10.1. Extrems condicionats. Multiplicadors de Lagrange, classificació, mètode de Lagrange general

$$\begin{array}{rcl} f: R^n & \longrightarrow & R \\ (x_1,\cdots,x_n) & \mapsto & f(x_1,\cdots,x_n) \end{array}$$ funció a optimitzar

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \cdots\cdots \\ g_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{array}\right\}$$ condicions de lligadura o restriccions

$$\begin{pmatrix} 1 \le m < n \\ g_i: R^n \longrightarrow R \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in \overset{\circ}{(Dom\ f)} \cap \bigcap_{i=1}^{m} \overset{\circ}{(Dom\ g_i)}$$

Definició. La funció f té en $\vec{a}$ un mínim (màxim) condicionat per $g_i(x_1,\cdots,x_n)=0, i=1,..m$ quan $g_i(a_1,\cdots,a_n)=0, \forall i=1,..m$ i $\exists\delta>0$ tal que $\forall\vec{x}\in B(\vec{a};\delta)\cap Domf$ $[g_i(x_1,\cdots,x_n)=0, \forall i=1,..m \Rightarrow f(a_1,\cdots,a_n)\le(\ge) f(x_1,\cdots,x_n)]$.

Mètode dels multiplicadors de Lagrange (1a versió: 2 variables i 1 condició)

$f: R^2 \to R$ funció a optimitzar

$g: R^2 \to R$ tal que g(x,y)=0 és la condició

de classe C^1

$(a,b)\in \overset{\circ}{(Dom\ f)} \cap \overset{\circ}{(Dom\ g)}$

λ es diu "multiplicador de Lagrange"

Es construeix la funció de Lagrange:
$$\begin{array}{rcl} L: R^3 & \longrightarrow & R \\ (x,y,\lambda) & \mapsto & L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) \end{array}$$

Aleshores:

Si $f(x,y)$té en (a,b) un extrem condicionat per $g(x,y)=0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists\lambda_0\in R$ tal que $\vec{\nabla}L(a,b,\lambda_0)=\vec{0}$.

λ_0 es diu "el multiplicador de Lagrange corresponent al punt (a,b)"

Classificació ($n=2$): Criteri del Hessià ampliat

$f: R^2 \to R$ funció a optimitzar

$g(x,y)=0$ condició

f, g de classe C^2

El Hessià ampliat és: $$\widetilde{H}(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\lambda\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Si (x_0,y_0)és un punt crític condicionat amb multiplicador λ_0, aleshores:

$\widetilde{H}(x_0,y_0,\lambda_0)>0 \Rightarrow$ en (x_0,y_0) hi ha un màxim condicionat

$\widetilde{H}(x_0,y_0,\lambda_0)<0 \Rightarrow$ en (x_0,y_0) hi ha un mínim condicionat

Mètode dels multiplicadors de Lagrange (cas general)

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1,\cdots,x_n) \quad \text{funció a optimitzar} \\ \left.\begin{array}{l} g_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \cdots\cdots \\ g_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{array}\right\} \text{condicions} \end{array}\right\} \quad f, g_1, \dots, g_m \quad \text{de classe } C^1$$

$1 \leq m < n$

$$\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in (\overset{\circ}{Dom\, f})\cap \bigcap_{i=1}^{m}(\overset{\circ}{Dom\, g_i})$$

Es construeix la funció de Lagrange:

$$\begin{array}{llll} L: & R^{n+m} & \longrightarrow & R \\ & (x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m) & \longmapsto & L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)= \end{array}$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)+\lambda_1 g_1(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+\lambda_m g_m(x_1,\cdots,x_n)$$

Aleshores:

Si $f(x_1,\cdots,x_n)$ té un extrem en $(a_1,\cdots,a_n)$ condicionat per $g_1(x_1,\cdots,x_n)=0,\dots,\ g_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \Longrightarrow\ \exists\lambda_1^0,\cdots,\lambda_m^0\in R$ tal que $\vec{\nabla}L(a_1,\cdots,a_n,\lambda_1^0,\cdots,\lambda_m^0)=\vec{0}$

