Taller M2: OPTIMITZACIÓ

2019-20, M2, FIB

TALLER 10.2

$with(Student[VectorCalculus])$:
$with(Student[MultivariateCalculus])$:

Problema 7

7 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x,y) = x^2 + y^2$,

a) Calculeu i classifiqueu els extrems relatius de f en el seu domini.

b) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el conjunt

$$\mathcal{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \le 1 - x^2 , \quad y \ge x - 1\right\}.$$

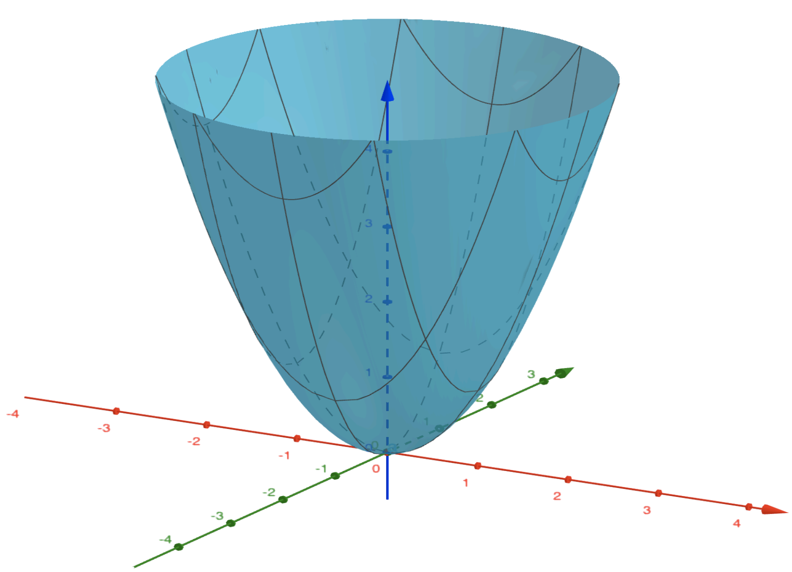
c) Determineu tots els candidats a màxim i a mínim absoluts de f en el recinte $\mathcal{K}$.

d) Trieu els punts on f pren els valors màxim i mínim absoluts en $\mathcal{K}$ i digueu quins són els valors màxim i mími de f en $\mathcal{K}$.

a)

$f := (x,y) \to x^2 + y^2$

$$f := (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \qquad \textbf{(1.1.1.1)}$$



Derivades parcials

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$2\,x \tag{1.1.1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$2\,y \tag{1.1.1.3}$$

$$Gradient(f(x, y), [x, y])$$

$$\begin{bmatrix} 2\,x \\ 2\,y \end{bmatrix} \tag{1.1.1.4}$$

Punts crítics

$$P := [0, 0]$$

$$P := [0, 0] \tag{1.1.1.5}$$

Derivades segones

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$$

$$2 \tag{1.1.1.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$$

$$2 \tag{1.1.1.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x, y)$$

$$0 \tag{1.1.1.8}$$

Matriu Hessiana en els punts crítics

$$Hessian(f(x, y), [x, y] = P)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.1.1.9}$$

Té determinant positiu i coeficient (1,1) positiu

P=(0,0) és mínim relatiu de f

Observem:

Atès que en aquest cas particular la funció és $f(x, y) = x^2 + y^2$, ja veiem que $(0, 0)$ és mínim absolut de f.

b)

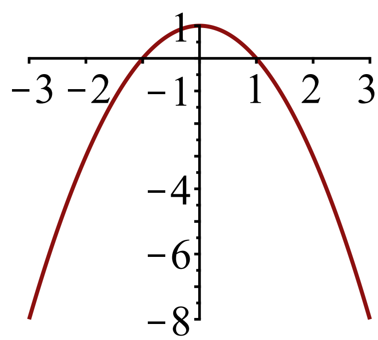
> **Teorema de Weierstrass**
>
> $f: K \to \mathbb{R}$ contínua
> $\Rightarrow$ f té màxim i mínim absoluts en K
> $K \subseteq \mathbb{R}^2$ conjunt compacte

f és una funció **contínua** a tot $\mathbb{R}^2$ perquè és una funció polinòmica.

Regió $y \leq 1 - x^2$

1. Corba: $y = 1 - x^2$ és una paràbola

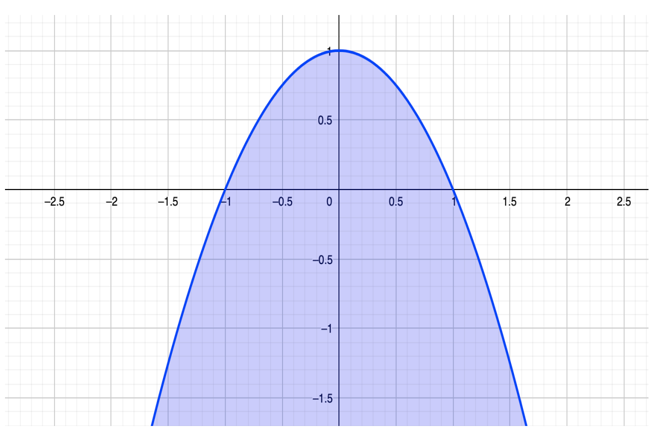
$plot(1 - x^2, x = -3..3)$



2. Regió: Comprovem per exemple el punt $(0, 0)$

$$0 \leq 1 - 0$$

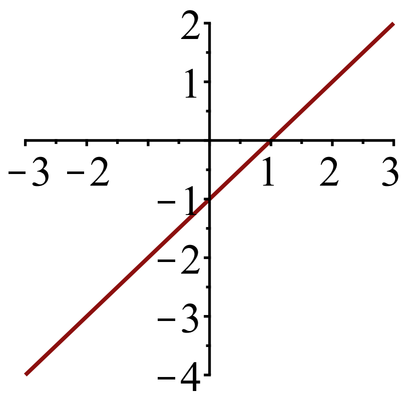
Per tant, es tracta de la regió que conté el punt (0,0)



