Taller M2: EXTREMS RELATIUS

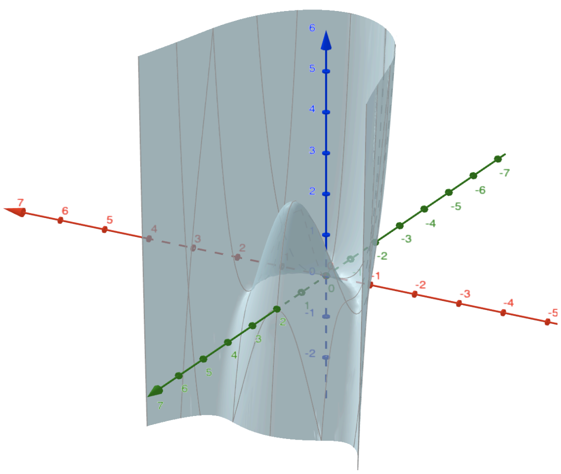
2019-20, M2, FIB

TALLER 9.3

with(*Student*[*VectorCalculus*]) :
with(*Student*[*MultivariateCalculus*]) :

Problema 9

9 Comproveu que $(0,0)$ és un punt de sella de la funció $f(x,y) = \left(x^2 + (y-1)^2 - 1\right)\left(x^2 - 2y\right)$.



$f := (x, y) \rightarrow \left(x^2 + (y-1)^2 - 1\right)\cdot\left(x^2 - 2y\right)$

$$f := (x, y) \mapsto \left(x^2 + (y-1)^2 - 1\right)\left(x^2 + (-2y)\right) \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$$2x\left(x^2 - 2y\right) + 2\left(x^2 + (y-1)^2 - 1\right)x \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

factor(%)

$$2x\left(2x^2 + y^2 - 4y\right) \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

$\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$

$$(2y-2)\left(x^2 - 2y\right) - 2x^2 - 2(y-1)^2 + 2 \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

factor(%)

$$2x^2 y - 4x^2 - 6y^2 + 8y \qquad \textbf{(1.1.5)}$$

$Gradient(f(x,y), [x,y] = [0,0])$

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \tag{1.1.6}$$

$(0,0)$ és punt crític

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$

$$12x^2 + 2y^2 - 8y \tag{1.1.7}$$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$

$$2x^2 - 12y + 8 \tag{1.1.8}$$

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)$

$$-4x + 2(2y-2)x \tag{1.1.9}$$

$factor(\%)$

$$4x(-2+y) \tag{1.1.10}$$

$Hessian(f(x,y), [x,y] = [0,0])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \tag{1.1.11}$$

El determinant és zero i el criteri de la matriu hessiana no ens permet classificar. Per al punt $(0,0)$ cal fer un estudi local

$f(0,0)$

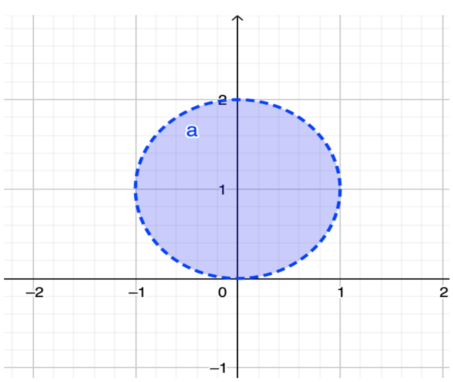
$$0 \tag{1.1.12}$$

$f(x,y)$

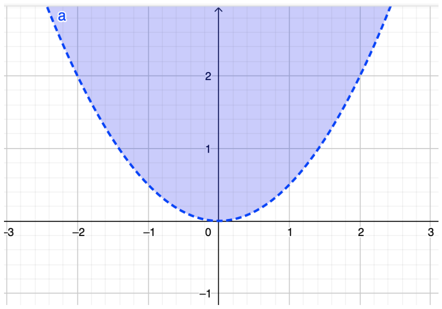
$$\left(x^2 + (y-1)^2 - 1\right)\left(x^2 - 2y\right) \tag{1.1.13}$$

Volem saber quin signe té $f(x,y)$ en entorns del punt $(0,0)$

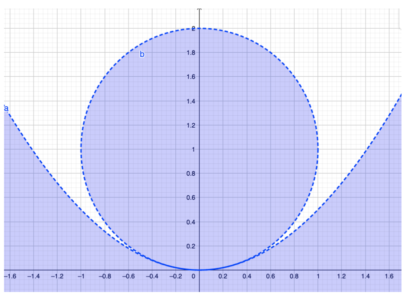
REGIÓ $x^2 + (y-1)^2 - 1 < 0$



REGIÓ $x^2 - 2\,y < 0$



En blau tenim la regió $f(x, y) = \left(x^2 + (y-1)^2 - 1\right)\left(x^2 - 2\,y\right) > 0$ i en blanc tenim la regió $f(x, y) < 0$



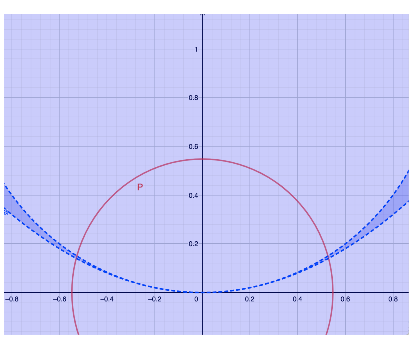
Observem que l'únic punt de contacte entre totes dues corbes és el punt $(0, 0)$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} y^2 = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y = 0$$

$solve\left(\left\{x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0\,,\, x^2 - 2\,y = 0\right\}\right)$

$$\{x = 0, y = 0\} \qquad \textbf{(1.1.14)}$$

Per tant, en qualsevol entorn del punt $(0, 0)$ hi ha punts (x, y) amb $f(x, y) > 0$ i punts (x, y) amb $f(x, y) < 0$



El punt $(0, 0)$ és punt de sella de f

Problema 10

10 Trobeu i classifiqueu els punts crítics de les funcions següents:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y + xy\,;$

b) $f(x,y) = \sin x \ \sin y\,;$

c) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}\,;$

d) $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4\,;$

e) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2\,;$

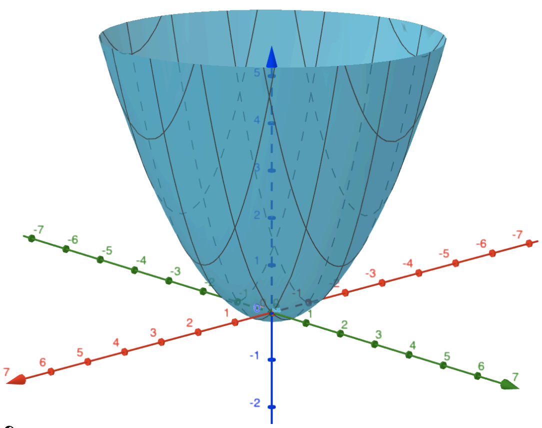
f) $f(x,y) = x^3 - x^2y + 3y^2\,;$

g) $f(x,y) = xy^2\,(3-x-y)\,.$

a)

$f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2 + x + y + x \cdot y$

$$f := (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x + y + y\,x \quad \textbf{(1.2.1.1)}$$



$fx := \dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$$fx := 2\,x + y + 1 \quad \textbf{(1.2.1.2)}$$

$fy := \dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$

$$fy := x + 2\,y + 1 \quad \textbf{(1.2.1.3)}$$

Gradient$(f(x, y), [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 2\,x + y + 1 \\ x + 2\,y + 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.1.4)}$$

És un sistema d'equacions lineals de 2 equacions i i 2 incògites. Resolem.

$solve(\{fx = 0, fy = 0\}, \{x, y\})$

$$\left\{x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}\right\} \qquad \textbf{(1.2.1.5)}$$

Punt crític: $P = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$

$$2 \qquad \textbf{(1.2.1.6)}$$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$

$$2 \qquad \textbf{(1.2.1.7)}$$

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$

$$1 \qquad \textbf{(1.2.1.8)}$$

$\boldsymbol{Hessian(f(x, y), [x, y])}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.2.1.9)}$$

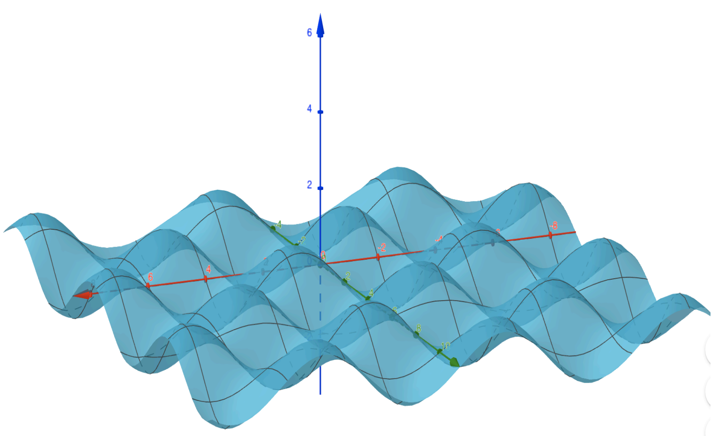
Té determinant 3, positiu, i el coeficient $(1, 1)$ és 2, positiu.

Per tant, P és un mínim relatiu de f

b)

$f := (x, y) \rightarrow \sin(x) \cdot \sin(y)$

$$f := (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y) \qquad \textbf{(1.2.2.1)}$$



$fx := \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$$fx := \cos(x) \sin(y) \qquad \textbf{(1.2.2.2)}$$

$$fy := \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$fy := \sin(x)\cos(y) \qquad (1.2.2.3)$$

Gradient$(f(x, y), [x, y])$

$$\begin{bmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{bmatrix} \qquad (1.2.2.4)$$

$$f_x = \cos(x)\sin(y) = 0 \begin{cases} \cos(x) = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ \sin(y) = 0 \longrightarrow y = k\pi \end{cases}$$

$$f_y = \sin(x)\cos(y) = 0 \begin{cases} \sin(x) = 0 \longrightarrow x = m\pi \\ \cos(y) = 0 \longrightarrow y = \frac{\pi}{2} + r\pi \end{cases}$$

Tenim dues famílies infinites de punts crítics.

Punts crítics $P_{nr} = \left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ \frac{\pi}{2} + r \cdot \pi\right)$, $Q_{mk} = (m \cdot \pi,\ k \cdot \pi)$ on n, r, m, k varien en el conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$$

$$-\sin(x)\sin(y) \qquad (1.2.2.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$$

$$-\sin(x)\sin(y) \qquad (1.2.2.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f(x, y)$$

$$\cos(x)\cos(y) \qquad (1.2.2.7)$$

Hessian$(f(x, y), [x, y])$

$$\begin{bmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{bmatrix} \qquad (1.2.2.8)$$

En els punts $P_{nr} = \left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\ ,\ \frac{\pi}{2} + r \cdot \pi\right)$ tenim $\cos(x) = \cos(y) = 0$, $\sin(x) = (-1)^n$ i $\sin(y) = (-1)^r$.

Té determinant , positiu, i el coeficient $(1, 1)$ és , positiu.

