Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtica Aplicada II
Febrer 2012

5. Matrius, sistemes i determinants

5.1 Matrius: operacions bàsiques i matrius escalonades

Repàs de l'àlgebra de matrius

Els escalars

Per un **cos d'escalars** $\mathbb{K}$ entendrem un conjunt de nombres amb dues operacions (*suma* i *producte*) tals que

- es satisfan les propietats habituals (*commutativa*, *associativa*, *distributiva*, *elements neutres*)
- són invertibles (podem *restar* i *dividir*)

Exemples: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{C}$

Matrius

Siguin $m, n \geq 1$ enters. Una **matriu de tipus $m \times n$ amb elements al cos $\mathbb{K}$** consisteix en mn elements de $\mathbb{K}$ arranjats en una taula de m files i n columnes

Denotarem per a_{ij} l'element que es troba a la fila i, columna j

Una matriu genèrica la representem així:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Farem servir també la notació $A = (a_{ij})_{m \times n}$

El conjunt de totes les matrius $m \times n$ el denotarem per $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

Tipus de matrius

- Una matriu de tipus $1 \times n$ s'anomena matriu fila
- Una matriu de tipus $m \times 1$ s'anomena matriu columna
- La matriu nul·la $O_{m,n}$ (o simplement O) és la matriu tipus $m \times n$ on tots els elements són iguals a 0
- Una matriu de tipus $n \times n$ s'anomena quadrada. El conjunt de totes les matrius quadrades $n \times n$ amb elements a $\mathbb{K}$ es denota per $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Una matriu quadrada $(a_{ij})_{n\times n}$ és
  - triangular superior si $a_{ij} = 0$ per tot $i > j$
  - triangular inferior si $a_{ij} = 0$ per tot $i < j$
  - diagonal si és triangular superior i inferior simultàniament
- La matriu $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ és la matriu diagonal $(d_{ij})_{n\times n}$ amb $d_{ii} = \lambda_i$ per tot i
- La matriu identitat I_n és la matriu diagonal $\mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1)$

Suma de matrius

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$

La seva **suma** és la matriu $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Propietats

Si $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es compleix:

- *(Associativa)* $(A + B) + C = A + (B + C)$
- *(Commutativa)* $A + B = B + A$
- *(Element neutre)* $A + O = O + A = A$
- *(Element oposat)* Existeix una matriu B tal que
$$A + B = B + A = O$$
(a aquesta B l'anomenem $-A$)

Producte per escalars

Siguin $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ un escalar

El **producte d'A per l'escalar λ** és la matriu $\lambda A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Propietats

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es compleix:

- *(Pseudoassociativa)* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- *(Distributiva 1)* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- *(Distributiva 2)* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- *(Identitat)* $1A = A$

Fixem-nos que $(-1)A = -A$

Transposició

Sigui $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

La seva **transposada** és la matriu $A^t = (b_{ij})_{n\times m} \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times m}$ definida per $b_{ij} = a_{ji}$

Clarament $(A^t)^t = A$

Una matriu quadrada A és

simètrica si $A^t = A$
antisimètrica si $A^t = -A$

Producte de matrius

Siguin $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B = (b_{ij})_{n\times p} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

El seu **producte** és la matriu $AB = (c_{ij})_{m\times p} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ amb

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

Observacions

- El producte de dues matrius qualssevol no té per què estar definit
- AB pot estar definit però BA no
- Encara que AB i BA estiguin definits, en general $AB \neq BA$
- El producte és una operació interna dins de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propietats del producte de matrius

Si A, B, C són matrius i les operacions següents estan definides, es compleix:

- *(Associativa)* $(AB)C = A(BC)$
- *(Distributives)* $A(B + C) = AB + AC$ i $(A + B)C = AC + BC$
- *(Element unitat)* $IA = A = AI$, on I és la matriu identitat del tipus que convingui
- *(Relació amb la transposada)* $(AB)^t = B^t A^t$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, denotarem per A^k el producte $AA \cdots A$
(és a dir, $A^2 = AA, A^3 = AAA$, etc.)

