9.2 Extremos relativos.

Definición 1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad A$ abierto, $\quad x^0 \in A$. Se dice que f tiene *máximo relativo* en $x^0 \iff \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in B_\delta(x^0) \implies f(x^0) \geq f(x)$,
mínimo relativo en $x^0 \iff \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in B_\delta(x^0) \implies f(x^0) \leq f(x)$ y
extremo relativo en $x^0 \iff f$ tiene máximo o mínimo relativo en x^0.

Definición 2. x^0 se llama *punto crítico* de $f \iff f'_{x_i}(x^0) = 0$ ó $\nexists\, f'_{x_i}(x^0)$, $\forall\, i = 1..n$.

Definición 3. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\exists\, f''_{xx}$, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy} en A. La matríz

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \text{ se llama } \textit{hessiana.}$$

Nota: 1) Si $f \in \mathcal{C}^2_{x,y}(A) \implies f''_{xy} = f''_{yx} \implies \Delta = det(H) = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$;
2) otra designación, $\Delta_2 = \det H$, $\Delta_1 = f''_{xx}$.

Plan para calcular extremos relativos (n=2):

1) Condición necesaria $\iff$ Candidatos para extremos relativos $\iff$
$\iff$ Puntos críticos $\iff f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ ó $\nexists\, f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$.

2) Condición suficiente $\iff$ Estudio de la matriz hessiana $\iff$
$\iff$ Los signos de $\Delta(x_0, y_0)$, $f''xx(x_0, y_0) \iff$ Los signos de $\Delta_2(x_0, y_0)$, $\Delta_1(x_0, y_0)$.

3) Estudio local en base a la Definición 1 si $\Delta(x_0, y_0) = \Delta_2(x_0, y_0) = 0$.
(f "es un cuadrado perfecto"; restricciones de f sobre las rectas; "por zonas").

Condición necesaria de extremo relativo

Proposición 1.

$$\left.\begin{array}{l} f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \,\text{abierto},\ x^0 \in A \\ \exists\,\text{extremo relativo en}\, x^0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f'_{x_i}(x^0) = 0 \ \text{ó}\ \nexists\, f'_{x_i}(x^0),\ \forall\, i = 1..n\ (x^0 \text{ es un punto crítico}).$$

Nota: 1) Proposición 1 es igual para n=1;
2) todos extremos relativos de f se alcanzan en los puntos críticos;
3) Proposición 1 es sólo la condición necesaria de extremos relativos ($\Rightarrow$, $\not\Leftarrow$).

Condición suficiente de extremo relativo (n=2)

Proposición 2.

$$\left.\begin{array}{l} f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \in \mathcal{C}^2_{x,y}(A),\ (x_0, y_0) \in A \\ f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \text{si}\,\Delta(x_0, y_0) > 0,\ f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 & \Longrightarrow \exists \text{ máximo relativo;} \\ \text{si}\,\Delta(x_0, y_0) > 0,\ f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 & \Longrightarrow \exists \text{ mínimo relativo;} \\ \text{si}\,\Delta(x_0, y_0) < 0 & \Longrightarrow \nexists \text{ extremo en } (x_0, y_0). \end{array}$$

Nota: 1) si $\Delta(x_0, y_0) < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ se llama *punto silla*;
2) si $\Delta(x_0, y_0) = 0 \Longrightarrow$ el criterio falla (es necesario hacer un estudio local de (x_0, y_0) en base a la Definición 1).

Proposición 2.

$$\left.\begin{array}{l} f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \in \mathcal{C}^2_{x,y}(A),\ (x_0, y_0) \in A \\ f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \text{si}\,\Delta_2(x_0, y_0) > 0,\ \Delta_1(x_0, y_0) < 0 & \Longrightarrow \exists \text{ máximo relativo;} \\ \text{si}\,\Delta_2(x_0, y_0) > 0,\ \Delta_1(x_0, y_0) > 0 & \Longrightarrow \exists \text{ mínimo relativo;} \\ \text{si}\,\Delta_2(x_0, y_0) < 0 & \Longrightarrow \nexists \text{ extremo en } (x_0, y_0). \end{array}$$

Nota: 1) si $\Delta_2(x_0, y_0) < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ se llama *punto silla*;
2) si $\Delta_2(x_0, y_0) = 0 \Longrightarrow$ el criterio falla (es necesario hacer un estudio local de (x_0, y_0) en base a la Definición 1).