Fonaments de grafs

PID_00174668

Joaquim Borges
Robert Clarisó
Ramon Masià
Jaume Pujol
Josep Rifà
Joan Vancells
Mercè Villanueva

Temps mínim de dedicació recomanat: 5 hores

Universitat
Oberta
de Catalunya

Índex

Introducció

Aquest és un mòdul d'iniciació a la teoria de grafs, en el qual es presenten les definicions bàsiques, es demostren els primers resultats (entre els quals hi ha el lema de les encaixades), es veuen alguns tipus de grafs notables, s'analitzen algunes operacions que es poden dur a terme amb grafs, s'estudia el problema de l'existència d'un graf i, finalment, es tracta el tema de l'emmagatzematge de grafs, d'interès per a l'algorísmica i la programació.

És molt possible que aquesta disciplina us sigui completament nova, atès que els punts de connexió, almenys des del punt de vista elemental, amb disciplines matemàtiques prèvies no són gaire nombrosos. Us calen coneixements elementals de combinatòria, de càlcul matricial, de tècniques de demostració inductiva i, naturalment, una certa maduresa matemàtica; per això, és recomanable la revisió d'aquestes tècniques.

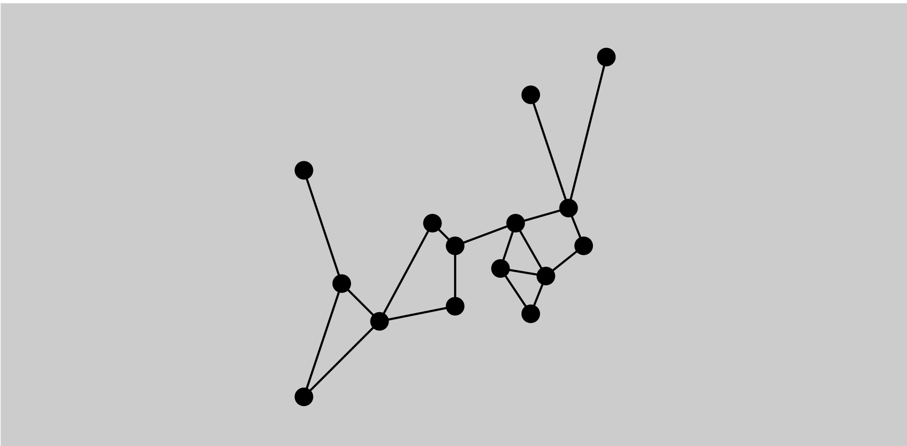
1. Caracterització d'un graf

En moltes situacions, s'estableixen una sèrie de **relacions** entre diversos **objectes**; un graf és l'estructura constituïda per aquests objectes i les relacions que es poden establir entre ells. Els objectes s'anomenen **vèrtexs** i les relacions, **arestes**.

Graf

Un graf està format per vèrtexs (que poden representar objectes) i arestes (que poden representar les relacions entre aquests objectes).

Els grafs es poden representar *gràficament* en el pla. Un dels mètodes més utilitzats consisteix a representar els vèrtexs per **punts** del pla, i les relacions que hi pugui haver entre aquests vèrtexs mitjançant **arcs de corba** (arestes) que els uneixin (eventualment els arcs de corba seran segments de recta).



En aquesta representació gràfica, la posició d'un vèrtex o la longitud d'una aresta no són rellevants. Només ens fixarem en quins vèrtexs hi apareixen i si estan connectats entre si o no. Això significa que hi ha moltes formes diferents de dibuixar el mateix graf.

Així doncs, una situació que involucri objectes entre els quals es pugui establir algun tipus d'interconnexió es pot descriure mitjançant un graf: les comunicacions, les reunions, la fabricació de circuits i l'acoloriment de mapes en són alguns exemples.

1.1. Graf

Notació

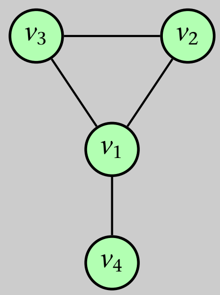
Si no s'especifica el contrari, quan parlem de *grafs* farem referència sempre a grafs simples.

Definició 1

Un **graf (simple)** $G = (V,A)$ és un parell ordenat (V,A), on V és un conjunt finit no buit, els elements del qual són els **vèrtexs**, i A és un subconjunt del conjunt de parells no ordenats (és a dir, subconjunts de dos elements diferents) d'elements de V; el conjunt A és el conjunt d'**arestes**.

Exemple 1

Considerem el graf que es representa de la manera següent.



En aquest cas és $G = (V,A)$, on el conjunt de vèrtexs és $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ i el conjunt d'arestes és $A = \{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_1,v_3\},\{v_1,v_4\}\}$

Notació

si $a = \{u,v\} \in A$, per a alleugerir la notació s'escriu també $a = uv$ o bé, equivalentment, $a = vu$.

Fixeu-vos que, segons aquesta definició, un vèrtex no pot estar relacionat amb si mateix, ni pot haver-hi més d'una aresta entre dos vèrtexs concrets i els dos vèrtexs connectats per una aresta tenen la mateixa importància. Aquest és el model de graf simple; més endavant veurem famílies de grafs més generals (dirigits, pseudografs, multigrafs) on aquestes restriccions es relaxen per tal de descriure relacions més complexes.

Exercicis

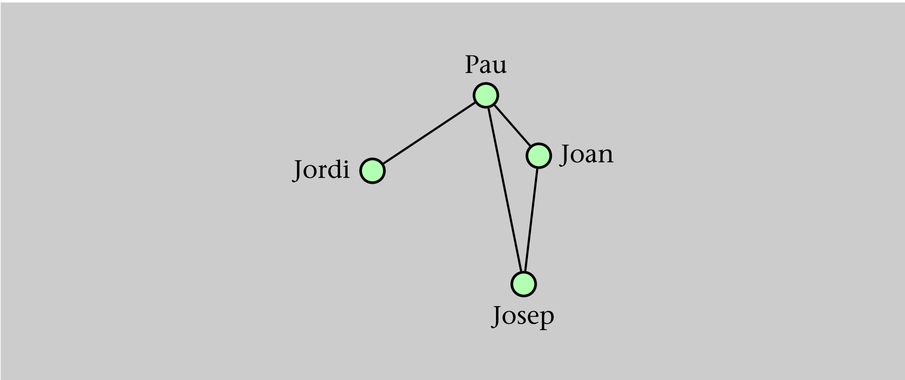
1. Proposeu un model en termes de teoria de grafs (i feu-ne una representació gràfica) de la situació que es descriu a continuació. Es consideren les persones següents d'una classe: Joan, Josep, Jordi i Pau, entre les quals hi ha les relacions de coneixença mútua següents (les relacions que no s'indiquen explícitament no hi són): en Jordi coneix en Pau; en Pau, en Joan i en Josep es coneixen mútuament.

2. Proposeu un model de grafs representatiu de les comunicacions per carretera entre diverses ciutats i pobles i un segon model representatiu de l'absència de comunicacions per carretera (és a dir, existeix una aresta entre dos centres si, i només si, no estan comunicats per carretera); la situació pot ser fictícia o real.

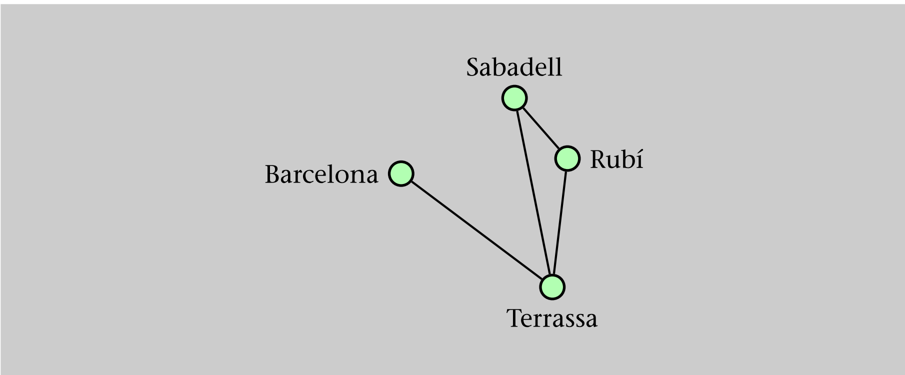
3. Considereu una empresa en què hi ha diverses persones, P_1,P_2,P_3, i una sèrie de tasques que s'han de fer, $T_1,\ldots,T_6$, amb la possibilitat que una persona pugui fer, segons les seves capacitats, més d'una tasca. Formuleu (i dibuixeu) un model en termes de teoria de grafs que reculli la situació dels individus que poden fer tasques diverses i les tasques que poden ser fetes per individus diferents.

Solucions

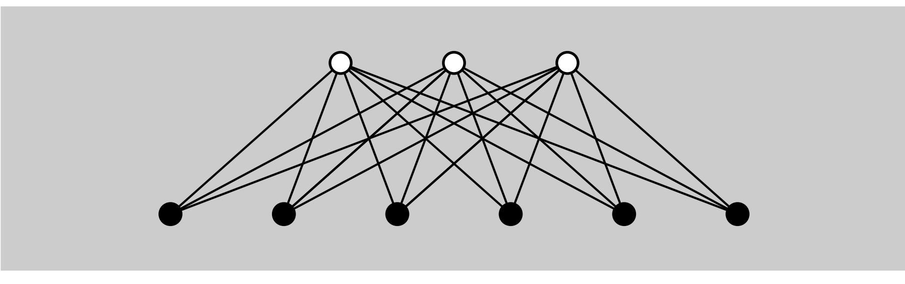
1. Un esquema possible seria el següent.



2. Realment no hi ha "una" solució. Un possible esquema indicatiu, fictici i trivial podria ser el següent (naturalment, un model real és molt més complex).



3. Un esquema possible és el del graf següent. Correspon a un tipus de graf important, com veurem més endavant, que és el dels grafs bipartits, que es donen en moltes situacions d'aquests tipus, d'assignació de tasques. Indiquem les persones i les tasques amb vèrtexs de colors diferents.



1.2. Vèrtexs i arestes

Definició 2

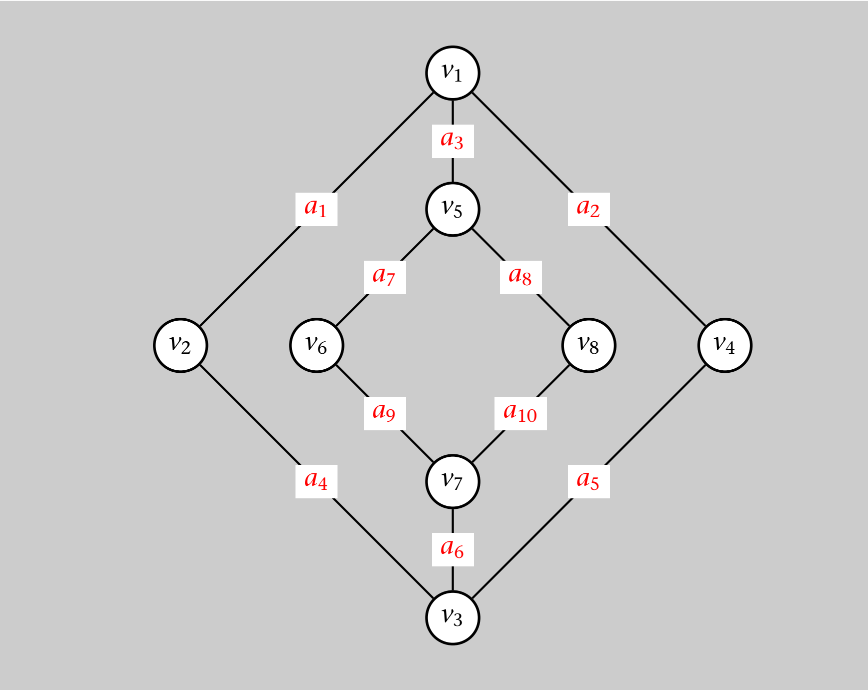
Direm que els vèrtexs $u,v \in V$ són **adjacents** si, i només si, existeix l'aresta uv, és a dir, si, i només si, $\{u,v\} \in A$. Notarem l'adjacència dels vèrtexs u, v com $u \approx v$. En aquest cas es diu que l'aresta $a = uv$ **uneix o connecta** els vèrtexs, que en són **extrems**. Altres denominacions que indiquen que els vèrtexs són adjacents són:

- Els vèrtexs u, v i l'aresta uv són **incidents**.
- Els vèrtexs u i v són **vèrtexs veïns**.

Igualment, dues arestes es diu que són **adjacents** si comparteixen un extrem.

Exemple 2

Considerem el graf següent.



Els vèrtexs v_5, v_6 són adjacents; no ho són els vèrtexs v_6, v_8. Els vèrtexs v_1, v_2 són els extrems de l'aresta a_1, que es descriu com $a_1 = \{v_1,v_2\} = v_1v_2 = v_2v_1$. Les arestes a_4, a_5, a_6 són incidents amb v_3. Les arestes a_2, a_5 són adjacents.

Són molt importants les propietats i algorismes que relacionen la quantitat de vèrtexs i arestes d'un graf. Per a enunciar-les ens calen algunes definicions.

Definició 3

- Donat un graf $G = (V,A)$, l'**ordre del graf** és el cardinal del conjunt de vèrtexs, és a dir, el nombre de vèrtexs del graf. Òbviament es compleix que $n = |V| \geq 1$.
- La **mida del graf** és el cardinal del conjunt de les arestes, o en altres termes, el nombre d'arestes del graf. Pot passar que un graf no tingui cap aresta, de manera que $m = |A| \geq 0$.

És fàcil deduir la següent proposició.

Proposició 1

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

El nombre màxim d'arestes s'aconsegueix tenint una aresta entre cada parell de vèrtexs del graf.

Exemple 3

Un graf amb deu vèrtexs pot tenir un màxim de $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ arestes: cadascun dels vèrtexs està connectat amb els nou vèrtexs restants, i cal recordar que, tot i que una aresta connecta dos vèrtexs, només l'hem de comptabilitzar una vegada.

Nombre combinatori

Recordeu que el nombre $\binom{n}{r}$ s'anomena **nombre combinatori** o **binomial**. Es pot calcular amb la fórmula, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.
El nombre $\binom{n}{r}$ ens indica la quantitat de maneres de seleccionar r elements d'un conjunt que en té n. Alternativament, el nombre $\binom{n}{r}$ ens indica la quantitat de r-mostres no ordenades sense repetició que es poden construir en un conjunt de n elements.

Definició 4

Donat un vèrtex $v \in V$ del graf $G = (V,A)$ es defineix el **grau** $g(v)$ del vèrtex v com el nombre d'arestes que hi són incidents; d'acord amb la nostra definició de graf, el grau coincideix amb el nombre de vèrtexs que hi són adjacents; dit d'altra manera,

$$g(v) = |\{u \in V \mid v \approx u\}| = |\{u \in V \mid \{u,v\} \in A\}|.$$

Els vèrtexs de grau zero s'anomenen **vèrtexs aïllats** o **isolats**.

Exemple 4

Considerem un grup de persones que es troben en una reunió. Mentre van entrant, algunes d'aquestes persones se saluden. Podem formular un graf que descrigui aquesta situació: els vèrtexs seran els assistents a la reunió, i les arestes representaran les salutacions mútues. D'aquesta manera, el grau de cada vèrtex és el nombre de persones que ha saludat. Hi pot haver persones que no saludin ningú, a les quals correspondrà grau 0.

Resulta evident que:

Proposició 2

$$0 \leq g(v) \leq |V| - 1, \quad \forall v \in V$$

Aquest resultat es pot utilitzar per a descartar l'existència de grafs amb una seqüència de graus concreta.

Exemple 5

Vegem que no pot existir cap graf amb la seqüència de graus 2,2,2,3,3,4,8. En efecte, si existís un graf $G = (V,A)$ amb aquestes característiques, seria $|V| = 7$ i, si hi hagués un vèrtex v_0 de grau 8, seria, en virtut de la desigualtat anterior, $|V| \geq g(v_0) + 1 \geq 8 + 1 = 9$, cosa que és impossible.

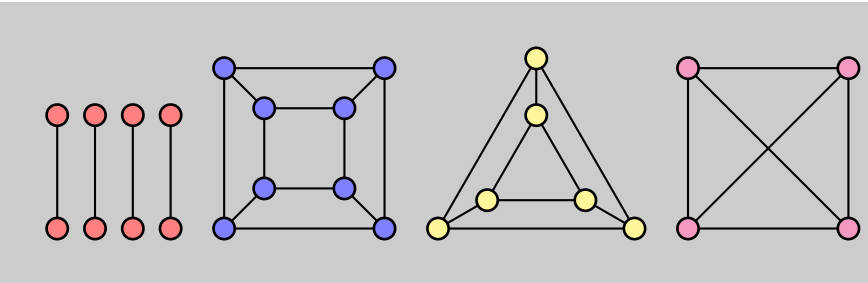
A partir del grau dels vèrtexs d'un graf es pot definir el que s'anomena *graf regular*:

Definició 5

Un graf és **regular** si tots els vèrtexs són del mateix grau; si el grau comú és r, aleshores es diu que el graf és r-**regular**.

Exemple 6

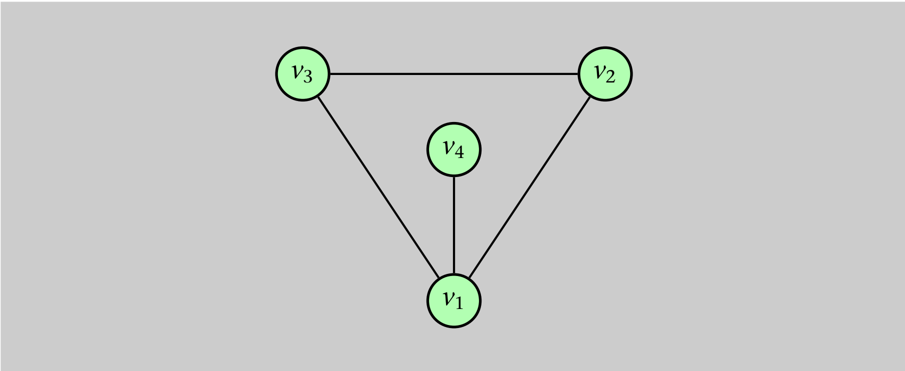
A continuació presentem diversos exemples de grafs regulars.



El primer graf és 1-regular i la resta són 3-regulars.

Exercicis

4. Considereu el graf de l'esquema adjunt. Descriviu formalment el conjunt de vèrtexs i d'arestes.



5. Feu diverses representacions gràfiques per a un graf de vèrtexs $V = \{v_1,v_2, v_3, v_4, v_5\}$ i conjunt d'arestes $A = \{\{v_1,v_2\},\{v_1,v_4\},\{v_1,v_5\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_5\},\{v_3,v_4\}\}$.

6. Un graf 4-regular és com a mínim d'ordre 5. Cert o fals?

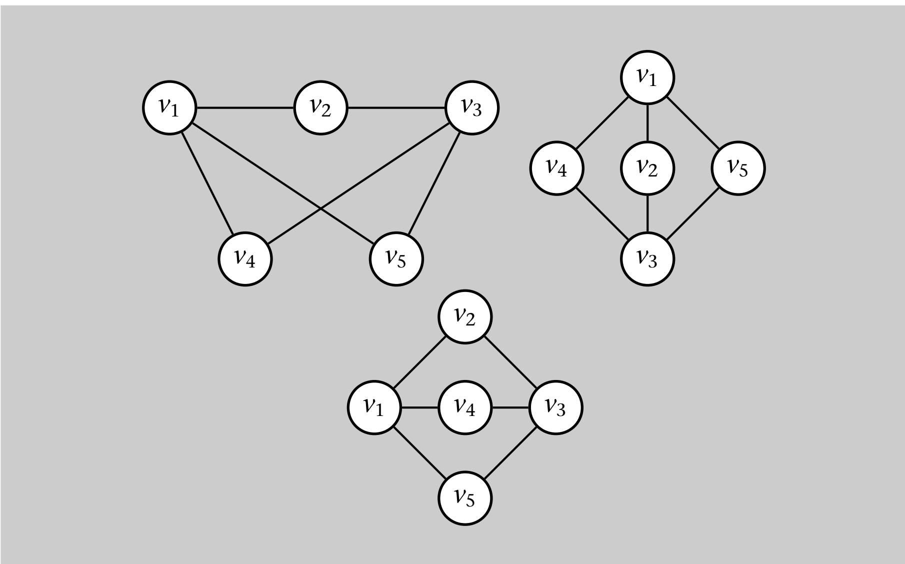
7. Quins són els grafs 0-regulars?

8. Quines són les possibles mides dels grafs d'ordre 3?

Solucions

4. És el graf $G = (V,A)$, amb $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ i $A = \{\{v_1,v_2\}, \{v_2,v_3\}, \{v_1,v_3\}, \{v_1,v_4\}\}$.

5. A continuació es presenten diverses solucions.



6. Cert, ja que $|V| \geq g(v) + 1 \geq 4 + 1 \geq 5$. En general, si un graf és r-regular, ha de ser com a mínim d'ordre $r + 1$.

7. Els grafs 0-regulars són els grafs sense arestes.

8. Per la proposició 1 tenim que $0 \leq |A| \leq \binom{3}{2} = 3$. Per tant, les possibles mides són: 0,1,2 i 3.

1.3. Subestructures d'un graf

Definició 6

Donat un graf $G = (V,A)$, un **subgraf** de G és un graf $H = (V',A')$ on $V' \subseteq V$, $A' \subseteq A$, de manera que les arestes del subgraf uneixen vèrtexs del subgraf.

Així, el nou conjunt de vèrtexs és un subconjunt de l'original, i anàlogament per a les arestes. Això significa que, si dos vèrtexs són adjacents en H, aleshores ho són mitjançant una aresta preexistent en G i, per tant, també són adjacents en G. En altres termes, si dos vèrtexs de H no són adjacents en G, tampoc no ho poden ser en H, però és possible que dos vèrtexs de H siguin adjacents en G, però no en H.

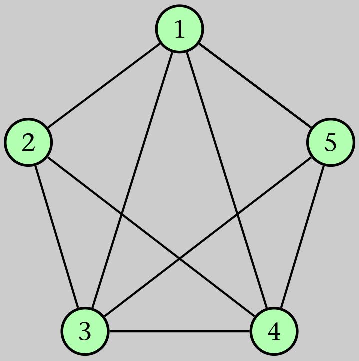
Definició 7

- Donat un graf $G = (V,A)$, considerem un subconjunt $S \subseteq V$; definim el **subgraf generat** o **induït** per S en G com el graf $\langle S \rangle = (S,A')$, de tal manera que $\{u,v\} \in A' \Leftrightarrow \{u,v\} \in A$ i $u,v \in S$. Així, el conjunt de les arestes de $\langle S \rangle$ són les que, essent en G, connecten vèrtexs de S.
- Siguin $G = (V,A)$ i $H = (V',A')$ dos grafs, es diu que H és **subgraf generador** o **d'expansió** de G si $V' = V$ i $A' \subseteq A$.

El grau d'un vèrtex u relatiu a un subgraf H s'escriu $g_H(u)$.

Exemple 7

Considerem el graf representat en la figura següent.



Un exemple de subgraf pot ser el següent: $H = (V',A')$, $V' = \{1,2,4,5\}$, $A' = \{\{2,4\},\{4,5\}\}$. El grau del vèrtex 4 en el graf G és 4 i, en canvi, en el subgraf H el mateix vèrtex té grau 2.

Un subgraf generador seria, per exemple, $H = \{\{1,2,3,4,5\},\{\{3,4\},\{2,4\}\}\}$.

El subgraf generat pel conjunt de vèrtexs $S = \{2,3,4,5\}$ és el graf el conjunt de vèrtexs del qual és S i el conjunt d'arestes és $A' = \{\{2,3\},\{3,4\},\{2,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$.

1.4. Lema de les encaixades

Lema de les encaixades. Teorema 3

Donat un graf $G = (V,A)$, es compleix

$$\sum_{v\in V} g(v) = 2|A|,$$

és a dir, la suma dels graus d'un graf és el doble del nombre d'arestes.

Demostració: Només cal comptar el nombre d'arestes del graf a partir de les arestes que aporta cada vèrtex. Cada vèrtex v aporta al còmput global d'arestes la quantitat de $g(v)$ arestes (quantitat que iguala el grau del vèrtex), de manera que, globalment, el nombre d'arestes seria $\sum_{v\in V} g(v)$, si no fos pel fet que cada aresta és compartida pels dos vèrtexs extrems i, en conseqüència, per aquest sistema de còmput, cada aresta hi és comptada dues vegades. Per tant, l'expressió $\sum_{v\in V} g(v)$ compta el doble del nombre d'arestes, o sigui, $\sum_{v\in V} g(v) = 2|A|$.
∎

Exemple 8

Considerem un graf amb seqüència de graus 2,2,2,2,2,2,3,1. Podem calcular fàcilment el nombre d'arestes del graf sense tenir més informació que aquesta si apliquem el lema de les encaixades:

$$|A| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} g(v) = \frac{1}{2}(2+2+2+2+2+2+3+1) = 8.$$

El lema de les encaixades s'utilitza amb molta freqüència en la resolució de problemes de teoria de grafs. També s'utilitza un resultat que se'n deriva immediatament.

Proposició 4

En un graf qualsevol $G = (V,A)$, el nombre de vèrtexs de grau senar és parell.

Demostració: En efecte, sigui P el conjunt de vèrtexs de grau parell i S el conjunt de vèrtexs de grau senar, de manera que tenim la partició $V = P \cup S$. En conseqüència, podem escriure, a partir del lema de les encaixades:

$$2|A| = \sum_{v\in V} g(v) = \sum_{v\in P\cup S} g(v) = \sum_{v\in P} g(v) + \sum_{v\in S} g(v) = \sum_{v\in P} 2k_v + \sum_{v\in S}(2k_v + 1).$$

Això és degut al fet que els nombres parells són de la forma $2k$ i els nombre senars, de la forma $2k+1$, per a un k adequat, depenent del nombre.

Aleshores, a partir de les fórmules anteriors, podem escriure

$$2|A| = 2\left(\sum_{v\in P} k_v + \sum_{v\in S} k_v\right) + \sum_{v\in S} 1 = 2\left(\sum_{v\in P} k_v + \sum_{v\in S} k_v\right) + |S|,$$

d'on resulta que el cardinal del conjunt de vèrtexs de grau senar es pot escriure com a diferència de dos nombres parells i, en conseqüència, és parell:

$$|S| = 2|A| - 2\left(\sum_{v\in P} k_v + \sum_{v\in S} k_v\right).$$

∎

Exemple 9

No pot existir cap graf amb aquesta seqüència de graus: 1,3,3,2,2,2,4. En efecte, si existís, hi hauria un nombre senar de vèrtexs de grau senar, cosa que contradiria la proposició 4, conseqüència del lema de les encaixades.

Exemple 10

En una reunió, el nombre de persones que saluden un nombre senar de persones ha de ser parell; és una conseqüència directa de la proposició 4. Se suposa que la salutació és mútua (això es garanteix en el cas d'encaixades de mans).

Exemple 11

En una classe, el nombre d'alumnes que coneixen un nombre senar d'alumnes (amb coneixença mútua) és parell.

Exercicis

9. En una reunió de vuit persones es produeixen algunes salutacions mútues entre els assistents. Suposem que dos persones en saluden tres, una persona no saluda ningú, dues persones en saluden només una, una persona en saluda quatre i dues persones en saluden dos. Quantes salutacions es produeixen?

10. Un assistent a una reunió ens en dóna la descripció següent: hi havia sis persones; una no coneixia ningú i no en va saludar cap; de les restants persones, cadascuna en va saludar tres. És correcta aquesta descripció?

11. Poden existir grafs $G = (V,A)$ r-regulars amb r senar, d'ordre $|V|$ senar?

12. En un graf 2-regular, el nombre d'arestes i de vèrtexs coincideix. Cert o fals?

13. Analitzeu si és certa l'afirmació següent: un graf amb catorze arestes, tres vèrtexs de grau 1, dos vèrtexs de grau 4, un vèrtex de grau 3 i la resta de grau 2 ha de tenir exactament tretze vèrtexs.

Solucions

9. Aplicant el lema de les encaixades, podem veure que es produeixen 8 salutacions.

10. La descripció no pot ser certa, ja que si fos així el graf corresponent a la reunió tindria una seqüència de graus 0, 3, 3, 3, 3, 3, és a dir, hi hauria un nombre senar de vèrtexs de grau senar, en contradicció amb la proposició 4, conseqüència del lema de les encaixades.

11. Apliquem el lema de les encaixades: $2|A| = \sum_{v\in V} g(v) = r|V|$. S'observa clarament una contradicció, ja que el terme de l'esquerra és parell mentre que el de la dreta és senar, d'acord amb les hipòtesis. Per tant, no pot existir cap graf amb aquestes característiques.

12. Cert, ja que pel lema de les encaixades podem escriure $2|A| = \sum_{v\in V} g(v) = = \sum_{v\in V} 2 = 2|V|$, d'on $|A| = |V|$.

13. Es pot comprovar la veracitat de l'afirmació aplicant el lema de les encaixades i suposant que el nombre de vèrtexs de grau 2 és x. En efecte, podem escriure $3 + 2 \times 4 + 1 \times 3 + 2x = 2|A| = 28$, d'on $x = 7$. Per tant, el nombre de vèrtexs és 13.

1.5. Alguns grafs importants

1.5.1. Grafs elementals

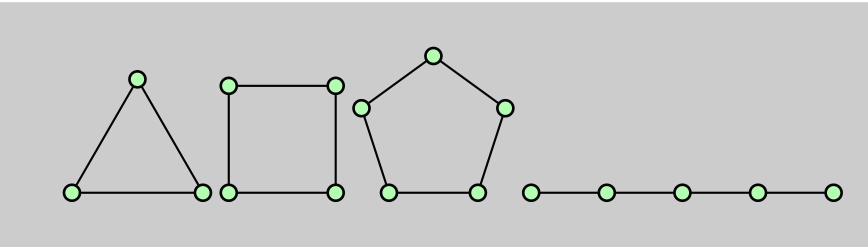
Cal conèixer alguns dels tipus de graf més importants. Els grafs elementals són:

Definició 8

- El **graf nul** N_n d'ordre $n \geq 1$ és el graf de n vèrtexs i 0 arestes; de manera que $N_n = (V,\emptyset)$, amb $|V| = n$. El graf N_1 s'anomena **graf trivial**. L'ordre del graf nul N_n és n i la mida, 0. És el més simple dels grafs.
- El **graf cicle** d'ordre $n \geq 3$ és $C_n = (V,A)$, on $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i $A = \{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\}, \ldots, \{v_n,v_1\}\} = \{\{v_i,v_{i+1}\} \mid i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{v_n,v_1\}\}$.
- El **graf trajecte** $T_n = (V,A)$ d'ordre $n \geq 2$ és el graf per al qual $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i $A = \{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\}, \ldots, \{v_{n-1},v_n\}\} = \{\{v_i,v_{i+1}\} \mid i = 1, \ldots, n-1\}$. El graf T_n es pot obtenir de l'eliminació d'una aresta del graf cicle C_n; en afegir una aresta a T_n que connecti el primer i l'últim vèrtex s'obté el cicle C_n.
- El **graf complet** d'ordre n és el graf de n vèrtexs amb totes les arestes possibles; és a dir, $K_n = (V,A)$, amb $|V| = n$ i $|A| = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$.