Regió $y \geq x - 1$

1. <u>Corba</u>: $y = x - 1$ és una recta

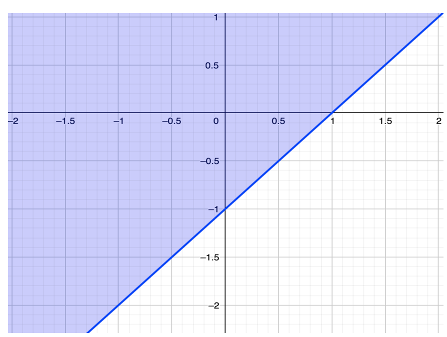
$plot(x - 1, x = -3..3)$



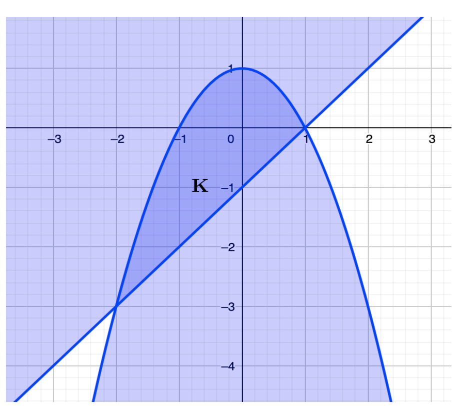
2. <u>Regió</u>: Comprovem per exemple el punt $(0, 0)$

$$0 \geq 0 - 1$$

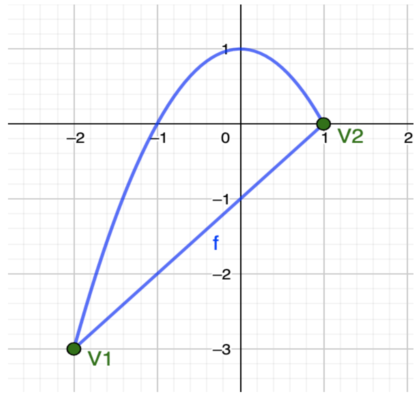
Per tant, es tracta de la regió que conté el punt (0,0)



Conjunt K



• És **<u>tancat,</u>** perquè conté els punts frontera



Trobem els punts de tall

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Longrightarrow 1 - x^2 = x - 1 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -2,1$$

$$\downarrow$$

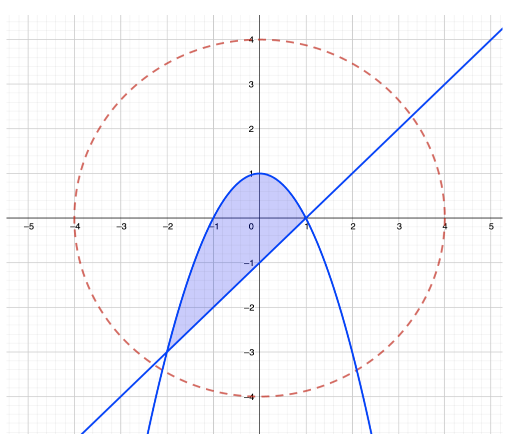
$$y = -3,0$$

Punts V1=(-2,-3) V2=(1,0)

Frontera:

$\delta K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2, \ -2 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1, \ -2 \leq x \leq 1\}$
$\delta K =$ arc de paràbola $\cup$ segment

• És **fitat**: hi ha algun disc que el conté, per exemple el de centre $(0, 0)$ i radi 4



Per tant, K és un conjunt **compacte** f contínua i K compacte ⇒ f té màxim i mínim absoluts en K

c)

Candidats

Vèrtexs V1=(-2,-3)
V2=(1,0)

Extrems relatius de f a l'interior de K
P=(0,0)

Extrems condicionats a la frontera de K

Arc de paràbola: $y = 1 - x^2 \Rightarrow \mathbf{x^2 + y - 1 = 0}$ Condició igualada a **zero** SEMPRE

Funció auxiliar

$$F := (x, y, \lambda) \rightarrow x^2 + y^2 + \lambda \cdot (x^2 + y - 1)$$

$$F := (x, y, \lambda) \mapsto x^2 + y^2 + (\lambda (x^2 + y - 1)) \quad \textbf{(1.1.3.1)}$$

Derivades parcials

$$dx := diff(F(x, y, \lambda), x)$$

$$dx := 2 \lambda x + 2 x \quad \textbf{(1.1.3.2)}$$

$$dy := diff(F(x, y, \lambda), y)$$

$$dy := 2 y + \lambda \quad \textbf{(1.1.3.3)}$$

$$dl := diff(F(x, y, \lambda), \lambda)$$

$$dl := x^2 + y - 1 \quad \textbf{(1.1.3.4)}$$

Punts crítics

$$Gradient(F(x, y, \lambda), [x, y, \lambda])$$

$$\begin{bmatrix} 2 \lambda x + 2 x \\ 2 y + \lambda \\ x^2 + y - 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.3.5)}$$

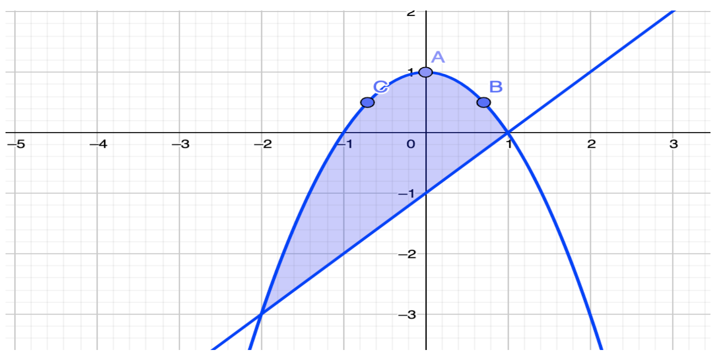
$$2\lambda x + 2x = 0 \implies 2x(\lambda+1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 & 0^2 + y - 1 = 0 \implies y = 1 \\ \lambda = -1 & 2y - 1 = 0 \implies y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$2y + \lambda = 0$$

$$x^2 + y - 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2} - 1 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{2} \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Candidats $(0,\ 1)$, $(\pm\ 1/\sqrt{2},\ \ 1/2)$



Segment: $y = x - 1 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{x - y - 1 = 0}$ Condició igualada a **zero** SEMPRE

Funció auxiliar

$F := (x, y, \lambda) \to x^2 + y^2 + \lambda \cdot (x - y - 1)$

$$F := (x, y, \lambda) \mapsto x^2 + y^2 + (\lambda\ (x + (-y) - 1)) \tag{1.1.3.6}$$