Matriu inversa

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diem que B és la **matriu inversa** d'A si

$$AB = BA = I_n$$

Si això es compleix diem que A és **invertible** i denotem per A^{-1} la matriu inversa

Observacions

- Si existeix la inversa, és única
- No tota matriu té inversa
- Les matrius invertibles no tenen files ni columnes nul·les

Propietats de la matriu inversa

Si A i B són matrius invertibles del mateix tipus i λ és un escalar no nul, es compleix:

- la matriu A^{-1} és invertible i $(A^{-1})^{-1} = A$
- la matriu A^k és invertible i $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- la matriu λA és invertible i $(\lambda A)^{-1} = (\lambda)^{-1} A^{-1}$
- la matriu A^t és invertible i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- el producte AB és invertible i $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Transformacions elementals i matrius escalonades

Transformacions elementals

Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Una **transformació elemental per files** d'A consisteix en una de les tres operacions següents:

(I) intercanviar dues files d'A

(II) multiplicar una fila d'A per un escalar no nul

(III) sumar a una fila d'A el resultat de multiplicar una altra fila per un escalar no nul

Una matriu és **elemental (per files)** si es pot obtenir a partir d'una matriu identitat mitjançant una única transformació elemental per files

Matrius equivalents

Teorema
Sigui T una transformació elemental i sigui $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El resultat d'aplicar la transformació T a la matriu M és EM, on E és la matriu elemental resultant d'aplicar T a la identitat I_m

Una matriu B és **equivalent (per files)** a una matriu A si B es pot obtenir a partir d'A fent una seqüència finita de transformacions elementals

Per tant, si B és equivalent a A podem escriure

$$B = E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A,$$

on les E_i són matrius elementals

Matrius escalonades

Una matriu és **escalonada (per files)** si

- si una fila és nul·la (composta enterament per zeros), totes les que estan per sota d'ella també son nul·les
- en cada fila no nul·la, el primer element no nul és un 1 (anomenat l'*1 dominant* o el *pivot* de la fila)
- el pivot d'una fila sempre es troba més a la dreta que el pivot de la fila anterior

Teorema
Tota matriu és equivalent a una matriu escalonada per files

El **rang** d'una matriu A és el nombre de files no nul·les de qualsevol matriu escalonada equivalent a A

Aplicació al càlcul de la inversa (I)

Lema

Si E és una matriu elemental, aleshores E és invertible i la seva inversa E^{-1} també és una matriu elemental

Comprovació:

(I) Si B és una matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (I) (intercanvi files i i j), tenim $BB = I$

(II) Si C_λ és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (II) (multiplicar una fila per $\lambda \neq 0$), tenim $C_\lambda C_{\lambda^{-1}} = I = C_{\lambda^{-1}} C_\lambda$

(II) Si D_k és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (III) (sumar a la fila i la fila j multiplicada per k), tenim $D_k D_{-k} = I = D_{-k} D_k$

Aplicació al càlcul de la inversa (II)

Teorema

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i M una matriu escalonada equivalent a A. Aleshores A és invertible si i només si tots els elements de la diagonal de M són iguals a 1

Corol·lari

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores A és invertible si i només si el rang d'A és n

Mètode de Gauss-Jordan per al càlcul de la inversa

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

La demostració del teorema anterior implica que

si $I_n = E_r \cdots E_2 E_1 A$, aleshores $A^{-1} = E_r \cdots E_2 E_1$

Donada A, podem seguir els passos següents per trobar A^{-1}, si existeix:

- Comencem amb la matriu $(A|I_n)$
- Apliquem transformacions elementals a $(A|I_n)$, amb l'objectiu d'arribar a $(I_n|B)$
- Si ho aconseguim, $A^{-1} = B$
- Altrament, A no és invertible

5. Matrius, sistemes i determinants

5.2 Sistemes d'equacions lineals

Sistemes d'equacions lineals

Una **equació lineal** en les variables $x_1, \ldots, x_n$ és una expressió del tipus

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

on $a_1, \ldots, a_n, b$ pertanyen al cos d'escalars $\mathbb{K}$

Una **solució** és $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

(Obs. Una equació lineal pot tenir entre zero i infinites solucions)

Sistemes d'equacions lineals

Un **sistema d'equacions lineals** és un conjunt d'equacions lineals (totes amb les mateixes variables $x_1, \ldots, x_n$)

La forma genèrica d'un sistema d'equacions lineals seria doncs:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Una **solució del sistema** és una n-upla $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ que és solució de totes les equacions del sistema

Solucions d'un sistema

Direm que un sistema és

- incompatible si no té cap solució
- compatible determinat si té una única solució
- compatible indeterminat si té més d'una solució

