Espais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E.
Si $u_1, \ldots, u_k \in E$, $((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B)$ representa la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors $u_1, \ldots, u_k$ en la base B.

(1) $v \in < u_1, \ldots, u_k > \Leftrightarrow$
rang$((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) =$ rang$((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B, (v)_B)$.

(2) $u_1, \ldots, u_k$ són L.I. $\Leftrightarrow$ rang$((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) = k$.

(3) $u_1, \ldots, u_k$ són L.D. $\Leftrightarrow$ rang$((u_1)_B), \ldots, (u_k)_B) < k$.

(4) v és pot expressar com a C.L. dels vectors $u_1, \ldots, u_k$ d'almenys dues maneres diferents $\Leftrightarrow$
rang$((u_1)_B), \ldots, (u_k)_B, (v)_B) =$ rang$((u_1)_B), \ldots, (u_k)_B) < k$.

Espais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E.
Si $u_1, \dots, u_k \in E$, $((u_1)_B), \dots, (u_k)_B)$ representa la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors $u_1, \dots, u_k$ en la base B.

(5) $\dim < u_1, \dots, u_k >= \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B)$.

(6) Una base de $< u_1, \dots, u_k >$: vectors de $\{u_1, \dots, u_k\}$ corresponents a les columnes dels pivots d'una matriu escalonada equivalent per files a $((u_1)_B, \dots, (u_k)_B)$ (o sigui, u_i és d'aquesta base si i només si a la columna i de la matriu escalonada hi ha un pivot).

A més, si tenim la matriu escalonada **reduïda** equivalent per files (a la columna del pivot només hi ha un 1 i la resta són 0's), a les columnes que no corresponen als pivots tenim els coeficients del vector corresponent com a combinació lineal lineal de la base formada pels vectors corresponents a les columnes dels pivots.

Espais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E.

(7) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és base d'E $\Leftrightarrow$ $\text{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_n)_B) = n \Leftrightarrow$ $\det((u_1)_B, \ldots, (u_n)_B) \neq 0$.

(8) $u_1, \ldots, u_k$ L.I. $\Rightarrow$ existeix una base d'E que conté $u_1, \ldots, u_k$.

(9) $u_1, \ldots, u_k$ L.I. $\Rightarrow$ es pot completar amb vectors de la base canònica fins una base d'E: provem amb vectors $w_1, \ldots, w_{n-k}$ de la base canònica de manera que $\text{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B, (w_1)_B, \ldots, (w_{n-k})_B) = n$.

Subespais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E.
Vector genèric d'E: $(x)_B = (x_1, \ldots, x_n)$.

Maneres de donar un subespai F d'E:

(a) $F =< u_1, \ldots, u_k >$. Base i dimensió: vegeu (5), (6)
(b) Base d'F: $\{v_1, \ldots, v_r\}$. La dimensió de F és r.
(c) Com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb variables $x_1, \ldots, x_n$. La dimensió és d'F é el nombre de graus de llibertat del sistema. Base: la trobem a partir de l'expressió de la solució en forma paramètrica.

Com passar d'expressar-lo d'una manera a altra:

- (a)$\rightarrow$(b): vegeu (6)
- (b)$\rightarrow$(a): observeu que $F =< v_1, \ldots, v_r >$
- (b)$\rightarrow$(c): imposar que rang$((v_1)_B, \ldots (v_r)_B, (x)_B) = r$.
- (c)$\rightarrow$(b): resoldre el sistema i donar la solució de forma paramètrica.

Subespais vectorials

Base i dimensió d'un subespai d'una altra manera.

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E, F subespai d'E, $F = < u_1, \ldots, u_k >$.

Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} (u_1)_B \\ \vdots \\ (u_k)_B \end{pmatrix}$ que té per files les coordenades dels vectors $u_1, \ldots, u_k$ en la base B.

Es pot demostrar que els vectors fila d'una matriu equivalent a A per files generen el mateix subespai que els vectors fila d'A. Per tant, es compleix:

- $\dim F = \operatorname{rang} A$;
- una base de F està formada pels vectors fila no nuls d'una matriu escalonada equivalent a A per files.

Subespais vectorials

Base i dimensió d'un subespai d'una altra manera (cont.).

El mètode anterior és útil per completar bases de subespais: afegim els $n - \operatorname{rang} A$ vectors que tenen totes les coordenades iguals a 0 excepte una única coordenada igual a 1 en les columnes que no corresponen als pivots de la matriu escalonada equivalent a A.

Exemple. Si al posar per files els 4 vectors que generen un subespai F de $\mathbb{R}^6$ arribem a la matriu escalonada equivalent de l'esquerra, una base de F està formada per les 3 files no nul·les i la podem completar amb els 3(=6-3) vectors fila de la base canònica que tenen l'1 a les columnes on no hi ha pivots (en vermell):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}\mathbf{1} & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}\mathbf{1} & \color{red}0 \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Inclusió de subespais

$F =< u_1, \ldots, u_r >$, $G =< v_1, \ldots, v_s >$ subespais d'E

- $F \subseteq G \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_r \in G$ (vegeu (1))
- $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G$ i $G \subseteq F$
  $\Leftrightarrow u_1, \ldots, u_r \in G$ i $v_1, \ldots, v_s \in F$
- Si $\dim F = \dim G$:
  $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \Leftrightarrow G \subseteq F$
  $\Leftrightarrow u_1, \ldots, u_r \in G \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_s \in F$

Intersecció de subespais

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base de $F \cap G$?

(a) F, G donats com a solució de sistemes homogenis.
(b) Base d'F: $\{v_1, \ldots, v_r\}$, base de G: $\{u_1, \ldots, u_s\}$.
(c) Base de F: $\{v_1, \ldots, v_r\}$; G donat coma solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

Intersecció de subespais

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base de $F \cap G$?

(a) F, G donats com a solució de sistemes homogenis.

Resoldre el sistema format per les equacions de F i de G.

Intersecció de subespais

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base de $F \cap G$?

(b) Base d'F: $\{v_1, \ldots, v_r\}$, base de G: $\{u_1, \ldots, u_s\}$.

- $w \in F \cap G \Leftrightarrow w = x_1 v_1 + \cdots + x_r v_r = y_1 u_1 + \cdots + y_s u_s$.
- Resolem el sistema amb n equacions i $r + s$ incògnites que prové de la igualtat:
  $x_1 v_1 + \cdots + x_r v_r = y_1 u_1 + \cdots + y_s u_s$
- Substituïm les solucions obtingudes per a $x_1, \ldots, x_r$ en $w = x_1 v_1 + \cdots + x_r v_r$ (o bé substituïm les solucions obtingudes per a $y_1, \ldots, y_s$ en $w = y_1 u_1 + \cdots + y_s u_s$).

Intersecció de subespais

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base de $F \cap G$?

(c) Base de F: $\{v_1, \dots, v_r\}$; G donat com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

- $w \in F \Leftrightarrow w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$.
- Substituïm les n coordenades de w (en funció de les α's) en el sistema que defineix G.
- Resolem el sistema amb n equacions i les r incògnites $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ obtingut.
- Substituïm les solucions obtingudes per a $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ en $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$.