7
Aplicacions lineals

7.1 Determineu quines de les aplicacions següents són lineals:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x + y$;

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^2y^2$;

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} \scriptstyle x \\ \scriptstyle y \\ \scriptstyle z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \scriptstyle x+7 \\ \scriptstyle 2y \\ \scriptstyle x+y+z \end{pmatrix}$;

4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \scriptstyle x \\ \scriptstyle y-x \\ \scriptstyle x+y \end{pmatrix}$;

5) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} \scriptstyle x \\ \scriptstyle y \\ \scriptstyle z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \scriptstyle xy \\ \scriptstyle z \\ \scriptstyle x \end{pmatrix}$.

Solució:

1) És lineal. Tenim:

$$\begin{aligned} f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right] &= f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = (x+x') + (y+y') \\ &= (x+y) + (x'+y') = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$f\left[\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y) = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2) No és lineal. Ho demostrem amb un contraexemple: $2f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 2 \neq f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 16$.

3) No és lineal. Ho demostrem amb un contraexemple: $0f\begin{pmatrix} \scriptstyle 1 \\ \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 0 \end{pmatrix} \neq f\begin{pmatrix} \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \scriptstyle 7 \\ \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 0 \end{pmatrix}$.

4) És lineal. Tenim:

$$\begin{aligned} f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right] &= f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y'-x-x' \\ x+x'+y+y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y'-x' \\ x'+y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$f\left[\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y - \lambda x \\ \lambda x + \lambda y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y-x \\ x+y \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

5) No és lineal. Ho provem amb un contraexemple: $2f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \neq f\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$.

7.2 Determineu quines de les següents aplicacions $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ són lineals:

1) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$;

2) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$;

3) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(1 + x) + a_2(1 + x)^2$.

Solució:

1) És lineal. En general, si E i F són espais vectorials i definim $f : E \to F$ com $f(e) = 0_F$, per a tot $e \in E$, llavors f és lineal. En efecte, si $e_1, e_2 \in E$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, aleshores:

$$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = 0_F, \quad \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) = \lambda_1 \cdot 0_F + \lambda_2 \cdot 0_F = 0_F.$$

2) És lineal. Si $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $b(x) = b_0 + b_1 + b_2x^2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors tenim:

$$\begin{aligned}
f(a(x) + b(x)) &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1 + a_2 + b_2)x + (2a_0 + 2b_0 - 3a_1 - 3b_1)x^2 \\
&= (a_0 + a_1x + (2a_0 - 3a_1)x^2) + (b_0 + b_1x + (2b_0 - 3b_1)x^2) \\
&= f(a(x)) + f(b(x)) \\
f(\lambda a(x)) &= f(\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2) \\
&= \lambda a_0 + (\lambda a_1 + \lambda a_2)x + (2\lambda a_0 - 3\lambda a_1)x^2 \\
&= \lambda(a_0 + a_1x + (2a_0 - 3a_1)x^2) = \lambda f(a(x)).
\end{aligned}$$

3) És lineal. Si $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $b(x) = b_0 + b_1 + b_2x^2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors tenim:

$$\begin{aligned}
f(a(x) + b(x)) &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)(1 + x) + (a_2 + b_2)(1 + x)^2 \\
&= (a_0 + a_1(1 + x) + a_2(1 + x)^2) + (b_0 + b_1(1 + x) + b_2(1 + x)^2) \\
&= f(a(x)) + f(b(x)) \\
f(\lambda a(x)) &= f(\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1(1 + x) + \lambda a_2(1 + x)^2 \\
&= \lambda(a_0 + a_1(1 + x) + a_2(1 + x)^2) = \lambda f(a(x)).
\end{aligned}$$

7.3 Determineu quines de les aplicacions següents són lineals:

1) $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, on $f(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}) = a + d$;

2) $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, on $f(A) = AB$, essent $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ una matriu fixada;

3) $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, on $f(A) = \det(A)$.

Solució:

1) És lineal. En efecte, si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $A' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, llavors:

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \lambda' A') &= f\begin{pmatrix} \lambda a + \lambda' a' & \lambda b + \lambda' b' \\ \lambda c + \lambda' c' & \lambda d + \lambda' d' \end{pmatrix} = (\lambda a + \lambda' a') + (\lambda d + \lambda' d') \\ &= (\lambda a + \lambda d) + (\lambda' a' + \lambda' d') = \lambda f(A) + \lambda' f(A'). \end{aligned}$$

2) És lineal. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, llavors:

$$f(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B = \lambda_1 A_1 B + \lambda_2 A_2 B = \lambda_1 f(A_1) + \lambda_2 f(A_2),$$

la segona igualtat per la propietat distributiva del producte de matrius respecte de la suma.

3) No és lineal. Per exemple, perquè el determinant d'una suma de matrius no és igual a la suma dels determinats, com demostra el contraexemple següent:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.4 Sigui $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ l'aplicació lineal definida per: $f(1) = 1 + x$, $f(x) = 3 - x^2$ i $f(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$. Quina és la imatge del polinomi $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$? Calculeu $f(2 - 2x + 3x^2)$.

Solució: Per linealitat, tenim que:

$$\begin{aligned} f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) &= a_0 \cdot f(1) + a_1 \cdot f(x) + a_2 \cdot f(x^2) \\ &= a_0(1 + x) + a_1(3 - x^2) + a_2(4 + 2x - 3x^2) \\ &= (a_0 + 3a_1 + 4a_2) + (a_0 + 2a_2)x + (-a_1 - 3a_2)x^2. \end{aligned}$$

En particular, $f(2 - 2x + 3x^2) = 8 + 8x - 7x^2$.

7.5 Estudieu si existeix algun endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, 3$, on:

1) $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$;

2) $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ i $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$;

3) $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ i $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Solució: Per tal que existeixi un endomorfisme que envii uns vectors donats $u_1, \ldots, u_k$ a uns altres $v_1, \ldots, v_k$ és necessari i suficient que les respectives imatges $v_1, \ldots, v_k$ compleixin totes les relacions lineals que es compleixen entre els vectors $u_1, \ldots, u_k$ ja que les aplicacions lineals preserven combinacions lineals. És a dir, és necessari i suficient que sempre que es compleixi $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0$ per a certs escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ també s'ha de complir que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$. En particular, quan els vectors $u_1, \cdots, u_k$ són linealment independents i, per tant, quan l'única combinació lineal d'ells que dona el vector zero és la combinació trivial, les seves imatges es poden triar com es vulguin perquè la combinació lineal trivial dels vectors $v_1, \ldots, v_k$ també serà el vector zero siguin quins siguins aquests vectors. Per tant, el problema consisteix en identificar en cada cas les relacions lineals entre els u_1, u_2, u_3 i comprovar si les respectives imatges v_1, v_2, v_3 també les compleixen.

