5 Matrius, sistemes i determinants

5.1 Àlgebra de matrius

5.1 Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

calculeu: 1) $3A$; 2) $3A - B$; 3) AB; 4) BA; 5) $C(3A - 2B)$.

Solució: Tenim:

$$3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3A - B = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 14 \\ -5 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 19 & 5 & 14 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 12 \\ -11 & 8 & -9 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C(3A - 2B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 12 \\ -11 & 8 & -9 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 20 & 15 \\ 23 & -3 & 18 \\ 17 & -12 & -8 \\ -67 & 67 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2 Calculeu els productes $(1\ 2\ -3)\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}(1\ 2\ -3)$.

Solució: Tenim, d'una banda:

$$(1\ 2\ -3)\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} = 2+2-15 = -11,$$

i de l'altra:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}(1\ 2\ -3) = \begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot(-3)\\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot(-3)\\ 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4 & -6\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & 10 & -15\end{pmatrix}$$

5.3 Donades A i B matrius tals que AB és una matriu quadrada, proveu que el producte BA està definit.

Solució: La matriu AB té un número de files igual al nombre de files d'A, i un nombre de columnes igual al nombre de columnes de B. Al ser AB quadrada, llavors podem dir que el nombre de files d'A és el mateix que el nombre de columnes de B, i per tant el producte BA està ben definit.

5.4 Per a les matrius A i B següents, doneu els elements c_{13} i c_{22} de la matriu $C = AB$ sense calcular tots els elements de C.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 3\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Solució: L'element c_{ij} del producte de dues matrius A i B s'obté multiplicant la fila i de la matriu A per la columna j de la matriu B. En el nostre cas, tenim:

$$c_{13} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} = 0+6+2 = 8, \quad c_{22} = \begin{pmatrix}-3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix} = 0+0-3 = -3.$$

5.5 Una empresa confecciona bosses i maletes en dues fàbriques diferents. La taula adjunta dóna la informació del cost total de fabricació en milers d'euros de cada producte a cada lloc:

	Fàbrica 1	Fàbrica 2
Bosses	135	150
Maletes	627	681

Responeu les preguntes següents mitjançant operacions matricials.

1) Sabent que el cost de personal representa 2/3 del cost total, trobeu la matriu que representa el cost de personal de cada producte en cada fàbrica.

2) Trobeu la matriu que representa els costos de material de cada producte en cada fàbrica, suposant que, a més dels costos de personal i de materials, hi ha un cost de 20.000 euros per cada producte a cada fàbrica.

Solució:

1) Tenim:

$$C_{\text{personal}} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 135 & 150 \\ 627 & 681 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 100 \\ 418 & 454 \end{pmatrix}.$$

2) Ara tenim:

$$C_{\text{personal}} + C_{\text{material}} + \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 & 150 \\ 627 & 681 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$C_{\text{material}} = \begin{pmatrix} 25 & 30 \\ 189 & 207 \end{pmatrix}.$$

5.6 En aquest exercici es vol trobar una fórmula per calcular les potències d'una matriu diagonal.

1) Calculeu A^2, A^3 i A^5, sent:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Quina matriu creieu que és A^{32}?

3) Sigui D una matriu $n \times n$ diagonal que té per elements a la diagonal $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Conjectureu quina és la matriu D^r, per a $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$, i proveu la conjectura per inducció.

Solució:

1) Fent un càlcul directe, obtenim:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}.$$

2) De manera anàloga, tenim:

$$A^{32} = \begin{pmatrix} 2^{32} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{32} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{32} \end{pmatrix}.$$

3) La matriu D^r serà la matriu $\mathrm{Diag}({\lambda_1}^r, {\lambda_2}^r, \ldots, {\lambda_n}^r)$.

