# Àlgebra Lineal

**Anna de Mier Vinué**

**GEI-FIB**
**Departament de Matemàtiques. UPC**

**Abril, 2020**

# Índex

# 5

# Matrius, sistemes i determinants

Els objectius d'aquest capítol són diversos; entre els més destacables, trobem:

- Repassar les operacions matricials i les seves propietats (de cara a treballar més endavant en l'espai vectorial de les matrius).
- Definir el concepte de rang d'una matriu a partir de les operacions elementals.
- Saber discutir sistemes d'equacions lineals a partir de la comparació dels rangs de les matrius associades al sistema.
- Donar una definició general de determinant i enunciar la relació amb el rang.

Farem tot el discurs respecte un cos d'escalars genèric $\mathbb{K}$ (en la pràctica ens trobarem $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ i alguns cossos finits).

## 5.1 Repàs de l'àlgebra de matrius

**Definició 5.1** *Siguin $m, n \geq 1$ enters. Una* matriu de tipus $m \times n$ amb elements al cos $\mathbb{K}$ *consisteix en $mn$ elements de $\mathbb{K}$ arranjats en una taula de $m$ files i $n$ columnes. Denotarem per $a_{ij}$ l'element que es troba a la fila $i$, columna $j$. Una matriu genèrica seria doncs:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Farem servir també la notació $A = (a_{ij})_{m \times n}$. El conjunt de totes les matrius $m \times n$ el denotarem per $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.*

En el cas que $m = 1$ (o $n = 1$) parlarem d'una *matriu fila* (o d'una *matriu columna*). Si convé podem veure una matriu de tipus $m \times n$ com una seqüència de matrius files o de matrius columnes. És a dir,

$$A = (C_1 : C_2 : \ldots : C_n) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}.$$

## Tipus de matrius

- La *matriu nul·la* $O_{m,n}$ és la matriu on tots els elements són iguals a 0. (Normalment el tipus es sobreentendrà pel context i escriurem només $O$.)
- Una matriu de tipus $n \times n$ s'anomena *quadrada*. El conjunt de totes les matrius quadrades $n \times n$ amb elements a $\mathbb{K}$ es denota per $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Una matriu quadrada $(a_{ij})_{nn}$és
  - *triangular superior* si $a_{ij} = 0$ per tot $i > j$;
  - *triangular inferior* si $a_{ij} = 0$ per tot $i < j$;
  - *diagonal* si és triangular superior i inferior simultàniament; és a dir, si $a_{ij} = 0$ quan $i \neq j$.
- La matriu $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ és la matriu diagonal $(d_{ij})_{n\times n}$ amb $d_{ii} = \lambda_i$ per tot $i$.
- La matriu *identitat* $I_n$ és la matriu diagonal $\mathrm{Diag}(1, 1, \ldots, 1)$. (De nou, no escriurem el subíndex si el tipus es sobreentén pel context.)

A continuació repassarem les operacions bàsiques de matrius i les seves propietats. Fins que es digui el contrari, totes les propietats són de fàcil comprovació i n'ometem les demostracions.

## Suma

Donades dues matrius $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, la seva *suma* és la matriu $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

**Propietats.**

Es compleix per a tota $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

- *(Associativa)* $(A + B) + C = A + (B + C)$
- *(Commutativa)* $A + B = B + A$
- *(Element neutre)* $A + O = O + A = A$
- *(Element oposat)* Existeix una matriu $B$ tal que $A + B = B + A = O$.

Les dues primeres propietats ens diuen que en les sumes de matrius no cal escriure els parèntesis i els summands es poden llistar en qualsevol ordre. Clarament la matriu del quart ítem és aquella tal que $b_{ij} = -a_{ij}$; a aquesta matriu l'anomenarem $-A$.

## Producte per escalars

Donada una matriu $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i un element $\lambda \in \mathbb{K}$, el *producte de $A$ per l'escalar* $\lambda$ és la matriu $\lambda A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

**Propietats.**

Es compleix per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i tota $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

- *(Pseudoassociativa)* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- *(Distributiva 1)* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- *(Distributiva 2)* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- *(Identitat)* $1A = A$

Veiem que l'element oposat respecte la suma de matrius és $(-1)A$; per tant, $-A = (-1)A$ (seguint la mateixa pràctica, escriurem $-2A$ enlloc de $(-2)A$, etc). Fixem-nos que la segona llei distributiva implica enunciats com ara $A + A = 2A$ (d'altra banda ben naturals). Combinant les propietats de la suma i del producte per escalars, tenim que qualsevol suma de matrius, cadascuna potser multiplicada per algun escalar, la podem reduir a una forma genèrica

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_k A_k,$$

on les $A_1, \ldots, A_k$ són totes diferents.

## Transposició

Sigui $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. La seva *transposada* és la matriu $A^t = (b_{ij})_{n\times m} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ definida per $b_{ij} = a_{ji}$. Clarament $(A^t)^t = A$.

Una matriu quadrada $A$ és *simètrica* si $A = A^t$ i és *antisimètrica* si $A^t = -A$. És a dir, la matriu $(a_{ij})$ és simètrica si i només si $a_{ij} = a_{ji}$ i és antisimètrica si i només si $a_{ij} = -a_{ji}$. Per tant, els elements de la diagonal d'una matriu antisimètrica són zero.

**Exemples:** qualsevol matriu diagonal és simètrica; la matriu d'adjacència d'un graf és simètrica; la matriu nul·la és simètrica i antisimètrica.

Si la matriu no és quadrada, l'operació de transposar canvia el tipus de la matriu. Fixem-nos que això no passava amb la suma i el producte per escalars, que són operacions internes de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

## Producte de matrius

Donades dues matrius $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B = (b_{ij})_{n\times p} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, el seu *producte* és la matriu $AB = (c_{ij})_{m\times p} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ amb

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

Fixem-nos que el producte de dues matrius qualssevol no sempre està definit, ja que cal que el nombre de columnes de la primera sigui igual al nombre de files de la segona. Així mateix, pot ser que $AB$ estigui definit i que $BA$ no ho estigui; o pot ser que els dos productes estiguin definits però $AB$ i $BA$ siguin de tipus diferents. En el cas que $A$ i $B$ siguin matrius quadrades $n \times n$, ambdós productes $AB$ i $BA$ estan definits i són de tipus $n \times n$ (és a dir, el producte de matrius és una operació interna a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Tot i així, en general es tracta d'una operació no commutativa:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, denotarem per $A^k$ el producte $AA \cdots A$ (amb $k$ $A$'s).

**Propietats.**

Es compleixen per a tota matriu $A, B, C$ (sempre i quan els productes estiguin definits):

- *(Associativa)* $(AB)C = A(BC)$;
- *(Distributives)* $A(B + C) = AB + AC$ i $(A + B)C = AC + BC$;
- *(Element unitat)* $IA = A = AI$, on $I$ és la matriu identitat del tipus que convingui;
- *(Relació amb la transposada)* $(AB)^t = B^t A^t$.

Les demostracions de les dues primeres propietats no tenen més secret que escriure bé el que vol dir cada expressió, però són un bon embolic de subíndexs. La demostració de la quarta és potser la més interessant, tot i que no deixa de ser qüestió d'escriure un coeficient genèric de les matrius a banda i banda del signe d'igual.

La tercera propietat (element unitat) i el fet que el producte de matrius sigui una operació interna a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ens porten a la definició següent.

**Definició 5.2** *Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diem que $B$ és la* matriu inversa *d'$A$ si*

$$AB = BA = I_n.$$

*Si això es compleix diem que $A$ és* invertible *i denotem per $A^{-1}$ la matriu inversa.*

En la definició anterior estem assumint sense demostrar-ho que la matriu inversa, si existeix, és única. (Efectivament, si $B$ i $C$ són inverses, tenim: $B = B(AC) = (BA)C = C$.) Una matriu quadrada pot no tenir inversa. Un cas on això passa és si $A$ té una fila tota de zeros: si aquest és el cas, el producte de $A$ amb qualsevol altra matriu tindrà una fila tota de zeros, i per tant no podrà ser igual a la identitat. El mateix passa si hi ha una columna tota de zeros. Però aquesta no és l'única situació on no hi ha inversa. Per exemple, si la matriu de tipus $2 \times 2$ on totes les entrades són iguals a 1 tingués inversa, tindríem que podem trobar $a, b, c, d$ tals que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Això és equivalent a que es satisfacin simultàniament les equacions

$$a + c = 1 \text{ i } a + c = 0,$$

que són clarament incompatibles. Més endavant farem més explícita aquesta relació entre la invertibilitat i els sistemes d'equacions. De moment repassem breument algunes propietats de la matriu inversa.

Si $A$ i $B$ són matrius invertibles del mateix tipus i $\lambda$ és un escalar no nul, es compleix:

- la matriu $A^{-1}$ és invertible i $(A^{-1})^{-1} = A$;
- la matriu $A^k$ és invertible i $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;
- la matriu $\lambda A$ és invertible i $(\lambda A)^{-1} = (\lambda)^{-1} A^{-1}$;
- la matriu $A^t$ és invertible i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$;
- el producte $AB$ és invertible i $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

## 5.2 Transformacions elementals i matrius escalonades

A partir de les transformacions elementals (per files) introduirem els conceptes de forma escalonada d'una matriu i de rang, a partir dels quals podrem resoldre o discutir sistemes d'equacions i trobar la matriu inversa, si existeix. Ens limitarem a parlar d'operacions elementals per files; si volguéssim demostrar alguns teoremes, en especial el fet que el rang està ben definit, ens seria útil parlar també d'operacions per columnes.

**Definició 5.3** *Sigui $A$ una matriu qualsevol. Una* transformació elemental per files *d'$A$ consisteix en una de les tres operacions següents:*

*(I) intercanviar dues files d'$A$;*

*(II) multiplicar una fila d'$A$ per un escalar no nul;*

*(III) sumar a una fila un múltiple no nul d'una altra.*

*Diem que una matriu és* elemental (per files) *si es pot obtenir a partir d'una matriu identitat mitjançant una única transformació elemental per files.*

Fixem-nos que les transformacions elementals no canvien el tipus de la matriu. En general, ometrem el qualificador "per files" quan parlem de transformacions o matrius elementals.