La **solució general** d'un sistema és el conjunt de totes les seves solucions

Dos sistemes són **equivalents** si tenen la mateixa solució general

Sistemes equivalents

Dos sistemes amb les mateixes equacions però ordenades de manera diferent són equivalents

I si en un sistema

- multipliquem una equació per un escalar (no nul), o bé
- a una equació li sumem un múltiple d'una altra

el sistema resultant és equivalent al primer

Matriu associada a un sistema

Donat el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

la seva **matriu associada** i les matrius de variables i de termes independents són

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Podem escriure el sistema com un producte de matrius:

$$Ax = b$$

Matriu ampliada

La **matriu ampliada** és la matriu $(A|b)$, és a dir,

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Obs. Si es realitzen transformacions elementals a la matriu ampliada d'un sistema, el sistema resultant és equivalent al primer

Per tant, tot sistema d'equacions lineals és equivalent a un en què la matriu ampliada és escalonada

Sistemes escalonats

Un sistema escalonat genèric seria

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \cdots + c_{rn}x_n & = & d_r \end{array}\right.$$

(si cal reordenem les variables)

Les variables $x_1, \ldots, x_r$ les anomenarem principals i la resta les anomenarem lliures

Podem resoldre el sistema aïllant "cap amunt"

La variable principal x_r la podem aïllar en termes de les variables lliures:

$$x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n$$

Ara podem aïllar x_{r-1} en termes de x_r i de les variables lliures, etc

Solució general d'un sistema escalonat

En un sistema escalonat podem expressar totes les variables principals en termes de les lliures (i de constants escalars):

$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\
x_2 &= f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\
\vdots &\quad \vdots \\
x_r &= f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n
\end{aligned}$$

Aquesta és la solució general del sistema

Obs. Per a cada assignació de valors que donem a les variables lliures $x_{r+1}, \ldots, x_n$ obtindrem una solució particular del sistema

Diem que el sistema té $n - r$ graus de llibertat

Forma paramètrica de la solució general

Si la solució general d'un sistema és

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\ x_2 & = & f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n \end{array}$$

anomenarem forma paramètrica de la solució a l'expressió

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \begin{pmatrix} e_{1,r+1} \\ e_{2,r+1} \\ \vdots \\ e_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ e_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Discussió de sistemes: el teorema de Rouché-Frobenius

Teorema

Considerem un sistema d'equacions lineals que té matriu associada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i matriu ampliada $(A|b)$

Sigui r el rang d'A i sigui r' el rang de $(A|b)$

Aleshores,

- si $r < r'$, el sistema és incompatible (SI)
- si $r = r' = n$, el sistema és compatible determinat (SCD)
- si $r = r' < n$, el sistema és compatible indeterminat (SCI) amb $n - r$ graus de llibertat

Anomenarem rang d'un sistema lineal compatible al rang de la matriu associada

Sistemes homogenis

Un sistema d'equacions lineals és **homogeni** si tots els termes independents són iguals a 0

Obs. Un sistema homogeni sempre és compatible (ja que tenim la solució trivial $x_1 = \cdots = x_n = 0$)

Corol·lari

Sigui A la matriu associada a un sistema homogeni en n variables; sigui r el rang d'A. Aleshores

- si $r = n$, el sistema és compatible determinat i l'única solució és la trivial
- si $r < n$, el sistema és compatible indeterminat i té alguna solució diferent de la trivial

Resolució de sistemes: eliminació gaussiana

Per trobar la solució general d'un sistema d'equacions lineals qualsevol fem el següent:

1. Cerquem la matriu ampliada $(A|b)$
2. Cerquem la matriu escalonada M equivalent a $(A|b)$
3. Apliquem el teorema de Rouché-Frobenius per determinar si el sistema és compatible
4. Cas que el sistema sigui compatible, trobem la solució general a partir del sistema equivalent amb matriu ampliada M

5. Matrius, sistemes i determinants

5.3 Determinants

Definició de determinant

Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un **menor d'$A$** és qualsevol matriu formada a partir d'A eliminant un cert nombre de files i el mateix nombre de columnes

El **menor associat a l'element a_{ij}** és la matriu A_{ij} obtinguda en eliminar la fila i i la columna j de la matriu A.
El menor A_{ij} és una matriu quadrada de tipus $(n-1) \times (n-1)$