1) En aquest cas, els vectors u_1, u_2, u_3 són linealment independents ja que la matriu que els té per columnes és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i, per tant, és de rang 3. Per tant, les seves imatges es poden triar arbitràriament. En particular, existeix l'endomorfisme que els envia als vectors v_1, v_2, v_3 indicats. A més, serà únic, ja que u_1, u_2, u_3 són una base de $\mathbb{R}^3$, i qualsevol aplicació lineal queda unívocament determinada per la imatge d'una base qualsevol, la qual, d'acord amb el que hem dit, es pot triar arbitràriament.

2) En aquest cas, els vectors u_1, u_2 són linealment independents (no són múltiple un de l'altre), de manera que les seves imatges es poden triar com vulguem. Però el vector u_3 és combinació lineal de u_1, u_2. Concretament, es té que $u_3 = -u_1 + 3u_2$. Per tant, la imatge de u_3 no pot ser qualsevol, sinó que ha de ser un vector v_3 que sigui la mateixa combinació lineal de les imatges de u_1, u_2; és a dir, tal que $v_3 = -v_1 + 3v_2$ (si $u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$ cal que també $v_1 - 3v_2 + v_3 = 0$). En aquest cas, això és cert. Per tant, també existeix l'endomorfisme indicat. Però a diferència del cas anterior, no serà únic, ja que els vectors u_1, u_2, u_3 ara no són base. Per tal de tenir unicitat, cal especificar la imatge de qualsevol altre vector u_4 que amb u_1, u_2 formin base.

3) Ara continua essent $u_3 = -u_1 + 3u_2$ com en el cas anterior, però en canvi $v_3 \neq -v_1 + 3v_2$. Per tant, no existeix l'endomorfisme indicat.

7.6 Siguin E i F dos espais vectorials, $f\colon E \to F$ una aplicació lineal, i $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectors d'E. Discutiu les afirmacions següents: demostreu les certes i doneu contraexemples per a les falses.

1) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents, aleshores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ són linealment independents.

2) Si $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ són linealment independents, aleshores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents.

3) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és un conjunt de generadors d'E, aleshores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de F.

4) Si $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de F, aleshores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és un conjunt de generadors d'E.

5) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és un conjunt de generadors d'E, aleshores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de $\operatorname{Im} f$.

Solució:

1) Aquesta propietat és falsa en general. Per exemple, si un dels vectors v_i és del nucli (és a dir, $f(v_i) = 0$), aleshores les imatges ja no són linealment independents.

2) Aquesta propietat és certa. Suposem que els vectors $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ són linealment independents. Anem a demostrar que els vectors $v_1, v_2, \dots, v_n$ són linealment independents. Considerem la combinació lineal $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$. Per linealitat $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = 0_F$, atès que $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ són linealment independents, els escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, són tots nuls. Per tant, $v_1, v_2, \dots, v_n$ són linealment independents.

3) Aquesta propietat és falsa en general. Per exemple, si $\dim(E) < \dim(F)$, llaors la imatge de qualsevol base d'E no genera F.

4) Aquesta propietat és falsa en general. Per exemple, sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per:
$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$
Aleshores els vectors $f\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $f\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ generen $\mathbb{R}^2$, però els vectors $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ no generen $\mathbb{R}^3$.

5) Aquesta propietat és certa. Sigui $w \in \operatorname{Im}(f)$ i sigui $v \in E$ tal que $f(v) = w$. Per ser $v_1, v_2, \dots, v_n$ un conjunt de generadors d'E, existeixen uns escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tals que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Per linealitat, $w = f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$. Per tant $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de $\operatorname{Im}(f)$.

7.7 Per als següents subespais E i F de $\mathbb{R}^4$, esbrineu si existeix una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(u) = 0$ per a tot $u \in E$ i $f(v) = v$ per a tot $v \in F$.

1) $E = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\2\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ i $F = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}2\\2\\2\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

2) $E = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}4\\1\\0\\2\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ i $F = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\-5\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

Solució:

1) Per tal que $f(u) = 0$, per a tot $u \in E$, és necessari i suficient que f envii al vector zero els dos generadors de E (qualsevol altre vector de E n'és combinació lineal i les aplicacions lineals preserven combinacions lineals, així que enviarà qualsevol altre vector $u \in E$ també al vector zero). Per la mateixa raó, per tal que $f(v) = v$, per a tot $v \in F$, és necessari i suficient que f apliqui cada generador de F a ell mateix. Per tant, busquem, si existeix, un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ que apliqui els dos generadors de E al vector zero i els de F a ells mateixos. Tal i com s'ha explicat a l'Exercici 5, un tal endomorfisme existirà si els quatre vectors són linealment independents, ja que aleshores les seves imatges es poden triar com es vulgui. Ara, la matriu que té els quatre generadors per columnes és:
$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\2&1&2&1\\-1&0&2&0\\0&2&3&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-2&-1\\0&1&4&1\\0&2&3&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-2&-1\\0&0&2&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
i per tant, és de rang 4, així que són una base de $\mathbb{R}^4$ i l'endomorfisme demanat existeix, i és únic perquè fixem la imatge d'una base. Per tal d'identificar-la explícitament (no ho

demana), només cal expressar un vector genèric com a combinació lineal d'aquesta base. La seva imatge serà aleshores la mateixa combinació lineal de les imatges de la base. Fent això, s'obté que f és l'endomorfisme definit per:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(7x-3y+z-2t)/2\\(7x-3y+z-2t)/2\\-x+y+z\\3x-y+z-t\end{pmatrix}.$$

2) A diferència del cas anterior, els dos generadors de E juntament amb els dos de F no són una família linealment independent, ja que la matriu que els té per columnes és:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&1\\0&1&-1&0\\2&-5&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&1\\0&0&-1&-1\\0&-7&1&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

i, per tant, és només de rang 3. De fet, deduïm que la quarta columna és combinació lineal de les tres primeres. Concretament, plantejant el sistema d'equacions corresponent i resolent-lo s'obté que:

$$\begin{pmatrix}4\\1\\0\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Per tant, si f ha d'enviar els vectors de E al vector zero i enviar els de F a ells mateixos, en aplicar f en aquesta igualtat, i com que f preserva combinacions lineals, s'hauria de complir que:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

cosa que no és certa. Per tant, no existeix l'endomorfisme f indicat.