Derivades parcials

$dx := diff(F(x, y, \lambda), x)$

$$dx := 2\,x + \lambda \tag{1.1.3.7}$$

$dy := diff(F(x, y, \lambda), y)$

$$dy := 2\,y - \lambda \tag{1.1.3.8}$$

$dl := diff(F(x, y, \lambda), \lambda)$

$$dl := x - y - 1 \tag{1.1.3.9}$$

$Gradient(F(x, y, \lambda), [x, y, \lambda])$

$$\begin{bmatrix} 2x+\lambda \\ 2y-\lambda \\ x-y-1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.3.10)}$$

$$\begin{matrix} 2x+\lambda=0 \\ 2y-\lambda=0 \end{matrix} \implies 2x+2y=0 \implies x=-y \implies 2x=1 \implies x=\frac{1}{2}$$

$$x-y-1=0$$

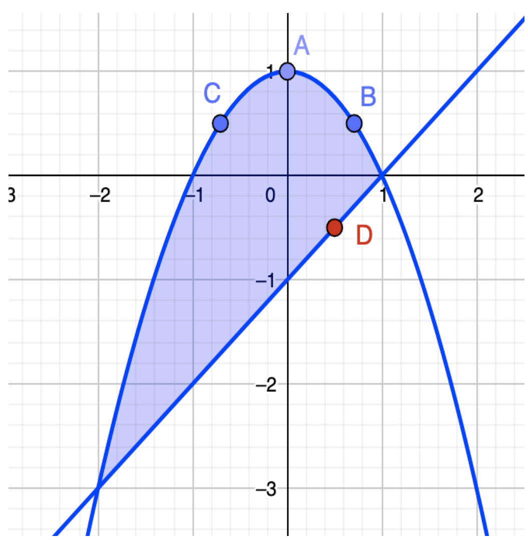
$$y=-x=-\frac{1}{2}$$

solve$(\{dx, dy, dl\})$

$$\left\{\lambda=-1, x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}\right\} \qquad \textbf{(1.1.3.11)}$$

Observeu que el valor de λ no és necessari, només volem el punt crític (x, y)

Candidat (1/2, -1/2)



Observem

Podem trobar els extrems sobre la frontera de la manera alternativa següent (perquè en tots dos casos és senzill aïllar una variable)

Paràbola

$f(x, 1-x^2)$

$$x^2+\left(-x^2+1\right)^2 \tag{1.1.3.12}$$

$g := x \rightarrow x^2+\left(1-x^2\right)^2$

$$g := x \mapsto x^2+\left(1+\left(-x^2\right)\right)^2 \tag{1.1.3.13}$$

$g'(x)$

$$2x-4\left(-x^2+1\right)x \tag{1.1.3.14}$$

$expand(\%)$

$$4x^3-2x \tag{1.1.3.15}$$

$solve\left(4x^3-2x=0\right)$

$$0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1.1.3.16}$$

Punts crítcs de g. Fent $y=1-x^2$ obtenim els punts A, B, C

Segment

$f(x, x-1)$

$$x^2+(x-1)^2 \tag{1.1.3.17}$$

$h := x \rightarrow x^2+(x-1)^2$

$$h := x \mapsto x^2+(x-1)^2 \tag{1.1.3.18}$$

$h'(x)$

$$4x-2 \tag{1.1.3.19}$$

$solve(4x-2=0)$

$$\frac{1}{2} \tag{1.1.3.20}$$

Punt crítc de h. Fent $y=x-1$ obtenim el punt D.

Candidats

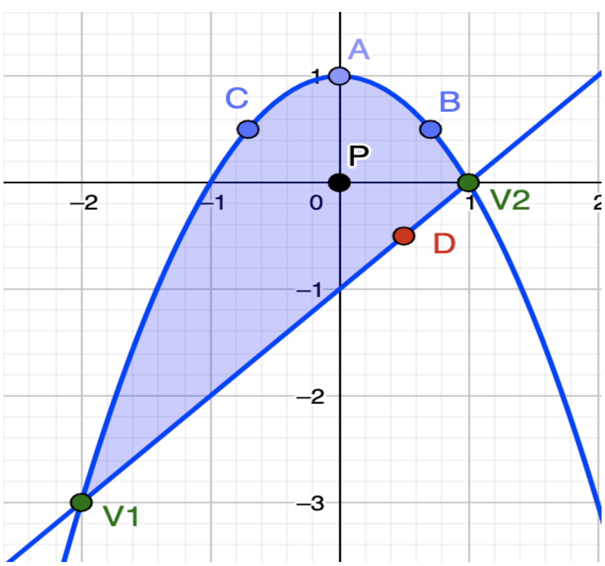
Vèrtexs V1=(-2,-3)
V2=(1,0)

Extrems relatius de f a l'interior de K
P=(0,0)

Extrems condicionats a la frontera de K

A=(0,1) B=($1/\sqrt{2}$, 1/2) C=($-1/\sqrt{2}$,1/2)

D=(1/2, -1/2)



d)

Avaluem la funció en cadascun dels punts de la llista de candidats i mirem quin és el més gran i quin el més petit.

Punt (x,y)	f(x,y)
V1=(-2,-3)	$f(-2,-3)$ 13 **(1.1.4.1)**
V2=(1,0)	$f(1,0)$ 1 **(1.1.4.2)**
A=(0,1)	$f(0,1)$ 1 **(1.1.4.3)**
B=(1/$\sqrt{2}$, 1/2)	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$ $\frac{3}{4}$ **(1.1.4.4)**
C=(-1/$\sqrt{2}$, 1/2)	$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$ $\frac{3}{4}$ **(1.1.4.5)**
D=(1/2, -1/2)	$f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ $\frac{1}{2}$ **(1.1.4.6)**
P=(0,0)	$f(0,0)$ 0 **(1.1.4.7)**