El **determinant d'A** es defineix recursivament com

- si $n = 1$, aleshores $\det(A) = a_{11}$
- si $n \geq 2$, aleshores

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + \\ &\quad (-1)^{1+j} a_{1j}\det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det(A_{1n}) \end{aligned}$$

Teorema

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i $i, j \in [n]$. Aleshores

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det(A_{ik})$$

(Càlcul del determinant desenvolupant per la fila i)

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} \det(A_{kj})$$

(Càlcul del determinant desenvolupant per la columna j)

Càlcul de determinants

(Enlloc de $\det(A)$, a vegades escriurem $|A|$)

- Matrius 2×2 i 3×3:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= a\det((d)) - b\det((c)) = ad - bc \\
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
&= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\
&= aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi
\end{aligned}$$

- Si A té una fila o una columna nul·la llavors $\det(A) = 0$
  Si $A = Diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, llavors $\det(A) = a_1 a_2 \ldots a_n$

Determinants i transformacions elementals

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si B és la matriu que s'obté d'A

- intercanviant dues files, aleshores $\det(B) = -\det(A)$ (transformació tipus (I))
- multiplicant la fila i-èsima d'A per λ, aleshores $\det(B) = \lambda \det(A)$ (transformació tipus (II))
- sumant-li a una fila un múltiple d'una altra, aleshores $\det(B) = \det(A)$ (transformació tipus (III))

Corol·lari

Si M s'obté a partir d'A fent transformacions elementals,

$$\det(M) = K \det(A), \qquad \text{on } K \neq 0$$

Per tant, si A i M són matrius equivalents aleshores,

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(M) \neq 0$$

Caracterització de matrius invertibles

Teorema

Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és invertible si i només si $\det(A) \neq 0$

Corol·lari

Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ té rang n si i només si $\det(A) \neq 0$

Teorema

Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El rang d'$A$ és r si i només si el més gran menor d'A amb determinant no nul és $r \times r$

Determinants i operacions amb matrius

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^t) = \det(A)$
- si A és invertible, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Però en general, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

6. Espais vectorials

$\mathbb{R}^n$ i les seves operacions

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n \right\}$$

Siguin $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ elements de $\mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$

Suma a $\mathbb{R}^n$:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Producte per escalars a $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(És a dir, les dues operacions són "component a component")

Propietats

La suma a $\mathbb{R}^n$ satisfà les propietats següents:

s1) (associativa) $x + (y + z) = (x + y) + z$

s2) (commutativa) $x + y = y + x$

s3) (element neutre) $x + \mathbf{0} = x$ on $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

s4) (element oposats) per tot x existeix x' tal que $x + x' = \mathbf{0}$

El producte per escalars a $\mathbb{R}^n$ satisfà:

p1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

p2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

p3) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

p4) $1x = x$

(Totes les propietats són certes perquè ho són a $\mathbb{R}$ i les operacions són component a component)

6.2 Espais vectorials

Un **espai vectorial sobre un cos** $\mathbb{K}$ consisteix en

1. un conjunt no buit E
2. una operació interna $E \times E \to E$ (*suma* $+$) i
3. una aplicació $\mathbb{K} \times E \to E$ (*producte per escalars* $\cdot$)

de manera que per a tot $u, v, w \in E$ i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ es satisfà:

- e1) *(associativa)* $u + (v + w) = (u + v) + w$
- e2) *(commutativa)* $u + v = v + u$
- e3) *(element neutre)* existeix un únic element $\mathbf{0}_E \in E$ tal que $u + \mathbf{0}_E = u$
- e4) *(element oposat)* per cada $u \in E$ existeix un únic $u' \in E$ tal que $u + u' = \mathbf{0}_E$
- e5) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$
- e6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- e7) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- e8) $1u = u$, on 1 és el neutre del producte de $\mathbb{K}$

Alguns exemples d'espais vectorials

- $\mathbb{R}^n$
- $\mathbb{Z}_2^n$: cadenes de n bits
  La suma és bit a bit: p. ex.,
  $$(0,1,1,0)+(1,1,1,0)=(1,0,0,0)$$
  Producte per escalars: $0u=\mathbf{0}_{\mathbb{Z}_2^n}$ i $1u=u$
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (les matrius $m\times n$ amb entrades en el cos $\mathbb{K}$)
- Les matrius de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que són triangulars superiors
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$: el conjunt dels polinomis amb coeficients a $\mathbb{R}$
- $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$: els polinomis de grau com a molt d i coeficients a $\mathbb{R}$
- L'espai vectorial trivial format per un únic element: $\{\mathbf{0}_E\}$
- Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni

Propietats

Si v pertany a l'espai vectorial E i λ és un escalar, es satisfà:

- $0v = \mathbf{0}_E$
- $\lambda\,\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$
- Si $\lambda\, v = \mathbf{0}_E$, aleshores $\lambda = 0$ o $v = \mathbf{0}_E$
- L'element oposat de v és $(-1)v$; normalment escriurem $-v$

6.3 Subespais vectorials i combinacions lineals

Un subconjunt $S \subseteq E$ és un **subespai vectorial (SEV)** si compleix

(s1) $S \neq \emptyset$

(s2) per tot $u, v \in S$, $u + v \in S$

(s3) per tot $u \in S$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in S$

El vector $\mathbf{0}_E$ pertany a tots els subespais vectorials

Alguns exemples de subespais espais vectorials

- $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ és un subespai vectorial de l'espai de polinomis $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- Les matrius triangulars superiors de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formen un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n variables i coeficients a $\mathbb{R}$ és un SEV de $\mathbb{R}^n$

Intersecció de subespais

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ $((1,1) + (2,-2) \notin S \cup S')$

Combinació lineal

Donats $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E, una **combinació lineal de** $u_1, \ldots, u_k$ és una expressió del tipus

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k,$$

on $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ són escalars

El vector v **és combinació lineal de** $u_1, \ldots, u_k$ si existeixen escalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tals que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$$

Subespai generat

Siguin $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E. El **subespai generat** per $u_1, \ldots, u_k$ és el conjunt

$$\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\},$$

és a dir, el conjunt de totes les combinacions lineals de $u_1, \ldots, u_k$

Proposició

El subespai generat $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ és, com el seu nom indica, un subespai vectorial. A més, és el subespai més petit que conté $u_1, \ldots, u_k$

Si un espai S el podem escriure com $S = \langle u_1, \ldots, u_\ell \rangle$, direm que $\{u_1, \ldots, u_\ell\}$ és un **conjunt de generadors** de S. El conjunt de generadors d'un espai no és únic

Observem que v és combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$ si i només si $v \in \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

Exemples de subespais generats

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$
  $= \langle (1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1) \rangle$
- L'espai de les matrius $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ està generat per les matrius M_{ij} que tenen totes les entrades iguals a 0, excepte la de la posició i, j, que és igual a 1, $1 \leq i \leq n$ i $1 \leq j \leq m$
  Per exemple, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) =< M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22} >$, on

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si volguéssim generar les matrius triangulars superiors, agafaríem de les matrius M_{ij} anteriors només les que tenen $i \leq j$
- Subespai donant els vectors en funció de paràmetres

$$\begin{aligned}&\{a+(b-a)x+(c-b)x^2+(a-c)x^3 : a,b,c \in \mathbb{R}\}\\&=\{a(1-x+x^3)+b(x-x^2)+c(x^2-x^3) : a,b,c\in\mathbb{R}\}\\&=\langle 1-x+x^3, x-x^2, x^2-x^3\rangle\end{aligned}$$

6.4 Independència lineal

Siguin $u_1, \ldots, u_k \in E$. L'equació

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

sempre té la solució $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.
Si aquesta és l'única solució direm que els vectors $u_1, \ldots, u_k$ són **linealment independents** (LI)

Si hi ha alguna solució amb un $\lambda_i \neq 0$, direm que els vectors són **linealment dependents** (LD)

(També direm que el conjunt $\{u_1, \ldots, u_k\}$ és LI o LD, resp.)