7.8 Doneu la matriu associada a les aplicacions lineals següents en les bases canòniques i calculeu la dimensió del nucli i de la imatge:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on $f(x)=3x$;

2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, on $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\x-y\end{smallmatrix}\right)$;

3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, on $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x+y+z\\y+z\\z\end{smallmatrix}\right)$;

4) $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}b+c\\c+d\\2a-b+c-d\end{smallmatrix}\right)$;

5) $f:P_2(\mathbb{R})\to P_3(\mathbb{R})$, on $f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(2a_1-a_0)+(2a_1-a_2)x+(3a_2-2a_1+a_0)x^2+(a_0+a_1+a_2)x^3$.

Solució: En tots els casos, indiquem per $M(f)$ la matriu d'f en les bases canòniques corresponents. Recordem que el subespai imatge $\mathrm{Im}(f)$ està generat pels vectors columna de $M(f)$ i, per tant, $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}\, M(f)$. Recordem, a més, la fórmula de les dimension $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim(F)$, si $f : E \to F$ és una aplicació lineal.

1) $M(f) = (3)$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rg}(M(f)) = 1$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1 - 0 = 0$.

2) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rg}(M(f)) = 2$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2 - 2 = 0$.

3) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rg}(M(f)) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 3 = 0$.

4) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rg}(M(f)) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 4 - 3 = 1$.

5) $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rg}(M(f)) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 3 = 0$.

7.9 Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ amb matriu associada:

$$\begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix}.$$

Determineu la dimensió de la imatge segons els valors de m.

Solució: Calculem el determinant de la matriu donada:

$$\det \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix} = m^3 - 3m^2 + 2m = m(m-1)(m-2).$$

Per tant, veiem que si $m \notin \{0, 1, 2\}$, aquest determinant no s'anul·la i el rang de la matriu és 3. En aquest cas, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ i $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. A més, tenim que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Es tracta doncs d'un automorfisme (aplicació lineal bijectiva de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$).

Per a la resta de casos, tenim que $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ i, per tant, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$:

$$m = 0 \qquad \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$m = 1 \qquad \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2;$$

$$m = 2 \qquad \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

En cada cas, el subespai $\mathrm{Im}(f)$ està generat, per exemple, per les dues primeres columnes de la matriu corresponent. Resolent els sistemes homogenis les matrius associades dels quals són, en cada cas, les matrius anteriors, obtenim que les bases de $\operatorname{Ker} f$ són: $\{\left(\begin{smallmatrix} 2\\ 1\\ -2 \end{smallmatrix}\right)\}$ si $m=0$; $\{\left(\begin{smallmatrix} -1\\ 0\\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ si $m=1$; i $\{\left(\begin{smallmatrix} -3\\ 1\\ 2 \end{smallmatrix}\right)\}$ si $m=2$.

7.10 Sigui E un espai vectorial i $B=\{u,v,w,t\}$ una base d'aquest. Sigui f un endomorfisme d'E tal que:

$$f(u)=u+2w,\ \ f(v)=v+w,\ \ f(w)=2u+v+w,\ \ f(t)=2u+2v+4w.$$

Escriviu la matriu d'f en la base B, i trobeu una base i la dimensió de la imatge d'f.

Solució: Les columnes de la matriu $M_B(f)$ s'obtenen escrivint les components en base B dels vectors imatges dels vectors de la base B. Així, les components del vector $f(u)$ en base B són $\left(\begin{smallmatrix} 1\\ 0\\ 2\\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; les del vector $f(v)$ són $\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 1\\ 1\\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; les del vector $f(w)$ són $\left(\begin{smallmatrix} 2\\ 1\\ 1\\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; i les del vector $f(t)$ són $\left(\begin{smallmatrix} 2\\ 2\\ 4\\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Per tant:

$$M_B(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com que $M_B(f)$ té rang 3, es té $\dim(\operatorname{Im} f)=3$ i $\dim(\operatorname{Ker} f)=1$. El subespai $\mathrm{Im}(f)$ està generat per les columnes de $M_B(f)$ i les tres primeres columnes són linealment independents. Per tant, una base de $\operatorname{Im} f$ és $\{u+2w, v+w, 2u+v+w\}$. Per a obtenir una base del nucli, hem de resoldre el sistema homogeni la matriu associada del qual és $M_B(f)$. Si denotem per a_1,a_2,a_3,a_4 les incògnites, llavors les solucions es poden expressar com:

$$\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_3\\ 3a_3\\ a_3\\ -2a_3 \end{pmatrix}=a_3\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ 1\\ -2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, una base de $\operatorname{Ker} f$ és $\{2u+3v+w-2t\}$.

7.11 Trobeu el nucli de l'aplicació lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, on $f\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} x-y\\ y-z\\ z-x \end{smallmatrix}\right)$, calculeu $f\left(\begin{smallmatrix} 2\\ 0\\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i les antiimatges, si en tenen, dels vectors $\left(\begin{smallmatrix} 2\\ -1\\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 2\\ -1\\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Solució:

1) El nucli de f està format pels vectors que tenen imatge el vector $0_{\mathbb{R}^3}$; és a dir, el vectors les components dels quals són les solucions del sistema homogeni:

$$x-y=0,\quad y-z=0,\quad z-x=0.$$

Per tant: $\operatorname{Ker} f=\langle\left(\begin{smallmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$.

2) $f\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2-0\\0-1\\1-2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$.

3) Càlcul de $f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$: un vector de l'antiimatge s'escriu com la suma d'una antiimatge concreta i un vector del nucli. En aquest cas, coneixem una antiimatge: el vector $\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ (apartat anterior) i coneixem el nucli. Per tant:

$$f^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} : \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

També podem calcular el conjunt antiimatge resolem el sistema d'equacions:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\y-z\\z-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

4) Càlcul de $f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$: en aquest cas, no coneixem cap antimatge concreta. Per tant, resolem el sistema:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\y-z\\z-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},$$

i trobem que és incompatible. Per tant, $f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)=\emptyset$.