El **màxim** de f en K és V1=(-2,-3). El valor màxim de la funció sobre K és 13

El **mínim** de f en K és P=(0,0). El valor mínim de la funció sobre K és 0

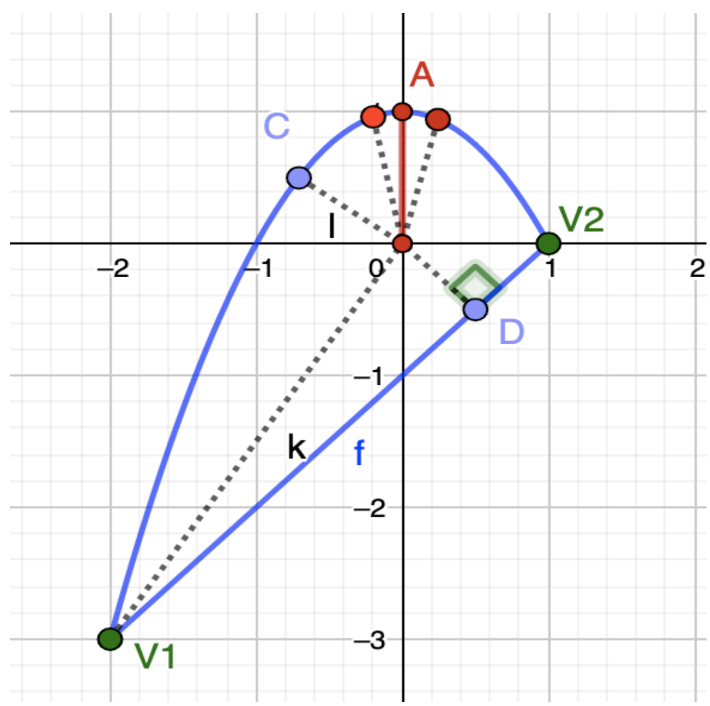
Observem:

La funció $f(x, y) = x^2 + y^2$ dóna el quadrat de la distància del punt (x, y) al punt $(0, 0)$

Dels punts del conjunt K, el que està més a prop del $(0, 0)$ és el propi $(0, 0)$ i el que està més lluny és el vèrtex $V1 = (-2, -3)$.

A l'arc de paràbola, el punt A és un màxim relatiu, observeu que els punts del seu voltant estan més a prop del $(0, 0)$ que el punt A. Els punts B i C són els punts de l'arc de paràbola més propers a l'origen.

El punt D és el punt del segment més proper a l'origen. Seria el punt que ens donaria la distància entre el punt $(0, 0)$ i la recta $y = x - 1$. La recta PD és perpendicular a la recta $y = x - 1$



Problema 8

8 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x,y) = x^4 + y^2$,

a) Calculeu i classifiqueu els extrems relatius de f en el seu domini.

b) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el recinte

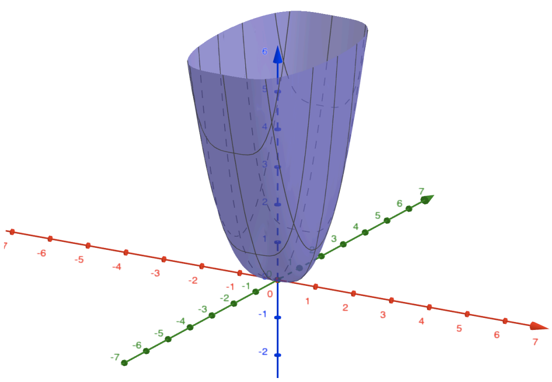
$$\mathcal{K} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1 \,, \quad y \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

c) Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de f en el recinte $\mathcal{K}$.

$f := (x, y) \to x^4 + y^2$

$$f := (x, y) \mapsto x^4 + y^2 \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

És una funció polinòmica i, per tant, el seu domini és tot $\mathbb{R}^2$



a)

$diff(f(x, y), x)$

$$4\,x^3 \qquad \textbf{(1.2.1.1)}$$

$diff(f(x, y), y)$

$$2\,y \qquad \textbf{(1.2.1.2)}$$

L'únic punt crític és $P = (0, 0)$

$diff(f(x, y), x, x)$

$$12\,x^2 \qquad \textbf{(1.2.1.3)}$$

$diff(f(x, y), y, y)$

$$2 \qquad \textbf{(1.2.1.4)}$$

$diff(f(x, y), x, y)$

$$0 \tag{1.2.1.5}$$

$Hessian(f(x, y), [x, y] = [0, 0])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.2.1.6}$$

Té determinant zero i, per tant, el criteri de la matriu hessiana no decideix.
Tenim
$f(0, 0)$

$$0 \tag{1.2.1.7}$$

$f(x, y)$

$$x^4 + y^2 \tag{1.2.1.8}$$

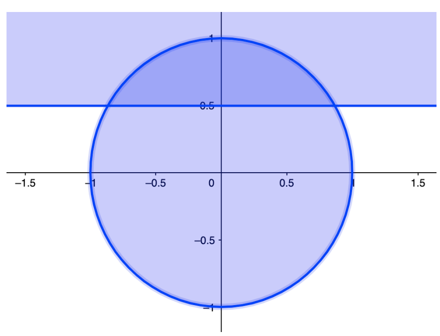
Per ser una suma de potències parells, la funció sempre pren valors positius.

El punt $P = (0, 0)$ és mínim absolut de f

b)

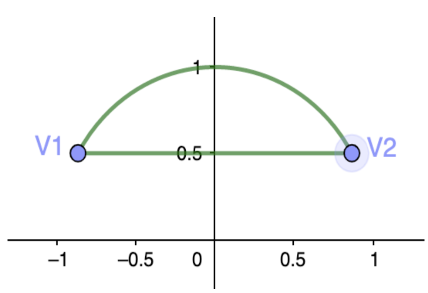
La funció f és polinòmica i, per tant, contínua a tot $\mathbb{R}^2$

El conjunt K és la intersecció del cercle de centre $(0, 0)$ i radi 1 amb el semiplà $y \geq \frac{1}{2}$



És un conjunt **fitat**, està contingut dins d'un cercle.
És un conjut **tancat**, conté els seus punts frontera.

La frontera és la unió d'un arc de circumferència i un segment.