Exemples:

- El vector $\mathbf{0}_E$ és linealment dependent
- Donat un vector $u \neq \mathbf{0}_E$, el vector u és linealment independent
- Si u és un vector qualsevol i λ és un escalar, $\{u, \lambda u\}$ és LD

Per determinar si un conjunt de vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de $\mathbb{R}^n$ són linealment independents seguim els passos següents:

(1) formem una matriu A amb els vectors donats, posant-los per columnes

(2) calculem el rang r d'A

(3)
- si $r = k$, aleshores els k vectors són LI
- si $r < k$, aleshores són LD; si hem calculat el rang escalonant la matriu A, aleshores els vectors que corresponen a les columnes on hi ha els uns dominants són un subconjunt LI el més gran possible; si hem calculat el rang per menors, els vectors que corresponent a les columnes del menor d'A més gran amb determinant no nul són un subconjunt LI el més gran possible

En general, per determinar si un conjunt de vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E són linealment independents seguim els passos següents:

(1) a partir de l'equació vectorial

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

obtenim un sistema homogeni amb incògnites $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$

(2) discutim el sistema, si és

- compatible determinat els vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ són LI
- compatible indeterminat els vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ són LD

Propietats

Sigui $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E

- Si $\mathbf{0}_E$ és a S, llavors $u_1, \dots, u_k$ són LD
- Si $u_1, \dots, u_k$ són LI, llavors $\mathbf{0}_E$ no és a S
- Si $u_1, \dots, u_k$ són LI, tot subconjunt de S és LI
- Si $u_1, \dots, u_k$ són LD, tot conjunt que conté S és LD

Teorema

Si $u_1, \dots, u_k$ són LD i u_1 és combinació lineal dels altres vectors de S, aleshores

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = \langle u_2, \dots, u_k \rangle$$

Caracteritzacions

Teorema

Un conjunt de vectors S és LD si, i només si, hi ha un vector v a S que és combinació lineal de la resta de vectors de S

Corol·lari

Sigui $v \in E$. Si $u_1, \ldots, u_k$ són LI, aleshores
$v, u_1, \ldots, u_k$ són LI si, i només si, $v \notin \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

6.5 Bases i dimensió

Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Un conjunt de vectors $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ és una **base d'E** si

(b1) B és linealment independent

(b2) $E = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, és a dir, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ generen E

La **base canònica**

- de $\mathbb{K}^n$ és $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$
- de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ és la formada per les mn matrius M_{ij} que tenen totes les entrades nul·les excepte la i, j, que és igual a 1
- de $\mathbb{K}_d[x]$ és $\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$
(també a $\{x^d, x^{d-1}, \ldots, 1\}$ li direm base canònica, caldrà especificar quina usem)

Sigui $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E

Proposició

Tot vector d'E s'escriu de manera única com a combinació lineal dels vectors de B

Sigui $v \in E$. Si $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, diem que

$$\mathbf{v_B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

és el **vector de coordenades** de v en la base B

Proposició

Sigui $\{u_1, \ldots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'E que són LI. Aleshores $k \leq n$

Corol·lari

Tota base d'E té n elements

Dimensió

Al cardinal de les bases d'un espai vectorial E (o d'un SEV) l'anomenem la **dimensió** de l'espai, denotada **dim(E)**

- Les dimensions dels espais amb els que treballem habitualment són:
  $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = nm$, i $\dim(\mathcal{P}_d(\mathbb{K})) = d+1$
- La dimensió del subespai $\{\mathbf{0}_E\}$ és 0
- La dimensió del subespai $\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ donat per generadors és el nombre màxim de vectors LI entre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ (que és igual al rang de la matriu que té per columnes les coordenades de $u_1, \ldots, u_k$)
- La dimensió d'un subespai donat com a solució d'un sistema d'equacions homogeni és el nombre de graus de llibertat del sistema

Suposem que la dimensió d'E és n i sigui $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ un subconjunt d'E

- si W és un conjunt LI, aleshores W és una base d'E
- si W genera E, aleshores W és una base d'E

Si S és un subespai d'E aleshores

- $\dim(S) \leq \dim(E)$
- si $\dim(S) = \dim(E)$, $S = E$

Canvi de base

Siguin $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ i $B' = \{b_1', \cdots, b_n'\}$ dues bases d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Sigui u un vector d'E
Veiem com es relacionen els vectors de coordenades u_B i $u_{B'}$

Anomenem **matriu del canvi de la base B a la base B′** a la matriu que té per columnes els vectors de coordenades $(b_1)_{B'}, \ldots, (b_n)_{B'}$. La denotem per $\mathbf{P^B_{B'}}$

$$P^B_{B'} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ (b_1)_{B'} & (b_2)_{B'} & \ldots & (b_n)_{B'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Aleshores