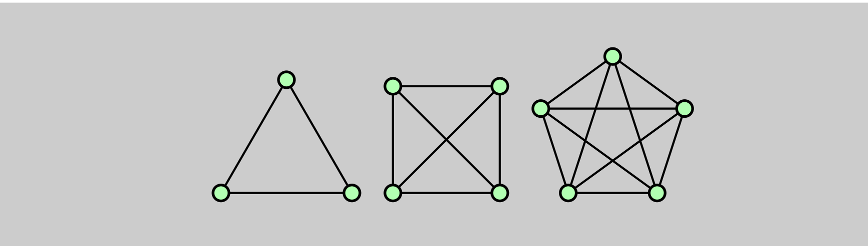
Exemple 12

Podem veure en aquesta figura els grafs cicle C_3, C_4, C_5. El darrer graf és T_5.



Exemple 13

En les figures que hi ha a continuació podem veure representacions dels grafs complets K_3, K_4, K_5. Observeu que $K_3 = C_3$.



Exercicis

14. Quins grafs cicle són grafs complets?

15. Els únics grafs 2-regulars són els cicles C_n. Cert o fals?

16. Hi ha grafs r-regulars per a tot r?

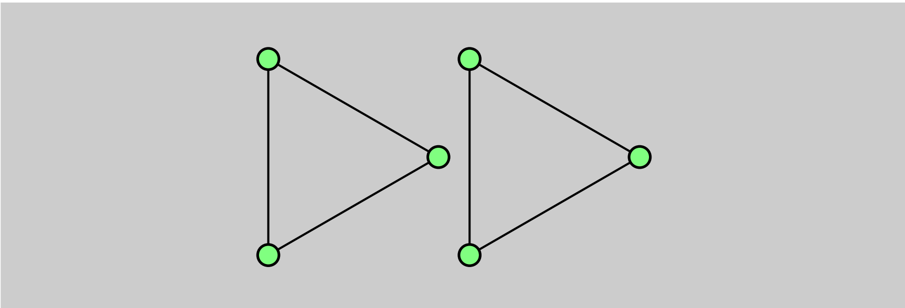
17. Quina és la mida màxima d'un graf d'ordre 14? Quin és aquest graf?

18. Podeu donar un exemple d'un graf en què cada vèrtex sigui incident amb cada aresta?

Solucions

14. Únicament el graf $C_3 = K_3$.

15. Fals, com es pot veure amb el contraexemple següent.



16. Sí, ja que el graf complet K_{r+1} és r-regular.

17. La mida màxima és $|A| = \binom{14}{2} = 91$ i correspon al graf complet K_{14}.

18. Per exemple, el graf trajecte, T_2.

1.5.2. Grafs bipartits

Els grafs bipartits mereixen una atenció especial.

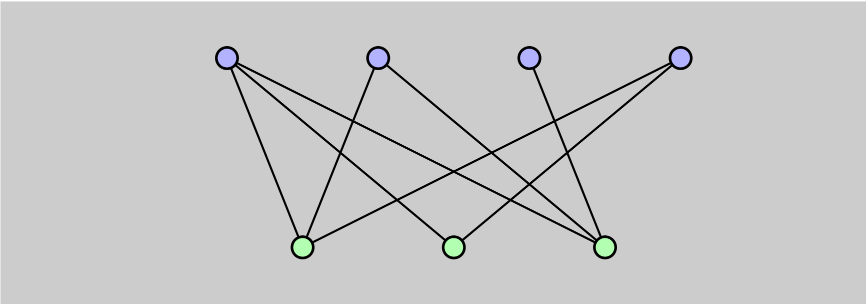
Definició 9

Un graf $G = (V,A)$ és **bipartit** si existeix una partició del conjunt de vèrtexs, és a dir si $V = V_1 \cup V_2$, amb $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de manera que les arestes que hi ha connecten vèrtexs de V_1 amb vèrtexs de V_2: $\{u,v\} \in A$ implica que $u \in V_1$, $v \in V_2$ o $v \in V_1$, $u \in V_2$. De manera equivalent, si $\{u,v\} \in A$, $u \in V_1 \Leftrightarrow v \in V_2$.

En particular, això significa que no hi ha arestes que connectin vèrtexs de V_1 ni arestes que connectin vèrtexs de V_2.

Exemple 14

En aquest gràfic veiem un exemple de graf bipartit. S'han indicat els vèrtexs de la bipartició amb colors diferents.



La idea es pot generalitzar als grafs k-partits. En aquest cas tenim una partició $(V_1, \ldots, V_k)$ del conjunt de vèrtexs, de manera que les arestes que hi ha connecten vèrtexs que pertanyen a conjunts diferents de la partició i no hi ha arestes que connectin vèrtexs d'un mateix conjunt V_i.

Definició 10

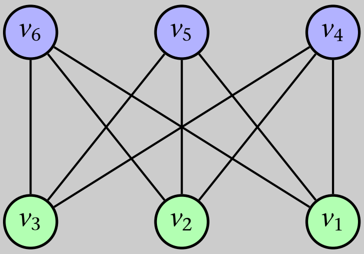
El graf **bipartit complet** $K_{n,m}$ és un graf $G = (V,A)$ que és bipartit, essent $|V_1| = n$, $|V_2| = m$, amb totes les arestes possibles que connecten vèrtexs de V_1 amb vèrtexs de V_2.

En particular, això significa que tots els vèrtexs de V_1 són adjacents a tots els vèrtexs de V_2. En altres paraules, $A = \{\{u,v\} \mid u \in V_1, v \in V_2\}$.

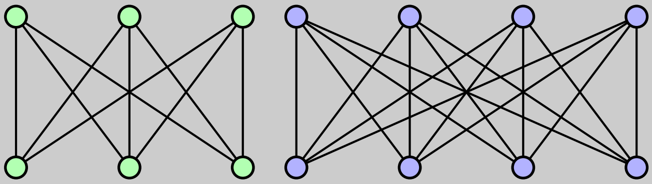
L'ordre del graf és $|V| = n + m$ i la mida és $|A| = nm$. Els vèrtexs de V_1 són tots de grau m i els de V_2 són de grau n. Els grafs bipartits complets $K_{m,m}$ són m-regulars.

Exemple 15

S'indiquen en colors diferents els vèrtexs de la bipartició, de manera que tenim $V_1 = \{v_1,v_2,v_3\}$ i $V_2 = \{v_4,v_5,v_6\}$.



Les figures següents són representacions de $K_{3,3}$, $K_{4,4}$ (d'esquerra a dreta).

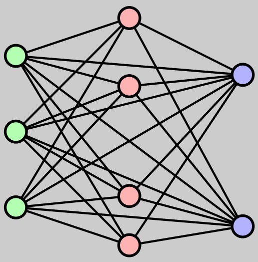


Definició 11

En el cas d'un graf k-**partit complet** es té una partició del conjunt de vèrtexs en k subconjunts, de cardinals respectius $n_1, n_2, \ldots, n_k$ i hi ha totes les arestes possibles, amb la condició que no hi hagi cap aresta que connecti vèrtexs d'un mateix subconjunt. El graf corresponent es representa per $K_{n_1,\ldots,n_k}$.

Exemple 16

La il·lustració correspon al graf $K_{3,4,2}$.



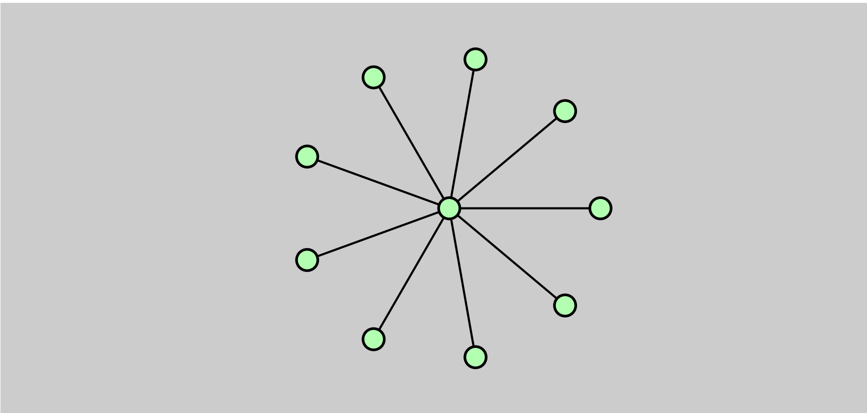
Definició 12

El **graf estrella** E_n d'ordre n ($n \geq 3$) és un cas particular de graf bipartit complet, $E_n = K_{1,n-1}$.

L'ordre del graf és n i la mida, $n-1$.

Exemple 17

Aquest gràfic correspon a $E_{10} = K_{1,9}$.



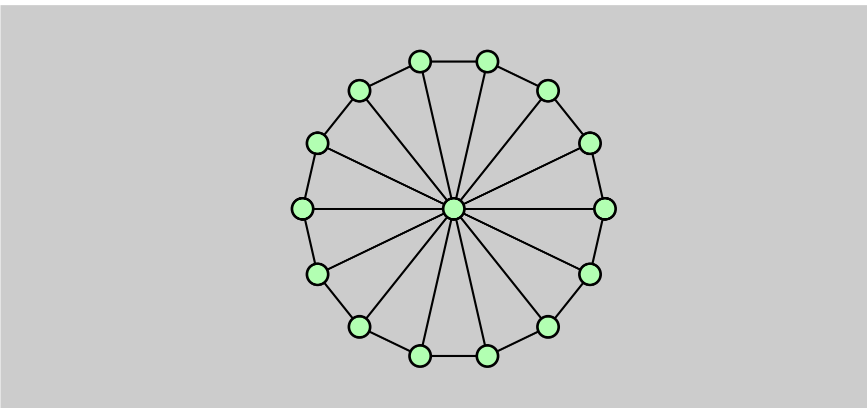
Definició 13

El **graf roda** R_n d'ordre n ($n \geq 4$) té un únic vèrtex de grau $n-1$ i, si eliminem aquest vèrtex i les seves arestes incidents, s'obté un cicle d'ordre $n-1$.

L'ordre del graf roda és n i la mida és $2(n-1)$.

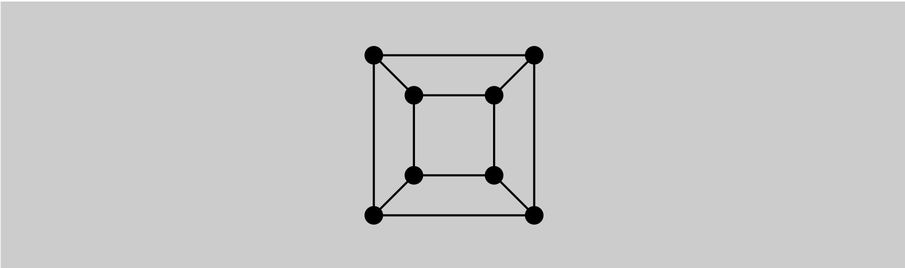
Exemple 18

Aquest és el graf roda d'ordre 15: R_{15}.

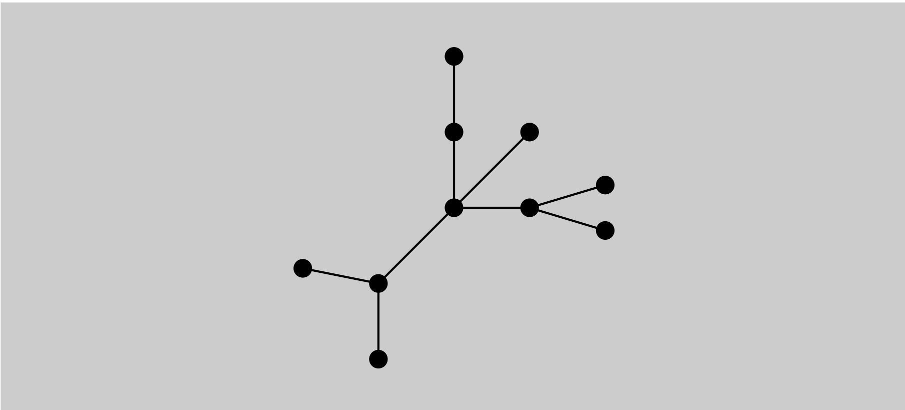


Exercicis

19. Estudieu si el graf següent és bipartit i, en cas afirmatiu, representeu-lo "en forma bipartida", és a dir, en forma que deixi veure clarament l'estructura bipartida.



20. Considereu el graf següent, proveu que és bipartit i dibuixeu-lo en forma bipartida.



21. Considereu un graf k-partit complet o, més concretament $(n_1,\ldots,n_k)$-partit complet. Quin és l'ordre i la mida del graf i quins són els graus del diferents vèrtexs? Per a quins valors el graf és regular?

22. Són bipartits els grafs cicle C_n?

23. Els grafs trajecte són tots bipartits. Cert o fals?

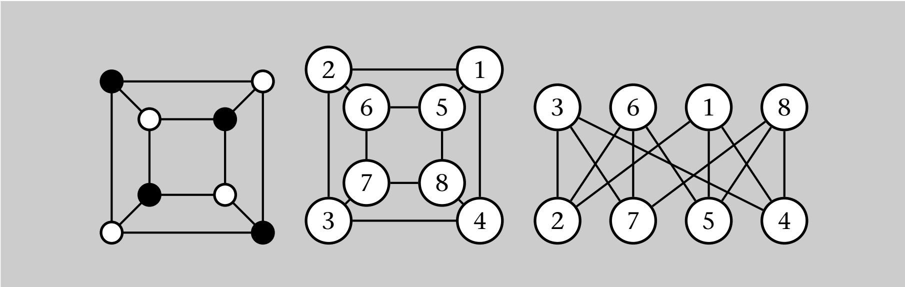
24. Indiqueu algun graf complet K_n que sigui bipartit.

25. El graf trajecte T_3 és un cas especial de graf estrella. Cert o fals?

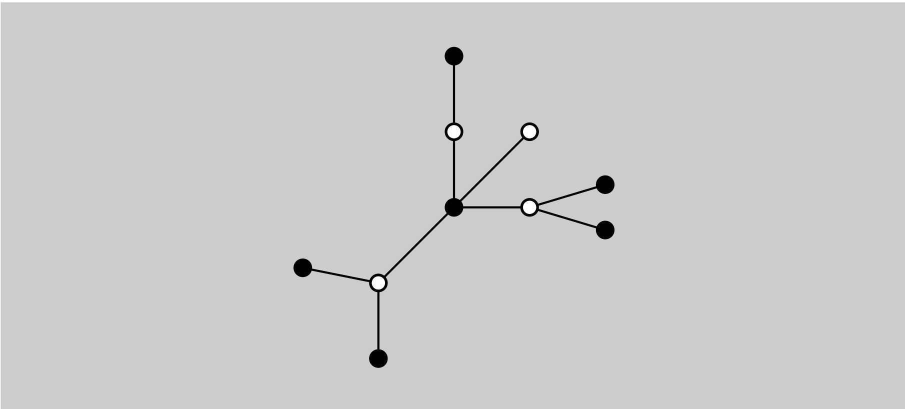
26. Busqueu un recorregut tancat sobre el graf roda que visiti tots els vèrtexs exactament una vegada.