Els vèrtexs, punts d'intersecció de circumferència i recta, tenen coordenada $y = \frac{1}{2}$

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\delta K = \left\{ (x,y) : \; x^2 = 1 - y^2, \; \frac{1}{2} \le y \le 1 \right\} \cup \left\{ \left(x, \frac{1}{2}\right), \; -\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

La funció f és contínua i el conjunt K és compacte. Pel teorema de Weierstrass, f té màxim i mínim en K

c)

Candidats

Vèrtexs V1=($-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$)

V2=($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$)

Extrems relatius de f a l'interior de K: **CAP perquè** P=(0,0) **no pertany** a K

Extrems condicionats a la frontera de K

<u>Arc de circumferència</u>

$$F := (x, y, \lambda) \rightarrow x^4 + y^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$$

$$F := (x, y, \lambda) \mapsto x^4 + y^2 + (\lambda\,(x^2 + y^2 - 1)) \tag{1.2.3.1}$$

$$Gradient(F(x, y, \lambda), [x, y, \lambda])$$

$$\begin{bmatrix} 4x^3 + 2\lambda x \\ 2\lambda y + 2y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.3.2}$$

$$\begin{cases} 4x^3 + 2\lambda x = 0 \\ 2\lambda y + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow 2y(\lambda + 1) = 0$$

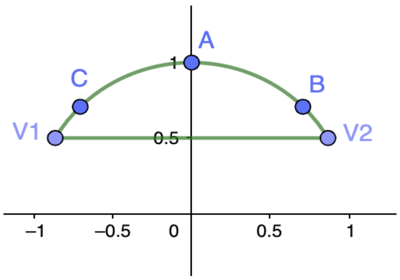
$\lambda = -1$, $4x^3 + 2\lambda x = 0 \longrightarrow 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0$:
- $x = 0 \longrightarrow y = \pm 1$
- $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm 1$

Punts: (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0), ($1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$), ($1/\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}$), ($-1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$), ($-1/\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}$)

Els punts crítics de la funció F que **pertanyen al conjunt K** són

A=(0,1), B=$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, C=$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



<u>Segment</u>

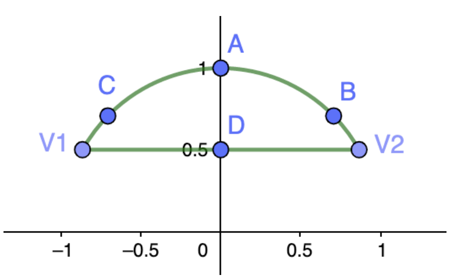
$F := (x, y, \lambda) \rightarrow x^4 + y^2 + \lambda \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)$

$$F := (x, y, \lambda) \mapsto x^4 + y^2 + \lambda \left(y + \left(-2^{-1}\right)\right) \quad \textbf{(1.2.3.3)}$$

$Gradient(F(x, y, \lambda), [x, y, \lambda])$

$$\begin{bmatrix} 4x^3 \\ 2y + \lambda \\ y - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.3.4)}$$

El punt crític de la funció F és D = $\left(0, \frac{1}{2}\right)$



Observem que D també es pot trobar usant buscant els punts crítics de

$g(x) = f\left(x, \frac{1}{2}\right) = x^4 + \frac{1}{4}$

Candidats

Vèrtexs V1=($-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$) V2=($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$)

Extrems condicionats a la frontera de K

A=(0,1) B=$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, C=$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ D=(0, 1/2)

Avaluem la funció en cadascun dels punts de la llista de candidats i mirem quin és el més gran i quin el més petit.

Punt (x,y)	f(x,y)
V1=$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\frac{13}{16}$ **(1.2.3.5)**
V2=$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\frac{13}{16}$ **(1.2.3.6)**
A=(0,1)	$f(0,1)$ 1 **(1.2.3.7)**
B=(1/$\sqrt{2}$,1/$\sqrt{2}$)	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\frac{3}{4}$ **(1.2.3.8)**
B=(-1/$\sqrt{2}$,1/$\sqrt{2}$)	$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\frac{3}{4}$ **(1.2.3.9)**
D=(0,1/2)	$f\left(0, \frac{1}{2}\right)$ $\frac{1}{4}$ **(1.2.3.10)**

El **màxim** de f en K és A= (0,1). El valor màxim de la funció sobre K és 1

El valor mínim de la funció sobre K és 1/4

Problema 9

9 Trobeu els punts de la circumferència $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 16$ tals que la suma de les seves coordenades sigui màxima i mínima, respectivament.

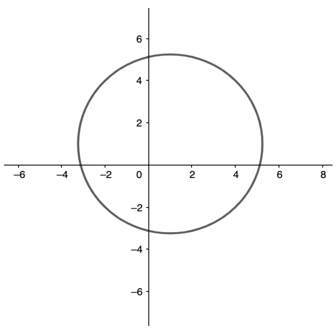
La funció a minimitzar és la suma de coordenades dels punts.

$f := (x, y) \rightarrow x + y$

$$f := (x, y) \mapsto x + y \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

La condició que han de satisfer els punts és $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 16 = 0$

La funció f és contínua i els punts de la circumferència formen un conjunt compacte.



Pel teorema de Weierstrass sabem que f assloeix màxim i mínim sobre la circumferència.
No hi ha vèrtexs i tots els punts del conjunt són punts frontera.

La funció auxiliar és

$F := (x, y, \lambda) \rightarrow x + y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 2x - 2y - 16)$

$$F := (x, y, \lambda) \mapsto x + y + (\lambda (x^2 + y^2 + (-2x) + (-2y) - 16)) \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

Busquem els punts crítics

$Gradient(F(x, y, \lambda), [x, y, \lambda])$

$$\begin{bmatrix} 1 + \lambda (2x - 2) \\ 1 + \lambda (2y - 2) \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 16 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

(Observem que $\lambda \neq 0$)

Aïllem x en la primera equació

$solve(1 + \lambda (2x - 2), x)$

$$\frac{-1 + 2\lambda}{2\lambda} \qquad \textbf{(1.3.4)}$$

Aïllem y en la segona equació

$solve(1+\lambda\,(2\,y-2), y)$

$$\frac{-1+2\,\lambda}{2\,\lambda} \tag{1.3.5}$$

Substituïm a la tercera equació

$subs\left(\left\{x=\frac{-1+2\,\lambda}{2\,\lambda}, y=\frac{-1+2\,\lambda}{2\,\lambda}\right\}, x^2+y^2-2\,x-2\,y-16\right)$

$$\frac{(-1+2\,\lambda)^2}{2\,\lambda^2}-\frac{2\,(-1+2\,\lambda)}{\lambda}-16 \tag{1.3.6}$$