- $u_{B'} = P^B_{B'} u_B$, expressant els vectors de coordenades en columna
- $P^{B'}_B = \left(P^B_{B'}\right)^{-1}$

7. Aplicacions Lineals

7.1 Definicions, exemples i propietats

Siguin E i F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials. Una aplicació $f : E \to F$ és **lineal** si satisfà:

(a1) per tot $u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(a2) per tot $u \in E$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Si $E = F$, direm que f és un **endomorfisme**

Exemples

- Aplicació trivial. $f : E \to F$ on $f(u) = 0_F$, $u \in E$, és lineal
- Aplicació identitat. $I_E : E \to E$ on $I_E(u) = u$, $u \in E$, és lineal
- L'aplicació següent no és lineal

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x], \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x^2 - (a+d)x + (2c-b)$$

- L'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,y) = (x^2y^2, x+y)$ no és lineal

Propietats

Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Aleshores

- $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$
- $f(-u) = -f(u)$, per a tot $u \in E$
- si S és un subespai d'E, $f(S)$ és un subespai d'F
- si S' és un subespai d'F, $f^{-1}(S')$ és un subespai d'E

Proposició

Sigui $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E. Aleshores f està unívocament determinada per $f(b_1), \ldots, f(b_n)$

És a dir, a partir de la imatge d'una base podem obtenir la imatge de qualsevol vector d'E:
si $u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, aleshores $f(u) = \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_n f(b_n)$

Corol·lari

Si $S = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ és un subespai d'E, aleshores

$$f(S) = \langle f(v_1), \ldots, f(v_k) \rangle$$

Siguin $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E, W una base de F i m la dimensió de F

La **matriu associada a f en les bases B i W** és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base B expressades en coordenades en la base W. La denotem per $\mathbf{M_W^B(f)}$

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(b_1)_W & f(b_2)_W & \ldots & f(b_n)_W \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Per trobar el vector de coordenades de la imatge d'un vector $u \in E$ n'hi ha prou en fer el següent producte matricial:

$$f(u)_W = M_W^B(f) u_B,$$

posant els vectors de coordenades en columna

7.2 Nucli i imatge

Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal

El **nucli** d'f és

$$\operatorname{Ker}(f) = \{u \in E : f(u) = \mathbf{0}_F\}$$

La **imatge** d'f és

$$\operatorname{Im}(f) = \{v \in F : v = f(u) \text{ per algun } u \in E\} = \{f(u) : u \in E\}$$

Proposició

$\operatorname{Ker}(f)$ i $\operatorname{Im}(f)$ són subespais vectorials d'E i F, respectivament

Càlcul efectiu del nucli i de la imatge

Siguin $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ i $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases d'E i F, resp., i sigui $M = M_W^B(f)$ la matriu associada a f en aquestes bases

- Nucli: treballant amb coordenades, els vectors del nucli són les solucions del sistema homogeni de m equacions i n incògnites

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La dimensió del nucli és $n - \operatorname{rang}(M)$

- Imatge: $\operatorname{Im}(f) = \langle f(b_1), \dots, f(b_n) \rangle$
  La dimensió de la imatge és el rang de M
  Considerant una matriu escalonada equivalent a M, les columnes on hi ha els pivots corresponen a les columnes de M que són vectors LI, i per tant formen una base de la imatge

Sigui $f : E \to f$ una aplicació lineal i M una matriu associada a f

Teorema

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Les aplicacions lineals bijectives s'anomenen **isomorfismes**

Caracterització del tipus d'aplicació

- f és injectiva $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0_E}\} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(E)$
- f és exhaustiva
  $$\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) \Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(F)$$
- f és un isomorfisme $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(E) = \dim(F)$
- Si E i F tenen la mateixa dimensió, llavors
  f és un isomorfisme $\Leftrightarrow$ f és injectiva $\Leftrightarrow$ f és exhaustiva

7.3 Composició d'aplicacions lineals

Proposició

Si $f : E \to F$ i $g : F \to G$ són aplicacions lineals, l'aplicació composició $g \circ f : E \to G$ també és lineal

Proposició

Si $f : E \to F$ és un isomorfisme, $f^{-1} : F \to E$ també ho és

Si les bases d'E, F i G són B, W i V respectivament, tenim:

$$M_V^B(g \circ f) = M_V^W(g) M_W^B(f)$$

$$M_B^W(f^{-1}) = (M_W^B(f))^{-1}$$

7.4 Canvi de base

Veiem com es relacionen dues matrius associades a una mateixa aplicació lineal fixant bases diferents a l'espai de sortida i/o a l'espai d'arribada.