Solucions

19. El graf és efectivament bipartit, com es pot veure si assignem dos colors diferents als vèrtexs, de manera que no hi hagi vèrtexs adjacents del mateix color (aquesta és una manera fàcil de comprovar si un graf és bipartit o no); aleshores les dues classes de la bipartició són els subconjunts de vèrtexs del mateix color. Si assignem etiquetes als vèrtexs també podem veure una representació que deixa clara l'estructura bipartida.



20. Proposem la distribució bipartida dels vèrtexs, que es posa de manifest en la bicoloració de l'esquema següent.



21. L'ordre del graf és $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. La mida del graf és

$$\frac{1}{2}(n_1(n-n_1) + n_2(n-n_2) + \ldots + n_k(n-n_k)).$$

El graf és regular si $n_i = \frac{n}{k}$, és a dir, quan totes les n_i són iguals. Per tant, l'ordre del graf ha de ser divisible per k.

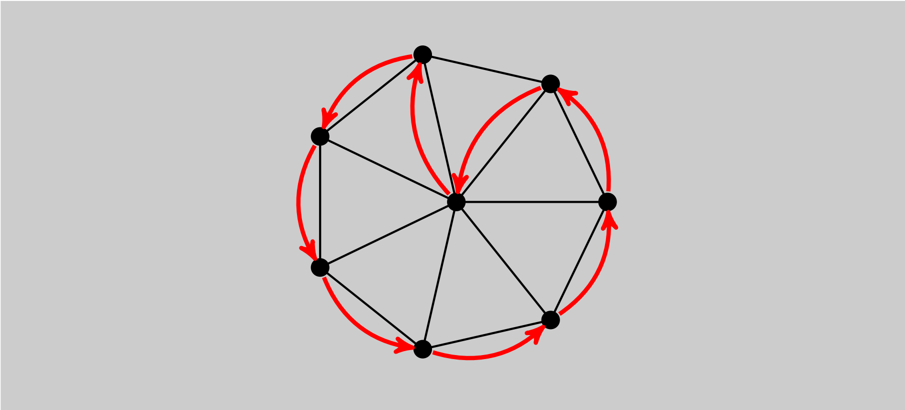
22. Depèn de la paritat de n (amb aquesta indicació podeu completar la resposta).

23. Cert (acabeu de justificar la resposta).

24. El graf K_2 és bipartit. Per a $n > 2$ els grafs K_n no ho són.

25. Cert, ja que $T_3 = E_3 = K_{1,2}$.

26.



1.6. Seqüències gràfiques

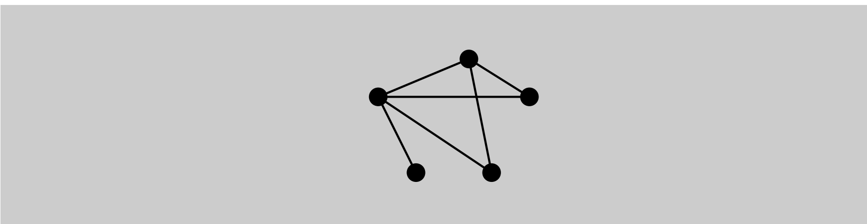
Un dels primers problemes que ens podem plantejar és si, donada una seqüència de nombres enters, és possible construir un graf que la tingui com a seqüència de graus. A partir del lema de les encaixades, és fàcil adonar-se que això no sempre és possible.

Definició 14

Una seqüència de nombres enters no negatius, $s : d_1,d_2,\ldots,d_n$ s'anomena **seqüència gràfica** si existeix un graf $G = (V,A)$ d'ordre n tal que s és la seqüència de graus de G.

Exemple 19

La seqüència $s : 4,3,2,2,1$ és una seqüència gràfica. Correspon al graf següent.



Exemple 20

La seqüència $s : 4,3,3,2,1$ no és una seqüència gràfica, ja que no compleix la proposició 4, conseqüència del lema de les encaixades.

De la definició de grau d'un vèrtex i del lema de les encaixades podem establir dues condicions necessàries per a l'existència d'un graf donada una seqüència d'enters no negatius $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$:

1) $d_i \leq n - 1$, per $1 \leq i \leq n$.

2) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ ha de ser parell.

Ara bé, aquestes condicions no són suficients.

Exemple 21

La seqüència s : 4,4,4,2,1,1 hauria de correspondre a un graf d'ordre 6. Compleix les dues condicions anteriors. En canvi no hi ha cap graf que tingui aquesta seqüència de graus. Això demostra que les condicions anteriors són necessàries però no suficients.

Caracterització de Havel-Hakimi. Teorema 5

Una seqüència $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ de nombres enters no negatius, amb $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, és una seqüència gràfica si, i només si, la seqüència $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ és gràfica.

Demostració: Podeu veure l'obra de Gimbert, Moreno, Ribó i Valls (1998). ∎

Exemple 22

Segons aquesta caracterització, la seqüència de l'exemple anterior, s : 4,4,4, 2,1,1, serà gràfica si ho és la seqüència que resulta d'eliminar el primer (4) i restar 1 als quatre següents. Per tant, la seqüència s : 4,4,4,2,1,1 es transforma en s' : 3,3,1,0,1. Ara hem d'esbrinar si s' és gràfica, és a dir, reordenant, si s' : 3,3,1,1,0 és gràfica. El primer terme és 3, per tant, hem de restar 1 als tres termes següents; la seqüència resultant és s'' : 2,0,0,0. Però aquesta seqüència no pot correspondre a cap graf, i per això ni s'', ni s' ni, tampoc la seqüència s són gràfiques.

1.6.1. Algorisme de Havel-Hakimi

El teorema de Havel-Hakimi permet, de manera recursiva, reconèixer si una seqüència és gràfica.

Formulació de l'algorisme de Havel-Hakimi

Entrada: una seqüència de nombres enters $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$

Sortida: diu si la seqüència és gràfica o no.

Algorisme:

Si existeix $d_i > n-1$, aleshores la seqüència no és gràfica, **fi**.
mentre no hi hagi cap $d_i < 0$ i s no sigui idènticament 0.
  Classificar s en ordre decreixent.
  Eliminar d_1 de s i restar 1 unitat als d_1 elements següents.
fimentre
Si existeix $d_i < 0$, aleshores la seqüència no és gràfica, **fi**.
Si la seqüència resultant és la seqüència idènticament 0,
  aleshores s és una seqüència gràfica.

Implementació de l'algorisme de Havel-Hakimi

Per a implementar l'algorisme observem que a cada iteració la longitud de la seqüència disminueix una unitat. La seqüència serà gràfica si després de $n-1$ iteracions obtenim solament un 0.

```
algorisme Havel-Hakimi(s)
  inici
    grafica ← FALS
    classificar_descendent(s)
    si (max(s) ≤ n – 1) aleshores
      per i ← 1 fins n – 1
          pivot ← d1
          s ← s– < d1 >
          per j ← 1 fins pivot
              dj ← dj – 1
          fiper
          si (pivot < LONGITUD(s))
             aleshores intercalar_descendent(s,pivot)
          fisi
      fiper
      si (s = 0)
         aleshores grafica ← CERT
      fisi
  fisi
  retorn (grafica)
fi
```

Observem que,

1) La funció *classificar_descendent*(s) ordena s en ordre descendent.

2) La funció *intercalar_descendent*(s,d_1) ordena s fusionant dues subseqüències ja ordenades. Com que les dues subseqüències que formen s ja estan ordenades, es tracta d'intercalar-les.

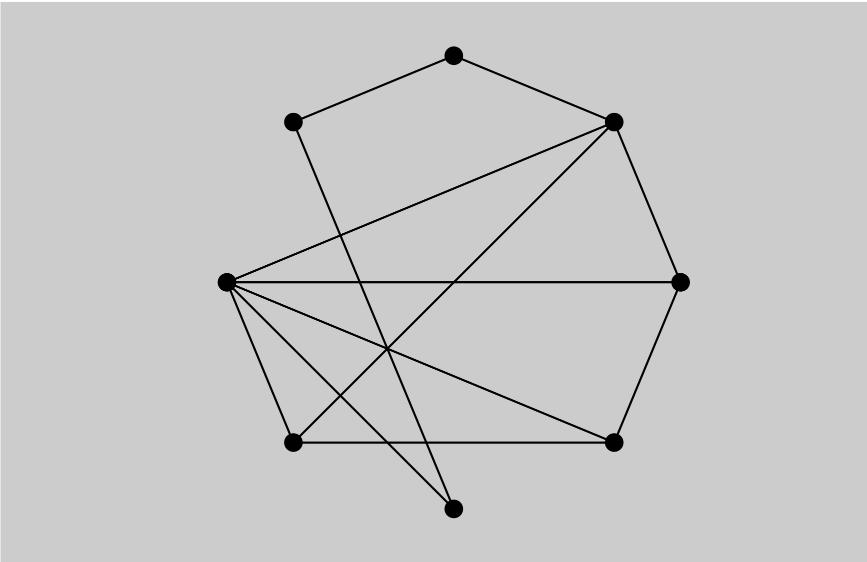
3) Després de $n-1$ iteracions la seqüència contindrà un sol element.

Exemple 23

La taula següent mostra la simulació de l'algorisme per a la seqüència s : 2,2,4,3,3,2,3,5.

Iteració	Seqüència	Operació
Inicialment	2,2,4,3,3,2,3,5	
	5,4,3,3,3,2,2,2	Classificació
1	3,2,2,2,1,2,2	Primera subseqüència
	3,2,2,2,2,2,1	Intercalem subseqüències
2	1,1,1,2,2,1	Segona subseqüència
	2,2,1,1,1,1	Intercalem subseqüències
3	1,0,1,1,1	Tercera subseqüència
	1,1,1,1,0	Intercalem subseqüències
4	0,1,1,0	Quarta subseqüència
	1,1,0,0	Intercalem subseqüències
5	0,0,0	Cinquena subseqüència
Fi		

Per tant, la seqüència és gràfica. Un graf que té aquesta seqüència de graus podria ser:



Anàlisi de l'algorisme de Havel-Hakimi

Per a analitzar aquest algorisme hem d'observar que, en cada iteració del bucle, la longitud de la seqüència disminueix una unitat. El nombre total d'iteracions serà $n-1$.

Les principals operacions que es fan són:

1) Classificar la seqüència en ordre descendent. Això es pot fer amb els algorismes clàssics d'ordenació com el *quick sort* o el *merge sort* amb una complexitat $O(n \log n)$.

2) En el cos del bucle fem dos tipus d'operacions:

– restar una unitat d_1 ($d_1 \leq n-1$) vegades,
– intercalar dues subseqüències.

Tot i que normalment no farem una intercalació a cada iteració, podem suposar el pitjor dels casos. És a dir, a cada iteració restem $k-1$ unitats (k és la longitud de la subseqüència) i fem una intercalació. Les intercalacions es poden fer amb una complexitat lineal, $O(n)$, i el nombre de restes serà

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1),$$

que dóna una complexitat $O(n^2)$.

Resumint, podem concloure que aquest algorisme té, en el pitjor dels casos, una complexitat $O(n^2)$.

Exercicis

27. Usant l'algorisme de Havel-Hakimi digueu si les seqüències següents són gràfiques

a) s : 5,5,7,6,4,2,4,5

b) s : 2,3,4,5,6,7,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8

c) s : 2,3,4,5,6,7,8,8,8,8,8,8,8,8,8,9

28. Pot passar que grafs amb estructures diferents tinguin la mateixa seqüència de graus?

29. Demostreu que la seqüència nombres enters 2,2,2,2,2,2,3,1 és la seqüència de graus d'un graf. Proposeu dos exemples diferents de grafs que tinguin aquesta seqüència de graus.

Solucions

27. a) Sí que és gràfica:

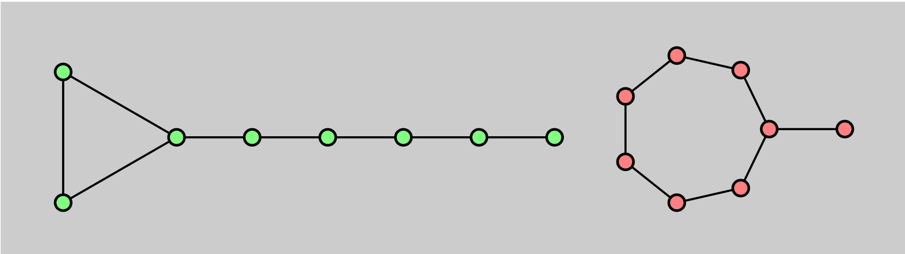
Iteració	Seqüència	Operació
Inicialment	5,5,7,6,4,2,4,5	
	7,6,5,5,5,4,4,2	Classificació
1	5,4,4,4,3,3,1	Primera subseqüència
2	3,3,3,2,2,1	Segona subseqüència
3	2,2,1,2,1	Tercera subseqüència
	2,2,2,1,1	Intercalem subseqüències
4	1,1,1,1	Quarta subseqüència
5	0,1,1	Cinquena subseqüència
	1,1,0	Intercalem subseqüències
6	0,0	Sisena subseqüència
7	0	Setena subseqüència
Fi		

b) No és gràfica (apliqueu l'algorisme per a obtenir aquest resultat).

c) Aquesta sí que és una seqüència gràfica (apliqueu l'algorisme per a obtenir aquest resultat).

28. Sí, per exemple considereu un graf cicle i el graf constituït per la reunió de 2 cicles.

29. Aplicaríem l'algorisme de Havel-Hakimi per a demostrar que la seqüència és gràfica. Dos possibles grafs que tenen aquesta seqüència de graus són



2. Estructura i manipulació de grafs

Molt sovint és interessant conèixer el conjunt de grafs isomorfs entre sí, que són grafs que tenen essencialment la mateixa estructura. També és útil conèixer models de grafs més generals que els que s'han presentat fins ara, i que sorgeixen de manera natural; és el cas dels multigrafs i dels pseudografs, i també dels grafs orientats.

D'altra banda, és convenient disposar d'eines que permetin manipular grafs, bàsicament amb la finalitat de transformar un graf o de combinar dos o més grafs. Finalment, estudiarem un dels grans problemes pràctics: la representació i emmagatzematge d'un graf en termes d'estructures de dades.

2.1. Transformar un graf

Donat un graf $G = (V,A)$ es poden fer manipulacions diverses:

1) Eliminar un vèrtex $u \in V$. Així s'obté el graf $G' = G - u$, que és el graf (V',A'), on $V' = V \backslash \{u\}$ i A' és el conjunt d'arestes de G no incidents amb u. Aquesta operació es pot generalitzar trivialment a un conjunt $W \subseteq V$: $G' = G - W = (V \backslash W, \{\{a,b\} \mid a,b \notin W\})$. Aquesta operació només té sentit si el graf no és el trivial.

2) Eliminar l'aresta $a \in A$. Així s'obté un graf, amb els mateixos vèrtexs, definit per $G' = G - a = (V, A \backslash \{a\})$. L'operació es pot generalitzar trivialment a un subconjunt d'arestes $B \subseteq A$, cas en el qual $G - B = (V, A \backslash B)$.