$simplify(\%)$

$$\frac{-36\,\lambda^2+1}{2\,\lambda^2} \tag{1.3.7}$$

$\lambda^2=\frac{1}{36} \Rightarrow \lambda=\pm\,\frac{1}{6}$

$subs\left(\lambda=\frac{1}{6}, \frac{-1+2\,\lambda}{2\,\lambda}\right)$

$$-2 \tag{1.3.8}$$

$P := [-2,-2]$

$$P := [-2, -2] \tag{1.3.9}$$

$subs\left(\lambda=-\frac{1}{6}, \frac{-1+2\,\lambda}{2\,\lambda}\right)$

$$4 \tag{1.3.10}$$

$Q := [4, 4]$

$$Q := [4, 4] \tag{1.3.11}$$

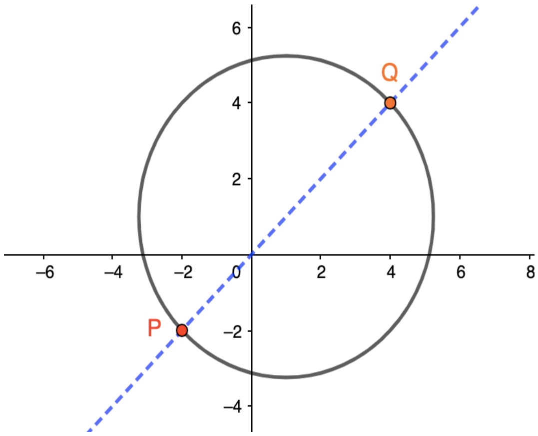
Només tenim dos candidats, en un s'assoleix el valor màxim absolut i en l'altre el valor mínim absolut.

$f(-2,-2)$

$$-4 \tag{1.3.12}$$

$f(4, 4)$

$$8 \tag{1.3.13}$$



Dels punts de la circumferència, la suma de coordenades pren el valor mínim en P i el valor màxim en Q.

Problema 10

10 Trobeu els punts de la corba intersecció de la superfície $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ i la superfície $x^2 + y^2 = 1$ que són més a prop a l'origen de coordenades.

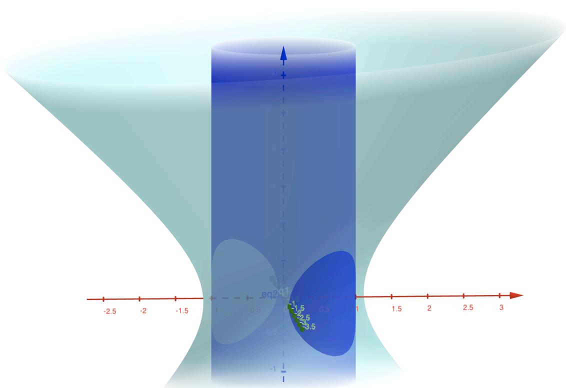
La funció a minimitzar és la distància a l'origen de coordenades.

$f := (x, y, z) \to \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$f := (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

que és una funció contínua.

Les condicions que han de satisfer els punts són $x^2 - x \cdot y + y^2 - z^2 - 1 = 0$ i $x^2 + y^2 - 1 = 0$



Els punts d'aquesta corba formen un conjunt tancat i fitat de $\mathbb{R}^3$:

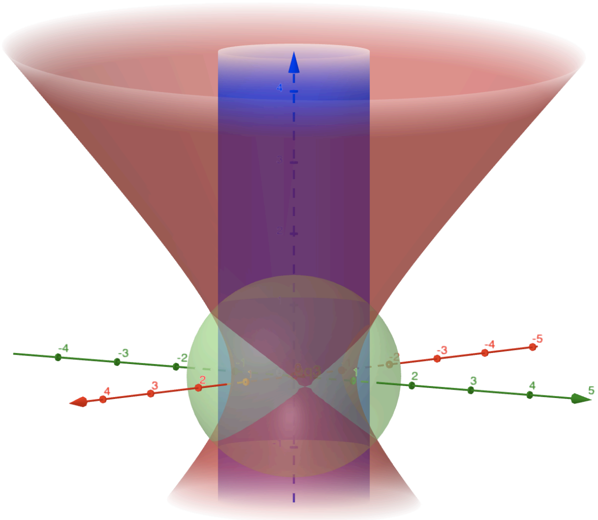
Corba $\Rightarrow$ No hi ha punts interiors $\Rightarrow$ Tots els punts són frontera $\Rightarrow$ conjunt tancat

$x^2 + y^2 - 1 = 0$
$x^2 - x \cdot y + y^2 - z^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 - z^2 - x \cdot y = 0 \Rightarrow z^2 = -x\, y$

De la primera condició deduïm que x, y fitades: $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$
Aleshores, de la segona condició $|z^2| = |-x\, y| = |x|\, |y| \leq 1$ obtenim que els valors de z també estan fitats.

La corba està dins de l'esfera de centre $(0, 0, 0)$ i radi 2.

$\Rightarrow$El conjunt de punts de la corba és un conjunt <u>compacte</u>



Pel teorema de Weierstrass sabem que f assloeix màxim i mínim sobre la corba.
No hi ha vèrtexs i tots els punts del conjunt són punts frontera.

Usem l'expressió de la corba com a intersecció de $x^2+y^2-1=0$ i $z^2+xy=0$
Tenim dues condicions i per tant hem de posar dos multiplicadors.

