

## 1 Resum de teoria

Si  $f$  és un endomorfisme d'un  $\mathbb{K}$ -espai vectorial  $E$  de dimensió  $n$  ( $\mathbb{K}$  pot ser, per exemple,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Z}_p$  amb  $p$  primer) direm que  $f$  *diagonalitza* si existeix una base d' $E$  tal que la matriu associada a  $f$  en aquesta base és diagonal.

### Valors i vectors propis

- *valor propi (vap.)* de  $f$ :  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $f(v) = \lambda v$  per a algun vector  $v \neq 0_E$
- *vector propi (vep.)* de  $f$ :  $v \in E$  tal que  $v \neq 0_E$  i  $f(v) = \lambda v$ , per a algun  $\lambda \in \mathbb{K}$  (direm que  $v$  és un *vector propi de valor propi*  $\lambda$ )

▷  $f$  diagonalitza si i només si existeix una base de vectors propis

- $E_\lambda = \{v : f(v) = \lambda v\}$  (vectors propis de valor propi  $\lambda$ , més el vector  $0_E$ )

Si  $A$  és la matriu associada a  $f$  en una base qualsevol  $B$ , aleshores:

- $E_\lambda$  és un subespai vectorial de dimensió  $n - \text{rang}(A - \lambda I_n)$
- $E_\lambda$  està format per les solucions del sistema d'equacions lineal homogeni  $(A - \lambda I_n)X = 0$ .
- $\lambda \in K$  és valor propi de  $f \Leftrightarrow E_\lambda \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \text{rang}(A - \lambda Id) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$
- Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  són valors propis diferents de  $f$  i  $v_1, v_2, \dots, v_k$  són vectors propis de valor propi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  respectivament, aleshores  $v_1, v_2, \dots, v_k$  són linealment independents

### Polinomi característic

- *Polinomi característic* de  $f$ :  $p_f(x) = \det(A - x I_n)$ , on  $A$  és la matriu associada a  $f$  en una base qualsevol d' $E$ .
- $p_f(x)$  és un polinomi de grau  $n$  tal que el terme independent és  $\det A$ ; el coeficient de  $x^n$  és  $(-1)^n$ ; i el coeficient de  $x^{n-1}$  és  $(-1)^{n-1} \text{tr } A$ , on  $\text{tr } A$  és la suma dels elements de la diagonal principal d' $A$ .
- $\lambda \in \mathbb{K}$  és valor propi de  $f$  si, i només si,  $\lambda$  és arrel de  $p_f(x)$
- Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  és arrel de multiplicitat  $m$  del polinomi característic, aleshores  $1 \leq \dim E_\lambda \leq m$ .
- Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  és arrel de multiplicitat 1 (arrel simple) del polinomi característic, aleshores  $\dim E_\lambda = 1$ .
- Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  és arrel de multiplicitat  $m$  del polinomi característic, direm que  $m$  és la *multiplicitat algebraica* de  $\lambda$  i  $\dim E_\lambda$  és la *multiplicitat geomètrica* de  $\lambda$ .

**Teorema.**  $f$  diagonalitza si, i només si, es compleixen alhora les dues condicions següents:

- $p_f(x)$  es pot descompondre en factors de grau 1 en  $\mathbb{K}[x]$ ;
- per a tota arrel  $\lambda$  de  $p_f(x)$ , la dimensió d' $E_\lambda$  és igual a la multiplicitat de  $\lambda$  en  $p_f(x)$ .

La condició ii) és equivalent a dir que per a tota arrel  $\lambda$  de  $p_f(x)$  la multiplicitat algebraica i geomètrica coincideixen.

**Corol·lari.** Si  $p_f(x)$  té  $n$  arrels diferents en  $\mathbb{K}$ , aleshores  $f$  diagonalitza.

▷ Si  $f$  diagonalitza, una base de vectors propis de  $f$  s'obté com a unió de bases dels subespais  $E_\lambda$  tals que  $\lambda$  és valor propi, i la matriu associada a  $f$  en aquesta base és una matriu diagonal  $D$  on cada valor propi apareix a la diagonal tantes vegades com la seva multiplicitat en el polinomi característic.

## 2 Passos a seguir per a diagonalitzar un endomorfisme

Si  $f$  és un endomorfisme d'un  $\mathbb{K}$ -espai vectorial  $E$  de dimensió  $n$  i  $A$  la matriu associada a  $f$  en la base  $B$ ,

(i) Determinar si l'endomorfisme diagonalitza.

(1) *Calcular el polinomi característic de  $f$  i descompondre'l en factors de grau 1:*

$$p_f(x) = \det(A - x I_n) = \cdots = (-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k},$$

on  $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$  i  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  són arrels diferents de multiplicitat  $m_1, m_2, \dots, m_k$  respectivament ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  són els valors propis de  $f$ ).

Si  $p_f(x)$  no es pot descompondre en factors de grau 1,  $f$  **no diagonalitza**.

Altrament, continuem.

(2) *Comprovar si  $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ , per a tots els valors propis  $\lambda_i$  tals que  $m_i > 1$ : equival a comprovar si  $n - \text{rang}(A - \lambda_i I_n) = m_i$ .*

Si en algun cas no es compleix,  $f$  **no diagonalitza**.

Altrament,  $f$  **diagonalitza**

(ii) Trobar una base en que diagonalitzi, si és possible, i la matriu associada diagonal

(3) Calcular una base  $B_i$  d' $E_{\lambda_i} = \{v : f(v) = \lambda_i v\}$  per a tot valor propi  $\lambda_i$ . Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients  $A - \lambda_i I_n$  i calculem una base del subespai vectorial solució. La base tindrà exactament  $m_i$  vectors,  $B_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im_i}\}$ .

(4) Una base de vectors propis de  $f$  és:

$$B' = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k = \underbrace{\{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1m_1}\}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_1} \underbrace{\{v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2m_2}\}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_2} \cdots \underbrace{\{v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{km_k}\}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_k}$$

(5) La matriu associada en la base  $B'$  és la matriu diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_k \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

on cada  $\lambda_i$  apareix exactament  $m_i$  vegades i els elements que no són de la diagonal principal són nuls.

A més, es satisfà la igualtat  $D = P^{-1} A P$ , on  $P$  és la matriu de canvi de base de  $B'$  a  $B$ , és a dir, les columnes de  $P$  són les components dels vectors de  $B'$  en la base  $B$

### 3 Exemples

#### Exercici 1

Comproveu en cada cas si diagonalitza l'endomorfisme  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que la matriu associada en la base canònica és

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

*Solució.*

$$(a) (1) \text{ Polinomi característic: } p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 0-x & 2 & -2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \dots = -(x-2)(x^2+4).$$

No diagonalitza perquè el polinomi característic no té totes les arrels reals, és a dir, no es pot descompondre en factors de grau 1 en  $\mathbb{R}[x]$ .

(b) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 3 & 2 \\ 1 & -1-x & -1 \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix} = \dots = -(x-4)(x-2)(x+2).$$

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 3 arrels diferents i  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ .

(c) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = \dots = -(x-1)^2(x-2)$$

valors propis	multiplicitat
1	2
2	1

(2) El valor propi 1 té multiplicitat  $2 > 1$ . Comprovem si  $\dim E_1 = 2$ :

$$\dim E_1 = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-1 & -1 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 2.$$

Per tant,  $f$  no diagonalitza.

$$(d) (1) \text{ Polinomi característic: } p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 5-x & 0 & 0 \\ -1 & -1-x & 0 \\ 1 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (5-x)^2(-1-x)$$

valors propis	multiplicitat
5	2
-1	1

(2) El valor propi 5 té multiplicitat  $2 > 1$ . Comprovem si  $\dim E_5 = 2$ :

$$\dim E_5 = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ -1 & -1-5 & 0 \\ 1 & 6 & 5-5 \end{pmatrix} = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Per tant,  $f$  diagonalitza.

## Exercici 2

Comproveu en cada cas si diagonalitza l'endomorfisme  $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  tal que la matriu associada en la base canònica és

$$(a) \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Solució.*

(a) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-x & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-x & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-x \end{pmatrix} = (-2-x)^2 (4-x)^2$$

valors propis	multiplicitat
-2	2
4	2

(2) Els dos valors propis, -2 i 4, tenen multiplicitat 2 > 1.

Comprovem si  $\dim E_{-2} = 2$ :

$$\begin{aligned} \dim E_{-2} &= 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} -2 - (-2) & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 - (-2) & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 - (-2) & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 - (-2) \end{pmatrix} \\ &= 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Comprovem ara si  $\dim E_4 = 2$ :

$$\begin{aligned} \dim E_4 &= 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} -2 - 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 - 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 2. \end{aligned}$$

Per tant,  $f$  no diagonalitza.

(b) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-x & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2-x \end{pmatrix} = (-2-x)^2(-1-x)(2-x)$$

valors propis	multiplicitat
-2	2
-1	1
2	1

(2) El valor propi -2 té multiplicitat 2, diferent de 1. Comprovem si  $\dim E_{-2} = 2$ :

$$\begin{aligned} \dim E_{-2} &= 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} -2 - (-2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - (-2) & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 - (-2) & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 - (-2) \end{pmatrix} \\ &= 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Per tant,  $f$  diagonalitza.

(c) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^3(-1-x)$$

valors propis	multiplicitat
2	3
-1	1

(2) El valor propi 2 té multiplicitat  $3 > 1$ .

Comprovem si  $\dim E_2 = 3$ :

$$\begin{aligned} \dim E_2 &= 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-2 \end{pmatrix} = 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= 4 - 3 = 1 \neq 3. \end{aligned}$$

Per tant,  $f$  no diagonalitza.

### Exercici 3

Demostreu que l'endomorfisme  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que la matriu associada en la base canònica és  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  diagonalitza. Trobeu una base en que  $f$  diagonalitzi, i doneu la matriu associada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

*Solució.*

(1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{pmatrix} = (1-x)(2-x) - 6 = x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1).$$

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 2 arrels diferents i  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ .

valors propis	multiplicitat
4	1
-1	1

(2) No hi ha valors propis de multiplicitat  $> 1$ .

(3) (i) Base d' $E_4$ . Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients  $A - 4I_2$ :

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solució: } \{(x, y) : x = \frac{2}{3}y\} = \{(\frac{2}{3}y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(\frac{2}{3}, 1) : y \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{Base: } \{(\frac{2}{3}, 1)\}$$

(ii) Base d' $E_{-1}$ . Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients  $A - (-1)I_2$ :

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solució: } \{(x, y) : x = -y\} = \{(-y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1) : y \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{Base: } \{(-1, 1)\}$$

(4) Base d' $E$  en que  $f$  diagonalitza:  $B' = \{(\frac{2}{3}, 1), (-1, 1)\}$

(5) Matriu associada en la base  $B'$ :  $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Relació entre  $D$  i  $A$ :  $D = P^{-1}AP$ , on  $P$  és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de  $B'$  en la base canònica, és a dir,  $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## Exercici 4

Demostreu que l'endomorfisme  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que la matriu associada en la base canònica és  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  diagonalitza. Trobeu una base en que  $f$  diagonalitzi, i doneu la matriu associada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

*Solució.*

(1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 1 & 3-x \end{pmatrix} = (3-x)^2(4-x) + 2 + 2 - (4-x) - 3(3-x) - 2(3-x) = \dots = -x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = -(x-2)^2(x-6)$$

valors propis	multiplicitat
2	2
6	1

(2) El valor propi 2 té multiplicitat  $2 > 1$ .

Comprovem si  $\dim E_2 = 2$ :

$$\dim E_2 = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Per tant,  $f$  diagonalitza.

(3) (i) Base d' $E_2$ . Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients  $A - 2I_3$ :

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució:

$$\{(x, y, z) : x + y + z = 0\} = \{(x, y, z) : x = -y - z\} = \{(-y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

Base:  $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

(ii) Base d' $E_6$ . Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients  $A - 6I_3$ :

$$\begin{pmatrix} 3-6 & 1 & 1 \\ 2 & 4-6 & 2 \\ 1 & 1 & 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \equiv \dots \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solució: } \{(x, y, z) : x = z, y = 2z\} = \{(z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 2, 1) : z \in \mathbb{R}\}$$

Base:  $\{(1, 2, 1)\}$

(4) Base d' $E$  en que  $f$  diagonalitza:  $B' = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 2, 1)\}$

(5) Matriu associada en la base  $B'$ :  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Relació entre  $D$  i  $A$ :  $D = P^{-1}AP$ , on  $P$  és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de  $B'$  en la base canònica, és a dir,  $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .



## Exercici 5

Demostreu que l'endomorfisme  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que la matriu associada en la base canònica és  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$  diagonalitza. Trobeu una base en que  $f$  diagonalitzi, i doneu la matriu associada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

*Solució.*

(1) Polinomi característic:  $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 4 \\ 3 & -4-x & 12 \\ 1 & -2 & 5-x \end{pmatrix} = (2-x)(-4-x)(5-x) - 24 - 4(-4-x) - 24(2-x) = \dots = -x^3 + 3x^2 - 2x = -x(x-1)(x-2)$

valors propis	multiplicitat
0	1
1	1
2	1

Diagonalitza perquè té 3 valors propis diferents i  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ .

(2) No hi ha valors propis amb multiplicitat  $> 1$ .

(3) (i) Base d' $E_0$ . Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients  $A - 0 \cdot I_3 = A$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \equiv \dots \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solució:  $\{(x, y, z) : x + 2z = 0, -2y + 3z = 0\} = \{(x, y, z) : x = -2z, y = \frac{3}{2}z\} = \{(-2z, \frac{3}{2}z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2, \frac{3}{2}, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Base:  $\{(-4, 3, 2)\}$ , ja que el vector  $(-2, \frac{3}{2}, 1)$  genera el mateix subespai que  $2(-2, \frac{3}{2}, 1) = (-4, 3, 2)$

(ii) Base d' $E_1$ . Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients  $A - 1I_3$ :

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 4 \\ 3 & -4-1 & 12 \\ 1 & -2 & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \equiv \dots \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució:  $\{(x, y, z) : x + 4z = 0, y = 0\} = \{(x, y, z) : x = -4z, z = 0\} = \{(-4z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-4, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Base:  $\{(-4, 0, 1)\}$

(iii) Base d' $E_2$ . Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients  $A - 2I_3$ :

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 4 \\ 3 & -4-2 & 12 \\ 1 & -2 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \dots \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució:  $\{(x, y, z) : z = 0, x = 2y\} = \{(2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(2, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\}$

Base:  $\{(2, 1, 0)\}$

(4) Base d' $E$  en que  $f$  diagonalitza:  $B' = \{(-4, 3, 2), (-4, 0, 1), (2, 1, 0)\}$

(5) Matriu associada en la base  $B'$ :  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Relació entre  $D$  i  $A$ :  $D = P^{-1}AP$ , on  $P$  és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de  $B'$  en la base canònica, és a dir,  $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .