Matemàtiques 1- FIB-UPC Curs 2019-2020(2)

Examen parcial Revisió

A la taula següent teniu el percentatge de respostes correctes/incorrectes/sense respondre de les preguntes tipus cert/fals de l'examen parcial.

Pregunta	Correctes	Incorrectes	Sense resp.
1	63,73	33,80	2,46
2	64,08	30,99	4,93
3	84,15	14,08	1,76
4	88,38	9,86	1,76
5	86,97	11,97	1,06
6	66,20	30,63	3,17
7	76,76	19,37	3,87
8	79,23	20,42	0,35
9	35,21	64,08	0,70
10	91,90	7,39	0,70
11	90,85	6,69	2,46
12	85,92	13,03	1,06
13	83,80	14,44	1,76
14	73,94	15,49	10,56
15	61,27	19,01	19,72

Les preguntes no eren les mateixes per a tothom, per tant és difícil dir en quines hi ha hagut més errors. Però n'hi ha una que destaca pel nombre de respostes incorrectes: que tots els vèrtexs d'un graf tinguin grau parell no implica que sigui eulerià, cal que sigui connex! A continuació teniu l'explicació d'alguns dels dubtes rebuts.

- Preguntа:

  La pregunta amb més respostes incorrectes ha sigut amb diferència variants de la següent:

  > Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:
  >
  > Si un graf té seqüència de graus $(4,4,4,4,4,2,2,2)$, aleshores podem assegurar que és eulerià.
  >
  > Trieu-ne una:
  >
  > ○ Fals
  >
  > ○ Cert

  La resposta correcta és **fals**. No n'hi ha prou amb que tots els vèrtexs d'un graf tinguin grau parell perquè sigui eulerià, cal que sigui connex! Per exemple, aquesta seqüència de graus pot correspondre al graf $K_5 \cup C_3$ (o sigui, un component connex és un complet d'ordre 5 i l'altre, un cicle d'ordre 3), que no és eulerià.

- Pregunta:

  > Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:
  >
  > Tot graf 2-regular d'ordre 6 és un graf cicle.
  >
  > Trieu-ne una:
  >
  > ○ Fals
  >
  > ○ Cert

  La resposta correcta és **fals**. Els grafs 2-regulars són unió de cicles, no necessàriament un cicle. La unió de dos cicles d'ordre 3, $C_3 \cup C_3$, és un graf 2-regular d'ordre 6.

- Pregunta:

  > Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:
  >
  > Hi ha un únic graf 2-regular d'ordre **7** llevat isomorfismes.
  >
  > Trieu-ne una:
  >
  > ◉ Cert ✖
  >
  > ○ Fals

  La resposta correcta és **fals**. L'argument és similar al donat a la pregunta anterior. Grafs 2-regulars d'ordre 7 tenim per exemple el cicle d'ordre 7, C_7, i la unió de dos cicles d'ordres 3 i 4 respectivament, $C_3 \cup C_4$.

- Pregunta:

  > Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:
  >
  > Si G és un graf regular d'ordre 24, aleshores G no és autocomplementari.
  >
  > Trieu-ne una:
  >
  > ○ Cert
  >
  > ○ Fals

  La resposta correcta és **cert**. Si un graf és d-regular d'ordre n, aleshores el complementari és $n-1-d$ regular. Si a més és autocomplementari, ha de ser $d = n-1-d$, i per tant $n = 2d+1$, o sigui, l'ordre ha de ser senar. Per tant, si un graf és regular d'ordre parell no pot ser autocomplementari.

- Pregunta:

  > Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:
  >
  > Si un graf conté un recorregut tancat de longitud 10, aleshores podem assegurar que el graf conté almenys un cicle.
  >
  > Trieu-ne una:
  >
  > ○ Fals
  >
  > ○ Cert

  La resposta correcta és **fals**. Per exemple, el graf K_2 amb vèrtexs etiquetats 1 i 2 no té cap cicle però hi ha recorreguts tancats de longitud 10, per exemple, 1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1.

- Pregunta:

  > Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:
  >
  > En un graf d'ordre 16 i diàmetre 2 no hi pot haver camins de longitud 13.
  >
  > Trieu-ne una:
  >
  > ○ Fals
  >
  > ○ Cert

  La resposta correcta és **fals**. Per exemple, el graf bipartit complet $K_{8,8}$ té diàmetre 2, i hi ha camins de longitud 13. Per exemple, si etiquetem els vèrtexs de 1 a 16, amb els parells a una part estable i els senars a l'altra, el camí 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14 té longitud 13.