7.12 Determineu si les aplicacions lineals següents són o no bijectives usant la informació que es dóna:

1) $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, amb $\mathrm{Ker} f=\{0_{\mathbb{R}^n}\}$;

2) $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, amb $\dim(\mathrm{Im}\, f)=n-1$;

3) $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, amb $n<m$;

4) $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, amb $\mathrm{Im}\, f=\mathbb{R}^n$.

Solució: Recordem que si $f: E\to F$ es una aplicació lineal entre espais vectorials de dimensió finita, aleshores $\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))$.

1) Aplicant la fórmula anterior, tenim que $n=0+\dim(\mathrm{Im}(f))$. Per tant, $\dim(\mathrm{Im}(f))=n$ i, com que $\mathrm{Im}(f)$ és un subespai de $\mathbb{R}^n$, resulta que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^n$. En conseqüència, f és exhaustiva. A més, com que el nucli només conté el vector zero, f és injectiva. Per tant, f és bijectiva.

2) Com que $\dim(\mathrm{Im}\, f)=n-1$, el subespai $\mathrm{Im}(f)$ no és tot $\mathbb{R}^n$; és a dir, f no és exhaustiva. Tampoc és injectiva, com resulta d'aplicar la fórmula de les dimensions: $\dim(\mathrm{Ker}(f))=1$.

3) Si apliquem la fórmula de les dimensions i tenim en compte que $\dim(\mathrm{Im}(f))\le n$, resulta:

$$n<m=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))\le\dim(\mathrm{Ker}(f))+n$$

d'on obtenim que $\dim(\mathrm{Ker}(f))>1$. Per tant, f no és injectiva ni tampoc potser bijectiva.

4) L'hipòtesi ens diu que f és exhaustiva. Si apliquem la fórmula, resulta que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ i, per tant, f és injectiva. Per tant, f és bijectiva.

7.13 Per a cadascuna de les aplicacions lineals següents, doneu la matriu associada a l'aplicació en les bases canòniques; doneu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de l'aplicació; digueu si l'aplicació és injectiva, exhaustiva, bijectiva o cap de les tres; i determineu l'aplicació inversa, en el cas que existeixi:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ fix;

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+7y \end{pmatrix}$;

3) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z+2t \\ y-z+t \\ x-2y+2z \end{pmatrix}$;

4) $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, on $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2)x + (a_2 - a_0)x^2$;

5) $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, on $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 3a_0 + (a_0 - a_1)x + (2a_0 + a_1 + a_2)x^2$;

6) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, on $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+c \end{pmatrix}$;

7) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & y-z \\ z-y & x-z \end{pmatrix}$.

Solució: En tots els casos, indiquem per $M(f)$ la matriu d'f en les bases canòniques corresponents.

1) $M(f) = (a)$. Cal distingir dos casos:

- $a \neq 0$: $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}}\}$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$, $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$ i $\dim(\mathrm{Im}\ f) = 1$. A més, f és isomorfisme i la inversa ve donada per $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x$.
- $a = 0$: $\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$, $\mathrm{Im}\, f = \{0_{\mathbb{R}}\}$ i $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 0$. En aquest cas, f no és ni injectiva ni exhaustiva i, per tant, no és invertible.

2) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Com que $\mathrm{rg}(M(f)) = 2$, es té que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$. L'aplicació és un isomorfisme, i la inversa té per matriu $M(f^{-1}) = M(f)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. En aquest cas, $\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$, $\mathrm{Ker}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$. L'aplicació no és injectiva però sí exhaustiva.

4) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es té que $\mathrm{Im}\, f = \langle 1 - x^2, -1 + x \rangle$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, $\mathrm{Ker}\, f = \langle 1 + x + x^2 \rangle$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$. L'aplicació no és injectiva ni exhaustiva.

5) $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ara, $\mathrm{Im}\, f = \langle 3 + x + 2x^2, -x + x^2, x^2 \rangle$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$, $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{P_2(\mathbb{R})}\}$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$. L'aplicació és un isomorfisme i la inversa té per matriu $M(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. És a dir, $f^{-1}(a_0 + a_1x - a_2x^2) = \frac{a_0}{3} + (\frac{a_0}{3} - a_1)x + (-a_0 + a_1 + a_2)x^2$.

6) $M(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&1&0 \end{smallmatrix}\right)$. Una base de $\operatorname{Im} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$. Una base de $\operatorname{Ker} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix} -1&0 \\ 0&1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&-1 \\ 1&0 \end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. f és exhaustiva i no injectiva.

7) $M(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1&-1&0 \\ 0&1&-1 \\ 0&-1&1 \\ 1&0&-1 \end{smallmatrix}\right)$. Una base de $\operatorname{Im} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1&1 \\ -1&0 \end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Una base de $\operatorname{Ker} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. f no és ni injectiva ni exhaustiva.

7.14 Sigui B una matriu invertible $n \times n$. Demostreu que l'aplicació $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida per $f(A) = AB$ és un endomorfisme bijectiu.

Solució: És injectiva, ja que:

$$f(A) = f(C) \Rightarrow AB = CB \Rightarrow ABB^{-1} = CBB^{-1} \Rightarrow A = C,$$

donat que existeix B^{-1}.

També és exhaustiva ja que per qualsevol matriu $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exiteix A tal que $f(A) = D$: prendre $A = DB^{-1}$. En efecte, $f(DB^{-1}) = DB^{-1}B = D$.

Per tant, al ser exhaustiva i injectiva, llavors és bijectiva.

7.15 Per a les aplicacions lineals següents f_1 i f_2, digueu si l'aplicació composició $f = f_2 \circ f_1$ és injectiva, exhaustiva, bijectiva.

1) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x+y \\ x+2z-y \end{pmatrix}$ i $f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3z \\ y+4z \end{pmatrix}$;

2) $f_1 : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ i $f_2 : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, on $f_1(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_2 + a_3x + a_0x^2$ i $f_2(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_1 + a_2) + (a_0 + a_2)x + (a_0 + a_1)x^2$;

3) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix}$ i $f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ x+y+z \\ y+x \end{pmatrix}$.