La funció auxiliar és

$F := (x, y, z, \lambda, \mu) \rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \lambda \cdot (x \cdot y + z^2) + \mu \cdot (x^2+y^2-1)$

$$F := (x, y, z, \lambda, \mu) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \lambda\,(x\,y + z^2) + (\mu\,(x^2+y^2-1)) \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

Busquem els punts crítics

$Gradient(F(x, y, z, \lambda, \mu), [x, y, z, \lambda, \mu])$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \lambda\,y + 2\,\mu\,x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \lambda\,x + 2\,\mu\,y \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 2\,\lambda\,z \\ x\,y + z^2 \\ x^2+y^2-1 \end{array}\right] \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

En realitat, podem minimitzar el quadrat de la distància

$f := (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + z^2$

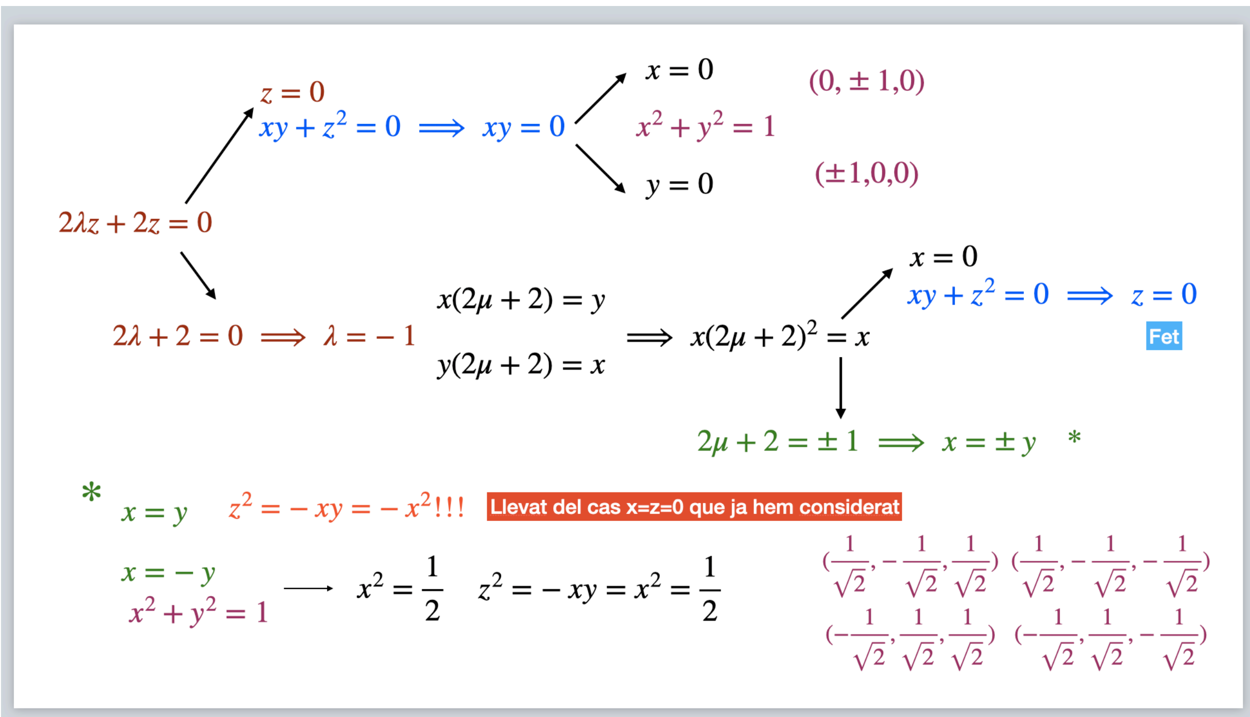
$$f := (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.4.4}$$

$F := (x, y, z, \lambda, \mu) \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \cdot (x \cdot y + z^2) + \mu \cdot (x^2 + y^2 - 1)$

$$F := (x, y, z, \lambda, \mu) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\,(x\,y + z^2) + (\mu\,(x^2 + y^2 - 1)) \tag{1.4.5}$$

$\mathit{Gradient}(F(x, y, z, \lambda, \mu), [x, y, z, \lambda, \mu])$

$$\begin{bmatrix} \lambda\,y + 2\,\mu\,x + 2\,x \\ \lambda\,x + 2\,\mu\,y + 2\,y \\ 2\,\lambda\,z + 2\,z \\ x\,y + z^2 \\ x^2 + y^2 - 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.6}$$



Avaluem la funció en cadascun dels punts de la llista de candidats i mirem quin és el més gran i quin el més petit.

Punt (x,y)	f(x,y)
$(0, 1, 0)$	$f(0, 1, 0)$ 1 **(1.4.7)**
$(0, -1, 0)$	$f(0, -1, 0)$ 1 **(1.4.8)**
$(\pm 1, 0, 0)$	$f(1, 0, 0)$ 1 **(1.4.9)**
$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\frac{3}{2}$ **(1.4.10)**

Els punts $(0, \pm 1, 0)$ i els punts $(\pm 1, 0, 0)$ són els punts de la corba que estan més a prop de l'origen. Estan a distància 1.

Els punts

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

són els punts de la corba que estan més lluny de l'origen. Estan a distància $\sqrt{1.5}$

Problema 11

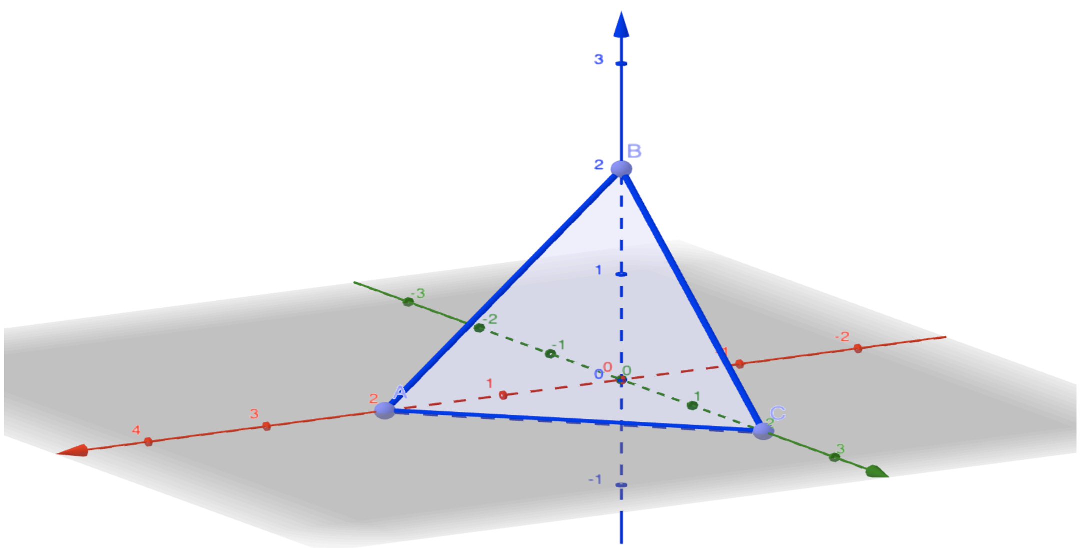
11 Tres germans de 40, 45 i 50 anys respectivament han de repartir-se una herència de 20.000.000 euros. La llei de successions del país diu que els impostos a pagar per cada germà són proporcionals a la seva edat i al quadrat de la quantitat rebuda. Obteniu la part de l'herència que ha de rebre cada germà per tal que la quantitat conjunta pagada a hisenda pels tres germans sigui mínima.