El teorema següent ens diu que per fer una transformació elemental en tenim prou amb multiplicar per una matriu elemental.

**Teorema 5.4** *Sigui $T$ una transformació elemental i sigui $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El resultat d'aplicar la transformació $T$ a la matriu $M$ és $EM$, on $E$ és la matriu elemental resultant d'aplicar $T$ a la identitat $I_m$.*

*Demostració.* Fer-ho en general seria força enfarfegador. Fem alguns exemples a tall de comprovació.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ i & j & k & l \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ ak+e & bk+f & ck+g & dk+h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$$

□

A partir d'una matriu donada, podem anar aplicant transformacions elementals arbitràriament, o bé podem aplicar-les amb l'objectiu d'intentar arribar a una matriu que tingui una estructura convenient. Aquesta forma "convenient" serà la de matriu escalonada. (Més endavant en veurem clara la conveniència.)

**Definició 5.5** *Una matriu $B$ és* equivalent (per files) *a una matriu $A$ si $B$ es pot obtenir a partir d'$A$ fent una seqüència finita de transformacions elementals.*

Es comprova fàcilment que "ser equivalents" és una relació d'equivalència en el conjunt $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si $B$ és equivalent a $A$, podem escriure $B = E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A$, on les $E_i$ són matrius elementals.

**Definició 5.6** *Una matriu és* escalonada (per files) *si es compleixen les tres condicions següents:*

- *si una fila és nul·la (composta enterament per zeros), totes les que estan per sota d'ella també son nul·les;*
- *en cada fila no nul·la, el primer element no nul és un* 1 *(anomenat l'*1 dominant *o el* pivot *de la fila); i*
- *el pivot d'una fila sempre es troba més a la dreta que el pivot de la fila anterior.*

Existeix també el concepte de matriu escalonada reduïda, on es demana que cada pivot sigui l'únic element no nul de la seva columna.

**Teorema 5.7** *Tota matriu és equivalent a una matriu escalonada per files.*

*Demostració.* Farem una demostració algorísmica. Sigui $A$ una matriu. Si és la matriu nul·la, ja és escalonada. Altrament, seguim els passos següents.

1. Sigui $i$ la primera columna d'$A$ que té alguna entrada diferent de zero, suposem que a la fila $j$. Fem una transformació de tipus I (canvi de files) i portem la fila $j$ a la fila 1.
2. Si l'entrada $(1, i)$ és igual a $a \neq 1$, fem una transformació de tipus II (multiplicar fila per escalar) i fem que sigui 1.
3. Fent transformacións de tipus III (sumar a una fila un múltiple d'una altra), aconseguim que totes les entrades no nul·les de la columna $i$ es converteixin en zeros.

Un cop aplicats aquests tres passos, la matriu té aquest aspecte

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

on $*$ denota qualsevol escalar. En aquest moment fixem la primera fila i les $i$ primeres columnes i apliquem els passos 1),2) i 3) a la matriu formada per les $n - i$ últimes columnes i les $m - 1$ últimes files. Així successivament, aconseguim arribar a una matriu escalonada (si ho volguéssim demostrar formalment, hauríem de fer-ho per inducció). $\square$

**Definició 5.8** *Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El* rang *d'A és el nombre de files no nul·les de qualsevol matriu escalonada equivalent a A.*

El primer que ens hauríem de preguntar és si el concepte de rang està ben definit, és a dir, si totes les matrius escalonades equivalents a una de donada tenen el mateix nombre de files no nul·les. Això no és molt difícil, però ens portaria massa temps i ens conformem amb creure'ns que la definició és consistent.

## Aplicació al càlcul de la inversa

A continuació veurem com a través de les transformacions elementals podem arribar a un criteri per decidir si una matriu és invertible. Observem primer que les matrius elementals són invertibles.

**Lema 5.9** *Si $E$ és una matriu elemental, aleshores $E$ és invertible i la seva inversa $E^{-1}$ també és una matriu elemental.*

*Demostració.* És simplement qüestió de comprovar-ho per als tres tipus de transformacions.

(I) Si $E$ és una matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (I) (intercanvi files $i$ i $j$), tenim $EE = I$.

(II) Si $E_\lambda$ és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (II) (multiplicar una fila per $\lambda \neq 0$), tenim $E_\lambda E_{\lambda^{-1}} = I = E_{\lambda^{-1}} E_\lambda$.

(II) Si $E_k$ és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (III) (sumar a la fila $i$ la fila $j$ multiplicada per $k$), tenim $E_k E_{-k} = I = E_{-k} E_k$.

□

**Corol·lari 5.10** *Si $A$ és una matriu invertible, aleshores tota matriu equivalent a $A$ també ho és.*

*Demostració.* Sigui $B$ una matriu equivalent a $A$. Sabem que $B = E_r \cdots E_2 E_1 A$, on les $E_i$ són matrius elementals. Aleshores,

$$B(A^{-1}E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_r^{-1}) = I = (A^{-1}E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_r^{-1})B,$$

per tant $B$ és invertible amb inversa $A^{-1}E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_r^{-1}$. □

**Teorema 5.11** *Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i $M$ una matriu escalonada equivalent a $A$. Aleshores $A$ és invertible si i només si tots els elements de la diagonal de $M$ són 1.*

*Demostració.*
$\boxed{\Leftarrow}$ Fixem-nos primer que si $M$ és una matriu amb uns a la diagonal, la matriu identitat $I_n$ és equivalent a $A$ (faríem totes les transformacions de tipus (III) necessàries per posar zeros a sobre dels uns de $M$). Suposem doncs que $I_n$ és equivalent a $A$. Per tant,

$$I_n = E_r E_{r-1} \cdots E_1 A.$$

Per tant, $E_r E_{r-1} \cdots E_1$ és la matriu inversa d'$A$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Recíprocament, suposem que $A$ sigui invertible. Pel Corol·lari 5.10, la matriu $M$ també és invertible. Raonem ara per reducció a l'absurd. Si algun element de la diagonal de $M$ no és un 1, com que $M$ és escalonada, aleshores alguna fila de $M$ està formada completament per zeros. Però sabem que les matrius que tenen alguna fila de zeros no són invertibles, la qual cosa és una contradicció. Per tant, $M$ té uns a la diagonal □

**Corol·lari 5.12** *Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és invertible si i només si té rang $n$.*

Fixem-nos que no tenim només un mètode per decidir si una matriu és invertible, si no que la prova del Corol·lari 5.10 ens dóna un procediment per calcular la inversa. Si $I_n = E_r \cdots E_2 E_1 A$, aleshores $A^{-1} = E_r \cdots E_2 E_1$. A la pràctica, podem fer-ho de la manera següent (el *mètode de Gauss-Jordan per a calcular la inversa*):

- Considerem la matriu $(A|I_n)$.
- Aplicant transformacions elementals, intentem arribar a una matriu de la forma $(I_n|B)$.
- Si ho aconseguim, la matriu $A$ és invertible i la seva inversa és $B$.
- Si no ho aconseguim (perquè arribem a tenir una fila que comenci amb $n$ zeros), $A$ no és invertible.

## 5.3 Sistemes d'equacions lineals

El proper objectiu és usar la forma escalonada d'una matriu per a discutir i resoldre sistemes d'equacions lineals.

**Definició 5.13** *Una* equació lineal en les variables $x_1, \ldots, x_n$ *és una expressió del tipus*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b, \tag{5.1}$$

*on $a_1, \ldots, a_n, b$ pertanyen al cos d'escalars $\mathbb{K}$.*

*Una* solució *de (5.1) és una $n$-upla $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que*

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = b.$$

Una equació lineal acostuma a tenir infinites solucions (que a $\mathbb{R}^n$ formarien rectes, plans, etc), encara que pot ser que només en tingui una (com l'equació $x = 1$) o cap (com ara $0x = 1$, tot i que és un cas massa degenerat com per prestar-li atenció).

Normalment voldrem satisfer diverses equacions lineals simultàniament.

**Definició 5.14** *Un* sistema d'equacions lineals *és un conjunt d'equacions lineals (totes amb les mateixes variables $x_1, \ldots, x_n$). Una* solució del sistema *és una $n$-upla $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ que és solució de totes les equacions del sistema.*

La forma genèrica d'un sistema d'equacions lineals seria doncs:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

De nou, un sistema d'equacions lineals pot tenir entre cap i infinites solucions. Direm que un sistema és

- *incompatible* si no té cap solució (per exemple, $\{x + y = 0, x + y = 1\}$);

- *compatible determinat* si té una única solució (per exemple, $\{x + y = 0, x - y = 2\}$);
- *compatible indeterminat* si té més d'una solució (per exemple, $\{x + y = 1, 2x + 2y = 2\}$).

Veurem més endavant que els sistemes compatibles indeterminats tenen infinites solucions (a no ser que $\mathbb{K}$ sigui finit). Anomenarem *solució general* d'un sistema al conjunt de totes les seves solucions, i direm que dos sistemes són *equivalents* si tenen la mateixa solució general.

El nostre objectiu serà doncs donat un sistema d'equacions, dir de quin dels tres tipus és (discutir) i, si ho necessitem, trobar-ne la solució general. Per a fer això transformarem el sistema inicial en d'altres d'equivalents, fins que trobem algun que sapiguem discutir. Aquesta tasca esdevé una mica menys feixuga si treballem amb la forma matricial del sistema.

La *matriu associada* al sistema d'equacions $(*)$ és la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La matriu de variables (o incògnites) i la matriu dels termes independents són, respectivament,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Amb aquesta notació, podem escriure el sistema com un producte de matrius:

$$Ax = b.$$

Imaginem ara que volguéssim multiplicar una de les equacions del sistema per 2. Clarament això resultaria en un sistema equivalent. Si treballem amb la forma matricial, haurem de multiplicar per 2 la fila corresponent a $A$ i a $b$ (però no a $x$!). De la mateixa manera, si per exemple volem sumar la primera equació a la segona, hauríem de fer les transformacions a $A$ i a $b$. Per això resulta convenient treballar amb la matriu $(A|b)$, que s'anomena la *matriu ampliada* del sistema. A totes les columnes, excepte a la darrera, les anomenarem columnes de variables.

És un exercici senzill comprovar que aplicar transformacions elementals a la matriu ampliada resulta en un sistema d'equacions equivalent. Per tant, del teorema 5.7 en deduïm el següent.

**Lema 5.15** *Tot sistema d'equacions lineals és equivalent a un en el que la matriu ampliada és escalonada.*

De què ens serveix això? Com possiblement ja es sap del batxillerat, els sistemes amb matrius escalonades són fàcils de discutir i resoldre. Suposem que la matriu ampliada equivalent està en forma escalonada i que té rang $r$. Si l'última fila no nul·la és de la forma $0, 0, \ldots, 0, 1$, el sistema és incompatible (equació $0 = 1$). Altrament, tots els pivots estaran en columnes de variables. Fixem-nos que podem assumir que els pivots estan a les $r$ primeres columnes; si no fos així, canviem d'ordre algunes columnes per aconseguir-ho. (Això equivaldria a reordenar les variables, cosa que clarament no afecta les solucions. Aquesta serà l'única transformació en columnes que permetrem.) Aleshores, si escrivim de nou les equacions, tenim:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \cdots + c_{mn}x_n & = & d_m \end{array}\right. .$$

Les variables $x_1, \dots, x_r$ les anomenarem *principals* i la resta les anomenarem *lliures.* (Notem que quines variables són lliures i quines principals pot dependre de quines transformacions fem per arribar a la forma escalonada; el que no variarà és quantes variables són lliures i quantes principals.)

La variable principal $x_r$ la podem aïllar en termes de les variables lliures:

$$x_r = d_m - c_{m,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{mn}x_n.$$

Ara podem aïllar $x_{r-1}$ en termes de $x_r$ i de les variables lliures; substituint $x_r$ per l'expressió que ja tenim, ens quedaria $x_{r-1}$ en termes de les variables lliures. Procedint successivament, expressaríem totes les variables principals en termes de les lliures. Ens quedaria

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & d_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\ x_2 & = & d_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & d_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n \end{array}$$

on els $e_{ij}$ i els $d_i$ són escalars. Aquesta és la solució general del sistema. Per a cada assignació de valors que donem a les variables lliures $x_{r+1}, \dots, x_r$ obtindrem una solució particular del sistema. És clar que si no hi ha variables lliures el sistema és determinat, mentre que si hi ha $s \geq 1$ variables lliures, hi haurà tantes solucions com elements de $\mathbb{K}^s$ (per tant almenys dues, i normalment infinites); direm que el sistema té *s graus de llibertat.*

Fixem-nos que podem reescriure la discussió anterior en termes de rangs (és l'anomenat teorema de Rouché-Frobenius).

**Teorema 5.16** *Considerem un sistema d'equacions lineals que té matriu associada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i matriu ampliada $(A|b)$. Sigui $r$ el rang d'$A$ i sigui $r'$ el rang de $(A|b)$. Aleshores,*

- *si $r < r'$, el sistema és incompatible (SI);*
- *si $r = r' = n$, el sistema és compatible determinat (SCD);*
- *si $r = r' < n$, el sistema és compatible indeterminat (SCI) amb $n - r$ graus de llibertat.*

Si tots els termes independents són iguals a 0, aleshores el sistema es diu que és *homogeni.* Un sistema homogeni sempre és compatible, ja que $(0, 0, \dots, 0)$ n'és solució, la solució trivial.

**Corol·lari 5.17** *Un sistema homogeni d'equacions lineals té alguna solució diferent de la trivial si i només si el rang de la matriu del sistema és menor que $n$.*

## 5.4 Determinants

El tractament que fem dels determinants és molt poc rigorós. Ens conformarem amb donar-ne la definició recursiva i veure quina és la relació amb les transformacions elementals. A partir d'això podrem demostrar que les matrius invertibles són les que tenen determinant no nul. També mencionarem sense demostrar-les altres propietats dels determinants i la relació entre el determinant i el rang.

El determinant d'una matriu quadrada és un nombre (escalar) que s'associa a la matriu. Hi ha diverses definicions possibles; aquí en donarem la recursiva (desenvolupant per una fila o una columna), ja que ens estalvia parlar de permutacions i de signes i, d'altra banda, dóna directament una manera pràctica de calcular.

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; un *menor* d'$A$ és qualsevol matriu formada a partir d'$A$ eliminant un cert nombre de files i el mateix nombre de columnes. El *menor associat a l'element* $a_{ij}$ és la matriu $A_{ij}$ obtinguda en eliminar la fila $i$ i la columna $j$ de la matriu $A$. El menor $A_{ij}$ és doncs una matriu quadrada de tipus $(n-1) \times (n-1)$.

**Definició 5.18** *Sigui* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *El* determinant d'$A$ *es defineix com*

- *si* $n = 1$, *aleshores* $\det(A) = a_{11}$;
- *si* $n \geq 2$, *aleshores*

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n}).$$

Si la matriu ve donada explícitament pels seus elements, per denotar el determinant enlloc de rodejar els elements amb dos parèntesi grans ho farem amb dues barres verticals.

Si apliquem la definició a matrius $2 \times 2$ i $3 \times 3$ retrobem les fórmula "de tota la vida":

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= a\det((d)) - b\det((c)) = ad - bc \\
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
&= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) = aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi
\end{aligned}$$

De la definició en podem deduir alguns resultats. L'*adjunt de l'element* $a_{ij}$ és $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$; per tant, el determinant és la suma, al llarg de la primera fila, de cada element pel seu adjunt.

**Proposició 5.19** *Si una matriu* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *té una fila o una columna nul·la, aleshores el seu determinant és zero.*

*Demostració.* Per inducció sobre $n$. Clarament és cert per $n = 1$. Per al pas d'inducció, comencem pel cas d'una fila nul·la. Suposem primer que la fila nul·la és la $i$-èsima. Si $i = 1$, clarament $\det(A) = 0$. Altrament, per hipòtesi d'inducció, els que són zero són tots els adjunts, i també tenim $\det(A) = 0$.

Si ara la que és nul·la és una columna, suposem que és la $j$-èsima. Si mirem els adjunts $(-1)^{1+k}\det(A_{1k})$, per hipòtesi d'inducció són zero tots excepte, potser, el que correspon a $k = j$.

Però en aquest darrer cas el que és zero és $a_{1j}$, per tant de nou tots els sumands de la definició del determinant són zero. □

En el cas que la matriu sigui triangular superior, podem usar aquest fet per a calcular el determinant fàcilment.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Si la matriu és triangular inferior el càlcul encara és més senzill, i de nou el resultat és el producte dels elements de la diagonal.

Un altre fet que podem demostrar a partir de la definició és el següent.

**Proposició 5.20** *Si $B$ és la matriu que s'obté multiplicant la fila $i$-èsima d'$A$ per $\lambda$, aleshores* $\det(B) = \lambda \det(A)$.

*Demostració.* De nou per inducció sobre $n$. El cas $n = 1$ és clar. Si $n \geq 1$, pot passar que la fila que multipliquem sigui la primera o alguna altra. Si és la primera, queda clar que tots els sumands de la definició de determinant queden multiplicats per $\lambda$. Si $i \geq 2$, aleshores per hipòtesi d'inducció tenim $\det(B_{1i}) = \lambda \det(A_{i1})$, i per tant de nou tots els sumands queden multiplicats per $\lambda$. □

Què passa ara si fem alguna de les altres transformacions elementals? Si estudiem què passa amb matrius petites, es pot arribar a la conclusió que intercanviar files multiplica el determinant per $(-1)$ i que sumar a una fila el múltiple d'una altra no afecta al determinant. Però si s'intenta demostrar per inducció les coses no surten tan fàcils com en el cas anterior. (No dic pas que no es pogués fer, eh?)

El resultat següent ens diu que de fet podem desenvolupar al llarg de qualsevol fila o de qualsevol columna i el resultat sempre serà el mateix. Si el volguéssim demostrar a partir de la definició que tenim de determinant ens portaria força feina; com que la nostra idea no és fer un estudi gaire profunt dels determinants, enunciem el teorema sense demostració. (Podem, si volem, fer alguns exemples per comprovar-ho amb matrius $2 \times 2$ o $3 \times 3$.)

**Teorema 5.21** *Sigui $i$ una fila qualsevol d'$A$. Aleshores*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

*Si $j$ és una columna qualsevol d'$A$, aleshores*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Amb aquest resultat, l'efecte de les transformacions elementals de tipus (I) i (III) en el determinant es demostra de manera similar a la Proposició 5.20.

**Proposició 5.22** *Si $B$ s'obté a partir d'$A$ intercanviant dues files, aleshores* $\det(B) = -\det(A)$. *Si $B$ s'obté a partir d'$A$ sumant-li a una fila un múltiple d'una altra, aleshores* $\det(B) = \det(A)$.

Fixem-nos que si partim d'una matriu amb $\det(A) \neq 0$ i anem realitzant operacions elementals, el determinant de la matriu equivalent resultant mai no serà zero. I de la mateixa manera, si comencem amb una matriu amb determinant zero, qualsevol matriu equivalent també tindrà determinant igual a zero. (De fet, podríem anar més enllà: si $B = E_r \cdots E_1 A$, on les $E_i$ són matrius elementals, aleshores $\det(B) = \det(E_r) \cdots \det(E_1)\det(A)$.)

**Teorema 5.23** *Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és invertible si i només si* $\det(A) \neq 0$.

*Demostració.* Sigui $M$ una matriu escalonada equivalent a $A$. Com que $A$ és quadrada, $M$ serà triangular superior i el seu determinant serà el producte dels elements de la diagonal. Pel teorema de caracterització de les matrius invertibles segons el rang, sabem que $A$ és invertible si i només si $M$ té uns a la diagonal. Per l'observació anterior, això és equivalent a $\det(A) \neq 0$. □

**Corol·lari 5.24** *Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ té rang $n$ si i només si* $\det(A) \neq 0$.

De fet, podem anar més enllà, ja que el caràcter nul/no nul del determinant d'un menor qualsevol d'una matriu no canvia si fem transformacions elementals a la matriu.

**Teorema 5.25** *Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El rang d'$A$ és $r$ si i només si el més gran menor d'$A$ amb determinant no nul és $r \times r$*

*Demostració.* (Inclosa per completesa més que per altra cosa.)

$\boxed{\Rightarrow}$ La matriu $A$ és equivalent a una escalonada amb $r$ pivots, que es troben a les files $1, 2, \ldots, r$ i a les columnes $c_1, \ldots, c_r$. Aleshores el menor corresponent té determinant diferent de zero (ja que fent transformacions elementals per files arribem a una matriu amb tot d'uns a la diagonal). Qualsevol menor més gran té determinant zero ja que té una fila de zeros.

$\boxed{\Leftarrow}$ Podem suposar que el menor s'obté seleccionant les $r$ primeres files i les columnes $c_1, \ldots, c_r$. Si ara fem transformacions elementals a les $r$ primeres files fins a arribar a una matriu escalonada, el resultat no pot tenir cap fila nul·la, ja que si aquest fos el cas el menor tindria determinant zero. Per tant, el rang d'$A$ és almenys $r$. Ara bé, si el rang fos més gran que $r$, aleshores la implicació que ja hem demostrat ens diu que $A$ té un menor amb determinant no nul de tipus $(r+1) \times (r+1)$, però això no pot ser. □

Mencionem un parell de propietats més dels determinants sense demostració.

**Proposició 5.26** *Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, aleshores* $\det(A^t) = \det(A)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

**Corol·lari 5.27** *Si $A$ és invertible,* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Per a demostrar l'efecte de les transformacions elementals, necessitem la propietat següent

**Proposició 5.28** *Siguin $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tres matrius tals que*

$$a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} \text{ si } i \neq k, a_{kj} = b_{kj} + c_{kj} \text{ altrament.}$$

*Aleshores* $\det(A) = \det(B) + \det(C)$.

*Demostració.* Per inducció sobre $n$, sent el cas $n = 1$ clar. Per hipòtesi d'inducció, si $i \neq k$, $\det(A_{i1}) = \det(B_{i1}) + \det(C_{i1})$. En canvi, $\det(A_{k1}) = \det(B_{k1}) = \det(C_{k1})$. Per tant, el sumand genèric en l'expressió de $\det(A)$ serà

$$(-1)^{1+i} a_{i1} \det(A_{i1}) = \begin{cases} (-1)^{1+i} a_{i1}(\det(B_{i1}) + \det(C_{i1}) & \text{si } i \neq k \\ (-1)^{k+1}(b_{k1}\det(B_{k1}) + c_{k1}\det(C_{k1})) & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Manipulant el sumatori s'arriba a la conclusió desitjada. □

**Proposició 5.29** *Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ amb $n \geq 2$ i sigui $B$ una matriu obtinguda a partir d'$A$ fent una transformació elemental.*

*(I) Si $B$ s'obté a partir d'$A$ intercanviant dues files, aleshores*

$$\det(B) = -\det(A).$$

*(II) Si $B$ s'obté a partir d'$A$ multiplicant una fila per $\lambda$, aleshores*

$$\det(B) = \lambda \det(A).$$

*(III) $B$ s'obté a partir d'$A$ sumant a la fila $j$ la fila $i$ multiplicada per $k$, aleshores*

$$\det(B) = \det(A).$$

*Demostració.* Les tres es demostren per inducció sobre $n$, sent $n = 2$ el cas base que es comprova fàcilment. Pel pas d'inducció, tenim per definició

$$\det(B) = \sum_j (-1)^{j+1} b_{j1} \det(B_{j1}).$$

(I) Suposem primer que hem intercanviat les files $i$ i $i+1$. Dels menors associats als elements de la primera columna, tots excepte els que corresponen a $b_{i1}$ i $b_{i+1,1}$ s'obtenen a partir dels menors d'$A$ intercanviant dues files; a més, si $j \neq i, i+1$, $b_{j1} = a_{j1}$. Fixem-nos que el menor de $B$ corresponent a $b_{i1}$ és precisament el menor d'$A$ corresponent a $a_{i+1,1}$, i el menor de $B$ corresponent a $b_{i+1,1}$ és le menor d'$A$ corresponent a $a_{i1}$. Per tant,

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{j \neq i, i+1} (-1)^{j+1} a_{j1}(-\det(A_{j1}) + b_{i1}(-1)^{i+1}(\det(A_{i+1,1}) + b_{i+1,1}(-1)^i(\det(A_{i,1}) \\ &= \sum_j (-1)^{j+1} a_{j1}(-\det(A_{j,1})) = \det(A). \end{aligned}$$

Si ara volem intercanviar les files $i$ i $i'$, ho podem fer fent $2|i - i'! - 1$ intercanvis de files consecutives, cadascuna comportant un canvi de signe en el determinant, per tant al final el signe quedarà canviat.

(II) Suposem que la fila que hem multiplicat per $\lambda$ és la $i$-èsima. Per $j \neq i$, $b_{j1} = a_{j1}$ i $\det(B_{j1}) = \lambda \det(A_{j1})$ per hipòtesi d'inducció; per $j = i$, $b_{i1} = \lambda a_{i1}$ i $\det(B_{i1}) = \det(A_{i1})$. Per tant, tots els summands de $\det(B)$ queden multiplicats per $\lambda$.

(III) Aplicant la proposició 5.28, deduïm que $\det(B) = \det(A) + \det(A')$ on $A'$ denota la matriu que a la fila $j$ hi té $k$ vegades la fila $i$. Ara, $\det(A') = k \det(A'')$, on $A''$ és la matriu on la fila $i$ i la $j$ són iguals. Ara bé, $\det(A'') = 0$, ja que si intercanviem les fies $i$ i $j$ a la matriu $A''$, la matriu en sí no canvia però el determinant ha de canviar de signe per (I).

□

# 6
# Espais vectorials

## 6.1 Definició d'espai vectorial i exemples

**Definició 6.1** *Un* espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$ *(o un* $\mathbb{K}$-espai vectorial*) consisteix en*

1. *un conjunt no buit* $E$*,*
2. *una operació interna* $E \times E \to E$ *(*suma $+$*), i*
3. *una aplicació* $\mathbb{K} \times E \to E$ *(*producte per escalars $\cdot$*)*

*de manera que per a tot* $u, v, w \in E$ *i tot* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$*:*

*(e1)* $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativa)*;*

*(e2)* $u + v = v + u$ (commutativa)*;*

*(e3) existeix un únic element* $0_E \in E$ *tal que* $u + 0_E = u$ (element neutre)*;*

*(e4) per cada* $u \in E$ *existeix un únic* $u' \in E$ *tal que* $u + u' = 0_E$ (element oposat)*;*

*(e5)* $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$*;*

*(e6)* $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$*;*

*(e7)* $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$*;*

*(e8)* $1u = u$*, on* $1$ *és el neutre del producte de* $\mathbb{K}$*.*

**Exemples.**

1. El conjunt $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ format per totes les matrius $m \times n$ amb elements de $\mathbb{K}$ és un $\mathbb{K}$-espai vectorial amb les operacions suma de matrius i producte de matriu per escalar.
2. Un cas particular de l'exemple anterior s $\mathbb{K}^n = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}$ format per matrius $nx1$ (vectors columna) amb elements de $\mathbb{K}$.
3. El conjunt $P_d(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^n : a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}\}$ format per tots els polinomis de grau com a molt $d$, $d \geq 1$, amb coeficients reals i indeterminada $x$, s un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

A partir d'ara, $E$ denotarà un $\mathbb{K}$-espai vectorial genèric.

**Lema 6.2** *Per a tot $u \in E$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$:*

1. $0u = 0_E$;
2. $\lambda 0_E = 0_E$;
3. $u' = (-1)u$

*Demostració.*

1. $0u + 0u = (0+0)u = 0u$; com que l'element neutre és únic, per força $0u = 0_E$;
2. $\lambda 0_E = \lambda(00_E) = (\lambda 0)0_E = 00_E = 0_E$;
3. $(-1)u + u = (-1+1)u = 0u = 0_E$.

□

A partir d'ara escriurem $-u$ enlloc de $u'$ (i farem servir igualment $-2u$ enlloc de $(-2)u$, etc.).

## 6.2 Subespais i combinacions lineals

**Definició 6.3** *Un subconjunt $S \subseteq E$ és un* subespai vectorial *si $S \neq \emptyset$ i es compleix*

*(s1)* *per tot $u, v \in S$, $u + v \in S$;*

*(s2)* *per tot $u \in S$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in S$.*

Observem que tot subespai vectorial és un espai vectorial (sobre el mateix cos que l'espai inicial, és clar). Efectivament, la suma i el producte per escalars estan ben definits i les propietats (e1)-(e3) i (e6)-(e8) es satisfan perquè es satisfan a $E$. Per comprovar les propietats (e4) i (e5) hem de veure que $0_E \in S$ i que $-u \in S$ per tot $u \in S$. Això és conseqüència de (s1) i (s2) (i del Lemma 6.2):

$$0_E = 0u \text{ i } -u = (-1)u.$$

(Notem que l'argument per demostrar $0_E \in S$ necessita que $S$ sigui no buit.)

Les condicions (s1) i (s2) són clarament necessàries per a que un subconjunt $S \subseteq E$ sigui un espai vectorial (amb les mateixes operacions que $E$), així que els subespais són efectivament tots els subconjunts d'un espai vectorial que són també espais vectorials.

Vegem alguns exemples de subespais vectorials:

- **El subespai trivial** és $\{0_E\}$.
- **Rectes a $\mathbb{R}^n$.** Prenem per exemple $L = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\}$, la recta de pendent 3 que passa per l'origen; es comprova fàcilment que és subespai. Escrivint la solució de $y = 3x$ en forma paramètrica, podem reescriure $L = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$. Una recta genèrica a $\mathbb{R}^n$

és més fàcil descriure-la en forma paramètrica que no pas en forma d'equacions: si $v$ és un vector de $\mathbb{R}^n$, el conjunt $L_v = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ és un subespai de $\mathbb{R}^n$ que interpretem geomètricament com la recta que passa per l'origen i té la mateixa direcció que $v$ (a no ser que $v$ sigui el vector nul, cas en què obtenim el subespai trivial.) Si volguéssim descriure $L_v$ amb equacions, en necessitaríem $n-1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_n \frac{v_1}{v_n} \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_n \frac{v_{n-1}}{v_n} \end{cases} \quad \text{(suposant que } v_n \neq 0).$$

- **Plans a $\mathbb{R}^n$.** Un exemple de pla a $\mathbb{R}^3$ és $P = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Es comprova que és subespai. Com abans, podem escriure els $x, y, z$ en forma paramètrica $P = \{y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R}\}$. Per obtenir un pla genèric a $\mathbb{R}^n$, prenem $u, v \in \mathbb{R}^n$. El conjunt $< u, v >= \{\lambda u + \mu v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial, i es tracta de l'únic pla que passa per l'origen i conté les rectes $L_u$ i $L_v$, a no ser que $u \in L_v$ o $v \in L_u$, cas en què el subespai seria simplement $L_v$ o $L_u$, respectivament. Més endavant generalitzarem aquests exemples.

- **Subespai donat per equacions**. En general el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni és un subespai de $\mathbb{R}^n$, si les equacions tenen $n$ variables. Per exemple,

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0, -x + 3t - 4z = 0\}$$

és un subespai de $\mathbb{R}^4$. Observem que les solucions d'un sistema no homogeni no formen un subespai vectorial, perquè en particular no contenen el vector zero. Tot subespai donat per equacions homogènies el podem reescriure en forma paramètrica si resolem el sistema; hi haurà tants paràmetres com variables lliures. El subespai de l'exemple anterior és

$$\{z \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Donat un espai descrit per les seves equacions, voldrem saber si és igual a tot $\mathbb{R}^n$, o si és un pla de $\mathbb{R}^n$, o una recta, o l'equivalent en dimensions majors que 3.

- **Subespais de matrius.** Dins de l'espai de les matrius quadrades tenim els subespais de les matrius triangulars superiors, inferiors o diagonals. Fixem-nos que les matrius triangulars superiors es poden descriure amb equacions

$$T = \{(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}.$$

En general, qualsevol conjunt de matrius descrit per equacions lineals homogènies en els seus coeficients serà un subespai.

- **Subespais de polinomis.** Els polinomis de grau com a molt $d$ són un subespai de l'espai dels polinomis (de grau arbitrari); l'anomenem $P_d(\mathbb{R})$. També són subespais el conjunt de polinomis amb terme constant igual a zero (o amb els coeficients prefixats que volguem iguals a zero) o els polinomis que avaluats en un valor concret donen zero. No són subespais el conjunt de polinomis amb un grau concret $d > 0$ (que no contenen el polinomi zero ni són tancats per la suma), ni aquells polinomis que tenen un coeficient concret igual a un valor que no sigui zero.

**Lema 6.4** *Si $S$ i $S'$ són subespais vectorials d'$E$, aleshores $S \cap S'$ també ho és.*

*Demostració.* $S \cap S'$ és no buit ja que conté $0_E$. Les condicions (s1) i (s2) són immediates de comprovar. $\square$

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de $S = \{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$ ($\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \notin S \cup S'$).

Com hem vist abans, si prenem, per exemple, un parell de vectors $u, v$ de $\mathbb{R}^n$ i fem totes les combinacions $\lambda u + \mu v$, on $\lambda$ i $\mu$ recorren el cos d'escalars, el conjunt resultant és un subespai vectorial (que interpretem com a pla o com a recta, a no ser que sigui el subespai trivial). Això ho podem generalitzar de la manera següent.

**Definició 6.5** *Siguin $u_1, \ldots, u_k$ vectors de l'espai vectorial $E$. El* subespai generat *per $u_1, \ldots, u_k$ és el conjunt*

$$< u_1, \ldots, u_k >= \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

**Proposició 6.6** *El subespai generat $< u_1, \ldots, u_k >$ és, com el seu nom indica, un subespai vectorial. A més, és el subespai més petit que conté $u_1, \ldots, u_k$.*

*Demostració.* La part de que és subespai es comprova molt fàcilment. Qualsevol subespai que contingui $u_1, \ldots, u_k$ ha de contenir qualsevol expressió del tipus $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$, per tant $< u_1, \ldots, u_k >$ és el més petit subespai que conté els vectors donats. $\square$

**Definició 6.7** *Donats $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E, una* combinació lineal *de $u_1, \ldots, u_k$ és una expressió del tipus*

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k,$$

*on $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ són escalars.*

*Diem que el vector $v$ és combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$ si existeixen escalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tals que*

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k.$$

*En altres paraules, $v$ és combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$ si i només si $v \in < u_1, \ldots, u_k >$.*

Si un espai $S$ el podem escriure com $S =< v_1, \ldots, v_l >$, direm que $v_1, \ldots, v_l$ són un *conjunt de generadors* de $S$. El conjunt de generadors d'un espai no és únic.

Per exemple, prenem

$$S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} = \{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}.$$

Aleshores $S =< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} >$, ja que $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Però també $S =< \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} >$, ja que $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = (-x/2) \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Fins i tot, $S =< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} >$; podem escriure, entre moltes altres opcions,

$$\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{-x}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (3x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

El nostre objectiu per a la propera secció serà: donat un espai (subespai), trobar un conjunt de generadors el més petit possible. Abans però, anem a veure com trobar simplement un conjunt de generadors d'un espai. Si ens donen directament els generadors, ja ho tenim. Si la descripció de l'espai és prou senzilla, també és fàcil trobar els generadors. Per exemple:

- $\mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}\} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} >.$
- De manera similar, l'espai de les matrius $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ està generat per les matrius $M_{ij}$ que tenen totes les entrades iguals a 0, excepte la de la posició $i, j$, que és igual a 1.
- Per als polinomis, $P_d(\mathbb{R}) =< 1, x, \ldots, x^d >$.
- Si volguéssim generar les matrius triangulars superiors, agafaríem de les matrius anteriors, les que tenen $i \leq j$.
- En general, sempre que tinguem explícitament els vectors en termes de paràmetres, serà fàcil trobar generadors:

$$\{a + (b-a)x + (c-b)x^2 + (a-c)x^3 : a, b, c \in \mathbb{R}\} =< 1 - x + x^3, x - x^2, x^2 - x^3 > .$$

Si l'espai ens el donen com les solucions d'un sistema homogeni, també és fàcil trobar els generadors, com hem vist abans. El que fem és resoldre el sistema i expressar la solució en forma paramètrica. Vegem-ho amb un exemple:

Sigui $S = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, 3x - t = 0, y - z - 2t = 0\}$. Resolent el sistema, trobem que és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, i que la solució general és $x = t/3, y = 5t/6, z = -7t/6$ i $t$ és lliure. Per tant, $S = \{t \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/6 \\ -7/6 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} =< \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/6 \\ -7/6 \\ 1 \end{pmatrix} >$.

Si volem evitar les fraccions, fem $S =< \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} >$.

## 6.3 Independència lineal

El concepte que ens ajudarà a, donat un conjunt de generadors d'un espai $E$, trobar el conjunt de generadors més petit possible, és el d'independència lineal.

**Definició 6.8** *Els vectors* $u_1, \dots, u_k$ *són* linealment independents *(LI) si els únics escalars* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ *que satisfan*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = 0_E$$

*són* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. *Altrament, és a dir, si existeix alguna solució no trivial, diem que els vectors són* linealment dependents *(LD).*

En altres paraules, uns vectors són LI si l'única combinació lineal que dóna el vector zero és agafant tots els coeficients iguals a zero. Vegem-ne alguns exemples:

- El vector $0_E$ és linealment dependent. Efectivament, $10_E = 0_E$.
- Si $u$ és un vector diferent de $0_E$, el vector $u$ és linealment independent. En efecte, si $\lambda u = 0_E$, només pot ser $\lambda = 0$.
- Si $u$ és un vector qualsevol i $\lambda$ és un escalar, els vectors $u$ i $\lambda u$ són LD: $(-\lambda)u + \lambda u = 0_E$.
- A $\mathbb{R}^3$, considerem els vectors $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Per veure si són LI, hem de trobar les solucions de
$$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$
Com que la matriu del sistema ja és escalonada i el rang és 3, tenim un S.C.D, per tant l'única solució és $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
- Prenem ara $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. De nou discutint els sistema, ens surt ara que és compatible indeterminat, per tant hi ha solucions no trivials i els vectors són LD.
- Fem un exemple amb matrius:
$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}2 & -2\\3 & 1\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}0 & 4\\0 & -2\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}-2 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$
Hem d'esbrinar quines són les solucions de $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = O$. Ho fem component a component, plantejant un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites
$$\left.\begin{array}{rcl} 2\beta - 2\delta & = & 0\\ \alpha - 2\beta + 4\gamma - \delta & = & 0\\ 2\alpha + 3\beta - \delta & = & 0\\ -\alpha + \beta - 2\gamma & = & 0 \end{array}\right\}.$$
És un SCI amb un grau de llibertat, per tant les matrius eren LD.

En resum, determinar si un conjunt de vectors són LI es redueix essencialment a discutir un sistema d'equacions lineals homogeni. Si tenim vectors $v_1, \dots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$, podem seguir els passos següents:

- formem una matriu amb els vectors donats, posant-los per columnes;
- calculem el rang $r$ d'aquesta matriu (fent l'escalonada equivalent o per menors);
- si el rang $r$ és igual a $k$ (el nombre de vectors), aleshores els vectors són LI;
- altrament, són LD; en aquest cas, podem dir que els vectors que corresponen a les columnes on hi ha els uns dominants de la forma escalonada, o bé a les columnes del menor més gran amb determinant no nul, sí que són un conjunt LI.

Una observació fàcil és que si tenim un conjunt de vectors que són LI, aleshores tot subconjunt d'ells també és LI. En canvi, si tenim un conjunt de vectors LD, qualsevol altre conjunt que els contingui serà LD. La proposició següent ens serà útil.