Solució: El caràcter injectiu i/o exhaustiu d'una aplicació lineal $f : E \to F$ es pot determinar a partir del rang de la seva matriu en qualsevol base: (1) f és injectiva si i només si el rang és igual a la dimensió de E (per tant, al nombre de columnes de la matriu), i (2) f és exhaustiva si i només si el rang és igual a la dimensió de F (per tant, al nombre de files de la matriu). Per tant, només cal calcular la matriu de l'aplicació composició en cada cas i calcular-ne el rang, i la matriu de la composició es pot calcular usant que $M(f_2 \circ f_1) = M(f_2) \cdot M(f_1)$.

1) Treballant en les bases canòniques corresponents, les matrius de f_1, f_2 són:

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M(f_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M(f) = M(f_2 \circ f_1) = M(f_2)\, M(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Com que el rang de $M(f)$ és 2, que és igual a la dimensió de l'espai d'arribada $\mathbb{R}^2$, però diferent de la de l'espai de partida $\mathbb{R}^3$, l'aplicació és exhaustiva però no injectiva. Per tant, tampoc és bijectiva.

2) Treballant en les bases canòniques corresponents, les matrius de f_1, f_2 són:

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M(f) = M(f_2 \circ f_1) = M(f_2)\, M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que el rang de $M(f)$ és 3, que és igual a la dimensió de l'espai d'arribada $P_2(\mathbb{R})$, però diferent de la de l'espai de partida $P_3(\mathbb{R})$, l'aplicació és exhaustiva però no injectiva. Per tant, tampoc és bijectiva.

3) Treballant en les bases canòniques corresponents, les matrius de f_1, f_2 són:

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M(f) = M(f_2 \circ f_1) = M(f_2)\, M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que el rang de $M(f)$ és 2, que és igual a la dimensió de l'espai de partida $\mathbb{R}^2$, però diferent de la de l'espai d'arribada $\mathbb{R}^3$, l'aplicació és injectiva però no exhaustiva. Per tant, tampoc és bijectiva.

7.16 Doneu les matrius associades a les aplicacions lineals següents respecte de les bases canòniques:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ i $f\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$;

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ i $f\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$;

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Solució: Es tracta de trobar les imatges dels vectors de la corresponent base canònica a partir de les imatges dels vectors de l'enunciat. Hi ha tres maneres de procedir: (1) buscant quina combinació lineal és cada vector de la base canònica dels vectors dels quals se'n coneixen les imatges (per linealitat, la imatge del vector de la base canònica és aleshores la mateixa combinació lineal de les imatges que es donen a l'enunciat), (2) anar deduint imatges d'altres vectors fent combinacions lineals de les donades fins arribar a obtenir les imatges de la base canònica, i (3) fent el canvi de base, ja que les dades que donen proporcionen la matriu de f treballant amb base canònica a l'arribada però no a la partida.

1) Aplicant el primer procediment, busquem components dels vectors de la base canònica $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$ en la base $\binom{1}{1}, \binom{-1}{2}$. Es té que:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Per tant, utilitzant que les aplicacions lineals preserven les combinacions lineals es té que:

$$\begin{aligned}f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= f\left(\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{2}{3}\cdot f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot f\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\\ &= \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\\ f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= f\left(\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot f\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En definitiva, la matriu en bases canòniques de f és:

$$M_{\mathrm{can}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}.$$

2) Aplicant el segon procediment, tenim que:

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\3\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} = 6\,f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}.$$

Anàlogament:

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} - 4\,f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\\1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1/2\\-1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2/3\\5/3\\-5/3\end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu en base canònica buscada és:

$$M_{\mathrm{can}}(f) = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\-1/3 & -2/3\\1/3 & 5/3\\2/3 & -5/3\end{pmatrix}.$$

3) És fàcil comprovar que els vectors de $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \right\}$ són linealment independents i, per tant, com que $\mathbb{R}^3$ és de dimensió 3, en són una base. Donant-nos les imatges d'aquesta base B ens donen implícitament la matriu de f agafant a $\mathbb{R}^3$ la base B i a $\mathbb{R}^2$ la canònica B_c; és a dir, sabem que:

$$M_{B_c}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ens demanen la matriu $M_{B_c}^{B_c}(f)$, que la podem obtenir aplicant la fórmula de canvi de base, segons la qual (només fem canvi de base a l'espai de partida):

$$M_{B_c}^{B_c}(f) = M_{B_c}^{B}(f) P_B^{B_c}.$$

Per tant, només cal trobar la matriu de canvi de base:

$$P_B^{B_c} = (P_{B_c}^{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Trobem la inversa utilitzant el mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Per tant, la matriu buscada és:

$$M_{B_c}^{B_c}(f) = M_{B_c}^{B}(f) P_B^{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.17 Sigui f un endomorfisme de $P_2(\mathbb{R})$ donat per:

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 3a_0 + (a_0 - a_1)x + (2a_0 + a_1 + a_2)x^2.$$

Doneu la matriu d'f en la base $B = \{1 + x^2, -1 + 2x + x^2, 2 + x + x^2\}$.

Solució: Sigui C la base canònica $\{1, x, x^2\}$. De les dades del problema podem escriure:

$$P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_C(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M_B(f) = (P_C^B)^{-1} M_C(f) P_C^B = \begin{pmatrix} 9/4 & 17/4 & 21/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -7/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

7.18 Sigui $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i sigui $B_F = \{v_1, v_2\}$ una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial F. Considerem l'aplicació lineal $f\colon E \to F$ definida per:

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x - 2z)v_1 + (y + z)v_2.$$

Trobeu la matriu associada a f en les bases:

1) $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ i $B_F = \{v_1, v_2\}$.

2) $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ i $B'_F = \{2v_1, 2v_2\}$.

3) $B'_E = \{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$ i $B_F = \{v_1, v_2\}$.

4) $B'_E = \{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$ i $B'_F = \{2v_1, 2v_2\}$.