Siguin $f : E \to F$ una aplicació lineal, B i B' bases d'E, i W i W' bases d'F

$$\begin{tikzcd}
E_B \arrow[r, "f", "M_W^B(f)"'] & F_W \arrow[d, "P_{W'}^W"', "I_F"] \\
E_{B'} \arrow[u, "I_E", "P_B^{B'}"'] \arrow[r, "f", "M_{W'}^{B'}(f)"'] & F_{W'}
\end{tikzcd}$$

$$f = I_F \circ f \circ I_E$$

$$M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^{W}\, M_W^B(f)\, P_B^{B'}$$

8. Diagonalització

El problema de la diagonalització

Sigui $f : E \to E$ un endomorfisme. Hi ha alguna base B d'E en què la matriu $M_B(f)$ sigui senzilla? Més concretament, diagonal?

Def
Un endomorfisme $f : E \to E$ és **diagonalitzable** si existeix alguna base B d'E tal que $M_B(f)$ sigui diagonal.

Obs. Suposem que la matriu $M_B(f)$ no és diagonal, però sabem que l'endomorfisme f diagonalitza en una altra base B'. Aleshores la matriu

$$(P_B^{B'})^{-1} M_B(f) P_B^{B'}$$

és diagonal.
Per tant, ser diagonalitzable és equivalent a que existeixi una matriu P invertible tal que $P^{-1} M_B(f) P$ sigui diagonal.

Valors i vectors propis

Def

L'escalar λ és un **valor propi** de l'endomorfisme f si existeix algun vector $v \neq \mathbf{0}_E$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Tots els vectors $v \neq \mathbf{0}_E$ que compleixen $f(v) = \lambda v$ s'anomenen **vectors propis de valor propi** λ.

Teorema

L'endomorfisme $f : E \to E$ diagonalitza si i només si hi ha alguna base d'E formada per vectors propis.

Càlcul dels valors propis

Sigui M la matriu associada a $f : E \to E$ en una base B

Def

El **polinomi característic** de l'endomorfisme f és

$$p_f(x) = \det(M - xI_n)$$

Teorema

Els valors propis d'f són les arrels del polinomi característic

La **multiplicitat algebraica** d'un valor propi λ és la multiplicitat de λ com a arrel de $p_f(x)$ i es denota m_λ

L'equació $p_f(x) = 0$ s'anomena **equació característica**

Teorema

El polinomi característic no depèn de la base en la que calculem la matriu associada M

Espais de vectors propis

Sigui ara λ un valor propi de l'endomorfisme $f : E \to E$
L'**espai propi** del valor propi λ és el conjunt

$$E_\lambda = \{u \in E : f(u) - \lambda u = 0_E\}$$

Propietats

- E_λ és un subespai vectorial d'E
- $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$

La dimensió d'E_λ s'anomena **multiplicitat geomètrica** de λ

Caracterització dels endomorfismes diagonalitzables

Sigui $f : E \to E$ un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió n.

Teorema

L'endomorfisme f és diagonalitzable si i només si té n valors propis (comptant multiplicitats) i per a cada valor propi les multiplicitats algebraica i geomètrica coincideixen.

Corol·lari

Si f té n valors propis diferents, aleshores és diagonalitzable.

Algorisme de diagonalització

Per a decidir si l'endomorfisme $f : E \to E$ és diagonalitzable, podem seguir els passos següents:

(1) Trobem la matriu associada a f en una base qualsevol i calculem el polinomi característic $p_f(x)$.

(2) Trobem els valors propis i les seves multiplicitats resolent $p_f(x) = 0$.

(3) Si les multiplicitats dels valors propis sumen menys de $\dim(E)$, l'endomorfisme no diagonalitza. Altrament anem a (4).

(4) Per a cada valor propi λ, trobem l'espai propi E_λ i la seva dimensió $\dim(E_\lambda)$.

(5) Si per a tot λ es compleix $m_\lambda = \dim(E_\lambda)$, l'endomorfisme diagonalitza. Altrament no diagonalitza.

Si l'endomorfisme diagonalitza, per trobar una base en què diagonalitzi només cal prendre la unió de les bases dels espais E_λ.