Ejercicio 7. Hallar el vector gradiente de las funciones en los puntos indicados:

Apartado a)

$f := (x, y, z) \rightarrow \ln(z + \sin(y^2 - x))$

$$f := (x, y, z) \mapsto \ln(z + \sin(y^2 - x)) \quad \textbf{(1)}$$

$f(x, y, z)$

$$\ln(z - \sin(-y^2 + x)) \quad \textbf{(2)}$$

Derivadas parciales:

$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$

$$-\frac{\cos(-y^2 + x)}{z - \sin(-y^2 + x)} \quad \textbf{(3)}$$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)$

$$\frac{2\, y \cos(-y^2 + x)}{z - \sin(-y^2 + x)} \quad \textbf{(4)}$$

$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$

$$\frac{1}{z - \sin(-y^2 + x)} \quad \textbf{(5)}$$

Substituyendo x=1, y=-1 y z=1 en las expresiones de las derivadas parciales se obtiene el vector gradiente.
Comprobar la solución en la sección 8.4

Apartado b)

$f := (x, y, z) \rightarrow \exp(3 \cdot x + y) \cdot \sin(5 \cdot z)$

$$f := (x, y, z) \mapsto e^{3\,x + y} \sin(5\, z) \quad \textbf{(6)}$$

$f(x, y, z)$

$$e^{3\,x + y} \sin(5\, z) \quad \textbf{(7)}$$

Derivadas parciales:

$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$

$$3\, e^{3\,x + y} \sin(5\, z) \quad \textbf{(8)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)$$

$$e^{3x+y} \sin(5z) \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$$

$$5\, e^{3x+y} \cos(5z) \tag{10}$$

De nuevo substituyendo x=y=0 y z=π/6 se obtiene el vector gradiente en este punto. Comprobar la solución en la sección 8.4

Apartado c) El tema de integración se ha suprimido del temario de este cuatrimestre.

##

Ejercicio 8.

En este ejercicio se pide calcular la derivada de la función

$$z := (x, y) \rightarrow x^2 - x \cdot y + y^2$$

$$z := (x, y) \mapsto x^2 - y\,x + y^2 \tag{11}$$

$$z(x, y)$$

$$x^2 - y\,x + y^2 \tag{12}$$

en el punto (1,1) y en la dirección que forma un ángulo α con el eje x.

Esto es lo mismo que calcular la derivada direccional en dicho punto y en la dirección indicada, que podemos representar mediante el vector unitario
u = (cos(α) , sin(α))

Para calcular esta derivada direccional tenemos que hacer el producto escalar del vector gradiente de la función en (1,1) por dicho vector unitario. Para obtener el vector gradiente hacemos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} z(x, y)$$

$$2\,x - y \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} z(x, y)$$

$$-x + 2\,y \tag{14}$$

Substituyendo x=y=1 en estas derivadas se obtiene que el vector gradiente es: (1,1).

Por tanto la derivada direccional será:

$(1,1) \cdot (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$

Apartado a)
La derivada alcanza su valor máximo en la dirección del vector gradiente. Su valor es la norma de dicho vector, es decir $\sqrt{2}$.

Apartado b)
La derivada alcanza su valor mínimo en la dirección opuesta a la del vector gradiente, o sea, en la dirección del vector (-1,-1). Su valor es la norma del vector gradiente multiplicada por -1, es decir, $-\sqrt{2}$.

Apartado c)
La derivada es cero en la dirección perpendicular al vector gradiente, esto es en la dirección (-1,1) o (1,-1).

##

Ejercicio 9

Este es el ejercicio número 4 de un antiguo examen final, ver la fecha en la sección 8.4.

Se puede encontrar dicho examen resuelto en el siguiente enlace:
https://mat-web.upc.edu/fib/matematiques2/
Buscar en el apartado de exámenes, donde también hay diversos exámenes parciales y finales de cuatrimestres recientes.

###

Ejercicio 12. La distribución de temperatura en un plano viene dada por la siguiente función

$f := (x, y) \rightarrow 10 + 6 \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) + 3 \cdot \cos(2 \cdot x) + 4 \cdot \cos(3 \cdot y)$

$$f := (x, y) \mapsto 10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 3 \cos(2\, x) + 4 \cos(3\, y) \quad \textbf{(15)}$$

$f(x, y)$

$$10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 3 \cos(2\, x) + 4 \cos(3\, y) \quad \textbf{(16)}$$

La dirección de incremento mas grande de la temperatura en el punto $(\pi/3, \pi/3)$ corresponde como es sabido a la dirección del vector gradiente en dicho punto. Igualmente, la dirección de mayor decrecimiento de temperatura en dicho punto será la opuesta a la del vector gradiente. Por tanto lo que hay que hacer es calcular el vector gradiente de la función en el punto.

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$-6 \sin(x) \cos(y) - 6 \sin(2\, x) \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$-6 \cos(x) \sin(y) - 12 \sin(3\, y) \tag{18}$$

Substituyendo en estas expresiones x=y= $\frac{\pi}{3}$

obtenemos el vector gradiente que indica la dirección de máximo incremento.
Multiplicando el vector por -1 obtenemos la dirección opuesta que es la de máximo decrecimiento.
Comprobar los resultados en la sección 8.4

/

Taller M2: FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

2019-20, M2, FIB

TALLER 8.2

Problema 10

10 Calculeu la recta normal i el pla tangent a:

a) la superfície $z = \dfrac{2xy}{x^2+y}$ en el punt $(2,-2,-4)$.

b) la superfície $z = \sin x + 2\cos y$ en el punt $(\pi/2, 0, 3)$.

Teoria

Pla tangent a la superfície F(x,y,z)=0 en el punt (a,b,c)

$\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a,\ y-b,\ z-c)=0$

(pla que passa pel punt (a,b,c) i té vector normal el gradient)

Recta normal a la superfície F(x,y,z)=0 en el punt (a,b,c)

$(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda\ \nabla F(a,b,c)$

(recta que passa pel punt (a,b,c) i té vector director el gradient)

Apartat a)

Escrivim la superfície igualant a zero: $\dfrac{2\,x\,y}{x^2+y} - z = 0$

Funció

$F := (x,y,z) \rightarrow \dfrac{2\,x\,y}{x^2+y} - z$

$$F := (x,y,z) \mapsto \frac{2\,y\,x}{x^2+y} - z \tag{1.1.2.1}$$

Comprovem que el punt és de la superfície

$F(2,-2,-4)$

$$0 \qquad (1.1.2.2)$$

Càlcul del vector gradient

- Derivada parcial respecte x

$diff(F(x, y, z), x)$

$$\frac{2y}{x^2+y} - \frac{4x^2y}{(x^2+y)^2} \qquad (1.1.2.3)$$

$factor(\%)$

$$-\frac{2y(x^2-y)}{(x^2+y)^2} \qquad (1.1.2.4)$$

Substituïm les coordenades del punt

$subs\left(\{x = 2, y = -2, z = -4\}, -\frac{2y(x^2-y)}{(x^2+y)^2}\right)$

$$6 \qquad (1.1.2.5)$$

- Derivada parcial respecte y

$diff(F(x, y, z), y)$

$$\frac{2x}{x^2+y} - \frac{2xy}{(x^2+y)^2} \qquad (1.1.2.6)$$

$factor(\%)$

$$\frac{2x^3}{(x^2+y)^2} \qquad (1.1.2.7)$$

Substituïm les coordenades del punt

$subs(\{x = 2, y = -2, z = -4\}, \%)$

$$4 \qquad (1.1.2.8)$$

- Derivada parcial respecte z

$diff(F(x, y, z), z)$ No cal substituir res perquè és constant

$\nabla F(2, -2, -4) = (6, 4, -1)$

Equació del pla tangent

$(6, 4, -1) \cdot (x-2, y+2, z+4) = 0$

$6(x-2) + 4(y+2) - (z+4) = 0$

$6x + 4y - z = 8$

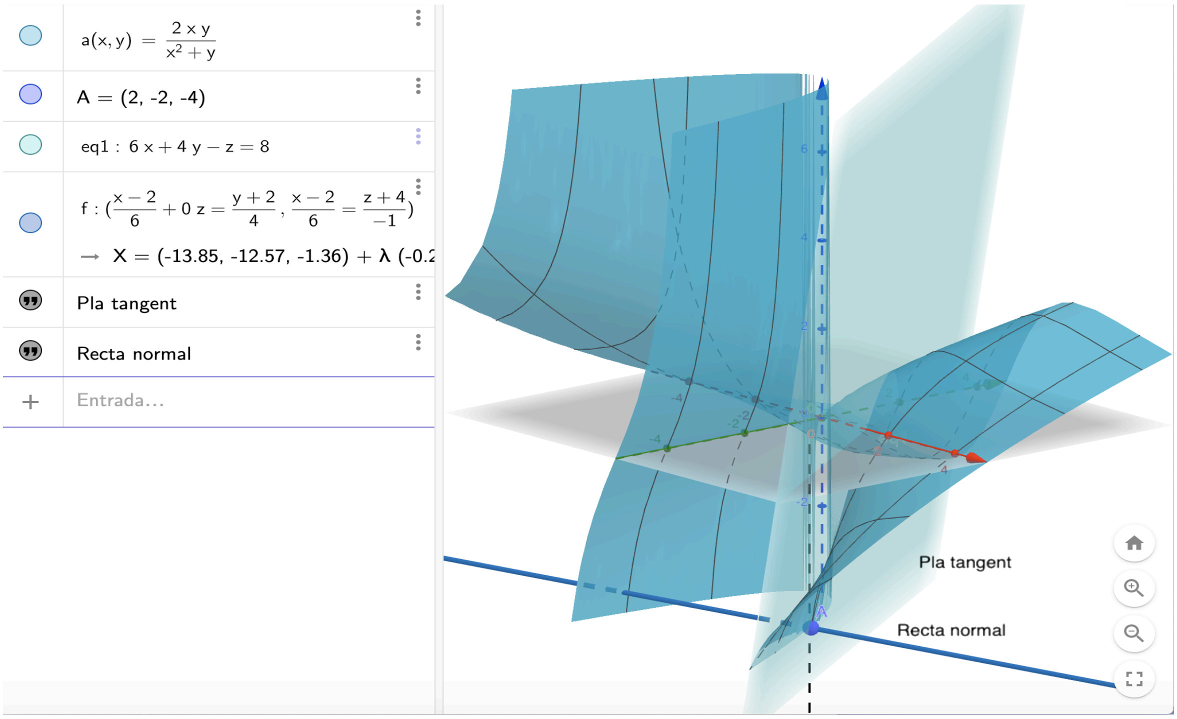
Equació de la recta normal

vectorial

$(x, y, z) = (2, -2, -4) + \lambda(6, 4, -1)$

contínua

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+4}{-1}$$



Apartat b)

Escrivim la superfície igualant a zero: $\sin(x) + 2\cos(y) - z = 0$

Funció

$F := (x, y, z) \rightarrow \sin(x) + 2\cos(y) - z$

$$F := (x, y, z) \mapsto \sin(x) + 2\cos(y) - z \tag{1.1.3.1}$$

Comprovem que el punt és de la superfície

$F\left(\frac{\text{Pi}}{2}, 0, 3\right)$

$$0 \tag{1.1.3.2}$$

Càlcul del vector gradient

- Derivada parcial respecte x

$diff(F(x,y,z),x)$

$$\cos(x) \tag{1.1.3.3}$$

Substituïm les coordenades del punt

$subs\left(\left\{x=\frac{\text{Pi}}{2}, y=0, z=3\right\}, \cos(x)\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{1.1.3.4}$$

$evalf(\%)$

$$0. \tag{1.1.3.5}$$

- Derivada parcial respecte y

$diff(F(x,y,z),y)$

$$-2\sin(y) \tag{1.1.3.6}$$

Substituïm les coordenades del punt

$subs\left(\left\{x=\frac{\text{Pi}}{2}, y=0, z=3\right\}, \%\right)$

$$-2\sin(0) \tag{1.1.3.7}$$

$evalf(\%)$

$$0. \tag{1.1.3.8}$$

- Derivada parcial respecte z

$diff(F(x,y,z),z)$

$$-1 \tag{1.1.3.9}$$

No cal substituir res perquè és constant

$\nabla F\left(\frac{\pi}{2}, 0, 3\right) = (0, 0, -1)$

Equació del pla tangent

$(0,0,-1)\cdot\left(x-\frac{\text{Pi}}{2}, y, z-3\right)=0$

$-(z-3)=0$

$z=3$

Equació de la recta normal

vectorial

$(x,y,z) = \left(\frac{\text{Pi}}{2}, 0, 3\right) + \lambda(0,0,-1)$

cartesianes

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$y = 0$$