Solució: De les dades del problema, tenim:

$$M_{B_F}^{B_E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{B_F}^{B'_F} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{B_E}^{B'_E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M_{B'_F}^{B_E}(f) = (P_{B_F}^{B'_F})^{-1} M_{B_F}^{B_E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_F}^{B'_E}(f) = M_{B_F}^{B_E} P_{B_E}^{B'_E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{B'_F}^{B'_E}(f) = (P_{B_F}^{B'_F})^{-1} M_{B_F}^{B_E} P_{B_E}^{B'_E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

7.19 Considerem l'endomorfisme $f_N\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definit per $f_N(A) = NA$, on $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

1) Trobeu la matriu associada a f_N en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Calculeu $\ker f_N$ i $\operatorname{Im} f_N$.

3) Trobeu la matriu associada a f_N en la base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solució:

1) Calculem les imatgesdels vectors de la base canònica i expressem els resultats en la base canònica. Tenim:

$$f_N\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad f_N\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$f_N\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad f_N\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de f_N en la base canònica és:

$$M_{\mathrm{CAN}}(f_N)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2) Tenim:

$$\mathrm{Ker}(f_N)=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} : f_N\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

És a dir, $\left(\begin{smallmatrix}x & y\\ z & t\end{smallmatrix}\right)$ és del nucli si i només si:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z & y+t\\ x+z & y+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

que equival a dir que $z=-x$, $t=-y$. Per tant:

$$\mathrm{Ker}(f_N)=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ -x & -y\end{pmatrix} : x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Així, $\dim(\mathrm{Ker}(f_N))=2$.

D'altra banda, $\mathrm{Im}(f_N)$ està generat per les columnes de la matriu $M_{\mathrm{CAN}}(f_N)$; és a dir:

$$\mathrm{Im}(f_N)=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\rangle$$

i, per tant, $\dim(\mathrm{Im}(f_N))=2$.

3) De les dades del problema, tenim:

$$P_{\mathrm{CAN}}^{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

d'on resulta que:

$$P_{B}^{\mathrm{CAN}}=(P_{\mathrm{CAN}}^{B})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Finalment, la matriu de f_N en base B és:

$$M_B(f_N)=P_{B}^{\mathrm{CAN}}M_{\mathrm{CAN}}(f_N)P_{\mathrm{CAN}}^{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

7.20 Sigui $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ la matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica.

1) Trobeu els subespais Ker$f$ i Imf.

2) Trobeu una base B de $\mathbb{R}^3$ per a la qual la matriu associada f sigui $M_B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Solució:

1) El subespai $\mathrm{Im}(f)$ està generat per les columnes de la matriu de f. Veiem que les dues últimes columnes són linealmente independents. Per tant:

$$\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per tant, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Els vectors del nucli són les solucions de $M \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; és a dir, les solucions del sistema $2y + z = 0$, $z = 0$, que són $x = x, y = z = 0$. Per tant:

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

i $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

2) Posem $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & c \end{smallmatrix}\right)$. S'ha de satisfer que $P^{-1}MP = M_B$. Per tant, resolent $MP = PM_B$, on la incògnita és la matriu P, trobem:

$$MP = \begin{pmatrix} 2d+h & 2e+i & 2g+j \\ 3h & 3i & 3j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PM_B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & h & i \end{pmatrix}.$$

D'on resulta el sistema:

$$2d + h = 0, \quad 3h = 0, \quad 2e + i = a, \quad 3i = d, \quad 2g + j = b, \quad h = 0, \quad 3j = e, \quad i = 0.$$

Per tant, les possibles matrius P són de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} 6j & 2g+j & c \\ 0 & 3j & g \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix},$$

amb $c, g, j \in \mathbb{R}$ i $j \neq 0$ (ja que P ha de ser invertible al ser una matriu de canvi de base). Per exemple, prenent $g = c = 0$ i $j = 1$, obtenim:

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, una possible base on la matriu de f té forma demanada és:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7.21 Siguin $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectors de $\mathbb{R}^4$ i E el subespai generat per $B_E = \{u_1, u_2\}$. Siguin $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectors de $\mathbb{R}^3$ i F el subespai generat per $B_F = \{v_1, v_2\}$. Definim $f\colon E \to F$ tal que $f(x_1u_1 + x_2u_2) = (x_1 - x_2)v_1 + (x_1 + x_2)v_2$.

1) Trobeu la matriu d'f en les bases B_E i B_F.

2) És f injectiva? És exhaustiva?

3) Siguin $B'_E = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ i $B'_F = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. Proveu que són bases d'E i F respectivament i doneu la matriu d'f en aquestes noves bases.

Solució: En primer lloc, observem que els vectors u_1 i u_2 són linealment independents i, per tant, formen una base de E. Igualment, el vectors v_1 i v_2 són linealment independents i formen, per tant, una base de F.

1) Per a calcular la matriu $M_{B_F}^{B_E}(f)$, hem de calcular les imatges $f(u_1)$ i $f(u_2)$ i calcular les components dels vectors resultants en la base B_F. Tenim:

$$f(u_1) = v_1 + v_2 \Rightarrow f(u_1)_{B_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(u_2) = -v_1 + v_2 \Rightarrow f(u_2)_{B_F} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Així doncs:

$$M_{B_F}^{B_E}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) El rang de la matriu $M_{B_F}^{B_E}(f)$, que és la dimensió de $\mathrm{Im}(f)$, és 2. Per tant, f és exhaustiva. Per la fórmula de les dimensions, trobem que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ i, per tant, f és injectiva. Per tant, f és un isomorfisme.

3) Només cal comprovar que els vectors donats pertanyen a E i a F respectivament i que són linealment independents. Tenim:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2 - u_1, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1 + u_2.$$

Per tant:

$$P_{B_E}^{B'_E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu té rang 2 i, per tant, els vectors B'_E formen una base de E. Anàlogament, tenim:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 - v_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_1 - v_2.$$

Per tant:

$$P_{B_F}^{B'_F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu també té rang 2 i, per tant, els vectors de B'_F formen una base de F. Finalment, la matriu associada a f en les bases B'_E i B'_F és:

$$M_{B'_F}^{B'_E} = (P_{B_F}^{B'_F})^{-1} M_{B_F}^{B_E} P_{B_E}^{B'_E} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.22 Considerem les aplicacions lineals associades a les matrius:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Observeu que si les apliquem a un vector $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ s'obté respectivament:

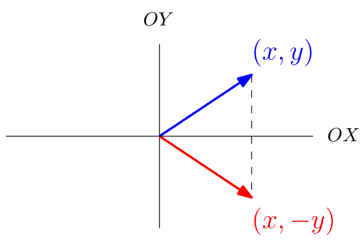
1) la reflexió respecte de l'eix OX;
2) la reflexió respecte de l'eix OY;
3) la projecció ortogonal sobre l'eix OX;
4) la projecció ortogonal sobre l'eix OY;
5) un escalat de factor k;
6) una rotació en sentit antihorari d'angle α amb centre l'origen.