- Preguntа:

  > Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:
  >
  > En un graf de diàmetre **13** no hi pot haver camins de longitud **14**.
  >
  > Trieu-ne una:
  >
  > ◉ Cert ✖
  >
  > ○ Fals

  La resposta correcta és **fals**. Per exemple, un graf cicle d'ordre 26 té diàmetre 13 però hi ha camins de longitud 14 (si prenem 15 vèrtexs consecutius del cicle, hi ha un camí de longitud 14 del primer a l'últim).

- Pregunta:

  > Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:
  >
  > Si un graf bipartit té diàmetre 2, aleshores ha de ser bipartit complet.
  >
  > Trieu-ne una:
  >
  > ○ Cert
  >
  > ◉ Fals ✖

  La resposta correcta és **cert**. Si un graf bipartit té diàmetre 2 ha de ser bipartit complet. Suposem que no: aleshores falta almenys una aresta uv, on u, v son de parts estables diferents. Els camins entre u i v tenen longitud senar (si el graf és bipartit, els camins van alternant vèrtexs de les dues parts estables. Si els vèrtexs inicial/final són de la mateixa part estable, el camí té longitud parella, si són de parts estables diferents, té longitud senar). Aleshores, si la distància entre u i v no és 1 (perquè no són adjacents), ha de ser almenys 3. Per tant, el diàmetre no pot ser 2.

- Pregunta:

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Els grafs hamiltonians no tenen arestes pont.

Trieu-ne una:

Cert

Fals ✖

La resposta correcta és **cert**. Si C és un cicle hamiltonià, les arestes de C no són arestes pont (les arestes d'un cicle no són mai arestes pont) i si l'aresta no és del cicle C, al suprimir-la tots els vèrtexs del graf queden connectats pel cicle C, per tant, tampoc és aresta pont.

- Pregunta:

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

El graf cicle d'ordre 7 només té un arbre generador llevat isomorfismes.

Trieu-ne una:

Cert

Fals ✖

La resposta correcta és **cert**. Un arbre generador del graf cicle d'ordre 7 té: els 7 vèrtexs del cicle i 6 arestes (la mida d'un arbre és l'ordre menys 1) de manera que formin un arbre. Els arbres generadors de C_7 s'obtenen suprimint una aresta qualsevol (ja que serà un graf connex d'ordre 7 i mida 6) i obtenim sempre un graf isomorf al trajecte T_7.

- Pregunta:

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un arbre d'ordre 18 té exactament 9 fulles, aleshores té 9 vèrtexs de tall.

Trieu-ne una:

Cert

Fals ✖

La resposta correcta és **cert**. Tots els vèrtexs d'un arbre que no són fulles, son vèrtexs de tall. En aquest cas, si té ordre 18 i 9 fulles, els 9 vèrtexs restants són de tall.

- Preguntes sobre isomorfismes de grafs:

  Sabem que si dos grafs són isomorfs, aleshores tenen el mateix ordre, la mateixa mida, la mateixa seqüència de graus, el mateix diàmetre, el mateix radi, etc. però en general el recíproc NO és cert. Això no vol dir que pugui ser cert en alguns casos concrets.

  Per exemple, es pot veure fàcilment que dos grafs d'ordre 3 són isomorfs si i només si tenen la mateixa mida (cal trobar els grafs d'ordre 3 llevat isomorfismes i comprovar que només n'hi ha un per a cada mida possible); i amb una mica més de feina, es pot veure que dos grafs d'ordre 4 són isomorfs si i només si tenen la mateixa seqüència de graus (cal trobar tots els grafs d'ordre 4 llevat isomorfismes i comprovar que tots tenen seqüències de graus diferents. Es pot simplificar l'argument tenint en compte que si dos grafs tenen la mateixa seqüència de graus, els complementaris també, i que, pel lema de les encaixades, dos grafs només poden tenir la mateixa seqüència de graus si tenen la mateixa mida. Per tant, per ser la mida màxima d'un graf d'ordre 4 igual a 6, només cal comprovar per a cada valor de $m \in \{0, 1, 2, 3\}$, que grafs no isomorfs de mida m tenen seqüències de graus diferents).

  Per tant, si ens pregunten:

  "Si dos grafs tenen el mateix ordre i la mateixa mida, podem assegurar que són isomorfs."

  o bé

  "Si dos grafs tenen la mateixa seqüència de graus, podem assegurar que són isomorfs."

  la resposta és **fals**, perquè per exemple, C_6 i $C_3 \cup C_3$ tenen el mateix ordre, la mateixa mida i la mateixa seqüència de graus, però no són isomorfs.

  Però si ens pregunten:

  "Si dos grafs d'ordre 3 tenen la mateixa mida, podem assegurar que són isomorfs"

  o bé

  "Si dos grafs d'ordre 4 tenen la mateixa seqüència de graus, podem assegurar que són isomorfs"

  la resposta correcta és **cert**.