Per tant, P és un mínim relatiu de f

n i r parells

$$\mathit{Hessian}\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{\mathrm{Pi}}{2}, \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right]\right)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.2.2.9}$$

n parell, r senar

$$\mathit{Hessian}\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{\mathrm{Pi}}{2}, \frac{3 \cdot \mathrm{Pi}}{2}\right]\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.2.10}$$

n senar, r parell

$$\mathit{Hessian}\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{3 \cdot \mathrm{Pi}}{2}, \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right]\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.2.11}$$

n i r senars

$$\mathit{Hessian}\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{3 \cdot \mathrm{Pi}}{2}, \frac{3 \cdot \mathrm{Pi}}{2}\right]\right)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.2.2.12}$$

Si n, r tenen la mateixa paritat, $P_{nr} = \left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\ ,\ \frac{\pi}{2} + r \cdot \pi\right)$ és màxim relatiu de f

Si n, r tenen difernt paritat, P_{nr} és mínim relatiu de f

En els punts $Q_{mk} = (m \cdot \pi\ ,\ k \cdot \pi)$ tenim $\sin(x) = \sin(y) = 0$, $\cos(x) = (-1)^m$ i $\cos(y) = (-1)^k$.

$Hessian(f(x,y),[x,y]=[0,0])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.13)$$

$Hessian(f(x,y),[x,y]=[0,\mathrm{Pi}])$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.14)$$

$Hessian(f(x,y),[x,y]=[\mathrm{Pi},0])$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.15)$$

$Hessian(f(x,y),[x,y]=[\mathrm{Pi},\mathrm{Pi}])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.16)$$

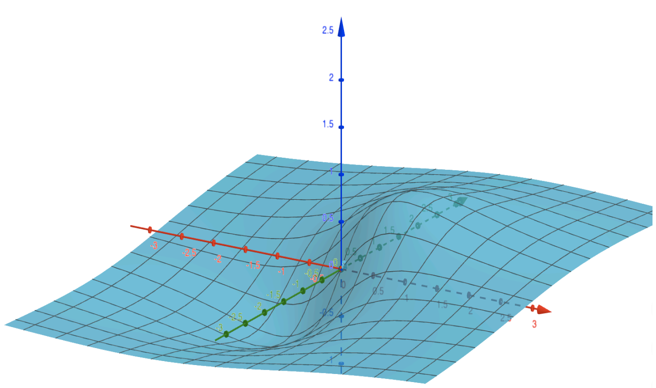
En tots els casos tenim determinant <0

Els punts $Q_{mk} = (m\cdot\pi,\ k\cdot\pi)$ són punts de sella de f

c)

$f := (x,y) \to \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$

$$f := (x,y) \mapsto (x+y)\left(1+x^2+y^2\right)^{-1} \quad (1.2.3.1)$$



$\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$

$$\frac{1}{x^2+y^2+1}-\frac{2\,(x+y)\,x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \tag{1.2.3.2}$$

factor(%)

$$-\frac{x^2+2\,x\,y-y^2-1}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \tag{1.2.3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

$$\frac{1}{x^2+y^2+1}-\frac{2\,(x+y)\,y}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \tag{1.2.3.4}$$

factor(%)

$$\frac{x^2-2\,y\,x-y^2+1}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \tag{1.2.3.5}$$

simplify(***Gradient***(***f***(***x***, ***y***), [***x***, ***y***]))

$$\left[\begin{array}{c} \frac{-x^2-2\,y\,x+y^2+1}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \\ \frac{x^2-2\,y\,x-y^2+1}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \end{array}\right] \tag{1.2.3.6}$$

Per anul.lar les derivades parcials, cal que els numeradors s'anul.lin

$-x^2-2\,y\,x+y^2+1=0$

$x^2-2\,y\,x-y^2+1=0$

Si sumem les dues equacions obtenim $x^2=y^2$ i amb això obtenim $2\,xy=1$

$$x^2=y^2 \;\begin{cases} \begin{matrix} x=y \\ 2xy=1 \end{matrix} \longrightarrow 2y^2=1 \longrightarrow \begin{matrix} x=y=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} x=-y \\ 2xy=1 \end{matrix} \longrightarrow -2y^2=1 \longrightarrow \text{No té solució} \end{cases}$$

Punts crítics $P=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $Q=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$factor\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)\right)$$

$$\frac{2\left(x^3+3x^2y-3xy^2-y^3-3x-y\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^3} \tag{1.2.3.7}$$

$$factor\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)\right)$$

$$-\frac{2\left(x^3+3x^2y-3xy^2-y^3+x+3y\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^3} \tag{1.2.3.8}$$

$$factor\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,y)\right)$$

$$-\frac{2\left(x+y\right)\left(x^2-4yx+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^3} \tag{1.2.3.9}$$

Per substituir useu que ens punts P i Q es té $x^2+y^2=1$ i $x=y$

Substituïm en el punt P

$$\boldsymbol{Hessian}\left(f(x,y), [x,y]=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{1.2.3.10}$$

Té determinant $\frac{1}{2}$, positiu, i el coeficient $(1, 1)$ és negatiu.

Per tant, P és un màxim relatiu de f

Substituïm en el punt Q

$$\boldsymbol{Hessian}\left(f(x,y), [x,y]=\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{1.2.3.11}$$

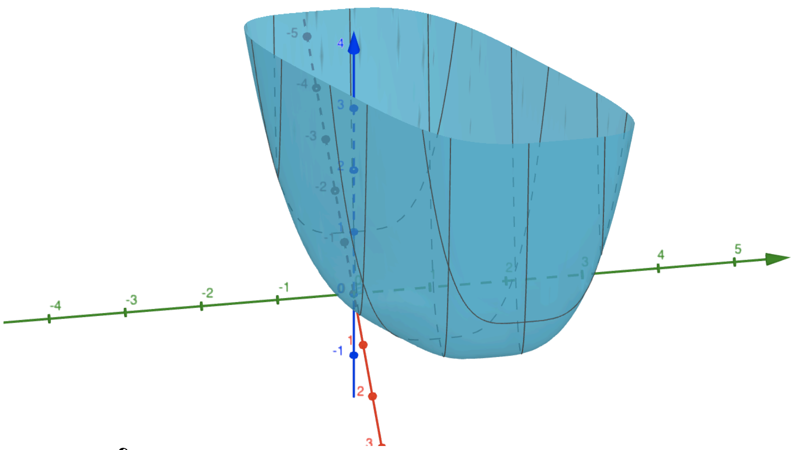
Té determinant $\frac{1}{2}$, positiu, i el coeficient $(1, 1)$ és positiu.

Per tant, Q és un mínim relatiu de f

d)

$f := (x, y) \rightarrow (x-1)^4 + (x-y)^4$

$$f := (x, y) \mapsto (x-1)^4 + (x+(-y))^4 \quad \textbf{(1.2.4.1)}$$



$fx := \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$$fx := 4(x-1)^3 + 4(x-y)^3 \quad \textbf{(1.2.4.2)}$$

$fy := \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$

$$fy := -4(x-y)^3 \quad \textbf{(1.2.4.3)}$$

Gradient(f(x, y), [x, y])

$$\begin{bmatrix} 4(x-1)^3 + 4(x-y)^3 \\ -4(x-y)^3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.4.4)}$$

De l'equació $fy = 0$ obtenim $x = y$. Llavors de l'equació $fx = 0$ obtenim $x = 1$

$solve(\{fx = 0, fy = 0\})$

$$\{x = 1, y = 1\} \quad \textbf{(1.2.4.5)}$$

Punt crític: $P = (1, 1)$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$

$$12(x-1)^2 + 12(x-y)^2 \quad \textbf{(1.2.4.6)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$$

$$12\,(x-y)^2 \tag{1.2.4.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x, y)$$

$$-12\,(x-y)^2 \tag{1.2.4.8}$$

Hessian $(f(x, y), [x, y] = [1, 1])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.4.9}$$

El criteri de la matriu hessiana no ens permet classificar.
Hem de fer un estudi local.
En primer lloc, obtenim el valor de f en el punt crític
$f(1, 1)$

$$0 \tag{1.2.4.10}$$

Hem de mirar al voltant del punt quin signe tenen els valors de la funció
$f(x, y)$

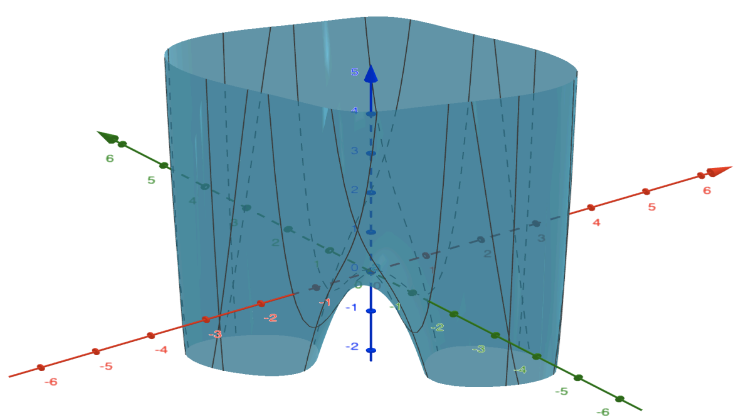
$$(x-1)^4 + (x-y)^4 \tag{1.2.4.11}$$

Observem que per ser una suma de potències quartes $f(x, y) \geq 0$ per a tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Per tant, $f(x, y) \geq f(P)$ per a tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i P és un mínim absolut de f

e)

$f := (x, y) \rightarrow x^4 + y^4 + 4\,x \cdot y - 2\,x^2 - 2\,y^2$

$$f := (x, y) \mapsto x^4 + y^4 + 4\,x\,y + (-2\,x^2) + (-2\,y^2) \tag{1.2.5.1}$$



$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$4\,x^3 - 4\,x + 4\,y \tag{1.2.5.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$(2y-2)\left(x^2-2y\right)-2x^2-2(y-1)^2+2 \quad \textbf{(1.2.5.3)}$$

$factor(\%)$

$$4x^3-4x+4y \quad \textbf{(1.2.5.4)}$$

Gradient$(f(x,y),[x,y])$

$$\begin{bmatrix} 4x^3-4x+4y \\ 4y^3+4x-4y \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.5.5)}$$

$$\begin{array}{rl} & 4x^3-4x+4y=0 \\ + & 4y^3+4x-4y=0 \\ \hline & x^3+y^3=0 \Rightarrow y^3=-x^3=(-x^3) \Rightarrow y=-x \end{array}$$

$$4x^3-4x-4x=0 \Rightarrow x(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0, \pm\sqrt{2}$$

Punts crítics: $P=(0,0)$, $Q=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $R=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$

$$12x^2-4 \quad \textbf{(1.2.5.6)}$$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)$

$$12y^2-4 \quad \textbf{(1.2.5.7)}$$

$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f(x,y)$

$$4 \quad \textbf{(1.2.5.8)}$$

Hessian$(f(x,y),[x,y])$

$$\begin{bmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.5.9)}$$

Hessian$(f(x,y),[x,y]=[0,0])$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.5.10)}$$

El determinant és zero i el criteri de la matriu hessiana no ens permet classificar.

Hessian$\left(f(x,y),[x,y]=\left[\sqrt{2},-\sqrt{2}\right]\right)$

$$\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.5.11)}$$

Té determinant $20^2 - 16$, positiu, i el coeficient $(1, 1)$ és positiu.

Per tant, Q és un mínim relatiu de f

$\boldsymbol{Hessian\left(f(x, y), [x, y] = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]\right)}$

$$\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.5.12)}$$

Per tant, R és també un mínim relatiu de f

Per al punt $(0, 0)$ cal fer un estudi local

$f(0, 0)$

$$0 \quad \textbf{(1.2.5.13)}$$

$f(x, y)$

$$x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \quad \textbf{(1.2.5.14)}$$

Observem $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

$f(x, x)$

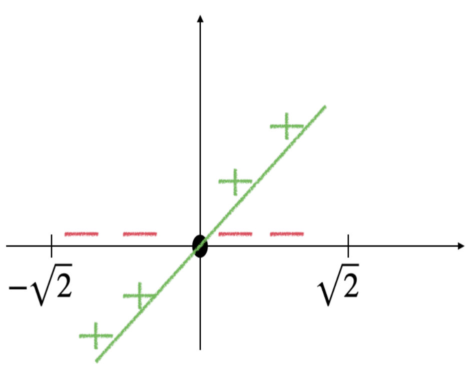
$$2x^4 \quad \textbf{(1.2.5.15)}$$

$f(x, 0)$

$$x^4 - 2x^2 \quad \textbf{(1.2.5.16)}$$

$factor(\%)$

$$x^2\left(x^2 - 2\right) \quad \textbf{(1.2.5.17)}$$



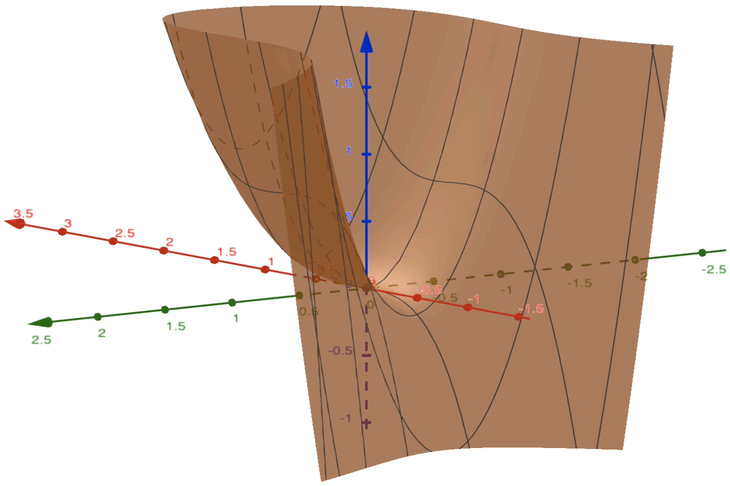
En qualsevol entorn del punt $(0, 0)$ tindrem punts de la recta $y = x$ amb imatge positiva, és a dir, $f(x, y) > f(0, 0)$, i punts de la recta $y = 0$ amb imatge negativa, és a dir, $f(x, y) < f(0, 0)$.

Per tant, $P = (0, 0)$ és punt de sella de f

f)

$f := (x, y) \rightarrow x^3 - x^2 \cdot y + 3\,y^2$

$$f := (x, y) \mapsto x^3 + \left(-x^2\,y\right) + 3\,y^2 \qquad \textbf{(1.2.6.1)}$$



$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$$3\,x^2 - 2\,x\,y \qquad \textbf{(1.2.6.2)}$$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$

$$-x^2 + 6\,y \qquad \textbf{(1.2.6.3)}$$

***Gradient*(*f*(*x*, *y*), [*x*, *y*])**

$$\begin{bmatrix} 3\,x^2 - 2\,x\,y \\ -x^2 + 6\,y \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.2.6.4)}$$

$$\begin{array}{l} 3x^2 - 2xy = 0 \\ -x^2 + 6y = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3x^2 - 2xy = 0 \\ -3x^2 + 18y = 0 \\ \hline + \quad 18y - 2xy = 0 \Rightarrow 2y\,(9 - x) = 0 \end{array}$$

$$y = 0 \quad x^2 = 6y = 0 \implies y = 0,\ x = 0$$

$$x = 9 \quad y = \frac{x^2}{6} \implies x = 9,\ y = \frac{27}{2}$$

Punts crítics: $P = (0, 0)$, $Q = \left(9, \frac{27}{2}\right)$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$

$$6\,x - 2\,y \tag{1.2.6.5}$$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$

$$6 \tag{1.2.6.6}$$

$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f(x, y)$

$$-2\,x \tag{1.2.6.7}$$

$\boldsymbol{Hessian}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}])$

$$\begin{bmatrix} 6\,x - 2\,y & -2\,x \\ -2\,x & 6 \end{bmatrix} \tag{1.2.6.8}$$

$\boldsymbol{Hessian}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.2.6.9}$$

El determinant és zero i el criteri de la matriu hessiana no ens permet classificar.

$Hessian\left(f(x, y), [x, y] = \left[9, \frac{27}{2}\right]\right)$

$$\begin{bmatrix} 27 & -18 \\ -18 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.2.6.10}$$