Solució:

1) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

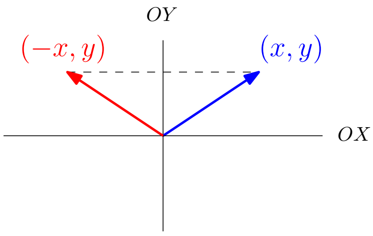
que efectivament és la seva reflexió respecte de l'eix OX.



2) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix},$$

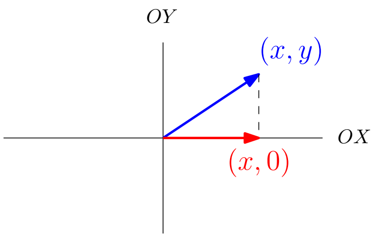
que efectivament és la seva reflexió respecte de l'eix OY.



3) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$$

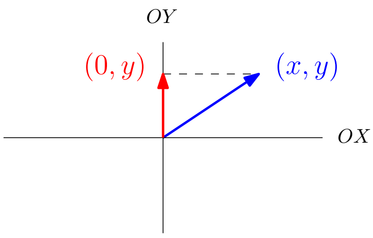
que efectivament és la projecció perpendicular del vector sobre l'eix OX.



4) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

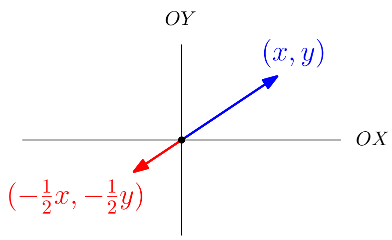
que efectivament és la projecció perpendicular del vector sobre l'eix OY.



5) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix},$$

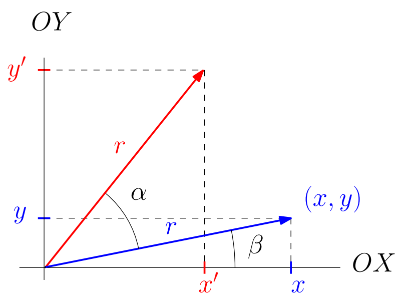
que efectivament és el producte del vector per k. A la figura hem fet $k = -1/2$.



6) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix},$$

que efectivament són les coordenades del vector que s'obté després de girar-lo d'un angle α en sentit antihorari.



$x = r\cos\beta \qquad y = r\sin\beta$

$$x' = r\cos(\alpha+\beta) = r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= (r\cos\beta)\cos\alpha - (r\sin\beta)\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$y' = r\sin(\alpha+\beta) = r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$
$$= (r\cos\beta)\sin\alpha + (r\sin\beta)\cos\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Observació. Una altra manera de raonar-ho és adonar-se que les columnes de les matrius que ens donen a cada apartat són efectivament les imatges de la base canònica $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\}$ de $\mathbb{R}^2$ per la corresponent transformació. Per exemple, per la reflexió respecte de l'eix OX el primer vector de la base queda fix, ja que està sobre l'eix, mentre que el segon canvia el seu sentit, de manera la base anterior s'aplica respectivament als vectors $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)$, que efectivament són les columnes de la primera matriu. Anàlogament, per la projecció perpendicular sobre l'eix OX s'apliquen respectivament als vectors $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ (ja és un vector d'aquest eix, així que coincideix amb la seva projecció sobre aquest eix) i $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ (en ser perpendicular a l'eix sobre el qual es projecta, la seva projecció perpendicular redueix simplement a l'origen, que correspon al vector zero). En el cas de la rotació d'angle α en sentit antihorari, el primer vector de la base efectivament s'aplica al vector $\left(\begin{smallmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{smallmatrix}\right)$ mentre que el segon s'aplica al $\left(\begin{smallmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{smallmatrix}\right)$, i d'aquí la matriu de l'enunciat.

7.23 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^2$ següents:

1) una rotació de 30° en sentit antihorari seguida d'una reflexió respecte a l'eix OY;

2) una projecció ortogonal sobre l'eix y, seguida d'un escalat de factor $k = 1/2$;

3) un escalat de factor $k = 2$, seguida d'una rotació de 45° en sentit antihorari seguit d'una reflexió respecte a l'eix OY.

Solució: Notem per R_α la rotació d'angle α en sentit antihorari; per S_{OY} la simetria respecte de l'eix OY; per P_{OY} la projecció sobre l'eix OY; i per E_k l'escalat de factor k. Segons el problema 7.22, les matrius associades a aquestes transformacions en base canònica són:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad S_{OY} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{OY} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

1) En aquest cas, tenim:

$$R_{30^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de la composició demanada és:

$$S_{OY} \circ R_{30^\circ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

2) La matriu de la composició demanada és:

$$E_{1/2} \circ P_{OY} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3) En aquest cas, tenim:

$$R_{45^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de la composició demanada és:

$$S_{OY} \circ R_{45^\circ} \circ E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

7.24 Siguin $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicacions lineals. Determineu si $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ quan:

1) f_1 és la projecció ortogonal sobre l'eix OY i f_2 és la projecció ortogonal sobre l'eix OX;
2) f_1 és la rotació en sentit antihorari d'angle θ_1 i f_2 és la rotació en sentit antihorari d'angle θ_2;
3) f_1 és la reflexió respecte l'eix OX i f_2 és la reflexió respecte l'eix OY;
4) f_1 és la projecció ortogonal sobre l'eix OY i f_2 la rotació en sentit antihorari d'angle θ.

Solució: Comprovem en cada cas si es satisfà la corresponen igualtat entre les matrius associades en base canònica; és a dir, comprovem si $M(f_1)M(f_2) = M(f_2)M(f_1)$, donat que $M(f_1 \circ f_2) = M(f_1)M(f_2)$ i $M(f_2 \circ f_1) = M(f_2)M(f_1)$. Tenim en compte, a més, les matrius associades donades al problema 7.22.

