b_{n-2}$  són 2 a 2 diferents
- $T - \{b_1, \dots, b_{n-2}\} \simeq K_2$
- $n$  és un dels vèrtexs de  $T - \{b_1, \dots, b_{n-2}\}$
- $x \in [n]$  apareix a la seqüència de Prüfer tants cops com  $g(x) - 1$
- els vèrtexs que no apareixen a la seqüència de Prüfer són fulles de  $T$

- Reconstrucció de l'arbre  $T$  a partir d'una paraula  $(a_1, \dots, a_{n-2})$  en l'alfabet  $[n]$ . És a dir, definir l'aplicació inversa de  $Pr$

```
arbre arbrePrufer(vector<int> seq, int n)
/* Pre: un vector de n-2 enters entre 1 i n
/* Post: l'arbre que té seq com a seqüència de Prüfer

{
  Llista A;
  vector<int> fulles(n-1);
  fulles[0]=min([n]-{seq[0],seq[1],...,seq[n-3]});
  A.afegir({seq[0],fulles[0]});
  int k=1;
  while(k < n-2) {
    fulles[k]=min([n]-{seq[k],seq[k+1],...,seq[n-3],fulles[0],...,fulles[k-1]});
    A.afegir({seq[k],fulles[k]});
    k++;
  }
  fulles[n-2]=min([n]-{fulles[0],...,fulles[n-3]});
  A.afegir({fulles[n-2],n});
  return ([n],A);
}
```