$27 \cdot 6 - 18^2$

$$-162 \tag{1.2.6.11}$$

Té determinant negatiu i, per tant, Q és un punt de sella de f

Per al punt $(0, 0)$ cal fer un estudi local

$f(0, 0)$

$$0 \tag{1.2.6.12}$$

$f(x, y)$

$$x^3 - x^2\,y + 3\,y^2 \tag{1.2.6.13}$$

$f(0, y)$

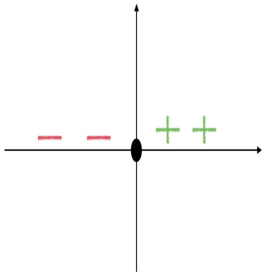
$$3\,y^2 \tag{1.2.6.14}$$

$f(x, x)$

$$3\,x^2 \tag{1.2.6.15}$$

$f(x, 0)$

$$x^3 \tag{1.2.6.16}$$



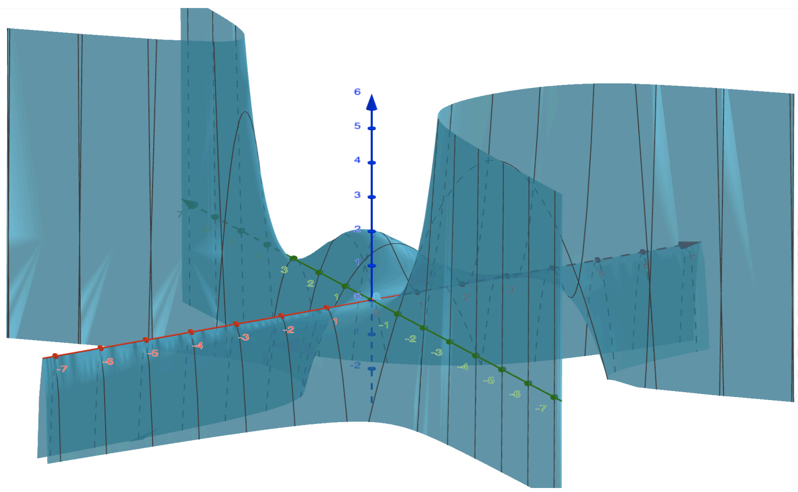
En qualsevol entorn del punt $(0, 0)$ tindrem punts de la semirecta OX^+ amb imatge positiva, és a dir, $f(x, y) > f(0, 0)$, i punts de la semirect OX^- amb imatge negativa, és a dir, $f(x, y) < f(0, 0)$.

Per tant, $P = (0, 0)$ és punt de sella de f

g)

$f := (x, y) \rightarrow x \cdot y^2 \cdot (3 - x - y)$

$$f := (x, y) \mapsto x\, y^2\, (3 + (-x) + (-y)) \tag{1.2.7.1}$$



$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$$y^2\, (3 - x - y) - x\, y^2 \tag{1.2.7.2}$$

$factor(\%)$

$$-y^2\, (-3 + 2\, x + y) \tag{1.2.7.3}$$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$

$$2\, x\, y\, (3 - x - y) - x\, y^2 \tag{1.2.7.4}$$

$factor(\%)$

$$-x\, y\, (-6 + 2\, x + 3\, y) \tag{1.2.7.5}$$

***simplify*(*Gradient*(*f*(*x*, *y*), [*x*, *y*]))**

$$\begin{bmatrix} -y^2\,(-3+2\,x+y) \\ -x\,y\,(-6+2\,x+3\,y) \end{bmatrix} \tag{1.2.7.6}$$

$y=0 \quad f_y = -xy(-6+2x+3y)=0 \quad \forall x \qquad (x,0)$

$f_x = -y^2(-3+2x+y)=0$

$2x+y=3$

$y \neq 0 \quad f_y = -xy(-6+2x+3y)=0$

$x=0$

$2x+3y=6$

$2x+y=3$
$x=0$
$(0,3)$

$2x+y=3$
$2x+3y=6$
$\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$

Punts crítics: Tots els punts de l'eix OX i els punts $P=(0,3)$, $Q=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$

$$-2\,y^2 \tag{1.2.7.7}$$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$

$$2 \tag{1.2.7.8}$$

$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,y)$

$$2\,y\,(3-x-y)-y^2-2\,x\,y \tag{1.2.7.9}$$

Hessian $(\boldsymbol{f(x,y)}, [\boldsymbol{x,y}] = [\boldsymbol{a, 0}])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\,a\,(3-a) \end{bmatrix} \tag{1.2.7.10}$$

El determinant és zero i el criteri de la matriu hessiana no ens permet classificar.

$\boldsymbol{Hessian}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = [\mathbf{0}, \mathbf{3}])$

$$\begin{bmatrix} -18 & -9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.7.11}$$

Té determinant negatiu i, per tant, P és un punt de sella de f

$\boldsymbol{Hessian}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \left[\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right]\right)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{27}{8} \end{bmatrix} \tag{1.2.7.12}$$

$\frac{9}{2} \cdot \frac{27}{8} - \left(\frac{9}{4}\right)^2$

$$\frac{81}{8} \tag{1.2.7.13}$$

Té determinant positiu i el coeficient $(1, 1)$ és negatiu.

Per tant, Q és un màxim relatiu de f

Per al punts $(a, 0)$ cal fer un estudi local

$f(a, 0)$

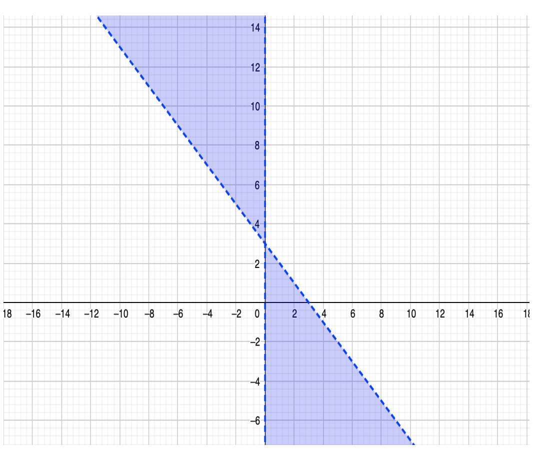
$$0 \tag{1.2.7.14}$$

$f(x, y)$

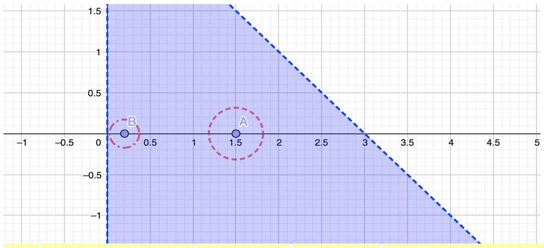
$$x y^2 (3 - x - y) \tag{1.2.7.15}$$

Fora de l'eix $y = 0$ el signe de $f(x, y)$ és el mateix que el de $x (3 - x - y)$

REGIÓ $x (3 - x - y) > 0$

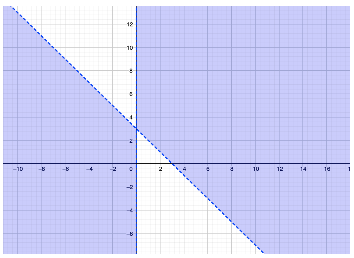


Si $a \in (0, 3)$ hi ha un entorn del punt $(a, 0)$ on $f(x, y) \geq f(a, 0)$

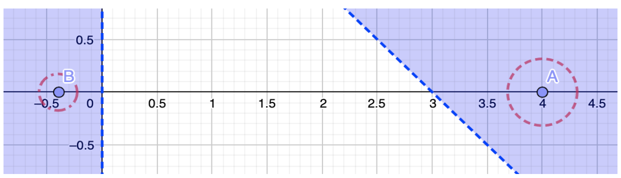


Si $a \in (0,3)$ el punt $(a,0)$ és mínim relatiu de f

REGIÓ $x\,(3-x-y) < 0$

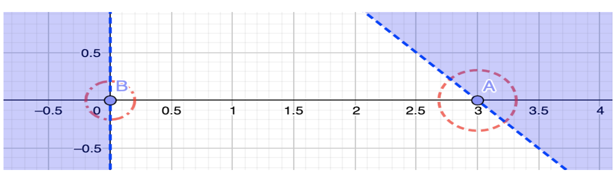


Si $a \in (-\infty,0) \cup (3,+\infty)$ hi ha un entorn del punt $(a,0)$ on $f(x,y) \leq f(a,0)$



Si $a \in (-\infty,0) \cup (3,+\infty)$ el punt $(a,0)$ és màxim relatiu de f

En els punts $(0,0)$ i $(3,0)$ trobem que en qualsevol entorn hi ha punts (x,y) amb $f(x,y) > 0$ i punts (x,y) amb $f(x,y) < 0$



Els punts $(0,0)$ i $(3,0)$ són punts de sella de f

Problema 11

11 Sigui $f(x,y) = e^{\lambda x + y^2} + \mu \sin(x^2+y^2)$ amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Determineu els valors dels paràmetres λ i μ sabent que f té en $(0,0)$ un extrem relatiu i que el polinomi de Taylor de segon grau de f a l'origen pren el valor 6 al punt $(1,2)$. Amb els resultats obtinguts, quin tipus d'extrem és el punt $(0,0)$ per a f?

Condició d'extrem relatiu

Si f té un extrem relatiu en $(0, 0)$ és condició necessària que el $(0, 0)$ sigui un punt crític de f
Calculem les derivades parcials

$f := (x, y) \rightarrow e^{\lambda \cdot x + y^2} + \mu \cdot \sin(x^2 + y^2)$

$$f := (x, y) \mapsto e^{\lambda x + y^2} + \mu \sin(x^2 + y^2) \quad \textbf{(1.3.1.1)}$$

$dx := \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$$dx := \lambda e^{\lambda x + y^2} + 2 \mu x \cos(x^2 + y^2) \quad \textbf{(1.3.1.2)}$$

En el punt $(0, 0)$ val λ

Per tant, la derivada parcial respecte x s'anul.la en el punt $(0, 0)$ si, i només si, $\lambda = 0$

$\lambda := 0$

$$\lambda := 0 \quad \textbf{(1.3.1.3)}$$

$dy := \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$

$$dy := 2 y e^{y^2} + 2 \mu y \cos(x^2 + y^2) \quad \textbf{(1.3.1.4)}$$

$factor(\%)$

$$2 y \left(\cos(x^2 + y^2) \mu + e^{y^2}\right) \quad \textbf{(1.3.1.5)}$$

La derivada parcial respecte y s'anul.la en el punt $(0, 0)$ per a qualsevol valor de μ

$(0, 0)$ és punt crític de f si, i només si, λ=0

Condició sobre el polinomi de Taylor

$$P(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \cdot x + \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0, 0) \cdot x^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0, 0) \cdot x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(0, 0) \cdot y^2$$

$f(0, 0)$

$$1 \quad \textbf{(1.3.2.1)}$$

Ja sabem que les derivades parcials s'anul.len en el $(0, 0)$

$$P(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0, 0) \cdot x^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0, 0) \cdot x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(0, 0) \cdot y^2$$

Calculem les derivades de segon ordre

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$; $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$; $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$

$$2\cos(x^2+y^2)\,\mu - 4\,\mu\,x^2\sin(x^2+y^2)$$

$$-4\,\mu\,x\,y\sin(x^2+y^2)$$

$$2\,e^{y^2} + 4\,y^2\,e^{y^2} + 2\cos(x^2+y^2)\,\mu - 4\,\mu\,y^2\sin(x^2+y^2) \tag{1.3.2.2}$$

Avaluem en el punt $(0, 0)$

$Hessian(f(x, y), [x, y] = [0, 0])$

$$\begin{bmatrix} 2\,\mu & 0 \\ 0 & 2+2\,\mu \end{bmatrix} \tag{1.3.2.3}$$

$P := (x, y) \to 1 + \mu \cdot x^2 + (1+\mu) \cdot y^2$

$$P := (x, y) \mapsto 1 + \mu\,x^2 + (1+\mu)\,y^2 \tag{1.3.2.4}$$

La condició demanada és que en el punt $(1, 2)$ ha de prende el valor 6

$P(1, 2)$

$$5 + 5\,\mu \tag{1.3.2.5}$$

$solve(P(1, 2) = 6)$

$$\frac{1}{5} \tag{1.3.2.6}$$

Per tant, $\mu = \frac{1}{5}$

Extrem relatiu

Amb $\lambda = 0,\ \mu = \frac{1}{5}$ sabem que el punt $(0, 0)$ és un punt crític. Classifiquem-lo

$\mu := \frac{1}{5}$

$$\mu := \frac{1}{5} \tag{1.3.3.1}$$

$Hessian(f(x, y), [x, y] = [0, 0])$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{12}{5} \end{bmatrix} \tag{1.3.3.2}$$

Té determinant positiu i el coeficient $(1, 1)$ és positiu.

Per tant, $(0, 0)$ és un mínim relatiu de f

Problema 12

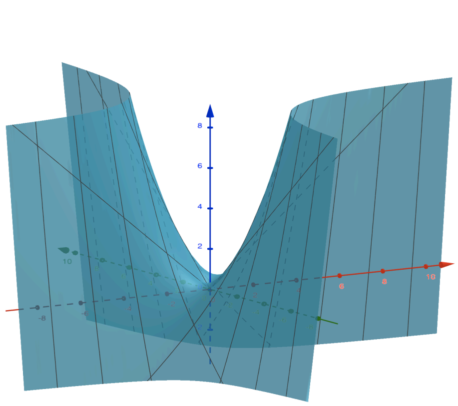
12 Donada la funció $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-xy$,

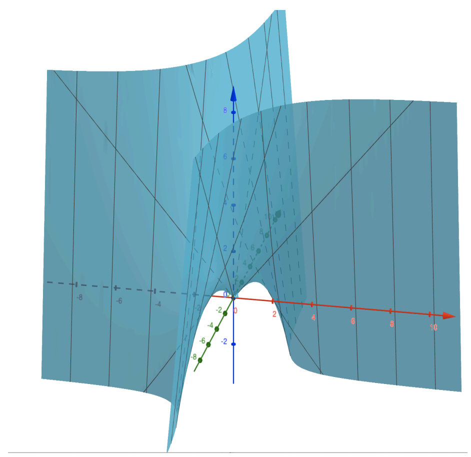
a) Trobeu els extrems relatius de f a $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

b) Analitzant l'expressió de f, esbrineu si $(0,0)$ és el punt d'extrem relatiu.

$f := (x, y) \rightarrow \mathrm{sqrt}(x^2 + y^2) - x\cdot y$

$$f := (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} + (-x\,y) \tag{1.4.1}$$





a)

$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y \tag{1.4.1.1}$$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x \tag{1.4.1.2}$$

$Gradient(f(x, y), [x, y])$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x \end{array}\right] \tag{1.4.1.3}$$

Observem que les derivades parcials no estan definides en el punt $(0, 0)$

Punts crítics en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y = 0 \implies \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = y \implies \frac{x^2}{x^2+y^2} = y^2$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x = 0 \implies \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = x \implies \frac{y^2}{x^2+y^2} = x^2$$

Sumant $1 = x^2 + y^2$

Substituïnt a les equacions inicials $x = y$ Per tant $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Punts crítics: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), Q = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$factor\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)\right)$

$$\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{1.4.1.4}$$

$factor\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)\right)$

$$-\frac{(x^2+y^2)^{3/2} + x\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{1.4.1.5}$$

$factor\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)\right)$

$$\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{1.4.1.6}$$

$\boldsymbol{Hessian\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{1.4.1.7}$$

$\boldsymbol{Hessian\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]\right)}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.4.1.8)}$$

En tots dos cassos el determinant és $\frac{1}{4} - \frac{9}{4}$, negatiu.

Per tant, P i Q són punts de sella de f

b)

$f(0, 0)$

$$0 \quad \textbf{(1.4.2.1)}$$

Hem d'estudiar el signe de $f(x, y)$ a l'entorn del $(0, 0)$

$f(x, 0)$

$$\sqrt{x^2} \quad \textbf{(1.4.2.2)}$$

És positiu

$f(0, y)$

$$\sqrt{y^2} \quad \textbf{(1.4.2.3)}$$

És positiu

$f(x, -x)$

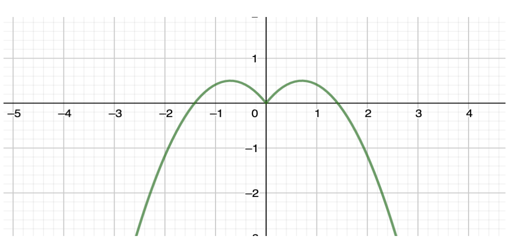
$$\sqrt{2}\,\sqrt{x^2} + x^2 \quad \textbf{(1.4.2.4)}$$

És positiu

$f(x, x)$

$$\sqrt{2}\,\sqrt{x^2} - x^2 \quad \textbf{(1.4.2.5)}$$

És $\sqrt{2}\,|x| - x^2$. Per a valors petits de x és positiu



En totes les direccións "fàcils" trobem $f(x, y) > 0$ a l'entorn del $(0, 0)$ (valors petits de x, y)

Intentem demostrar que hi ha un entorn de $(0, 0)$ on $f(x, y) > 0$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-x\,y=\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-x\,y=\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x\cdot y}}\right)$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-x\,y=\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2\cdot y^2}}}\right)$$

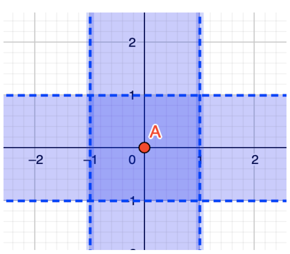
$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-x\,y=\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

Per veure que $f(x,y)>0$ un entorn de $(0,0)$ només cal que veiem que $\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}>1$ en aquest entorn. És a dir,

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}>1$$

En un entorn del $(0,0)$ els valor de x^2, y^2 seran petits, els seus inversos seran grans i podem fer que la suma superi 1. Per exemple, si agafem el quadrat

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<1, |y|<1\}$



aleshores

$$(x,y)\in S\Rightarrow x^2<1, y^2<1\Rightarrow\frac{1}{x^2}>1, \frac{1}{y^2}>1\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}>2>1$$

S és un entorn del punt $(0,0)$ on

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}>1$$

$$\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}} > 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}} < 1$$

$$1-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}} > 0$$

$f(x, y) > 0$

$f(x, y) > f(0, 0)$

Per tant, $(0, 0)$ és un mínim relatiu