Demostració per inducció sobre $r \geq 1$:

- Cas base: Trivial, ja que $A^1 = A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$
- Pas inductiu: $B = (b_{ij}) = A^r = A^{r-1}A$, i per hipòtesi d'inducció, sabem que $A^{r-1} = \mathrm{Diag}({\lambda_1}^{r-1}, {\lambda_2}^{r-1}, \ldots, {\lambda_n}^{r-1})$. Així si $i \neq j$, $b_{ij} = 0$, ja que la fila i d'A^{r-1} només té un component diferent de 0, i aquest és el i, en canvi la columna j d'A té també un únic component diferent de 0, que és el j, com $j \neq i$, al multiplicar la fila per la columna surt 0. Si $i = j$, llavors el component diferent de 0 coincideix, i queda $b_{ii} = {\lambda_i}^{r-1}\lambda_i = {\lambda_i}^r$. Per tant la matriu resultant és la matriu $\mathrm{Diag}({\lambda_1}^r, {\lambda_2}^r, \ldots, {\lambda_n}^r)$.

5.7 Doneu un exemple de dues matrius A i B de tipus 2×2 tals que $(AB)^t \neq A^t B^t$.

Solució: La solució no és única. Per exemple, siguin les matrius: $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Llavors tenim:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (AB)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^t B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.8 Siguin $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ i $B = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Calculeu $(AB)^t$ i $B^t A^t$. Observeu que, encara que A i B són matrius simètriques, el seu producte no ho és.

Solució: Tenim:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ (AB)^t &= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ B^t A^t &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.9 Siguin A i B dues matrius simètriques del mateix tipus. Proveu que AB és una matriu simètrica si, i només si, A i B commuten.

Solució:

$\boxed{\Rightarrow}$ Hipòtesis: les matrius A, B i AB són simètriques; és a dir, $A^t = A$, $B^t = B$ i $(AB)^t = AB$. A més, sabem que sempre es compleix: $(AB)^t = B^t A^t$. Per tant: $AB = (AB)^t = B^t A^t = BA$; és a dir, les matrius A i B conmuten.

$\boxed{\Leftarrow}$ Hipòtesis: les matrius A i B són simètriques i conmuten; és a dir, $A^t = A$, $B^t = B$ i $AB = BA$. Per tant: $(AB)^t = B^t A^t = BA = AB$; és a dir, la matriu AB és simètrica.

5.10 Siguin I la matriu identitat i $\boldsymbol{O}$ la matriu nul·la de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Trobeu matrius $A, B, C, D, E \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tals:

1) $A^2 = I$ i $A \neq I, -I$;

2) $B^2 = \boldsymbol{O}$ i $B \neq \boldsymbol{O}$;

3) $C^2 = C$ i $C \neq I, \boldsymbol{O}$;

4) $DE = \boldsymbol{O}$ però $E \neq D$ i $ED \neq \boldsymbol{O}$.

Solució: La solució no és única.

1) $A = (-1)I = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Tenim: $A^2 = (-1)^2 I^2 = I$.

2) $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es comprova fàcilment que $B^2 = \boldsymbol{O}$.

3) $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es comprova fàcilment que $C^2 = C$.

4) $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es comprova fàcilment que $DE = \boldsymbol{O}$ i que $ED = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5.11 Esbrineu si les igualtats següents les satisfan totes les matrius $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En cas negatiu, doneu alguna condició sobre A i B per tal que es satisfacin.

1) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$;

2) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

Solució: Les igualtats no són certes en general; per exemple, les matrius $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ no satisfan cap de les dues. En efecte, tenim:

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
A^2 + B^2 + 2AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \\
(A-B)(A+B) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \\
A^2 - B^2 &= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

No obstant, si A i B commuten, aleshores es satisfan les dues igualtats. En efecte, si $AB = BA$, d'una banda tenim:

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \\
&= A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2;
\end{aligned}$$

i de l'altra:

$$\begin{aligned}
(A-B)(A+B) &= A^2 - AB - BA - B^2 \\
&= A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2.
\end{aligned}$$

5.12 Siguin A i B matrius quadrades del mateix tipus. Direm que A és *semblant* a B si existeix una matriu invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Si aquest és el cas, proveu:

1) B és semblant a A. En general direm que A i B són semblants.

2) *Ser semblants* és una relació d'equivalència.

3) A és invertible si, i només si, B és invertible.

4) A^t és semblant a B^t.

5) Si $A^n = \mathbf{0}$ i B és semblant a A, aleshores $B^n = \mathbf{0}$.

Solució:

1) Si A és semblant a B, llavors existeix una matriu invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Multiplicant per la esquerra per P i per la dreta per P^{-1}, obtenim que $PBP^{-1} = A$. Llavors amb $Q = P^{-1}$ es compleix que $B = Q^{-1}AQ$. Per tant, B es semblant a A. El que acabem de demostrar es pot expressar dient que la relació *ser semblants* és una relació simètrica.

2) Ja hem vist que és simètrica; ara cal veure que és reflexiva i transitiva. La primera propietat és trivial de veure: agafant $P = I$, llavors $A = I^{-1}AI$. Per veure la transitivitat, siguin A semblant a B, i B semblant a C; cal veure que A és semblant a C. Si A i B són semblants, llavors existeix P tal que $B = P^{-1}AP$. Si B i C són semblants, llavors existeix Q tal que $C = Q^{-1}BQ$. Llavors $C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$; és a dir, la matriu $K = PQ$ compleix que $C = K^{-1}AK$. Per tant, A és semblant a C.

3) Suposem que A és invertible. Aleshores: $A = P^{-1}BP \Rightarrow PA = BP \Rightarrow I = BPA^{-1}P^{-1}$. Per tant, $PA^{-1}P^{-1}$ és la inversa de B. La implicació recíproca és anàloga.

4) Suposem que A és semblant a B. Aleshores existeix una matriu inversible P tal que $B = P^{-1}AP$. Llavors tenim que $B^t = (P^{-1}AP)^t = P^t(P^{-1}A)^t = P^tA^t(P^{-1})^t$. Observem que que P^t és la matriu inversa de $(P^{-1})^t$ (ja que si $PP^{-1} = I$, llavors al fer la transposada als dos costats de la igualtat surt $(P^{-1})^tP^t = I$). Per tant, $B^t = P^tA^t(P^t)^{-1}$; és a dir, A^t és semblant a B^t.

5) Sigui $B = P^{-1}AP$, per a certa matriu inversible P. Es té que $B^n = P^{-1}A^nP$, ja que:

$$B^n = B \cdot B \cdots B = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP.$$

Hem demostrat que si A és semblant a B, aleshores A^n és semblant a B^n. En conseqüència, si $A^n = \boldsymbol{O}$, llavors $B^n = P^{-1}\mathbf{0}P = \mathbf{0}$.

5.13 Trobeu una matriu escalonada per files equivalent a cadascuna de les matrius següents. Doneu el rang de cada matriu.

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad 4)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució: La matriu escalonada equivalent no és única. Notem per F_i la fila i en cada cas.

1) En la primera transformació fem: $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 + F_1$; en la segona transformació fem: $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2$; i finalment, dividim F_3 per 8:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9/8 \end{pmatrix}.$$

El rang de la matriu és 3.

2) En la primera transformació fem: $F_2 \leftarrow F_2 + 2/3F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 + 2F_1$; després dividim F_1 per -3, F_2 per $2/3$ i F_3 per 6; i finalment, restem F_2 a F_3:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang és 2.

3) En la primera transformació fem $F_2 \leftarrow 5F_2 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow 5F_3 - 3F_1$; en la segona transformació $F_3 \leftarrow 43F_2 - 17F_3$; després dividim $F3$ per -30 i F_4 per 4 i restem a F_4 la fila F_3; i finalment dividim cada fila pel primer coeficient no nul:

$$\begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 0 & -17 & 8 \\ 0 & -43 & 22 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 0 & -17 & 8 \\ 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 0 & -17 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 11/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & -8/17 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu té rang 3.

4) Primer intercanviem les files 1 i 2 i canviem de signe les files F_1, F_3 i F_4 de la matriu resultant. Després fem les transformacions $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$ i $F_4 \leftarrow F_4 - 4F_1$; a continuació $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$, $F_5 \leftarrow F_5 - 2F_2$ i intercanviem les files 4 i 5 que resulten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang de la matriu és 3.

5.14 Trobeu la inversa de les matrius elementals següents.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$

Solució: En primer lloc, notem que la matriu inversa d'una matriu diagonal $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, amb tots els $\lambda_i \neq 0$, és la matriu diagonal $\mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$. Per tant:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, és fàcil comprovar que les matrius dels apartats 1) i 3) són les seves pròpies inverses (per exemple, aplicant el mètode de Gauss-Jordan o bé calculant el quadrat de cada matriu); és a dir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalment, aplicant el mètode de Gauss-Jordan, per exemple, obtenim que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.15 Trobeu, si existeix, la inversa de cadascuna de les matrius següents, seguint el mètode de Gauss-Jordan.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

4) $A = (a_{i,j})_{4\times 4}$, tal que $a_{i,j} = 1$ si $|i-j| \le 1$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.

5) $A = (a_{i,j})_{4\times 4}$, tal que $a_{i,j} = 2^{j-1}$ si $i \ge j$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.

6) $A = (a_{i,j})_{4\times 4}$, tal que $a_{i,i} = k$, $a_{i,j} = 1$ si $i - j = 1$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.

Solució:

1) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 7 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu no té inversa.

3) Vegeu els càlculs a la figura 5.1. Per tant, la inversa de la matriu és $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -11 & -5 \\ 2 & 1 & 13 & 6 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
&\equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & -4 & 11 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 13 & 6 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -13 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 7 & 1 & 39 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 13 & 6 \end{pmatrix}
\equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 13 & 6 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 13 & 6 \end{pmatrix}
\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 13 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Figura 5.1: Càlculs del problema 5.15, apartat 3.

4) Tenim

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\equiv\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1&-1&0&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&-1&1&1&-1\\0&0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$
$$\equiv\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&-1\\0&0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1&-1&0&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&-1&1\\0&1&0&0&0&0&1&-1\\0&0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

Per tant, la inversa de la matriu és $\left(\begin{smallmatrix}1&0&-1&1\\0&0&1&-1\\-1&1&0&0\\1&-1&0&1\end{smallmatrix}\right)$.

5) Tenim:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&1&0&0\\1&2&4&0&0&0&1&0\\1&2&4&8&0&0&0&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&0&-1&1&0&0\\0&2&4&0&-1&0&1&0\\0&2&4&8&-1&0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\equiv\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&0&-1&1&0&0\\0&0&4&0&0&-1&1&0\\0&0&4&8&0&-1&0&1\end{pmatrix}$$
$$\equiv\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&0&-1&1&0&0\\0&0&4&0&0&-1&1&0\\0&0&0&8&0&0&-1&1\end{pmatrix}$$
$$\equiv\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1/2&1/2&0&0\\0&0&1&0&0&-1/4&1/4&0\\0&0&0&1&0&0&-1/8&1/8\end{pmatrix}$$

Per tant, la inversa de la matriu és $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\-1/2&1/2&0&0\\0&-1/4&1/4&0\\0&0&-1/8&1/8\end{smallmatrix}\right)$.

6) Si $k=0$ no té inversa, ja que el determinant és 0. Si $k\neq 0$, podem procedir de dues maneres: com es mostra a continuació o bé com es veu a la figura 5.2:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}
k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
&\equiv
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0\\
1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\\
&\equiv
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0\\
0 & k & 0 & 0 & -1/k & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\\
&\equiv
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/k^2 & 1/k & 0 & 0\\
0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\\
&\equiv
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/k^2 & 1/k & 0 & 0\\
0 & 0 & k & 0 & 1/k^2 & -1/k & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\\
&\equiv
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/k^2 & 1/k & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k & 0\\
0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\\
&\equiv
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/k^2 & 1/k & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k & 0\\
0 & 0 & 0 & k & -1/k^3 & 1/k^2 & -1/k & 1
\end{pmatrix}\\
&\equiv
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/k^2 & 1/k & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1/k^4 & 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 & 1 & -k & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k^3 & 0 & 1 & -k & k^2 & 0 \end{pmatrix}
\equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k^4 & 1 & -k & k^2 & -k^3 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{pmatrix}
\equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k^{-2} & -k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{pmatrix}
\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Figura 5.2: Càlculs del problema 5.15, apartat 6 (segona versió).

5.2 Sistemes d'equacions

5.16 Quines de les equacions següents són lineals en x, y i z?

1) $x + 3xy + 2z = 2$;
2) $y + x + \sqrt{2}z = e^2$;
3) $x - 4y + 3z^{1/2} = 0$;
4) $y = z \sin\frac{\pi}{4} - 2y + 3$;
5) $z + x - y^{-1} + 4 = 0$;
6) $x = z$.

Solució: Els sistemes d'equacions on apareixen només operacions lineals són el 2), el 4) i el 6). A l'equació 1), el terme xy és quadràtic; a l'equació 3) l'arrel $\sqrt{z}$ no és lineal; i a l'equació 5) el terme $y^{-1} = 1/y$ tampoc és lineal.

5.17 Trobeu un sistema d'equacions lineals que correspongui a cadascuna de les matrius ampliades següents.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Solució:

1) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 3z & = & 2 \\ 2x + y + z & = & 3 \\ -y + 2z & = & 4 \end{array} \right.$

2) $\left\{ \begin{array}{rcl} -x + 5y & = & -2 \\ x + y & = & 0 \\ x - y & = & 1 \end{array} \right.$

3) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z + 4t & = & 5 \\ x/3 + y/4 + z/5 + t/2 & = & 1 \end{array} \right.$

4) $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \\ x + t & = & 4 \end{array} \right.$

5.18 Responeu raonadament les preguntes següents:

1) Quin és el rang de la matriu associada a un sistema compatible determinat amb 5 equacions i 4 incògnites? I si el sistema és compatible indeterminat?
2) Quantes equacions com a mínim són necessàries per tenir un sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat i rang 3? Quantes incògnites tindrà aquest sistema?
3) Pot ser compatible determinat un sistema amb 7 equacions i 10 incògnites?
4) És possible que un sistema lineal amb menys equacions que incògnites sigui incompatible?
5) Inventeu un sistema compatible determinat, un sistema compatible indeterminat i un sistema incompatible, tots ells amb 3 incògnites i 4 equacions.

Solució:

1) Un sistema és compatible i determinat si i només si el rang de la matriu del sistema és igual al rang de la matriu ampliada i aquest rang comú és igual al nombre d'incògnites, que en aquest cas és 4. Per tant, la resposta a la primera pregunta és 4. En el cas d'un sistema compatible indeterminat hem de tenir igualtat de rangs però aquest ha de ser més petit que el nombre d'incògnites. Per tant, la resposta a la segona pregunta és: menor o igual a 3.

2) un sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat i rang 3 ha de tenir un mínim de 3 equacions. El nombre d'incòginites és igual al rang del sistema més el nombre de graus de llibertat; és a dir, 5 incògnites.

3) No. Un sistema amb 7 equacions tindrà, como a màxim, rang 7.

4) Sí. Per exemple, $x + y + z = 0$, $x + y + z = 1$.

5) Per exemple, exemples de sistemes compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible, respectivament, són:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \\ x+y & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y & = & 2 \\ x+2y+z & = & 3 \\ x+3y+z & = & 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \\ x+y & = & 4 \end{array}\right.$$

5.19 Resoleu els sistemes lineals següents amb coeficients a $\mathbb{Z}_2$. Useu eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$1)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ x+z & = & 0 \\ x+y+z & = & 1 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ y+z & = & 1 \\ x+z & = & 1 \end{array}\right. \qquad 3)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ x+z & = & 0 \end{array}\right.$$

Solució:

1) Es tracta d'un sistema compatible determinat amb solució $(0, 1, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) És un sistema incompatible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) És un sistema compatible indeterminat; les solucions es poden expresar com:

$$\{(z, z, z) : z \in \mathbb{Z}_2\} = \langle(1, 1, 1)\rangle = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$$

(recordem que en $\mathbb{Z}_2$, $1 = -1$). A continuació, tenim els càlculs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.20 Resoleu el sistemes lineals següents. Useu eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$1)\ \begin{cases} x+y+2z &= 8\\ -x-2y+3z &= 1\\ 3x-7y+4z &= 10\\ 3y-2z &= -1 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x-y+2z-w &= -1\\ 2x+y-2z-2w &= -2\\ -x+2y-4z+w &= 1\\ 3x-3w &= -3 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x-y+2z &= 3\\ 2x-2y+5z &= 4\\ x+2y-z &= -3\\ 2y+2z &= 1 \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_5 &= 0\\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6 &= -1\\ 5x_3+10x_4+15x_6 &= 5\\ 2x_1+6x_2+8x_4+4x_5+18x_6 &= 6 \end{cases}$$

Solució:

1) Sistema compatible determinat amb solució $(3,1,2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ -1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & -7 & 4 & 10\\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ 0 & -1 & 5 & 9\\ 0 & -10 & -2 & -14\\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -5 & -9\\ 0 & -5 & -1 & -7\\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -5 & -9\\ 0 & 0 & -26 & -52\\ 0 & 0 & 13 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -5 & -9\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -5 & -9\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Es tracta d'un sistema incompatible, no té solució:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 5 & 4\\ 1 & 2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -3 & -6\\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -3 & -6\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -5 & -7\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -5 & -7\\ 0 & 0 & 12 & 15\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -5 & -7\\ 0 & 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -5 & -7\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -5 & -7\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

3) És un sistema compatible indeterminat; la solució es pot expressar com:

$$\{(-1+x_4, 2x_3, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = (-1,0,0,0) + \langle (0,2,1,0), (1,0,0,1) \rangle.$$

A continuació, tenim els càlculs:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Sistema compatible indeterminat, les solucions del qual s'expressen com:

$$\begin{aligned} \{(-3x_2 - 4x_4 - 2x_5, x_2, -2x_4, x_4, x_5, 1/3) : x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} &= (0,0,0,0,0,1/3) \\ &+ \langle(-3,1,0,0,0,0), (-4,0,-2,1,0), (-2,0,0,0,1,0)\rangle \end{aligned}$$

Càlculs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 21 & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

5.21 Resoleu el sistemes lineals homogenis següents. Useu l'eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

1) $\left\{ \begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 0 \\ -2x + 5y + 2z &= 0 \\ -7x + 7y + z &= 0 \end{aligned} \right.$

3) $\left\{ \begin{aligned} x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 &= 0 \end{aligned} \right.$

2) $\left\{ \begin{aligned} 2x - 4y + z + w &= 0 \\ x - 5y + 2z &= 0 \\ -2y - 2z - w &= 0 \\ x + 3y + w &= 0 \\ x - 2y - z + w &= 0 \end{aligned} \right.$

4) $\left\{ \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned} \right.$

Solució:

1) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ -7 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ -7 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/7 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el sistema és compatible indeterminat i la solució és:

$$\{(-\frac{3}{7}x_3, -\frac{4}{7}x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, 1)\rangle = \langle(-3, -4, 7)\rangle.$$

2) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el sistema és compatible i determinat i, com és homogeni, la solució és $(0, 0, 0, 0)$.

3) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el sistema és compatible indeterminat i la solució es pot escriure com:

$$\{(-2x_3 - 3x_4, 3x_3 - x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle(-2, 3, 1, 0), (-3, -1, 0, 1)\rangle.$$

4) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el sistema és compatible indeterminat i la solució és:

$$\{(-x_2 - x_5, x_2, -x_5, 0, x_5) : x_2, x_5 \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, -1, 0, 1) \rangle.$$

5.22 Discutiu els sistemes següents segons els valors dels paràmetres a $\mathbb{R}$.

1) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & a \\ x + z & = & b \\ 2x + y + 3z & = & c \end{array} \right.$

3) $\left\{ \begin{array}{rcl} ax + y - z + t - u & = & 0 \\ x + ay + z - t + u & = & 0 \\ -x + y + az + t - u & = & 0 \\ x - y + z + at + u & = & 0 \\ -x + y - z + t + au & = & 0 \end{array} \right.$

4) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & 4 \\ 3x - y + 5z & = & 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z & = & a + 2 \end{array} \right.$

2) $\left\{ \begin{array}{rcl} bx + y + z & = & b^2 \\ x - y + z & = & 1 \\ 3x - y - z & = & 1 \\ 6x - y + z & = & 3b \end{array} \right.$

5) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & k \\ ax + by & = & k^2 \\ a^2x + b^2y & = & k^3 \end{array} \right.$

Solució:

1) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 3 & c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & a - b \\ 0 & 1 & 1 & c - 2b \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & a - b \\ 0 & 0 & 0 & c - 2b - (a - b) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & a - b \\ 0 & 0 & 0 & c - b - a \end{pmatrix}$$

i) Si $c = a + b$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i tenim que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < 3$. Per tant, el sistema és compatible indeterminat.

ii) Si $c \neq a + b$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i tenim que $\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A')$. Per tant, el sistema és incompatible.

2) Tenim:

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & b^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 3b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & b+3 & b^2+1 \\ 0 & 2 & b+6 & b^2+3b \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & b+3 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 5 & 3b-1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 5 & 3b-1 \\ 0 & 0 & b+3 & b^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & (3b-1)/5 \\ 0 & 0 & b+3 & b^2+1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & (3b-1)/5 \\ 0 & 0 & 0 & b^2+1-(3b-1)(b+3)/5 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & (3b-1)/5 \\ 0 & 0 & 0 & (2b^2-8b+8)/5 \end{pmatrix}$$

Ara bé:

$$(2b^2 - 8b + 8)/5 = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow (b-2)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$$

i) Si $b = 2$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & (3b-1)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$ i el sistema és compatible determinat.

ii) Si $b \neq 2$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & (3b-1)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = 3 < 4 = \text{rang}(A')$ i el sistema és incompatible.

3) Tenim:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & a & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & -a^2+1 & -a-1 & a+1 & -a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Si $a=-1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 1 < 5$ i el sistema és incompatible.

ii) Si $a \neq -1$, procedim com:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a+1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+a-1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a+2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a+3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+a-3 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si $a=4$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 4 < 5$ i el sistema és compatible indeterminat.

b) Si $a \neq 4$ (és a dir, si $a \neq 4, -1$), la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 5$ i el sistema és compatible determinat.

4) Tenim:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 3 & -1 & 5 & 2\\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -7 & 14 & -10\\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -7 & 14 & -10\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{pmatrix}$$

i) Si $a = 4$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < 3$ i el sistema és compatible indeterminat.

ii) Si $a = -4$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & 0 & -8\end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A')$ i el sistema és incompatible.

iii) Si $a \neq 4, -4$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & 1 & (a-4)/(a^2-16)\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+4)\end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$ i el sistema és compatible determinat.

5) Tenim:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ a & b & k^2\\ a^2 & b^2 & k^3\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & b-a & k^2-a\,k\\ 0 & b^2-a^2 & k^3-a^2\,k\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & b-a & k(k-a)\\ 0 & (b-a)(b+a) & k(k^2-a^2)\end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & b-a & k(k-a)\\ 0 & 0 & k(k^2-a^2)-k(k-a)(b+a)\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & b-a & k(k-a)\\ 0 & 0 & k(k-a)(k-b)\end{pmatrix}$$

i) Si $a \neq b$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & 1 & k(k-a)/(b-a)\\ 0 & 0 & k(k-a)(k-b)\end{pmatrix}$$

a) Si $k \in \{0, a, b\}$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2$ i el sistema és compatible determinat.

b) Si $k \notin \{0, a, b\}$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & k(k-a)/(b-a) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A')$ i el sistema és incompatible.

ii) Si $a = b$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k(k-a) \\ 0 & 0 & k(k-a)(k-a) \end{pmatrix}$$

a) Si $k \in \{0, a\}$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 1 < 2$ i el sistema és compatible indeterminat.

b) Si $k \notin \{0, a\}$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = 1 < 2 = \text{rang}(A')$ i el sistema és incompatible.

5.3 Determinants

5.23 Suposant que $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = 5$, calculeu els determinants següents.

1) $D_1 = \begin{vmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$

2) $D_2 = \begin{vmatrix} -a & -b & -c & -d \\ 2e & 2f & 2g & 2h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$

3) $D_3 = \begin{vmatrix} a+e & b+f & c+g & d+h \\ e & f & g & h \\ m & n & o & p \\ i & j & k & l \end{vmatrix}$

4) $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e-3a & f-3b & g-3c & h-3d \\ i & j & k & l \\ 4m & 4n & 4o & 4p \end{vmatrix}$

Solució:

1) Si canviem d'ordre dues files en una matriu, el determinant canvia de signe. Per tant:

$$D_1 = \begin{vmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = D = 5.$$

2) Si multipliquem una fila d'una matriu per un escalar, el determinat queda multiplicat per aquest escalar. Per tant:

$$D_2 = \begin{vmatrix} -a & -b & -c & -d \\ 2e & 2f & 2g & 2h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -2D = -10.$$

3) Si sumem a una fila una combinació lineal d'altres files, el determinant no canvia de valor. Per tant:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+e & b+f & c+g & d+h \\ e & f & g & h \\ m & n & o & p \\ i & j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = D = 5.$$

4) Tenint en compte les propietat esmentades als dos apartats anteriors, tenim:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e-3a & f-3b & g-3c & h-3d \\ i & j & k & l \\ 4m & 4n & 4o & 4p \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e-3a & f-3b & g-3c & h-3d \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = 4D = 20.$$

5.24 Trobeu els valors de λ per als quals les matrius següents tenen determinant 0.

1) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

Solució:

1)

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)+2 = \lambda^2-5\lambda+6 = 0 \iff \lambda \in \{2,3\}.$$

2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix} &= (\lambda-6)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-6)(\lambda(\lambda-4)+4) \\ &= (\lambda-6)(\lambda-2)^2 = 0 \iff \lambda \in \{6,2\}. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)^2(4-\lambda)+2+2-(4-\lambda)-2(3-\lambda)-2(3-\lambda) \\ &= -\lambda^3+10\lambda^2-28\lambda+24 = -(\lambda-2)^2(\lambda-6) = 0 \\ &\iff \lambda \in \{2,6\}. \end{aligned}$$

5.25 Calculeu els determinants següents.

1) $\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -20 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 12 & -8 & 8 \\ 16 & 20 & -4 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Solució:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -20 \end{vmatrix} = -100-150 = -250.$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 4 - 24 + 2 = -20.$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 20 + 2 + 20 - 12 - 3 = 25.$

4) Treient factor comú 4 de cada fila, obtenim:

$$\begin{vmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 12 & -8 & 8 \\ 16 & 20 & -4 \end{vmatrix} = 4^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 4^3(2 + 0 + 32 + 8 - 10 + 12) = 2304.$$

5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 0 - 6 - 0 + 6 = -4.$

6) Sumant la fila 1 a la fila 2, dues vegades la fila 1 a la fila 3 i 3 vegades les fila 1 a la fila 4, i desenvolupant després per la primera columna, obtenim:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -128.$$

7) Desenvolupant per la quarta fila, obtenim:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = -(-7) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} + 14 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 8 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot 255 + \cdot 404 = 7441.$$

8) Restant dues vegades la fila 1 a la fila 2 i a la fila 3 i desenvolupant per la primera columna, obtenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -16 & -12 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -16 & -12 & -1 \\ 2 & -14 & -2 & -2 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (*)$$

Ara en primer lloc treiem un factor 2 de les files segona i tercera i en segon lloc restem 8 vegades la fila 4 a la fila 1 i restem a les files 2 i 3 la fila 1 i desenvolupem per la última fila i obtenim:

$$(*) = 2^2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -16 & -12 & -1 \\ 1 & -7 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -24 & -28 & -17 \\ 0 & -8 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2^2 \cdot \begin{vmatrix} -24 & -28 & -17 \\ -8 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

Finalment, calculant directament aquest determinant, el resultat és: $-2^2 \cdot 275 = -1100$.

5.26 Siguin A i B matrius quadrades d'ordre 3 tals que $\det(A) = 10$ i $\det(B) = 12$. Calculeu

1) $\det(AB)$, 2) $\det(A^4)$, 3) $\det(2B)$, 4) $\det(A^t)$, 5) $\det(A^{-1})$.

Solució:

1) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 10 \cdot 12 = 120$.
2) $\det(A^4) = \det(A)^4 = 10^4$.
3) $\det(2B) = 2^3 \det(B) = 96$ (ja que la matriu B té 3 files i al fer $2B$ cada fila queda multiplicada per 2).
4) $\det(A^t) = \det(A) = 10$.
5) $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = 1/10$.

5.27 Comproveu que

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3.$$

Solució: Restant la 4a fila a totes les altres files, arribem a la matriu:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Si $a = 1$, clarament el determinant és 0 i es compleix la fórmula. Altrament, fent $f_4 = f_4 - 1/(a-1)(f_3 + f_2 + f_1)$ arribem a la matriu triangular:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{vmatrix},$$

que té per determinant $(a+3)(a-1)^3$.