TEMA 9. FÓRMULA DE TAYLOR Y EXTREMOS RELATIVOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

9.1. Derivadas parciales de orden superior. Matriz Hessiana. Polinomio de Taylor. Fórmula de Lagrange del resto

Derivadas parciales de orden superior

Definiciones

Sea $f : R^n \rightarrow R$ una función ($n \geq 2$),
sea $i \in \{1, 2, ..., n\}$

La **función** i**-ésima derivada parcial o derivada parcial respecto a la** i**-ésima variable de la función** f es la función:

$$D_i : R^n \rightarrow R,\ D_i(a_1, a_2,\ ...,\ a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2,\ ...,\ a_n)$$

Estas funciones pueden admitir, a su vez, derivadas parciales que se llaman **derivadas parciales segundas (o de segundo orden) de** f :

$$D_{ij} f(a_1, a_2,\ ...,\ a_n) = D_j(D_i f)(a_1, a_2,\ ...,\ a_n),\ 1 \leq i,j \leq n$$

o:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a_1, a_2,\ ...,\ a_n) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a_1, a_2,\ ...,\ a_n)$$

Notación: cuando $i = j$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}}$

De manera análoga, se definen las derivadas parciales terceras, cuartas, etc.

Una función real de n variables reales tiene n derivadas parciales de primer orden, n^2 derivadas parciales de segundo orden, n^3 derivadas parciales de tercer orden,... n^k derivadas parciales de orden k.

Ejemplo

Sea $f : R^3 \to R$ definida por $f(x,y,z) = x^2y\ cos\ xz + xe^{yz} - 7z^3$. En el tema anterior calculamos sus derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\ cos(xz) - x^2yz\ sin(xz) + e^{yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\ cos(xz) + xze^{yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \ -x^3y\ sin(xz) + xye^{yz} - 21z^2$$

Cada una de estas derivadas parciales de primer orden tiene a su vez tres derivadas parciales, que serán las nueve derivadas parciales de segundo orden de f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y\ cos(xz) - 2xyz\ sin(xz) - 2xyz\ sin(xz) - x^2y\ z\ cos(xz) =$$

$$= 2y\ cos\ (xz) - 4xyz\ sin(xz) - x^2y\ z\ cos(xz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = 2x\ cos(xz) - x^2z\ sin(xz) + ze^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial x}) =- 2x^2y\ sin(xz) - x^2y\ sin(xz) - x^3yz\ cos(xz) + ye^{yz} =$$

$$=- x^2y\ sin(xz) - x^3yz\ cos(xz) + ye^{yz}$$

$$\ldots \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z},\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Definición

Sea $f : R^n \to R$ una función ($n \geq 2$),

sea $k \geq 1$

Sea $A \subseteq Dom f$

La función f es **de clase** C^k **en** A cuando f tiene derivadas parciales hasta el orden k y estas derivadas parciales son continuas en A :

$f \in C^k(A)$

La función f es **de clase** C^∞ **en** A cuando f tiene derivadas parciales de todos los órdenes y estas derivadas parciales son continuas en

$A : f \in C^\infty(A)$

Teorema de Schwarz

Sea $f : R^n \to R$ una función ($n \geq 2$),

Sea $A \subseteq Dom\, f$

Si $f \in C^k(A) \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a) \quad \forall a \in A \quad \forall i,j \in \{1, 2, ...n\}$$

Matriz Hessiana

Sea $f : R^n \to R$ una función ($n \geq 2$),

sea $a = (a_1, a_2, \ ..., \ a_n) \in int\,(Dom\, f)$

Si f admite todas las derivadas parciales de segundo orden en a, la matriz Hessiana de f en a ($Hf(a)$) es la matriz $n \times n$ cuyos elementos son las derivadas parciales de segundo orden de de f en a.

La primera fila está formada por las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ puestas en orden y en el punto $a.$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(a) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \quad ... \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a)$$

La segunda fila está formada por las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ puestas en orden y en el punto $a.$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(a) \quad ... \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a)$$

…..

La n-ésima fila está formada por las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ puestas en orden y en el punto $a.$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \quad ... \quad \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(a)$$

Si f es de clase C^2 en un entorno del punto a entonces la matriz $Hf(a)$ es una matriz simétrica (por el teorema de Schwarz).

Polinomio de Taylor de una función de dos variables y fórmula de Lagrange del resto

Sea $f : R^2 \to R,\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ una función de dos variables.
Sea $(a,b) \in int\,(Dom\, f)$

1. Sea f de clase C^2 en el punto (a,b).
El **polinomio de Taylor de grado** 2 **de** f **en** (a,b) es:

$$P_{2,f,(a,b)}(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot(x-a)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot(y-b)^2\right)$$
$$= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c,d)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(c,d)\cdot(y-b)\right)^{"2"}$$

La **forma de Lagrange del resto del polinomio de Taylor de grado** 2 **de** f **en** (a,b) es:

$$R_{2,f,(a,b)}(x,y) = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c,d)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(c,d)\cdot(y-b)\right)^{"3"}$$

siendo (c,d) un punto del segmento que une (x,y) con (a,b)

2. Sea f de clase C^k en el punto (a,b).
El **polinomio de Taylor de grado** k **de** f **en** (a,b) es:

$$P_{k,f,(a,b)}(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)\right)^{"2"} +$$
$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)\right)^{"3"} +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)\right)^{"k"}$$

La **forma de Lagrange del resto del polinomio de Taylor de grado** k **de** f **en** (a,b) es:

$$R_{k,f,(a,b)}(x,y) = \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c,d)\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(c,d)\cdot(y-b)\right)^{"k+1"}$$

siendo (c,d) un punto del segmento que une (x,y) con (a,b)

Polinomio de Taylor de una función de n variables y fórmula de Lagrange del resto

Sea $f : R^n \to R$ una función ($n \geq 2$),
sea $a = (a_1, a_2,\ ...,\ a_n) \in A \subseteq int\,(Dom\,f)$,
sea $k \geq 0$ y sea $f \in C^k(A)$
El **polinomio de Taylor de grado** k **de** f **en** a es:

$$P_{k,f,(a_1,a_2,\ ...,\ a_n)}(x_1,x_2,...,x_n) =$$
$$f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot(x_2-a_2) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot(x_n-a_n)$$
$$+\ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot(x_2-a_2) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot(x_n-a_n)\right)^{"2"} +$$
$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot(x_2-a_2) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot(x_n-a_n)\right)^{"3"} +$$
$$+ ... + \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot(x_2-a_2) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot(x_n-a_n)\right)^{"k"}$$

La **forma de Lagrange del resto del polinomio de Taylor de grado** k **de** f **en** a es:

$$R_{k,f,(a_1,a_2,\ ...,\ a_n)}(x_1,x_2,...,x_n) =$$
$$\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)\cdot(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(c)\cdot(x_2-a_2) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(c)\cdot(x_n-a_n)\right)^{"k+1"}$$

siendo $c = (c_1, c_2,\ ...,\ c_n)$ un punto del segmento que une $(x_1,x_2,...,x_n)$ con $(a_1,a_2,\ ...,\ a_n)$

9.2. Puntos críticos. Condición necesaria para la existencia de un extremo relativo. Condición suficiente para la existencia de un extremo relativo. Cálculo de extremos.

Definiciones

Sea $f : R^n \to R$ una función,

sea $a = (a_1, a_2, \ ..., \ a_n) \in int\,(Dom\, f)$,

Se dice que f tiene un **máximo relativo o local** en a cuando

$\exists\, r > 0 \quad \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in B_r(a_1, a_2, \ ..., \ a_n) \ f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f(a_1, a_2, \ ..., \ a_n).$

Se dice que f tiene un **mínimo relativo o local** en a cuando

$\exists\, r > 0 \quad \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in B_r(a_1, a_2, \ ..., \ a_n) \ f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f(a_1, a_2, \ ..., \ a_n).$

Sea $f : R^n \to R$ una función,

sea $a = (a_1, a_2, \ ..., \ a_n) \in int\,(Dom\, f)$,

sea f de clase C^1 en un entorno del punto a

Se dice que f tiene un **punto crítico** en a cuando

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = (0, 0, ..., 0)$$

Condición necesaria para la existencia de un extremo relativo

Proposición

Sea $f : R^n \to R$ una función,

sea $a = (a_1, a_2, \ ..., \ a_n) \in int\,(Dom\, f)$,

sea f de clase C^2 en un entorno del punto a,

f tiene un extremo relativo en el punto $a \Rightarrow$ f tiene un punto crítico en el punto a.

Pero esta condición no es suficiente:

Definición

Sea $f: R^n \to R$ una función,
sea $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in int\,(Dom\, f)$,

Se dice que f tiene un **punto de silla** en el punto a cuando f tiene un punto crítico en el punto a pero f no tiene un extremo relativo en el punto a.

Condición suficiente para la existencia de un extremo relativo funciones de dos variables

Proposición

Sea $f: R^2 \to R$ una función,
sea $(a, b) \in int\,(Dom\, f)$,
sea f de clase C^2 en un entorno del punto (a, b),
supongamos que $\nabla f(a,b) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)) = (0,0)$
Sea $Hf(a)$ la matriz Hessiana de f en el punto (a, b),

Entonces:

1. Si $det\,(Hf(a)) < 0$, f tiene un punto de silla en el punto (a, b).
2. Si $det\,(Hf(a)) > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, f tiene un mínimo relativo en el punto (a, b).
3. Si $det\,(Hf(a)) > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, f tiene un máximo relativo en el punto (a, b).
4. Si $det\,(Hf(a)) = 0$, para clasificar el punto crítico se ha de hacer un estudio local de f entorno al punto (a, b).