1) En aquest cas la igualtat és certa, ja que:

$$M(f_1)M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(f_2)M(f_1).$$

2) En aquest cas la igualtat és certa, ja que, tenint en compte les fórmules trigonomètriques que donen $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ i $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ en funció del sinus i el cosinus dels angles θ_1 i θ_2:

$$M(f_1)M(f_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$M(f_2)M(f_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2+\theta_1) & -\sin(\theta_2+\theta_1) \\ \sin(\theta_2+\theta_1) & \cos(\theta_2+\theta_1) \end{pmatrix}$$

d'on deduïm que $M(f_1)M(f_2) = M(f_2)M(f_1)$.

3) La igualtat és certa, ja que:

$$M(f_1)M(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(f_2)M(f_1).$$

4) En aquest cas la igualtat no és certa si $\theta \neq 0°$, ja que, d'una banda tenim:

$$M(f_1)M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

i de l'altra:

$$M(f_2)M(f_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si $\theta = 0°$, les dues composicions són iguals a $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Observem, però, que si $\theta = 0°$, llavors f_2 és la aplicació identitat.

7.25 Considerem les aplicacions lineals associades a les matrius:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Observeu que si les apliquem a un vector $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ s'obté respectivament:

1) la reflexió respecte del pla $z = 0$;

2) la reflexió respecte del pla $y = 0$;

3) la reflexió respecte del pla $x = 0$;

4) la projecció ortogonal sobre el pla $z = 0$;

5) la projecció ortogonal sobre el pla $y = 0$;

6) la projecció ortogonal sobre el pla $x = 0$;

7) una rotació d'angle α respecte a l'eix OZ en sentit antihorari si observem el pla $z = 0$ des del semiplà $z > 0$;

8) una rotació d'angle α respecte a l'eix OY en sentit antihorari si observem el pla $y = 0$ des del semiplà $y > 0$;

9) una rotació d'angle α respecte a l'eix OX en sentit antihorari si observem el pla $x = 0$ des del semiplà $x > 0$.

Solució:

1) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva reflexió respecte del pla $z = 0$, ja que només canvia el signe de la tercera coordenada.

2) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva reflexió respecte del pla $y = 0$, ja que només canvia el signe de la segona coordenada.

3) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva reflexió respecte del pla $x = 0$, ja que només canvia el signe de la primera coordenada.

4) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva projecció perpendicular sobre el pla $z = 0$.

5) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva projecció sobre el pla $y = 0$.

6) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva projecció sobre el pla $x = 0$.

7) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z \end{pmatrix},$$

que efectivament són les coordenades del vector que s'obté després de girar-lo d'un angle α en sentit antihorari al voltant de l'eix OZ, ja que deixa fixa la tercera coordenada i les altres dues corresponen a una rotació d'angle α en el pla XY.

8) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha + z\sin\alpha \\ y \\ -x\sin\alpha + z\cos\alpha \end{pmatrix},$$

que efectivament són les coordenades del vector que s'obté després de girar-lo d'un angle α en sentit antihorari al voltant de l'eix OY, ja que deixa fixa la segona coordenada i les altres dues corresponen a una rotació d'angle $-\alpha$ en el pla XZ, que és el mateix que una rotació d'angle α en sentit antihorari respecte a l'eix OY.

9) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{pmatrix},$$

que efectivament són les coordenades del vector que s'obté després de girar-lo d'un angle α en sentit antihorari al voltant de l'eix OX, ja que deixa fixa la primera coordenada i les altres dues corresponen a una rotació d'angle α en el pla YZ

També es pot raonar com a l'Exercici 22, buscant les imatges de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ per cadascuna de les transformacions.

7.26 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^3$ següents:

1) una reflexió respecte el pla $x = 0$, seguida d'una projecció ortogonal sobre el pla $y = 0$;

2) una rotació de 45° en sentit antihorari respecte l'eix OY, seguida d'un escalat de factor $k = \sqrt{2}$;

3) una rotació de 30° en sentit antihorari respecte l'eix OX, seguida d'una rotació de 30^o en sentit antihorari respecte l'eix OZ, seguida d'un escalat de factor $k = 1/3$.

Solució: Notem per S_π la simetría respecte del pla π; P_π la proyecció sobre el pla π; $R_{\alpha,r}$ la rotació d'angle α en sentit antihorari respecte de la recta r; i per E_k l'escalat de factor k. Segons el problema 7.25, les matrius associades a les transformacions de l'enunciat són:

$$S_{x=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{y=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$R_{\alpha,OX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_{\alpha,OY} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_{\alpha,OZ} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Tenim:

$$P_{y=0} \circ S_{x=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Tenim:

$$E_{\sqrt{2}} \circ R_{45^\circ,OY} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Tenim:

$$\begin{aligned} E_{1/3} \circ R_{30^\circ,OZ} \circ R_{30^\circ,OX} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\ &= 1/6 \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1 & 3/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.27 Siguin $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicacions lineals. Determineu si $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ quan:

1) f_1 és un escalat de factor k i f_2 és una rotació en sentit antihorari respecte l'eix OZ d'angle θ;

2) f_1 és una rotació en sentit antihorari respecte l'eix OX d'angle θ_1 i f_2 és la rotació en sentit antihorari respecte l'eix OZ d'angle θ_2.

Solució: Comprovem en cada cas si es satisfà la corresponen igualtat entre les matrius associades en base canònica; és a dir, comprovem si $M(f_1)M(f_2) = M(f_2)M(f_1)$, donat que $M(f_1 \circ f_2) = M(f_1)M(f_2)$ i $M(f_2 \circ f_1) = M(f_2)M(f_1)$. Tenim en compte, a més, les matrius associades donades al problema 7.25.

1) En aquest cas, sí que commuten les transformacions. En efecte, tenim:

$$\begin{aligned} M(f_1)M(f_2) &= \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta & 0 \\ k\sin\theta & k\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \\ M(f_2)M(f_1) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta & 0 \\ k\sin\theta & k\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) En aquest cas les transformacions no commuten, ja que:

$$
\begin{aligned}
M(f_1)M(f_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\
M(f_2)M(f_1) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2\cos\theta_1 & \sin\theta_2\sin\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\cos\theta_1 & -\cos\theta_2\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$