**Proposició 6.9** *Un conjunt de vectors $u_1, \dots, u_k$ són linealment dependents si, i només si, algun d'ells es pot escriure com a combinació lineal dels altres.*

*Demostració.* $\boxed{\Rightarrow}$ Si els vectors són LD's, existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, no tots iguals a zero, tals que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0_E$. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que $\alpha_1 \neq 0$. Aleshores,

$$u_1 = \alpha^{-1}(-\alpha_2 u_2 - \cdots - \alpha_k u_k).$$

Per tant, podem expressar algun dels vectors com a combinació lineal dels altres.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si algun vector es pot escriure com a combinació lineal dels altres, de nou sense perdre generalitat, podem suposar que és $u_1$. És a dir, existeixen $\beta_2, \dots, \beta_k$ tals que

$$u_1 = \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_k u_k.$$

Aleshores $-u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_k u_k = 0_E$ i almenys sabem que $-1 \neq 0$, per tant els vectors són LD. □

Com a conseqüència d'aquesta proposició, tenim que donat un conjunt generador d'un espai, podem trobar un conjunt generador que sigui LI. Efectivament, si el conjunt que ens donen no és LI, vol dir que algun vector dels generadors es pot escriure com a combinació lineal dels altres, i per tant el podem eliminar del conjunt sense perdre "capacitat generadora" (això s'ha de pensar un moment). Si el conjunt de generadors encara és LD, repetim fins a eliminar tots els vectors que es puguin expressar com a combinació lineal dels altres.

Això ens porta a la definició següent.

**Definició 6.10** *Un conjunt de vectors $b_1, \dots, b_n$ són una* base *d'un espai vectorial $E$ si*

*(b1) són linealment independents, i*

*(b2) $E = < b_1, \dots, b_n >$ (generen $E$).*

En la secció següent veurem per què és interessant tenir bases i com podem fer per trobar-ne que compleixin certs requisits. Aquí simplement llistem una base per a cadascun dels tres espais vectorials principals amb què treballem. Són les bases més "naturals", i per això s'anomenen *canòniques.*

- La base canònica de $\mathbb{R}^n$ és $\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\}$.
- La base canònica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és la formada per les $mn$ matrius $M_{ij}$ (que tenen totes les entrades nul·les excepte la $i,j$, que és igual a 1).
- La base canònica de $P_d(\mathbb{R})$ és $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$.

## 6.4 Bases

**Teorema 6.11** *Sigui $b_1, \dots, b_n$ una base de $E$. Aleshores tot vector d'$E$ s'escriu de manera única com a combinació lineal dels vectors de la base.*

*Demostració.* Clarament tot vector d'$E$ s'escriu almenys d'una manera com a combinació lineal dels elements de la base, ja que les bases generen l'espai. Suposem que un cert vector $v$ es pogués escriure de dues maneres:

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n.$$

Aleshores tindríem

$$(\alpha_1 - \beta_1)b_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)b_n = 0_E.$$

Com que els vectors d'una base són L.I, tenim que $\alpha_i - \beta_i = 0$ per tot $1 \leq i \leq n$, per tant $\alpha_i = \beta_i$ per tot $i$. $\square$

Això ens porta a la definició següent.

**Definició 6.12** *Sigui $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base d'$E$ i sigui $v \in E$. Si*

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n,$$

*diem que* $v_B = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$ *és el* vector de coordenades *de $v$ en la base $B$.*

Així, fixada una base, podem pensar que tots els espais vectorials "són essencialment $\mathbb{R}^n$".

Sabem trobar bases si ens donen un conjunt de generadors del nostre espai. Però què passa si, per exemple, no ens interessa una base qualsevol, si no una base que contingui alguns vectors donats? A més, sembla que totes les bases d'un espai donat tinguin el mateix nombre de vectors; és això cert en general? I com ens ho fem si tenim les coordenades d'un vector en una base però ens n'interessa una altra?

**Proposició 6.13** *Sigui* $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ *una base d'E i sigui* $\{u_1, \dots, u_k\}$ *un conjunt de vectors que són LI. Aleshores* $k \leq n$.

*Demostració.* Com que $B$ és base, podem expressar cada $u_i$ com a combinació lineal dels elements de $B$; és a dir, treballem amb les coordenades $(u_i)_B$, que són vectors de $\mathbb{K}^n$. Per tant, l'equació $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E$ que hem de discutir per saber si els vectors són LI, es tradueix a un sistema homogeni amb $k$ incògnites i $n$ equacions. Si els vectors són LI, vol dir que el sistema és compatible determinat, és a dir, que el rang de la matriu associada al sistema és $k$. Però el rang no pot ser més que el nombre de files, per tant $k \leq n$. □

**Corol·lari 6.14** *Si* $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ *és una base d'E, tota altra base d'E també té* $n$ *elements.*

*Demostració.* Si tenim una base $B'$ amb $n'$ elements, podem aplicar la proposició 6.13 respecte $B$ i respecte $B'$, deduint $n' \leq n$ i $n \leq n'$. □

A aquest cardinal comú de les bases d'un espai vectorial, l'anomenarem la *dimensió* de l'espai, denotada $\dim(E)$. Tenim $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = mn$ i $\dim(P_d(\mathbb{R})) = d + 1$.

Amb els resultats anteriors se'ns simplifica la feina de trobar bases: si tenim el nombre just d'elements, n'hi ha prou comprovant només una entre (b1) i (b2).

**Proposició 6.15** *Sigui* $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ *una base d'E i sigui* $\{u_1, \dots, u_n\}$ *un conjunt de vectors que són LI. Aleshores* $\{u_1, \dots, u_n\}$ *també és una base d'E.*

*Demostració.* (Per reducció a l'absurd.) Suposem que no ho fos. Aleshores vol dir que els $u_1, \dots, u_n$ no generen $E$; per tant, existeix algun vector $v \in E$ que no és combinació lineal de $u_1, \dots, u_n$. En aquest cas, el conjunt $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ és linealment independent; en efecte, si hi hagués una combinació lineal no trivial igual a $0_E$, aquesta combinació per força hauria d'incloure $v$, i aïllant podríem expressar $v$ com a combinació lineal dels $u_1, \dots, u_n$. Ara bé, fixem-nos que tenim un conjunt LI que té més elements que una base, i això contradiu la Proposició 6.13. □

Fixem-nos que la demostració de la proposició anterior també ens diu el següent: si tenim un conjunt de menys de $n$ vectors linealment independents, podem afegir-hi altres vectors fins a conseguir tenir un conjunt de $n$ vectors linealment independents, és a dir, una base. De fet, si volem podem afegir vectors que pertanyin a una base donada (això seria el teorema d'Steinitz).

**Proposició 6.16** *Sigui* $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ *una base d'E i sigui* $\{u_1, \dots, u_n\}$ *un conjunt de vectors que generen E. Aleshores* $\{u_1, \dots, u_n\}$ *també és una base d'E.*

*Demostració.* Ens falta comprovar que es tracta d'un conjunt LI. Si no ho fos, pels raonaments que segueixen a la Proposició 6.9, podríem eliminar alguns dels vectors fins a deixar reduït el conjunt a un conjunt LI. A més, seguiria sent un conjunt generador (això està bé reflexionar-ho un segon). Per tant, seria una base amb estrictament menys d'$n$ elements, cosa que contradiu el Corol·lari 6.14. □

El resultat següent juga de nou amb les mateixes idees, però és útil tenir-lo present.

**Corol·lari 6.17** *Sigui S un subespai vectorial d'E. Aleshores* $\dim(S) \leq \dim(E)$, *i es compleix la igualtat si i només si* $S = E$.

*Demostració.* Si $\{b_1, \ldots, b_r\}$ és una base de $S$, és un conjunt linealment independent a $E$. Per tant, la proposició 6.13 implica $r \leq \dim(E)$. Ara, si $r = n$, el conjunt $\{b_1, \ldots, b_r\}$ és LI i té el mateix cardinal que una base d'$E$, per tant per la proposició 6.15, també és una base d'$E$. $\square$

Finalment, estudiem el problema del canvi de coordenades entre dues bases donades. Comencem amb el cas de dimensió 2. Suposem que $B = \{b_1, b_2\}$ i $B' = \{e_1, e_2\}$ són dues bases d'un espai $E$, i que $v_B = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ són les coordenades d'un vector $v$ en la base $B$. Suposem que coneixem també $(b_1)_{B'} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ i $(b_2)_{B'} = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$ Quines són les coordenades $v_{B'}$? Tenim

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_1(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) + \alpha_2(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\gamma_1)e_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\gamma_2)e_2.$$

Fixem-nos que les coordenades de $v$ en la base $B'$ són precisament el resultat de fer el producte de matrius:

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}.$$

En general la situació és anàloga. Anomenem $P_{B'}^{B}$ la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors de la base $B$ en la base $B'$ (fixem-nos que la matriu, com les coordenades, depèn de l'ordre en què es prenguin els vectors). Sigui $v$ un vector. Aleshores tenim la relació següent

$$v_{B'} = P_{B'}^{B} v_B.$$

La matriu $P_{B'}^{B}$ és $n \times n$ i té rang $n$, per tant és invertible. D'aquí en deduïm

$$v_B = (P_{B'}^{B})^{-1} v_{B'} \text{ i per tant } \; P_{B}^{B'} = (P_{B'}^{B})^{-1}.$$

# 7

# Aplicacions lineals

Fins ara treballàvem en un únic espai vectorial. Ara volem estudiar transformacions que ens portin d'un espai vectorial a un altre, o bé que ens "moguin" dins d'un mateix espai vectorial. Però no acceptarem transformacions qualssevol, si no que voldrem que aquestes transformacions siguin consistens amb l'estructura d'espai vectorial.

## 7.1 Definicions, exemples i propietats

**Definició 7.1** *Siguin $E$ i $F$ dos $\mathbb{K}$-espais vectorials. Una aplicació $f : E \to F$ és* lineal *si satisfà:*

*(a1) per tot $u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$;*

*(a2) per tot $u \in E$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.*

*Si $E = F$, direm que $f$ és un* endomorfisme*.*

Exemples:

- **Aplicació trivial.** $f : E \to F$ tal que $f(u) = 0_F$ per tot $u \in E$ és lineal.
- **Aplicacions de tipus "paramètric".** Un exemple seria $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida per

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x - z \\ y + z \\ 0 \\ 2x - 2y + 4z \end{pmatrix}.$$

  No cal que siguin en $\mathbb{R}^n$, tenim exemples semblants amb matrius

$$f : \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ d & e & f \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c+e & d+f \end{pmatrix}$$

  i també entre matrius i polinomis, matrius i vectors, etc:

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}), \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x^2 - x(a+d) + ad - bc.$$

- **Aplicacions de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ definides per matrius.** Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriu fixa. L'aplicació $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ donada per $f_A(x) = Ax$ és lineal.

  Un cas especial d'aquestes aplicacions són les transformacions lineals de l'espai bi- i tridimensional amb significat geomètric. (Estan en unes transparències.)

Fixem-nos que si $f : E \to F$ és una aplicació lineal, $f(0_E) = 0_F$:

$$f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0f(0_E) = 0_F.$$

**Proposició 7.2** *Sigui $f : E \to F$ i sigui $\{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E. Aleshores $f$ està unívocament determinada per $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ (és a dir, a partir de la imatge d'una base podem recuperar la imatge de qualsevol vector d'E).*

*Demostració.* Sigui $u \in E$. Com que tenim una base, podem escriure

$$u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n.$$

Aleshores, usant (a1) i (a2),

$$f(u) = f(\alpha_1 b_1) + \cdots + f(\alpha_n b_n) = \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_n f(b_n).$$

□

És a dir, si tenim la imatge d'una base $B$, per calcular la imatge de qualsevol altre vector $u$, només cal multiplicar les imatges dels vectors per les coordenades d'$u$ en la base donada. Si suposem que també tenim una base d'$F$, $B' = \{c_1, \ldots, c_m\}$, podem escriure els vectors $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ en aquesta base. Aleshores, el que ens diu la proposició anterior és que si $u_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, tenim

$$f(u)_{B'} = \alpha_1 f(b_1)_{B'} + \cdots + \alpha_n f(b_n)_{B'}.$$

(Notem que cada $f(b_i)_{B'}$ té $m$ components.) Aquest càlcul és de fet un producte de matrius. Efectivament,

$$f(u)_{B'} = M^B_{B'}(f) u_B,$$

on $M^B_{B'}(f)$ és la matriu consistent en els vectors de coordenades $f(b_i)_{B'}$ escrits en columna.

**Definició 7.3** *Siguin $E$ i $F$ espais vectorials amb bases $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ i $B' = \{c_1, \ldots, c_m\}$, respectivament, i sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. La* matriu associada *a l'aplicació lineal $f$ en bases $B$ i $B'$ és la matriu $M^B_{B'}(f)$ formada pels vectors de coordenades $f(b_1)_{B'}, \ldots, f(b_n)_{B'}$ escrits en columna.*

*Si $f$ és un endomorfisme, prendrem $B = B'$ i escriurem simplement $M_B(f)$.*

En resum, igual que tenir una base ens permet treballar en qualsevol espai vectorial com si estiguéssim a $\mathbb{R}^n$ (o a $\mathbb{K}^n$), en el cas de les aplicacions les bases ens permeten considerar que tota aplicació lineal ve donada per una matriu.

## 7.2 Nucli i imatge

D'aquí en endavant, suposarem que $f : E \to F$ és una aplicació lineal (i que $E$ i $F$ tenen dimensió finita, encara que això no caldria).

**Definició 7.4** *El* nucli *d'f és*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E : f(u) = 0_F\}.$$

*La* imatge *d'f és*

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F : v = f(u) \text{ per algun } u \in E\} = \{f(u) : u \in E\}.$$

(És a dir, la imatge es defineix com la imatge d'una aplicació qualsevol.)

**Proposició 7.5** $\mathrm{Ker}(f)$ *i* $\mathrm{Im}(f)$ *són subespais vectorials d'E i F, respectivament.*

*Demostració.* El nucli és no buit ja que $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$. Si $u, v \in \mathrm{Ker}(f)$, aleshores

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = 0_F + 0_F = 0_F,$$

per tant $u + v \in \mathrm{Ker}(f)$. De manera similar, si $u \in \mathrm{Ker}(f)$, aleshores

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda 0_F = 0_F$$

i $\lambda u \in \mathrm{Ker}(f)$.

La imatge tampoc no és buida, ja que $0_F = f(0_E)$ i per tant pertany a $\mathrm{Im}(f)$. Si prenem $x, y \in \mathrm{Im}(f)$, tenim que hi ha $u, v \in E$ tals que $f(u) = x$ i $f(v) = y$. Aleshores

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = x + y,$$

per tant $x + y \in \mathrm{Im}(f)$. Similarment, si $x \in \mathrm{Im}(f)$ i $f(u) = x$,

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda x,$$

per tant $\lambda x \in \mathrm{Im}(f)$. □

A continuació veurem com trobar de manera efectiva el nucli i la imatge d'una aplicació si coneixem la seva matriu associada $A = M_{B'}^{B}(f)$ en certes bases $B$ i $B'$. Treballant amb coordenades, els vectors del nucli són les solucions del sistema homogeni

$$Ax = 0 \qquad (x \text{ és un vector columna i } 0 \text{ és el vector columna nul}).$$

El subespai imatge és el subespai generat per les columnes d'$A$. Si volem trobar alhora una base de $\mathrm{Ker}(f)$ i d'$\mathrm{Im}(f)$, el primer que fem és transformar la matriu $A$ a forma escalonada, i trobem que té rang $r$. Pel que sabem d'independència lineal, les columnes on hi ha els pivots corresponen a columnes de la matriu $A$ inicial que eren LI, i per tant aquelles columnes formen una base d'$\mathrm{Im}(f)$ (i aquest és doncs un subespai de dimensió $r$). Després, usant el que sabem de discussió de sistemes homogenis i suposant que $E$ té dimensió $n$, deduïm que el sistema homogeni $Ax = 0$ és compatible indeterminat amb $n - r$ graus de llibertat (si $n = r$ seria SCD, és clar). Això vol dir que $\mathrm{Ker}(f)$ té dimensió $n - r$, ja que podem expressar les coordenades d'un vector del nucli en termes de les $n - r$ components que corresponen a les columnes on no hi ha pivot.

Arribem doncs a l'anomenada fórmula de les dimensions.

**Teorema 7.6** *Si $f : E \to F$ és una aplicació lineal, aleshores*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

**Proposició 7.7** *Una aplicació lineal $f$ és injectiva si i només si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$*.*

*Demostració.* $\boxed{\Rightarrow}$ Suposem que $f$ és injectiva i prenem $u \in \mathrm{Ker}(f)$, és a dir, tal que $f(u) = 0_F$. Com que sempre es compleix $f(0_E) = 0_F$, per injectivitat deduïm $u = 0_E$, tal i com volíem veure.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suposem que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ i demostrem que $f$ és injectiva. Siguin $u, v \in E$ tals que $f(u) = f(v)$; volem veure que $u = v$. Com que $f$ és lineal,

$$f(u - v) = f(u) - f(v) = f(u) - f(u) = 0_F,$$

per tant $u - v \in \mathrm{Ker}(f)$. Aleshores $u - v = 0_E$ i per tant $u = v$. □

Recordem que una aplicació qualsevol és exhaustiva si i només si la seva imatge és igual a tot el conjunt d'arribada. Per tant, en el cas d'una aplicació lineal $f : E \to F$, tindrem que serà exhaustiva si i només si $\mathrm{Im}(f) = F$; en termes de dimensions, si $\dim(F) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Com que la dimensió de la imatge és el rang de la matriu de l'aplicació, les aplicacions exhaustives són precisament aquelles tals que $\mathrm{rang}(M(f)) = \dim(F)$.

Combinant la fórmula de les dimensions i la Proposició 7.7 tenim que una aplicació lineal $f$ és bijectiva si i només si $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$.

**Definició 7.8** *Les aplicacions lineals bijectives s'anomenen* isomorfismes*.*

## 7.3 Canvi de base i composició d'aplicacions lineals

Sabem que en general una aplicació bijectiva té inversa. Com funcionen la composició d'aplicacions i les inverses en el cas de les aplicacions lineals?

**Proposició 7.9** *Si $f : E \to F$ i $g : F \to G$ són aplicacions lineals, l'aplicació $g \circ f : E \to G$ també és lineal.*

*Demostració.* $(g \circ f)(u + v) = g(f(u + v)) = g(f(u) + f(v)) = g(f(u)) + g(f(v)) = (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v)$

$(g \circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) = g(\lambda(f(u))) = \lambda g(f(u)) = \lambda(g \circ f)(u)$ □

**Proposició 7.10** *Si $f : E \to F$ és un isomorfisme, $f^{-1} : F \to E$ també ho és.*

*Demostració.* $f^{-1}(x + y) = f^{-1}(f(u) + f(v)) = f^{-1}(f(u + v)) = u + v = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$

$f^{-1}(\lambda x) = f^{-1}(\lambda f(u)) = f^{-1}(f(\lambda u)) = \lambda u = \lambda f^{-1}(x)$ □

Sabent que la composició i la inversa (si existeix) d'aplicacions lineals són lineals, quines són les matrius associades? (Cas que estem en dimensió finita, clar.)

Si les bases d'$E$, $F$ i $G$ són $B, B'$ i $B''$ respectivament, tenim:

$$M_{B''}^{B}(g \circ f) = M_{B''}^{B'}(g) M_{B'}^{B}(f).$$

Fixem-nos que tot quadra: entren coordenades en base $B$, la imatge segons $f$ surt en coordenades en base $B'$ i aquesta es multiplica per la matriu de $g$ per treure la imatge de la composició en coordenades en base $B''$.

Si $f$ és un isomorfisme, es segueix d'això que

$$M_B^{B'}(f^{-1}) = (M_{B'}^B(f))^{-1}.$$

(Fixem-nos que té sentit considerar la matriu inversa de $M_{B'}^B(f)$, ja que el que fet que $f$ sigui isomorfisme implica que $\dim(E) = \dim(F)$ i que el rang de $M_{B'}^B(f)$ és $\dim(E)$, per tant és una matriu quadrada de rang màxim, és a dir, invertible.)

Finalment, tractem la qüestió de com afecten els canvis de base a la matriu d'una aplicació.

Suposem que tenim bases $B, \bar{B}$ d'$E$ i bases $B'$ i $\bar{B}'$ d'$F$. Donada $M_{B'}^B(f)$ i conegudes les matrius dels canvis de base, tenim

$$M_{\bar{B}'}^{\bar{B}}(f) = P_{\bar{B}'}^{B'} M_{B'}^B(f) P_B^{\bar{B}}.$$

Igual que abans, tot quadra: transformem a coordenades en base $B$, apliquem $f$, i transformem les coordenades en base $B'$ a base $\bar{B}'$. (Regla mnemotècnica: els subíndexs i superíndexs iguals es cancel·len.)

# 8

# Diagonalització

En tot aquest capítol, $f : E \to E$ serà un endomorfisme d'un espai vectorial $E$ de dimensió $n$ (finita).

La matriu d'$f$ en una base $B$ d'$E$ és una matriu $n \times n$. La pregunta que volem respondre és: hi ha alguna base d'$E$ que faci que la matriu associada a l'aplicació $f$ sigui "senzilla"? És clar que senzilla pot voler dir moltes coses... en aquest cas, voldrà dir diagonal.

**Definició 8.1** *Un endomorfisme $f : E \to E$ és* diagonalitzable *si existeix alguna base $B$ d'$E$ tal que $M_B(f)$ sigui diagonal.*

Suposem que tenim la matriu $M_B(f)$ i que no és diagonal, però sabem que en una altra base $B'$ sí que ho és. Aleshores la matriu

$$(P_B^{B'})^{-1} M_B(f) P_B^{B'}$$

és diagonal. Per tant, ser diagonalitzable és equivalent a que existeixi una matriu $P$ invertible tal que $P^{-1} M_B(f) P$ sigui diagonal.

El que farem en aquest capítol és veure com podem decidir si un endomorfisme donat és diagonalitzable o no.

## 8.1 Valors i vectors propis

Suposem que l'endomorfisme $f$ diagonalitza en la base $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Aleshores la matriu $M_B(f)$ és $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ per alguns escalars $\lambda_i$. Com que la matriu $M_B(f)$ no és altra cosa que les imatges dels vectors de $B$ escrites en base $B$, deduïm que $f(b_i) = \lambda_i b_i$, per tot $i \in [n]$.

Per tant, si un endomorfisme $f$ és diagonalitzable, hi haurà vectors $v$ (els de la base en què diagonalitza, entre altres) que compleixin $f(v) = \lambda v$ (per cert escalar $\lambda$ que depèn de $v$).

**Definició 8.2** *L'escalar $\lambda$ és un* valor propi *de l'endomorfisme $f$ si existeix algun vector $v \neq 0_E$ tal que $f(v) = \lambda v$.*

*Tots els vectors $v \neq 0_E$ que compleixen $f(v) = \lambda v$ s'anomenen* vectors propis de valor propi $\lambda$.

Observem que si tenim un conjunt de vectors propis que formen una base d'$E$, aleshores $f$ és diagonalitzable. Per tant, necessitem primer saber com trobar valors i vectors propis, i després veure si amb els vectors propis trobats en tenim prou per construir una base. A partir d'ara escriurem *vep* i *vap* en lloc de vector propi i valor propi, respectivament.

Com a exemple, considerem $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definit per $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -y \end{pmatrix}$. La matriu associada en base canònica és

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per simple inspecció veiem que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és un vep de vap 2. I $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$? Tenim $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, per tant no és un vep. Ara bé, ens podem fixar que

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per tant $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és un vep de vap $-1$. Com que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ són dos vectors LI a $\mathbb{R}^2$, formen una base, i en aquesta base la matriu de l'aplicació és $\mathrm{Diag}(2, -1)$.

És clar que aquest mètode ad hoc per trobar veps i vaps no sembla gaire pràctic (de fet, no sabem ni si en l'exemple anterior hem trobat tots els vaps). Anem a donar un mètode més pràctic i sistemàtic. Sigui $A$ la matriu de l'endomorfisme $f$ en una base donada (que quasi sempre serà la canònica); treballarem sempre amb coordenades respecte aquesta base. Si tenim un vep de vap $\lambda$, vol dir que tenim un vector $v$ de $\mathbb{K}^n$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

Com que $\lambda v$ ho podem escriure com $\lambda I_n v$, podem dir que $v$ és una solució diferent de la trivial del sistema homogeni (amb paràmetres)

$$(A - \lambda I_n)v = 0.$$

Ara, un sistema homogeni té alguna solució no trivial si i només si el rang de la matriu associada no és màxim o, equivalentment, si el determinant de la matriu associada és zero. Per tant, un escalar $\lambda$ és un valor propi si i només si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

**Definició 8.3** *El* polinomi característic *de l'endomorfisme $f$ és $p_f(x) = \det(A - xI_n)$. L'*equació característica *és $p_f(x) = 0$.*

És a dir, els valors propis coincideixen amb les arrels de l'equació característica. El polinomi característic té grau $n$, i se sap que si treballem en els reals, hi haurà com a molt $n$ arrels reals (comptant les repeticions). La multiplicitat de $\lambda$ com arrel del polinomi característic s'anomena *multiplicitat algebraica* i la denotarem $m_\lambda$. Clarament $m_\lambda \geq 1$ i la suma de les multiplicitats algebraiques per tots els valors propis ha de ser com a molt $n$.

Un cop trobats els valors propis, per cadascun d'ells cal resoldre el sistema $(A - \lambda I_n)v = 0$, i totes les solucions no trivials seran els vectors propis. Per tant, ja tenim un tros resolt. Ara ens queda decidir si amb tots aquests veps trobats en tenim prou per construir una base d'$E$. Això ho tractem a la secció següent.

Hi ha una subtilesa en tot el que hem fet que potser val la pena notar. Per trobar els vaps, resolem l'equació característica, que l'hem trobada a partir de la matriu de l'endomorfisme en una base donada. Què passa si canviem de base? Hauríem de trobar els mateixos vaps, per tant el polinomi característic ha de tenir les mateixes arrels independentment de la base respecte la qual es calculi. Ara bé, això no és del tot suficient per veure que el polinomi característic no depèn de la base, ja que podria ser que ens sortissin els mateixos vaps però amb multiplicitats diferents segons la base. Això no passa ja que, si $P$ és la matriu del canvi de base,

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP-\lambda I_n) = \det(P^{-1}AP-P^{-1}\lambda I_n P) = \det(P^{-1}(A-\lambda I_n)P)\\ &= \det(P)^{-1}\det(A-\lambda I_n)\det(P) = \det(A-\lambda I_n).\end{aligned}$$

## 8.2 Espais propis i diagonalització

**Definició 8.4** *Si $\lambda$ és un valor propi, l'*espai propi *del valor propi $\lambda$ és el conjunt*

$$E_\lambda = \{u \in E : f(u) - \lambda u = 0_E\}.$$

L'espai propi $E_\lambda$ conté tots els vectors propis de valor propi $\lambda$ i, a més, el vector $0_E$.

Podrem definir $E_\lambda$ encara que $\lambda$ no sigui valor propi, però en aquest cas $E_\lambda = \{O_E\}$ i no conté vectors propis.

**Proposició 8.5** *$E_\lambda$ és un subespai vectorial.*

*Demostració.* Clarament és no buit ja que $0_E \in E_\lambda$. Si $u, v \in E_\lambda$ i $\mu$ és un escalar, aleshores

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(u)+f(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)\\ f(\mu u) &= \mu f(u) = \mu\lambda u = \lambda(\mu u).\end{aligned}$$

Per tant, $E_\lambda$ és un subespai d'$E$. □

Per trobar els $E_\lambda$ de forma efectiva, ho fem trobant les solucions del sistema homogeni $(A - \lambda I_n)v = 0$. La dimensió d'$E_\lambda$ és $n - \mathrm{rang}(A - \lambda I_n)$; a aquest valor se l'anomena *multiplicitat geomètrica*. Com que $\lambda$ és vap, la multiplicitat geomètrica és com a mínim 1 (i com a màxim $n$). La propietat següent diu que la multiplicitat geomètrica mai no pot superar l'algebraica.

**Proposició 8.6** *Per a tot valor propi $\lambda$, $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.*

*Demostració.* Sigui $k$ la multiplicitat geomètrica de $\lambda$. Prenem una base d'$E_\lambda$ i la completem a una base d'$E$. Si escrivim la matriu de l'aplicació en aquesta base, les primeres $k$ columnes tindran un $\lambda$ a la diagonal i zeros a la resta de posicions, de manera que el polinomi característic tindrà un factor $(\lambda - x)^k$. Per tant, el vap $\lambda$ té multiplicitat algebraica major o igual que $k$. □

De cada espai propi en podem extreure doncs $\dim(E_\lambda)$ vectors propis linealment independents. La qüestió és si podem combinar-los entre ells per formar una base. És a dir, podem assegurar que si agafem una base de cada espai propi, el resultat és linealment independent? La resposta és que sí, però no ho demostrarem.

Aleshores, si ajuntant les bases dels espais propis tenim una quantitat suficient de vectors (i.e., tants com la dimensió d'$E$), concloem que l'endomorfisme $f$ és diagonalitzable.

**Teorema 8.7** *Un endomorfisme $f$ és diagonalitzable si i només si té $n$ valors propis (comptant multiplicitats) i per a cada valor propi les multiplicitats algebraica i geomètrica coincideixen.*

**Corol·lari 8.8** *Si $f$ té $n$ valors propis diferents, aleshores és diagonalitzable.*

# Bibliografia

[1] I. Llerena, R. M. Miró-Roig, *Matrius i vectors*, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2010.