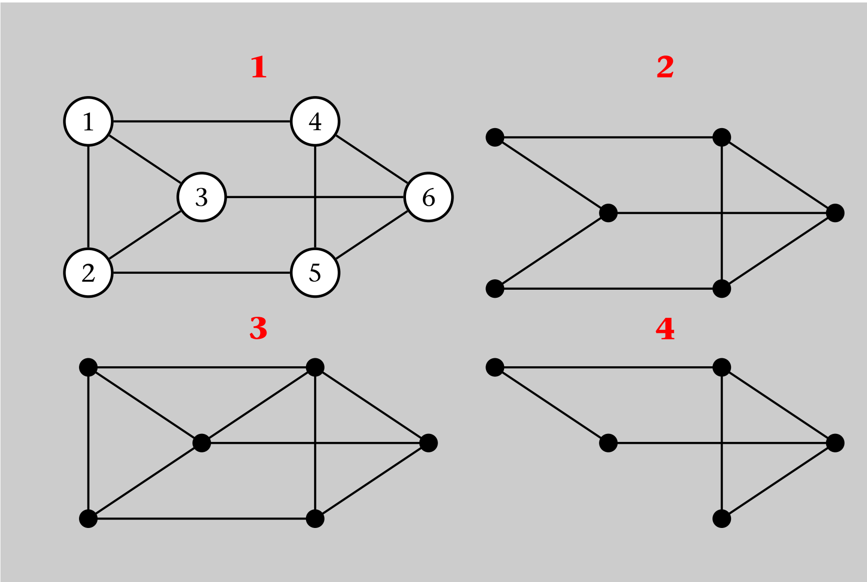
3) Afegir els vèrtexs d'un conjunt W tal que $W \cap V = \emptyset$. Així s'obté un nou graf definit per $G' = G + W = (V \cup W, A)$; en el cas particular d'un vèrtex, la notació se simplifica i se substitueix per $G + u$. Com veurem, aquesta operació es pot definir en termes d'unió amb el graf nul. Amb l'addició de vèrtexs no s'hi afegeixen arestes noves.

4) Afegir una aresta $\{u,v\}$, on u i v són dos vèrtexs no adjacents. Així s'obté el graf $G' = (V, A \cup \{\{u,v\}\})$. Aquest nou graf es pot representar per $G + uv$. El procés es pot generalitzar a conjunts de més d'una aresta.

La condició de no adjacència dels vèrtexs és fonamental, ja que en cas contrari es crearia una aresta múltiple i, per tant, no estaríem dins el domini dels grafs simples, tal com s'ha definit.

Exemple 24

Sobre el primer graf efectuarem operacions d'eliminació de vèrtexs i arestes, i d'addició d'arestes. El quart graf és el resultat d'eliminar de l'original el vèrtex 2. El segon graf resulta d'eliminar l'aresta {1,2} i el tercer graf es genera amb l'addició de la nova aresta {3,4}.

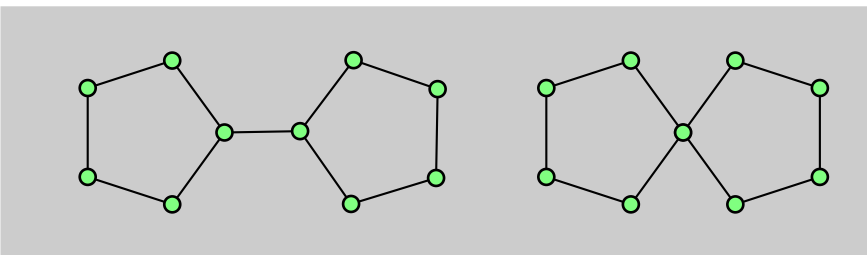


5) Fer la contracció de l'aresta $a = \{u,v\}$. En aquest cas s'elimina l'aresta a, s'identifiquen en un únic nou vèrtex w els dos vèrtexs extrems u, v, que desapareixen, i, finalment, el vèrtex w hereta exclusivament les adjacències dels vèrtexs u, v.

L'operació de contracció es pot aplicar a tot un conjunt d'arestes.

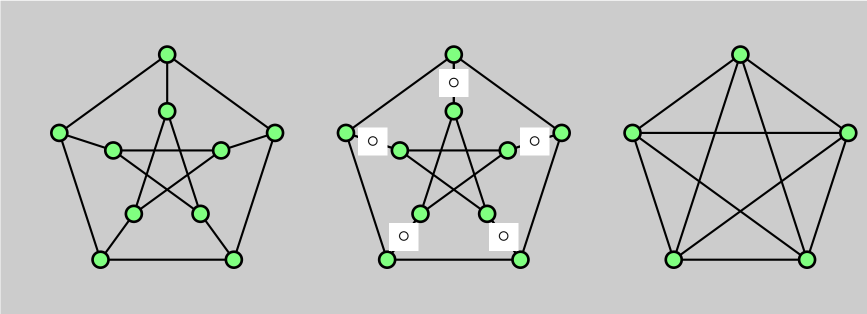
Exemple 25

Vegeu en aquesta figura el resultat de fer la contracció d'una aresta del graf de l'esquerra.



Exemple 26

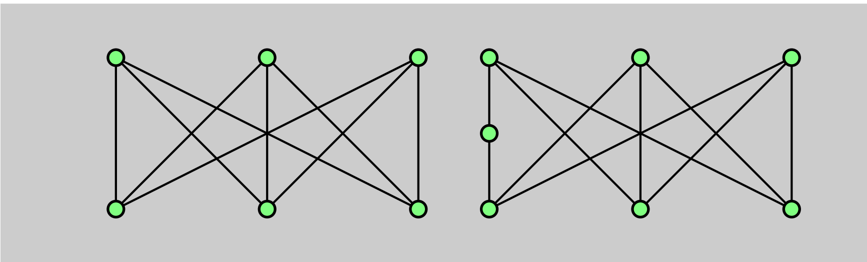
Observeu les figures següents, que presenten la contracció d'algunes arestes de l'anomenat *graf de Petersen*, de manera que se'n deriva el graf complet K_5 (a la segona il·lustració es marquen les arestes que es contrauen).



6) Subdivisió elemental de l'aresta $a = \{u,v\}$. En aquest cas s'insereix un vèrtex de grau 2; això és, donat $w \notin V$, fem les operacions següents: eliminació de l'aresta a, addició del nou vèrtex w i addició de les noves arestes $\{u,w\}$ i $\{w,v\}$. També es pot descriure com $G - a + w + uw + wv$.

Exemple 27

Vegeu el resultat de dur a terme una operació de subdivisió elemental en una aresta del graf $K_{3,3}$.



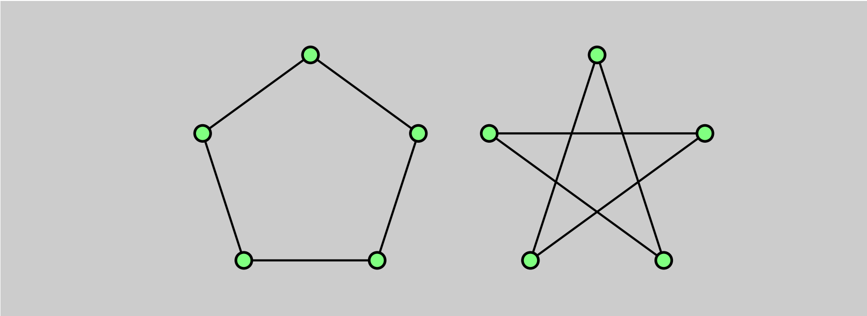
Definició 15

Donat el graf $G = (V,A)$, es defineix el **complementari** d'aquest graf, G^c, com el graf que es construeix sobre el mateix conjunt de vèrtexs de tal manera que dos vèrtexs són adjacents en G^c si, i només si, no ho són en G.

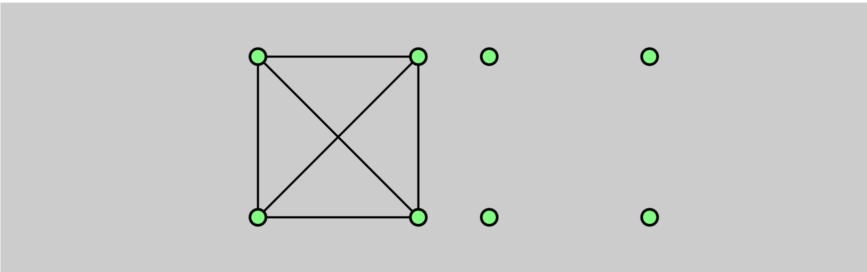
Naturalment, es compleix que el complementari del complementari és l'original: $(G^c)^c = G$.

Exemple 28

La figura següent mostra el graf C_5 i el seu complementari (que també és C_5).



I aquesta, K_4 i el seu complementari, N_4.



Exercicis

30. Quin és l'ordre i la mida del graf complementari G^c en termes de l'ordre n i la mida m del graf original?

31. Si G és un graf d'ordre n amb seqüència de graus $g_1, g_2, \ldots, g_n$, quina serà la seqüència de graus del seu complementari, G^c?

32. Hi ha vegades en què cal estudiar si existeixen grafs amb una seqüència determinada de graus. Un procediment que es pot aplicar és considerar la seqüència de graus que tindrien els grafs complementaris, si hi hagués algun graf amb la seqüència de graus donada. Proposeu algun exemple en què aquest procediment no aportaria res de nou, és a dir, en què la seqüència de graus del graf complementari sigui la mateixa que la donada.

33. El complementari d'un graf regular, és regular? Es pot afirmar que un graf és regular si, i només si, ho és el complementari?

Solucions

30. L'ordre és el mateix i la mida és $\binom{n}{2} - m$.

31. La seqüència serà: $n-1-g_1, n-1-g_2, \ldots, n-1-g_n$.

32. Un graf amb seqüència de graus 2, 2, 2, 2, 2 té com a complementari un graf amb seqüència 2, 2, 2, 2, 2.

33. Sí (acabeu de justificar la resposta).

2.2. Combinar dos o més grafs

Les operacions que es presenten a continuació es generalitzen fàcilment a més de dos grafs.

Definició 16

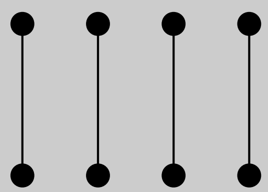
Donats els grafs $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$, la seva **unió** és: $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$.

Exemple 29

Si G és un graf d'ordre n, aleshores $G \cup G^c = K_n$.

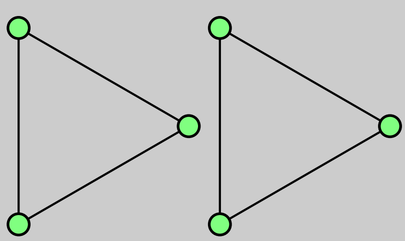
Exemple 30

El graf següent es pot descriure com a $K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup K_2$.



Exemple 31

El graf següent es pot descriure com a $G = C_3 \cup C_3$.



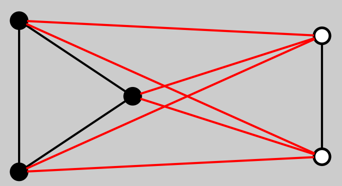
Definició 17

Donats els grafs $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$, la seva **suma** és el graf que té els vèrtexs i les arestes dels grafs originals, més les arestes que connecten tots els vèrtexs del primer amb tots els vèrtexs del segon:

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, (A_1 \cup A_2 \cup \{\{u,v\} \mid u \in V_1,\ v \in V_2\}))$$

Exemple 32

En el gràfic següent es pot veure la suma del 3-cicle (en negre) amb el 2-trajecte (en blanc).



Exemple 33

Els grafs roda i estrella es poden expressar com a grafs suma; en efecte, podem escriure: $R_n = N_1 + C_{n-1}$ i $E_n = N_1 + N_{n-1}$.

Definició 18

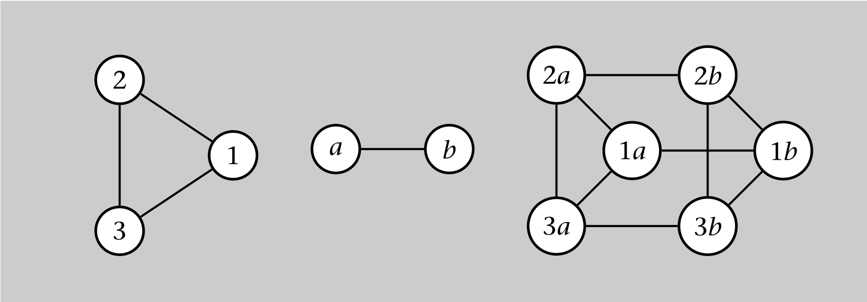
Donats el grafs $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$, es defineix el **producte** $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, A)$ de manera que els vèrtexs (u_1,v_1), (u_2,v_2) són adjacents si, i només si, es compleix *alguna* de les condicions següents:

1) $u_1 = u_2$ i $v_1 \approx v_2$

2) $u_1 \approx u_2$ i $v_1 = v_2$

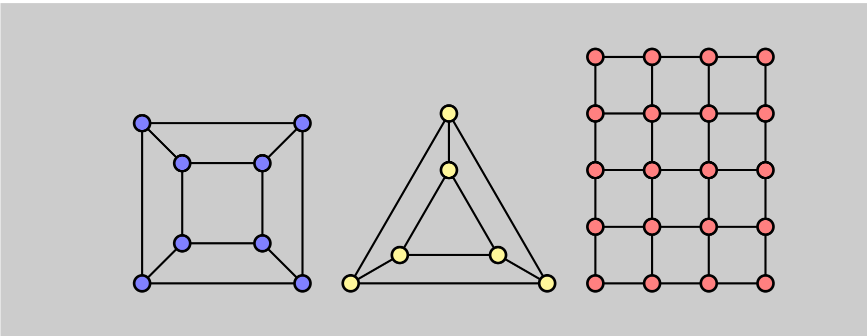
Exemple 34

En la figura següent el producte dels dos primers grafs és el tercer graf.



Exemple 35

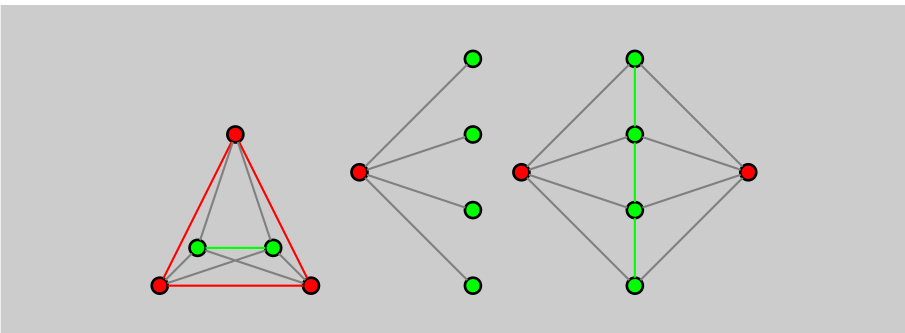
A continuació es mostren diversos exemples de grafs producte; d'esquerra a dreta: $T_2 \times C_4$, $T_2 \times C_3$, $T_5 \times T_4$.