10.2. Extrems absoluts en compactes. Teorema de Weierstrass. Càlcul d'extrems absoluts en compactes

Teorema de Weierstrass

Sigui $f: R^n \to R$ de classe C^1 i $D \subseteq Dom\, f$, D compacte, aleshores:

$$\exists (x_1{}^m, \dots, x_n{}^m), (x_1{}^M, \dots, x_n{}^M) \in D:$$

$$f(x_1{}^m, \dots, x_n{}^m) \le f(x_1, \dots, x_n) \le f(x_1{}^M, \dots, x_n{}^M), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in D$$

Es diu que la funció f en el compacte D té un valor màxim absolut igual a $f(x_1{}^M, \dots, x_n{}^M)$ i l'assoleix al/als punt/s $(x_1{}^M, \dots, x_n{}^M)$ i que la funció f en el compacte D té un valor mínim absolut igual a $f(x_1{}^m, \dots, x_n{}^m)$ i l'assoleix al/als punt/s $(x_1{}^m, \dots, x_n{}^m)$.

Càlcul d'extrems absoluts en compactes

1) Es calculen els **punts crítics de *f* en l'interior del compacte *D***:

Punts tals que : $\begin{cases} f'_{x_1} = 0 \\ \dots \\ f'_{x_n} = 0 \end{cases}$ i que estiguin en l'interior de D.

2) Es calculen els **punts crítics de *f* condicionats a estar en la frontera de *D***: punts crítics de $f(x_1, \dots, x_n)$ condicionats per $(x_1, \dots, x_n) \in Fr(D)$:

Si *Fr(D)* té equació $g(x_1, \dots, x_n)=0 \Rightarrow$ punts crítics de f condicionats per $g(x_1, \dots, x_n)=0$.

Càlcul dels punts crítics condicionats pel cas $n = 2$

Cas 1

f, g de classe C^1 $\Rightarrow$
- Mètode de Lagrange (*L(x,y,λ)=f(x,y)+ λ· g(x,y)*),
- O, si es pot aïllar $y=\phi(x)$ a partir de $g(x,y)=0$ [(1)], s'aïlla, se substitueix a *f(x,y)* i es busquen els punts crítics de $f_0(x)=f(x, \phi(x))$, resolent $f_0'(x)=0$.

Cas 2

f de classe C^1
g de classe C^1 "a trossos"

$\Rightarrow$ **i)** En cada tros es fa:
- Mètode de Lagrange (L(x,y,λ)=f(x,y)+ λ· g(x,y)),
- O, si es pot aïllar y= $\phi(x)$ a partir de $g(x,y)=0$ [(1)], s'aïlla, se substitueix a *f(x,y)* i es busquen els punts crítics de $f_0(x)=f(x, \phi(x))$, resolent $f_0'(x)=0$.

ii) *Vèrtexs (punts on es canvia de "tros")*

3) **Avaluació de f en tots els punts trobats en 1) i 2)**:

f (punts crítics interiors)
f (punts crítics a la frontera)
f (vèrtexs) (Cas 2)

$(x_1{}^m, \dots, x_n{}^m)$ serà/seran, de tots aquests punts, el/els que tingui/n imatge més petita i el valor mínim absolut de f en D serà $f(x_1{}^m, \dots, x_n{}^m)$. $(x_1{}^M, \dots, x_n{}^M)$ serà/seran, de tots aquests punts, el/els que tingui/n imatge més gran i el valor màxim absolut de f en D serà $f(x_1{}^M, \dots, x_n{}^M)$

[(1)] Només si *g(x,y)* és lineal en *y*. *Si no és lineal en y però sí és lineal en x, s'aïlla x= ϕ(y) a partir de g(x,y)=0, se substitueix a f(x,y) i es busquen els punts crítics de* $f_0(y)=f(\phi(y),y)$, *resolent* $f_0'(y)=0$. *Si no és lineal ni en x ni en y, llavors Mètode de Lagrange.*