El que volem minimitzar és la funció de pagament

$f := (x, y, z) \rightarrow k(40\,x^2 + 45\,y^2 + 50\,z^2)$

$$f := (x, y, z) \mapsto k(40\,x^2 + 45\,y^2 + 50\,z^2) \qquad \textbf{(1.5.1)}$$

La condició és $x + y + z = 20.000.000$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, del pla ens quedem amb la part que està al primer quadrant.



$f := (x, y, z) \rightarrow k(40\,x^2 + 45\,y^2 + 50\,z^2)$ Però minimitzar amb el factor de proporcionalitat o sense és el mateix.

$f := (x, y, z) \rightarrow 40\,x^2 + 45\,y^2 + 50\,z^2$

$$f := (x, y, z) \mapsto 40\,x^2 + 45\,y^2 + 50\,z^2 \qquad \textbf{(1.5.2)}$$

Es tracta d'una funció contínua (polinòmica) sobre un conjunt tancat i fitat, el triangle del l'espai determinat pels vèrtexs

$A = (2\cdot 10^7, 0, 0)$, $B = (0, 0, 2\cdot 10^7)$, $C = (0, 2\cdot 10^7, 0)$.

VÈRTEXS

$p1 := f(2 \cdot 10^7, 0, 0)$

$$p1 := 16000000000000000 \quad (1.5.3)$$

$p2 := f(0, 2 \cdot 10^7, 0)$

$$p2 := 18000000000000000 \quad (1.5.4)$$

$p3 := f(0, 0, 2 \cdot 10^7)$

$$p3 := 20000000000000000 \quad (1.5.5)$$

$sort([p1, p2, p3])$

$$[16000000000000000, 18000000000000000, 20000000000000000] \quad (1.5.6)$$

Podríem pensar a considerar els segments... però en realitat aquest conjunt "no té volum", no hi ha punts interiors, tots els punts són punts frontera.

AMB MULTIPLICADORS DE LAGRANGE

$F := (x, y, z, \lambda) \rightarrow 40\,x^2 + 45\,y^2 + 50\,z^2 + \lambda \cdot (x + y + z - 2 \cdot 10^7)$

$$F := (x, y, z, \lambda) \mapsto 40\,x^2 + 45\,y^2 + 50\,z^2 + \lambda\,(x + y + z + (-2 \cdot 10000000)) \quad (1.5.7)$$

<u>Punts crítics</u>

$Gradient(F(x, y, z, \lambda), [x, y, z, \lambda])$

$$\begin{bmatrix} 80\,x + \lambda \\ 90\,y + \lambda \\ 100\,z + \lambda \\ x + y + z - 20000000 \end{bmatrix} \quad (1.5.8)$$

$x = \frac{-\lambda}{80}, y = \frac{-\lambda}{90}, z = \frac{-\lambda}{100}$

$solve\left(\frac{-\lambda}{80} + \frac{-\lambda}{90} + \frac{-\lambda}{100} - 2 \cdot 10^7 = 0, \lambda\right)$

$$-\frac{72000000000}{121} \quad (1.5.9)$$

$\lambda := -\frac{72000000000}{121}$

$$\lambda := -\frac{72000000000}{121} \tag{1.5.10}$$

$P = \left(\frac{-\lambda}{80}, \frac{-\lambda}{90}, \frac{-\lambda}{100}\right)$

$$P = \left(\frac{900000000}{121}, \frac{800000000}{121}, \frac{720000000}{121}\right) \tag{1.5.11}$$

$f\left(\frac{900000000}{121}, \frac{800000000}{121}, \frac{720000000}{121}\right)$

$$\frac{720000000000000000}{121} \tag{1.5.12}$$

$evalf(\%)$

$$5.950413223\ 10^{15} \tag{1.5.13}$$

$evalf([p1, p2, p3])$

$$[1.600000000\ 10^{16}, 1.800000000\ 10^{16}, 2.000000000\ 10^{16}] \tag{1.5.14}$$

El màxim de f correspondria a deixar tota l'herència al germà gran, el vèrtex B.

Per minimitzar el pagament, el germà més jove ha de rebre $\frac{900000000}{121}$ euros, el mitjà $\frac{800000000}{121}$ euros i el més gran $\frac{720000000}{121}$ euros

SENSE MULTIPLICADORS DE LAGRANGE

$g := (x, y) \rightarrow f(x, y, 20000000 - x - y)$

$$g := (x, y) \mapsto f(x, y, 20000000 + (-x) + (-y)) \tag{1.5.15}$$

$g(x, y)$

$$40\,x^2 + 45\,y^2 + 50\,(20000000 - x - y)^2 \tag{1.5.16}$$

Punts crítics

$Gradient(g(x, y), [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 180\,x - 2000000000 + 100\,y \\ 190\,y - 2000000000 + 100\,x \end{bmatrix} \tag{1.5.17}$$

Resolem el sistema lineal

$solve(\{180\,x - 2000000000 + 100\,y, 190\,y - 2000000000 + 100\,x\}, \{x, y\})$

$$\left\{x = \frac{900000000}{121}, y = \frac{800000000}{121}\right\} \qquad \textbf{(1.5.18)}$$

El repartiment de l'herència és, com abans,

$\left[\frac{900000000}{121}, \frac{800000000}{121}, 20000000 - \frac{900000000}{121} - \frac{800000000}{121}\right]$

$$\left[\frac{900000000}{121}, \frac{800000000}{121}, \frac{720000000}{121}\right] \qquad \textbf{(1.5.19)}$$