Exercicis

34. Descriviu, en termes de les operacions entre grafs i a partir del graf nul, els grafs bipartits complets $K_{n,m}$.

35. Expresseu els grafs següents en termes de combinacions de grafs elementals.



Solucions

34. $K_{n,m} = N_n + N_m$

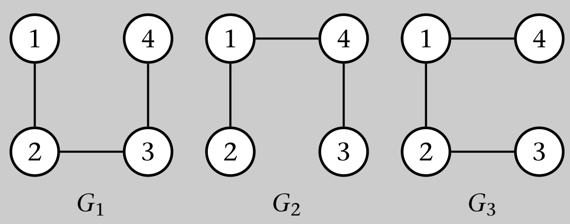
35. El graf de l'esquerra és $T_2 + C_3$ (també és $K_4 + N_1$), el central és $N_1 + N_4$, el de la dreta és $N_2 + T_4$.

2.3. Grafs isomorfs

Els grafs es poden descriure de maneres diferents atenent a la numeració o a l'etiquetatge concret dels vèrtexs, cosa que pot donar lloc a descripcions conjuntistes molt diferents.

Exemple 36

Els grafs següents són grafs amb els vèrtexs *etiquetats* i són òbviament diferents (atenent a les etiquetes).



En concret, per a tots ells $V = \{1,2,3,4\}$ i aleshores tindrem

$$G_1 = (V,\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\})$$
$$G_2 = (V,\{\{1,2\},\{1,4\},\{3,4\}\})$$
$$G_3 = (V,\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,4\}\})$$

que són clarament diferents, ja que ho són els conjunts d'arestes respectius. Tot i que les estructures són les mateixes, l'etiquetatge no és irrellevant; pot ser clau per a certs models i aplicacions: si el graf és el model per a un projecte de comunicacions i els vèrtexs del graf són poblacions concretes, aleshores és de molta importància pràctica saber quin vèrtex queda connectat amb quin o quins altres.

Definició 19

Dos grafs $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$ són **idèntics** si, i només si, $V_1 = V_2$, $A_1 = A_2$.

Dos grafs $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$ són **isomorfs** si, i només si, existeix una bijecció $\varphi : V_1 \to V_2$ que conserva les adjacències i les no-adjacències, és a dir, $u \approx v \Leftrightarrow \varphi(u) \approx \varphi(v)$. En aquest cas, es diu que φ és un isomorfisme i $G_1 \cong G_2$.

Proposició 6

Condicions necessàries d'isomorfisme (cap d'elles és suficient):

1) Dos grafs isomorfs són del mateix ordre.

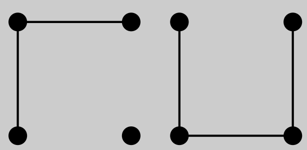
2) Dos grafs isomorfs són de la mateixa mida.

3) Si $\varphi : V_1 \to V_2$ és un isomorfisme dels grafs $G_1 = (V_1,A_1)$, $G_2 = (V_2,A_2)$, aleshores, per la propietat de conservació de les adjacències i les no-adjacències, els vèrtexs corresponents per l'aplicació φ han de tenir els mateixos graus, és a dir $g_{G_1}(u) = g_{G_2}(\varphi(u))$. D'aquí es deriva, en particular, que les seqüències de graus de dos grafs isomorfs han de coincidir. Aquesta propietat es pot utilitzar per a cercar isomorfismes, ja que només es poden correspondre vèrtexs amb els mateixos graus, cosa que és útil si hi ha vèrtexs amb graus singulars o hi ha pocs vèrtexs amb els mateixos graus.

Demostració: Conseqüència immediata de la definició d'isomorfisme entre dos grafs. ∎

Exemple 37

Vegem com a exemple simple d'aplicació el cas següent; els grafs no són isomorfs perquè no són de la mateixa mida o, alternativament, perquè no tenen la mateixa seqüència de graus.



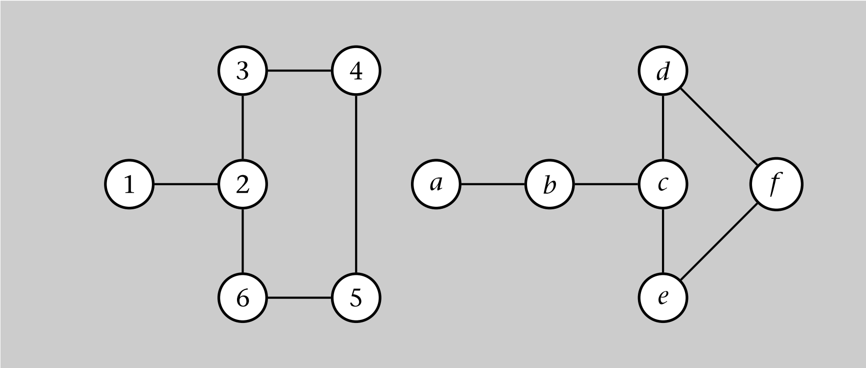
Exemple 38

Les tres condicions necessàries, però, no són suficients com ho demostra l'exemple següent: $G_1 = C_6$, $G_2 = C_3 \cup C_3$ tenen el mateix ordre, la mateixa mida i la mateixa seqüència de graus però no són isomorfs.

La idea general de l'isomorfisme és que es conserva tota l'estructura, en particular tots els tipus de subgrafs. Això pot ser útil per a concloure que dos grafs no són isomorfs. Per exemple, si un graf té un triangle i l'altre no, aleshores no poden ser isomorfs.

Exemple 39

Observeu que els grafs de la figura següent són del mateix ordre, de la mateixa mida i de la mateixa seqüència de graus. Per tant, la parella passa tots els tests anteriors sense que es pugui arribar a cap conclusió.

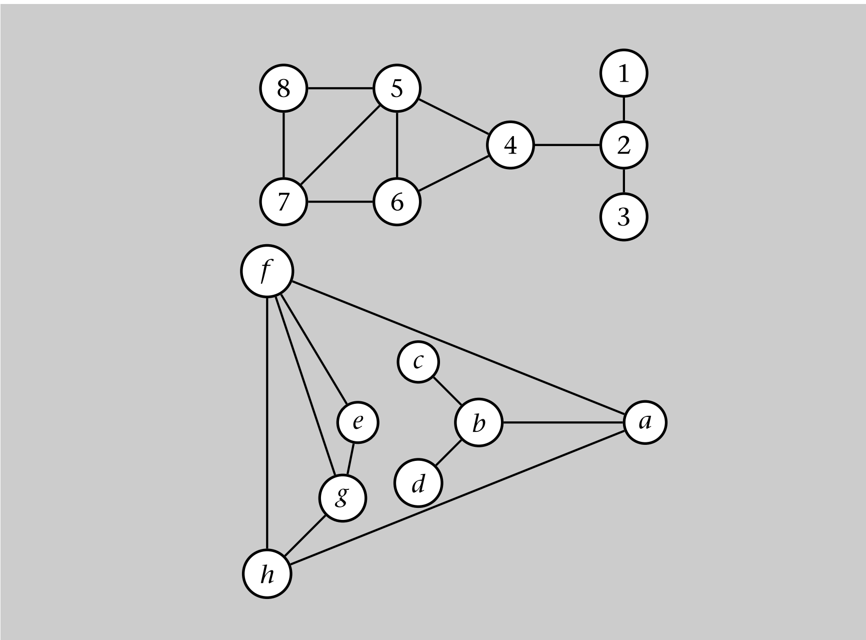


Sigui $G_1 = (V_1,A_1)$ el de l'esquerra i $G_2 = (V_2,A_2)$ el de la dreta. Vegem que no són isomorfs. Suposarem que existeix algun isomorfisme $\varphi : V_1 \to V_2$; aleshores, atès que els graus de vèrtexs corresponents han de ser els mateixos, la imatge de l'únic vèrtex de grau 1 de l'esquerra ha de ser l'únic vèrtex de grau 1 de la dreta, de manera que $\varphi(1) = a$ i a l'únic vèrtex de grau 3 de l'esquerra ha de correspondre l'únic vèrtex del mateix grau de la dreta, de manera que $\varphi(2) = c$. Ara bé, l'adjacència no es conserva, ja que $1 \approx 2$ i en canvi les imatges corresponents a i c no són adjacents. Per tant, no hi pot haver cap isomorfisme entre tots dos grafs.

Es poden utilitzar altres arguments sobre l'estructura: els dos grafs anteriors no poden ser isomorfs, ja que el de l'esquerra conté un cicle C_5, és a dir, un subgraf isomorf a un 5-cicle, cosa que no passa amb el de la dreta.

Exemple 40

Vegem ara a continuació un exemple d'isomorfisme. Establirem la correspondència isomòrfica guiats per la conservació de graus, d'adjacències i de no-adjacències. Indiquem per G_1 el graf de l'esquerra i per G_2 el graf de la dreta i vegem com podem definir $\varphi : V_1 \to V_2$ de manera que sigui un isomorfisme.



El procés d'assignació d'imatges passa per diverses fases:

1) Els vèrtexs de grau 1 han de tenir com a imatges vèrtexs de grau 1. Per tant, hi ha dues possibilitats (escollirem la primera i, si convingués, després triaríem la segona):

$$1 \mapsto c \qquad 3 \mapsto d.$$

2) L'únic vèrtex de grau 4 ha de tenir per imatge l'únic vèrtex de grau 4, és a dir:

$$5 \mapsto f.$$

3) L'únic vèrtex de grau 2 ha de tenir com a imatge l'únic vèrtex de grau 2, és a dir:

$$8 \mapsto e.$$

4) Resta per assignar imatges als vèrtexs 2, 4, 6 i 7, que són de grau 3, als quals correspondran vèrtexs de grau 3, amb criteris de conservació d'adjacències i de no-adjacències; 1 i 3 són adjacents a 2 i, per tant, la imatge de 2 haurà de ser adjacent a les imatges de 1 i 3, de manera que resultarà:

$$2 \mapsto b.$$

4 és adjacent a 5 i 2 i, en conseqüència, la imatge ha de ser adjacent a les imatges corresponents, és a dir, a a, de manera que tindrem

$$4 \mapsto a.$$

6 és adjacent a 4 i 5 i, en conseqüència,

$$6 \mapsto h.$$

Finalment, $7 \mapsto g$ per raons similars.

Una última comprovació permet veure que hi ha conservació d'adjacències i de no-adjacències i, òbviament, la correspondència és bijectiva.

Definició 20

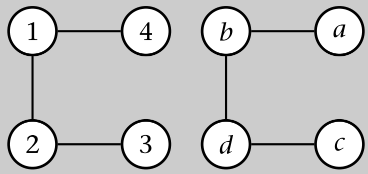
Un graf és **autocomplementari** si és isomorf al seu complementari.

Exercicis

36. Dos grafs són isomorfs si, i només si, ho són els complementaris respectius. Cert o fals?

37. Com es relacionen n i r en el cas de grafs d'ordre n r-regulars autocomplementaris?

38. Establiu una correspondència isomòrfica entre els dos grafs següents.



Solucions

36. Cert (acabeu de justificar la resposta).

37. En aquests grafs n ha de ser senar i $r = (n - 1)/2$.

38. Per exemple, $\varphi(1) = b$, $\varphi(2) = d$, $\varphi(3) = c$, $\varphi(4) = a$.

2.4. Extensions del concepte de graf (simple)

Hi ha situacions que no es poden modelitzar a partir d'un graf simple. Per això, cal estendre el concepte de graf a aquestes situacions. I, des d'aquest punt de vista, les definicions que hem vist fins ara continuen essent correctes, com a extensions del concepte de graf simple.

2.4.1. Multigrafs i pseudografs

Definició 21

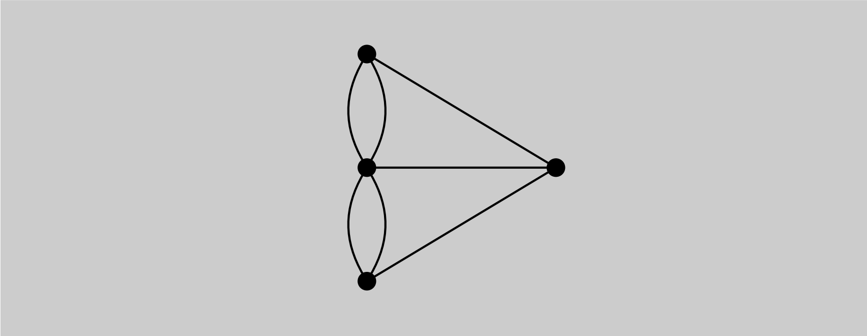
Un **multigraf** és un graf que admet arestes múltiples.

Nota històrica

L'estudi de grafs té un dels seus moments fundacionals en el segle XVIII, en la formulació per part d'Euler del problema dels ponts de Königsberg: consisteix a esbrinar si hi ha alguna manera d'organitzar un recorregut per la ciutat de Königsberg, amb el mateix punt d'arribada que de sortida i que passi per tots els ponts (arestes del graf) sense repetir-ne cap.

Exemple 41

En el cas dels ponts de Königsberg, representat a sota, apareixen arestes múltiples que connecten un parell de vèrtexs. També apareix aquesta situació quan es considera un graf de comunicacions entre localitats i hi ha més d'un camí directe que les comunica.



Definició 22

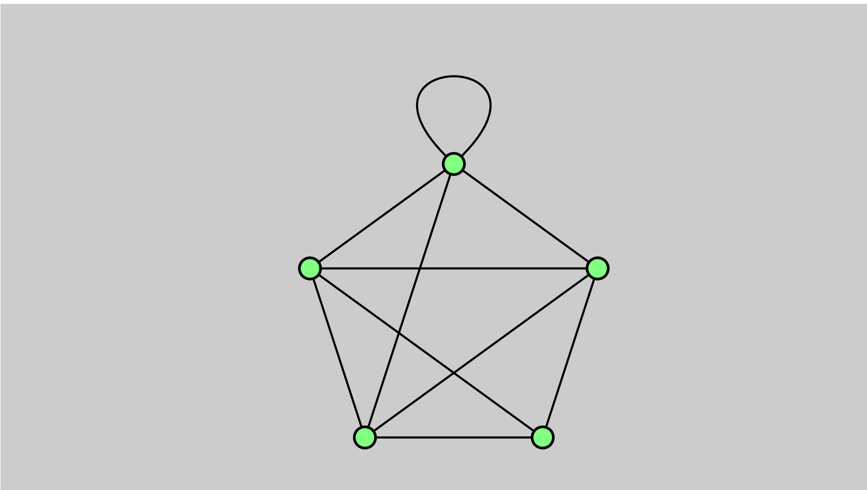
Un **pseudograf** és un graf que admet arestes del tipus $\{u,u\}$ que connecten un vèrtex amb si mateix (**bucles** o **llaços**), possiblement de forma múltiple, i també arestes múltiples entre parells de vèrtexs.

Els graus dels vèrtexs es compten segons la definició original. Per aquest motiu, per a cada bucle el grau del vèrtex s'incrementa en 2.

Els grafs *simples* són els que corresponen a la definició original, per contraposició amb aquestes noves extensions.

Exemple 42

Aquesta figura representa un pseudograf.



Exercicis

39. Indiqueu la seqüència de graus del graf dels ponts de Königsberg.

40. Analitzeu si el lema de les encaixades es pot estendre als multigrafs i pseudografs.

Solucions

39. La seqüència de graus del graf de Königsberg és 3,3,3,5.

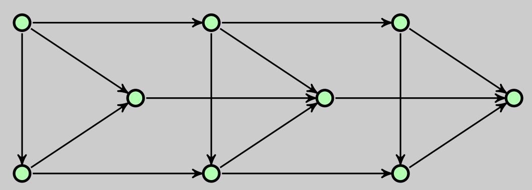
40. Sí (acabeu de justificar la resposta).

2.4.2. Grafs orientats o dirigits

Hi ha aplicacions en les quals les situacions no es descriuen correctament si no s'assignen orientacions o sentits de recorregut a les arestes del graf. Això dóna lloc a grafs orientats, també anomenats *dirigits* o *digrafs*.

Exemple 43

Aquesta figura representa un graf orientat.



Definició 23

- Un **digraf** (o **graf dirigit**) $G = (V,A)$ és un parell ordenat, on V és un conjunt finit i A és un subconjunt del producte cartesià $V \times V$.
- Un **arc** (o **aresta orientada**) és un parell ordenat $(u,v) \in V \times V$; en el cas $u = v$ tenim un bucle orientat. Els arcs (u,v) i (v,u) són diferents; l'**origen** de l'arc $a = (u,v)$ és el vèrtex u i el **final** o **extrem** és el vèrtex v.
- L'**ordre** del digraf és el nombre de vèrtexs i la **mida** és el nombre d'arcs.

Notació

$\{u,v\}$ indica que no hi ha ordre entre u i v, mentre que (u,v) distingeix el primer vèrtex, u, del segon, v. Farem servir $\{u,v\}$ per a les arestes dels grafs simples i (u,v) per als arcs dels digrafs.

Definició 24

Per a cada vèrtex $v \in V$ del digraf es defineix $g^{+}(v)$, **grau de sortida**, com el nombre d'arcs que tenen el vèrtex v com a origen; o, dit d'una altra manera, el cardinal del conjunt $\{(v,u) \mid (v,u) \in A\}$.

Anàlogament, el **grau d'entrada** $g^{-}(v)$ és el nombre d'arcs l'extrem dels quals és el vèrtex v o, de manera equivalent, el cardinal del conjunt $\{(u,v) \mid (u,v) \in A\}$.

Definició 25

Donat el digraf $G = (V,A)$, es defineix el **graf subjacent** (V,A') de manera que $\{u,v\} \in A'$ si, i només si, $(u,v) \in A$ o $(v,u) \in A$.

Es poden considerar també combinacions dels conceptes anteriors i híbrids en els quals, per exemple, no totes les arestes siguin orientades.

Exercicis

41. Indiqueu quin és el grau d'entrada i de sortida de cada vèrtex del graf de l'exemple 43.

42. Formuleu una versió per a digrafs del lema de les encaixades en termes dels graus d'entrada i de sortida dels vèrtexs.

Solucions

41. Graus d'entrada: 0, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 3.
Graus de sortida: 3, 2, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 0.

42. $\sum_{v \in V} g^{+}(v) + \sum_{v \in V} g^{-}(v) = 2|A|$ o, precisant més, $\sum_{v \in V} g^{+}(v) = \sum_{v \in V} g^{-}(v) = |A|$.

2.5. Representació i emmagatzematge

Tant la representació abstracta com la representació gràfica d'un graf en el pla no són apropiades per a descriure'l, si allò que es vol és manipular-lo mitjançant un programa; per a la descripció i l'emmagatzematge, doncs, s'han de proposar mètodes alternatius.

En primer lloc, sempre cal enumerar els vèrtexs; a continuació, es pot construir la matriu d'adjacències o bé la llista d'adjacències.

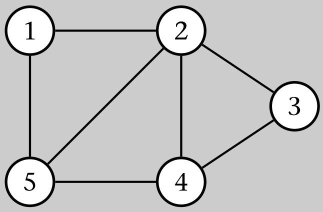
2.5.1. La matriu d'adjacències

Definició 26

Donat el graf $G = (V,A)$, es defineix la **matriu d'adjacències** d'un graf simple (relativa a una ordenació dels vèrtexs) com la matriu $B = (b_{ij})$ donada per $b_{ij} = 1$ si, i només si, els vèrtexs v_i i v_j són adjacents i $b_{ij} = 0$ en cas contrari.

Exemple 44

La matriu d'adjacències del graf



serà una matriu quadrada de 5×5:

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Observació

La matriu d'adjacències d'un graf simple:

- és simètrica,
- només conté 0 i 1,
- té la diagonal principal ocupada per 0.

En el cas de multigrafs, pseudografs i grafs orientats, s'ha de tenir en compte que:

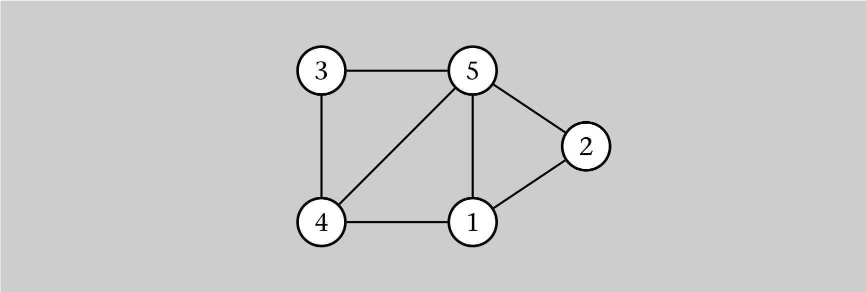
1) Els zeros de la diagonal podrien ser 1 si hi hagués llaços.

2) La matriu podria contenir valors més grans que u si hi hagués arestes múltiples.

3) La matriu podria no ser simètrica en el cas dels grafs orientats.

Exemple 45

Aquest exemple mostra que la matriu d'adjacències depèn d'una ordenació determinada dels vèrtexs del graf. Si modifiquem l'ordenació dels vèrtexs del graf de l'exemple anterior, obtenim una altra matriu d'adjacències:



$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es pot generalitzar el concepte de matriu d'adjacències per a multigrafs i pseudografs.

Exemple 46

La matriu d'adjacències per el graf de Königsberg és

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cada posició conté el nombre d'arestes que connecten els dos vèrtexs corresponents.

Un dels avantatges de la matriu d'adjacències és la simplicitat de l'estructura de dades per a l'emmagatzemament, ja que es pot emmagatzemar en una taula (*array*) bidimensional.

Per a un graf d'ordre n seria,

$$G : \underline{\textbf{taula}}\ [1\,..\,n, 1\,..\,n]\ \textit{enter}$$

De les característiques d'aquesta estructura d'emmagatzematge en podem deduir les propietats següents:

1) És una estructura molt fàcil de manipular i el temps necessari per a accedir a cada posició és constant.

2) L'espai necessari per a emmagatzemar un graf d'ordre n és proporcional a n^2. Com que el nombre d'arestes és, com a màxim, $\frac{1}{2}n(n-1)$, sempre hi haurà zeros a la matriu i tindrem espai d'emmagatzematge ocupat innecessàriament.

3) Si el graf no és dirigit, la matriu serà simètrica i encara tindrem més espai ocupat innecessàriament. En aquests casos es pot utilitzar una **matriu d'adjacències triangular** per a emmagatzemar el graf amb un estalvi del 50% en l'espai ocupat.

4) Per a fer un recorregut de totes les arestes del graf, ens caldrà fer $n(n-1)/2$ consultes, independentment de la mida m del graf. Igualment, per a visitar els vèrtexs adjacents a un vèrtex, ens caldrà fer $n-1$ consultes independentment del grau d'aquest vèrtex. Per tant, el temps que trigarem en fer recorreguts serà proporcional a n^2 i no a la mida m del graf.

Observació

L'inconvenient principal de la matriu d'adjacències és l'espai ocupat de forma innecessària.

Observació

L'avantatge principal de la matriu d'adjacències és la simplicitat estructural.

2.5.2. La llista d'adjacències

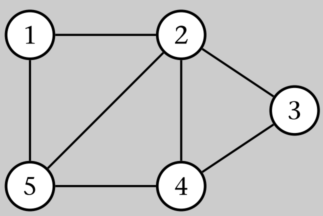
Si volem evitar el principal inconvenient de la matriu d'adjacències (l'espai ocupat de manera innecessària) es pot optar per emmagatzemar el graf en forma de llista d'adjacències.

Definició 27

Donat el graf $G = (V,A)$, es defineix la **llista d'adjacències** d'un graf simple com una llista de vèrtexs adjacents a un vèrtex donat.

Exemple 47

Per al graf,



la llista d'adjacències serà

1 : 2, 5
2 : 1, 3, 4, 5
3 : 2, 4
4 : 2, 3, 5
5 : 1, 2, 4

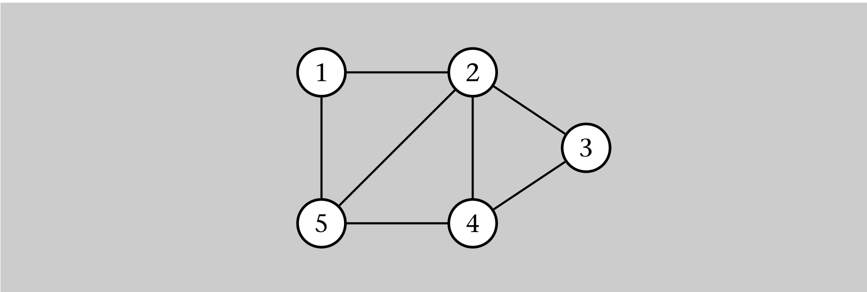
Igual que en la matriu d'adjacències, la representació depèn de l'ordenació determinada dels vèrtexs. A més, també es pot generalitzar aquesta estructura per a multigrafs, pseudografs i grafs orientats.

Per a emmagatzemar la llista d'adjacències necessitem una taula (*array*) de n punters, on l'element i-èsim apunta a una llista enllaçada de totes les arestes incidents al vèrtex i. Per a un graf d'ordre n seria

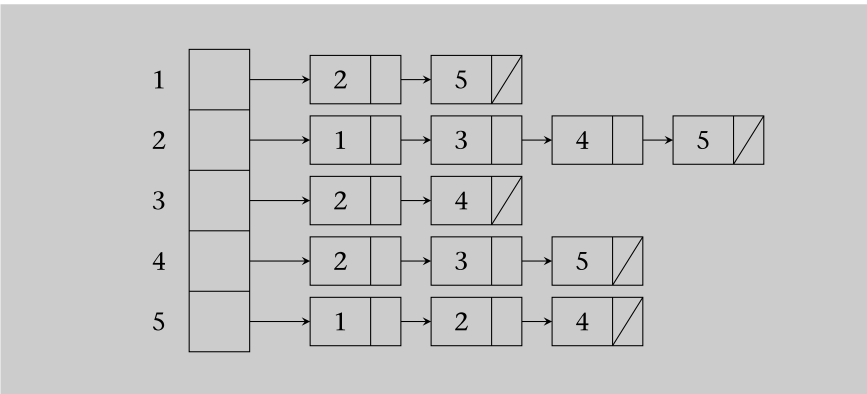
$$G : \underline{\textbf{taula}}\ [1\,..\,n]\ \underline{\textbf{punter}}\ \textit{llista de vèrtexs}$$

Exemple 48

Per al graf



l'estructura de dades serà



Si comparem aquesta estructura de dades amb la de la matriu d'adjacències observem els aspectes següents:

1) L'espai necessari per a emmagatzemar un graf de n vèrtexs i m arestes, usant una llista d'adjacències, és proporcional a $n+2m$ ($n+m$ si el graf és dirigit).

2) L'estructura és més difícil de manipular que la matriu d'adjacències. En particular, el temps necessari per a comprovar si dos vèrtexs són adjacents no és constant; és proporcional a g_i, si g_i és el grau del vèrtex i.

3) A l'hora de triar una estructura de dades o una altra, la tria dependrà de les mides del graf i dels algorismes que calgui utilitzar. Com a regla general, la matriu d'adjacències és adequada per a grafs *densos* (els que tenen moltes arestes), en els quals $m \sim n^2$. En canvi, la representació com a llista d'adjacències és adequada per a grafs poc densos, aquells en què $m << n^2$.

Observació

L'inconvenient principal de la llista d'adjacències és la dificultat de manipulació.

4) D'altra banda, recórrer les arestes del graf requereix $2m$ operacions, temps que pot ser inferior al de la representació per matriu d'adjacències si el graf té poques arestes. Igualment, és més eficient el recorregut dels vèrtexs adjacents a un vèrtex, atès que depèn del grau d'aquest vèrtex i no de n. Això vol dir que la representació per llista d'adjacències és més ràpida per a implementar recorreguts del graf.

Observació

L'avantatge principal de la llista d'adjacències és la minimització de l'espai d'emmagatzematge.

A la pràctica, encara que la llista d'adjacències és més difícil de manipular, té un millor comportament en la majoria dels algorismes.

Exercicis

43. Escriviu les matrius d'adjacències i les llistes d'adjacències (amb les ordenacions naturals dels vèrtexs) del graf nul N_5, del graf complet K_5, del graf bipartit complet $K_{2,3}$, del graf trajecte T_5, del graf cicle C_5, del graf estrella E_5 i del graf roda R_5.

44. Indiqueu com es pot calcular el grau d'un vèrtex a partir de la matriu d'adjacències i a partir de la llista d'adjacències. Indiqueu, també, el nombre d'operacions elementals que caldria fer.

45. Com pot detectar un programa els grafs nuls i complets a partir de la matriu d'adjacències?

46. Completeu la taula següent, indicant, per a cada entrada, quin tipus de representació seria més adequada (matriu d'adjacències o llista d'adjacències) i el nombre d'operacions elementals que caldria fer per a cada un dels problemes proposats.

Problema	Representació	Operacions
Comprovar si el vèrtex i és adjacent al vèrtex j		
Calcular el grau del vèrtex i		
Afegir una aresta entre el vèrtex i i el vèrtex j		
Comprovar si el graf és nul		
Eliminar l'aresta entre el vèrtex i i el vèrtex j		
Calcular la mida del graf		
Comprovar si el graf és regular		

Solucions

43. Les matrius d'adjacències i llistes d'adjacències per a aquests casos concrets són les següents:

Graf nul (N_5)
$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Graf complet (K_5)
$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

Graf bipartit complet ($K_{2,3}$)
$$\begin{bmatrix} 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Graf trajecte (T_5)
$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Graf estrella (E_5)
$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Graf roda (R_5)
$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&0&1\\ 1&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1\\ 1&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Graf cicle (C_5)
$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 1&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Graf nul (N_5)	Graf complet (K_5)	Graf bipartit complet ($K_{2,3}$)
1 :	1 : 2, 3, 4, 5	1 : 3, 4, 5
2 :	2 : 1, 3, 4, 5	2 : 3, 4, 5
3 :	3 : 1, 2, 4, 5	3 : 1, 2
4 :	4 : 1, 2, 3, 5	4 : 1, 2
5 :	5 : 1, 2, 3, 4	5 : 1, 2

Graf trajecte (T_5)	Graf estrella (E_5)	Graf roda (R_5)	Graf cicle (C_5)
1 : 2	1 : 2, 3, 4, 5	1 : 2, 3, 4, 5	1 : 2, 5
2 : 1, 3	2 : 1	2 : 1, 3, 5	2 : 1, 3
3 : 2, 4	3 : 1	3 : 1, 2, 4	3 : 2, 4
4 : 3, 5	4 : 1	4 : 1, 3, 5	4 : 3, 5
5 : 4	5 : 1	5 : 1, 2, 4	5 : 1, 4

44. Si suposem que calculem el grau del vèrtex etiquetat i:

Matriu d'adjacències: sumar els termes de la fila i-èsima. Caldrà fer n operacions elementals (n sumes).

Llista d'adjacències: comptar el nombre d'elements de la llista i-èsima. Accedir a la llista i-èssima necessita una operació i comptar el nombre d'elements depèn del grau g_i del vèrtex i-èsim. En total, $g_i + 1$ operacions elementals.

45. Ho pot detectar comprovant els elements de la matriu. Si tots són zeros, és el graf nul; si tots són 1, excepte la diagonal, aleshores el graf és complet.

46. En aquesta taula, n és l'ordre del graf, m, la mida i g_i indica el grau del vèrtex i.

Problema	Representació	Operacions
Comprovar si el vèrtex i és adjacent al vèrtex j	Matriu	1
Calcular el grau del vèrtex i	Llista	$g_i + 1$
Afegir una aresta entre el vèrtex i i el vèrtex j	Matriu	1
Comprovar si el graf és nul	Llista	n
Eliminar l'aresta entre el vèrtex i i el vèrtex j	Matriu	1
Calcular la mida del graf	Llista	$2m + n$
Comprovar si el graf és regular	Llista	$2m + n$

Exercicis d'autoavaluació

1. El Sr. Castells i la seva dona van invitar quatre parelles a una festa. Quan tots ja havien arribat, algunes de les persones de la sala es van saludar (es van donar la mà) amb altres persones del grup. Naturalment, cap persona va donar la mà al seu cònjuge ni cap persona va donar la mà dues vegades a una altra persona. Hi pot haver persones que no saludin ningú.

Al final, el Sr. Castells s'adonà que cap dels seus convidats (inclosa la seva dona) no han saludat el mateix nombre de persones.

Feu servir la teoria de grafs i interpreteu i responeu cada una de les preguntes següents:

a) És possible que el Sr. Castells també donés la mà a un nombre de persones diferent de totes les altres?

b) És possible que el Sr. Castells fes només un nombre senar d'encaixades de mans?

c) Hi ha alguna persona que no va donar la mà a ningú?

d) Quantes vegades va donar la mà el Sr. Castells? i la Sra. Castells?

2. Proveu que qualsevol graf $G = (V,A)$ amb un mínim de dos vèrtexs sempre té un mínim de dos vèrtexs amb el mateix grau. En altres paraules, que no hi ha cap graf d'ordre superior o igual a 2 amb tots els graus dels vèrtexs diferents.

3. Donat un graf $G = (V,A)$, si k_i és el nombre de vèrtexs de grau i, indiqueu quines relacions hi ha entre: $|A|$, $|V|$, $\sum_{i\geq 0} ik_i$, $\sum_{i\geq 0} k_i$.

4. Sigui $G = (V,A)$ un graf d'ordre $n \geq 10$ en què tots els vèrtexs són de grau estrictament més gran que 5. Demostreu que el nombre d'arestes del graf és més gran o igual que 30.

5. Sigui $G = (V,A)$ un graf de n vèrtexs, t dels quals són de grau k i la resta, de grau $k+1$. Demostreu que $t = (k+1)n - 2m$, on m és el nombre d'arestes.

6. Si $G = (V,A)$ és un graf bipartit d'ordre n, quin serà el nombre màxim d'arestes d'aquest graf?

7. Demostreu que no hi pot haver cap graf amb vèrtexs de graus 3, 3, 3, 1.

8. Estudieu si hi poden haver grafs amb les seqüències de graus següents:

a) 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4

b) 6, 3, 3, 2, 2, 2

c) 4, 4, 3, 2, 1

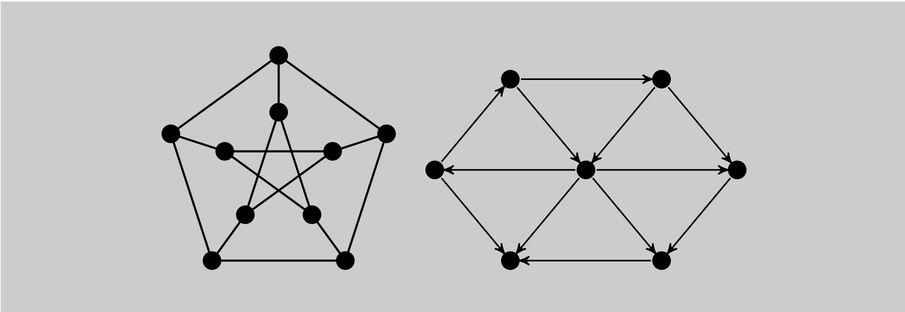
9. Per a quins valors de d, enter no negatiu, la seqüència següent és gràfica?

$$d, d+1, d+2, \ldots, d+n-1$$

10. Si $G = (V,A)$ és un graf d'ordre $n = 6$, demostreu que G o el seu complementari G^c conté algun triangle (3-cicle).

Aquest resultat és bastant sorprenent si l'interpretem en termes de reunions i relacions d'amistat o coneixença entre assistents a una reunió: en una reunió de sis persones, o bé n'hi ha tres que es coneixen dos a dos, o bé n'hi ha tres que no es coneixen dos a dos.

11. Doneu la representació en matriu i llista d'adjacències dels dos grafs següents.

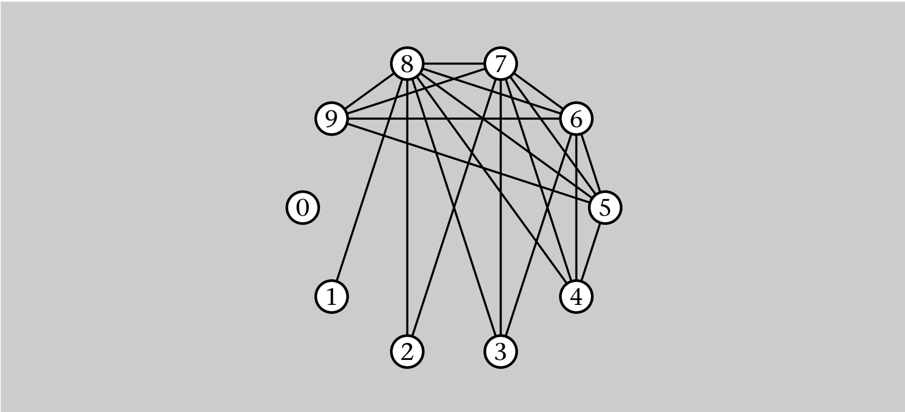


Doneu, també, l'espai ocupat en cada cas.

12. Depenent de la mida m d'un graf d'ordre n, pot ser més eficient utilitzar la representació en matriu d'adjacències que la representació en llista d'adjacències. Calculeu, en funció de n i m, quan és més eficient utilitzar un tipus de representació o l'altre.

Solucionari

1. A partir de la informació del problema es pot construir el graf següent.



La resposta es conseqüència immediata de les propietats del graf.

2. Sigui $G = (V,A)$ un graf d'ordre n ($n \geq 2$). Com que per a cada vèrtex $v \in V$ és $0 \leq g(v) \leq n-1$, només hi pot haver els graus $0,1,\ldots,n-1$. Si tots fossin diferents, aquests haurien de ser els graus corresponents als vèrtexs del graf. Però si un vèrtex té grau $n-1$ és impossible que un altre tingui grau 0.

Una observació interessant és que aquest resultat es pot interpretar en termes de reunions i salutacions entre assistents a una reunió de la manera següent: en una reunió on es produeixen salutacions hi ha un mínim de dues persones que han fet el mateix nombre de salutacions. Això és fàcil de veure amb el model següent de la reunió en termes de teoria de grafs: els vèrtexs representen els assistents a la reunió i dos vèrtexs són adjacents si, i només si, les persones corresponents se saluden. El grau de cada vèrtex és el nombre de salutacions de la persona corresponent. Només cal aplicar el resultat que hem demostrat.

3. Les relacions són: $|V| = \sum_{i\geq 0} k_i$ i $2|A| = \sum_{i\geq 0} ik_i$.

4. Per hipòtesi, tenim que $g(v) \geq 6$, $\forall v \in V$. Ara podem aplicar el lema de les encaixades:

$$2|A| = \sum_{v\in V} g(v) \geq \sum_{v\in V} 6 = 6|V| \geq 6 \times 10 = 60.$$

Immediatament es deriva el resultat que volíem demostrar.

5. Podem escriure $V = V_k \cup V_{k+1}$, on V_k és el conjunt de vèrtexs de grau k i V_{k+1} és el conjunt de vèrtexs de grau $k+1$. Aplicant el lema de les encaixades obtenim la relació $2m = kt + (k+1)(n-t)$. De la relació obtinguda se'n deriva immediatament la relació buscada.

6. Si x és el nombre de vèrtexs del conjunt V_1, aleshores $n-x$ serà el nombre de vèrtexs de V_2. El nombre total d'arestes serà $x(n-x)$. Per tant, cal maximitzar la funció $f(x) = x(n-x)$. La solució serà $\lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor$.

7. Ho demostrarem per dos mètodes diferents,

Mètode A. Si existeix un graf G amb la seqüència de graus 3, 3, 3, 1, també hauria d'existir el graf G^c amb la seqüència de graus 0, 0, 0, 2, òbviament impossible.

Mètode B. Aplicant l'algorisme de Havel-Hakimi:

$$\begin{array}{r} 3, 3, 3, 1 \\ 2, 2, 0 \\ 1, -1 \end{array}$$

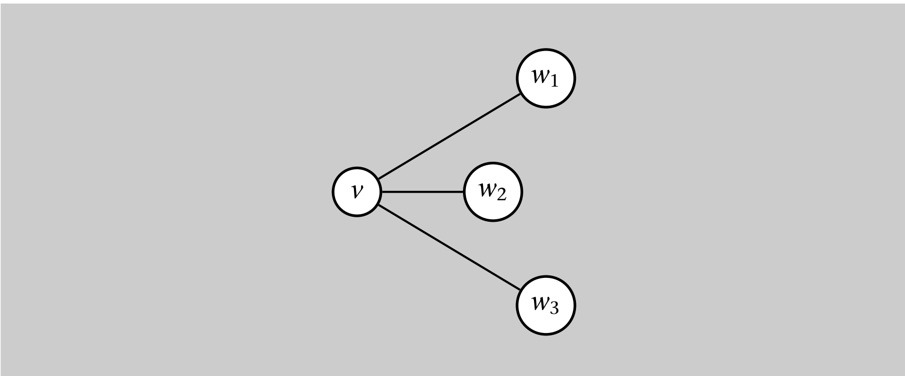
8. **a)** No, perquè contradiu la proposició 4, conseqüència del lema de les encaixades.

b) No, perquè no compleix la relació $0 \leq g(v) \leq n-1$.

c) No, aplicant l'algorisme de Havel-Hakimi.

9. L'única possibilitat és que $d = 0$ i la seqüència llavors quedaria $0,1,2,\ldots,n-1$. Però, per la definició de grau, no hi pot haver un vèrtex de grau 0 i un altre de grau $n-1$.

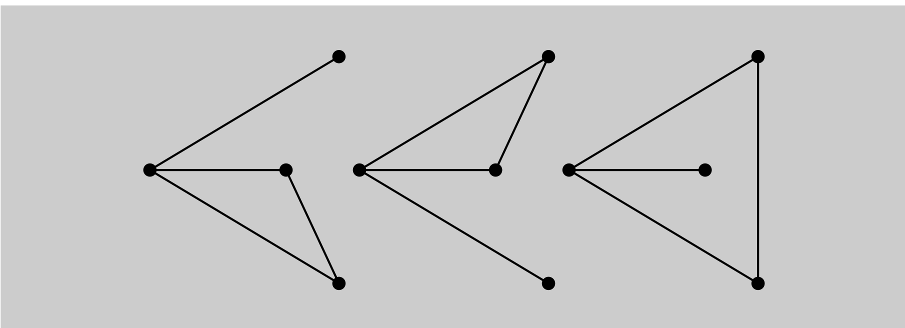
10. Sigui $v \in V$. Vegem que podem suposar que v és adjacent a tres vèrtexs de G com a mínim. En efecte, si això no fos així, és a dir, si no hi hagués tres vèrtexs adjacents a v, n'hi hauria com a màxim dos d'adjacents a v i, per tant, en quedaria un mínim de tres no adjacents a v a G, els quals serien adjacents a v en el graf complementari G^c. Això vol dir que, fixat $v \in G$, hi ha tres vèrtexs adjacents a v a G, o bé hi ha tres vèrtexs adjacents a v a G^c.



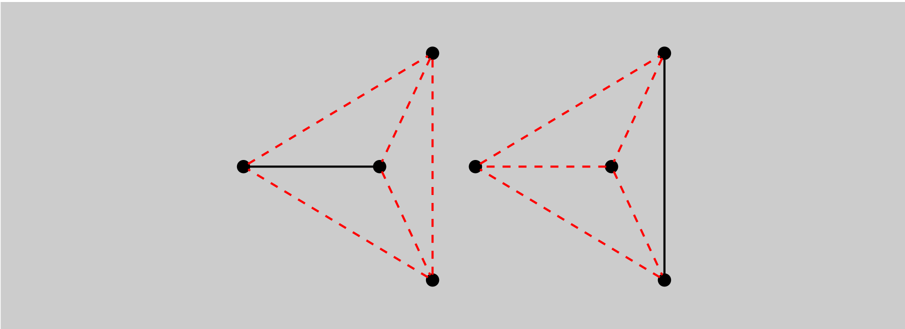
En qualsevol dels casos se seguirien raonaments similars; per això, no representa pèrdua de generalitat suposar que v és adjacent a tres vèrtexs a G com a mínim.

Siguin w_1,w_2,w_3 vèrtexs adjacents a v al graf G.

Si algun dels w_i és adjacent a algun altre dels w_j, aleshores ja tenim el 3-cicle o triangle, l'existència del qual s'havia de demostrar, com es pot veure en els esquemes que segueixen:



En cas contrari, tindrem la situació de l'esquema de més avall (subfigura esquerra), on les arestes inexistents s'han indicat amb traç discontinu; aleshores en el graf complementari G^c tindrem que els vèrtexs w_1,w_2,w_3 són adjacents dos a dos, cosa que demostra l'existència d'un 3-cicle, com es veu a la subfigura dreta de l'esquema següent, on s'han indicat amb línia discontínua les arestes inexistents.



11. El primer graf és el graf de Petersen que té ordre 10 i mida 15. En la representació per matriu d'adjacències ocuparia $10^2 = 100$ unitats de memòria. Com a llista d'adjacències ocuparia $10 + 2 \cdot 15 = 40$ unitats de memòria.

El segon graf és un graf dirigit d'ordre 7 i mida 12. En la representació per matriu d'adjacències ocuparia $7^2 = 49$ unitats de memòria. Com a llista d'adjacències ocuparia $7 + 12 = 19$ unitats de memòria.

12. La matriu d'adjacències necessita n^2 unitats de memòria. La llista d'adjacències $n+2m$ (si no tenim en compte l'espai necessari per a emmagatzemar els enllaços). Per tant, serà millor fer servir la llista si $n+2m < n^2$ o $m < \frac{n^2-n}{2}$.

Observem que $\frac{n^2-n}{2}$ és el nombre d'arestes del graf complet de n vèrtexs. Això demostra que la llista d'adjacències sempre ocupa menys memòria que la matriu d'adjacències, excepte quan el graf és complet, cas en què tenen la mateixa ocupació de memòria.

Bibliografia

Biggs, N. L. (1994). *Matemática Discreta*. (1a. edició, traducció de M. Noy). Barcelona: Ediciones Vicens Vives.

Gimbert, J.; Moreno, R.; Ribó, J. M.; Valls, M. (1998). *Apropament a la teoria de grafs i als seus algorismes*. Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida.