Capítulo 9

Fórmula de Taylor. Extremos relativos.

9.1 Problemas

1. Donada la funció $f(x,y) = \ln(1+2x+3y)$:

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 per a f en el punt $(0,0)$.

b) Utilitzant el polinomi obtingut, calculeu un valor aproximat per a $f(1/10, 1/10)$ i fiteu l'error.

Solución.
a) Para determinar el polynomio de Taylor de grado dos en el origen de la función f, calculamos el valor de la función y de las derivadas de primer y segundo orden en el punto $M = (0,0)$.
Después de un cálculo directo obtenemos

$$\begin{aligned}
f(x,y) = &\quad \ln(1+2x+3y) &\Longrightarrow f(0,0) = 0,\\
f'_x(x,y) = &\quad \frac{2}{1+2x+3y} &\Longrightarrow f'_x(0,0) = 2,\\
f'_y(x,y) = &\quad \frac{3}{1+2x+3y} &\Longrightarrow f'_y(0,0) = 3,\\
f''_{xx}(x,y) = &\quad -\frac{4}{(1+2x+3y)^2} &\Longrightarrow f''_{xx}(0,0) = -4,\\
f''_{yy}(x,y) = &\quad -\frac{9}{(1+2x+3y)^2} &\Longrightarrow f''_{yy}(0,0) = -9,\\
f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = &\quad -\frac{6}{(1+2x+3y)^2} &\Longrightarrow f''_{xy}(0,0) = -9,
\end{aligned}$$

En consecuencia $\quad P_2(x,y) = 2x + 3y - 2x^2 - 6xy - \dfrac{9}{2}y^2.$

b) El valor aproximado de f en el punto (0.1, 0.1) es

$$f(0.1, 0.1) \approx P_2(0.1, 0.1) = 0.2 + 0.3 - 0.02 - 0.06 - 0.045 = 0.375.$$

El error de esta aproximación es $\varepsilon = |f(0.1,0.1) - P_2(0.1,0.1)| = |R_2(0.1,0.1)|$ donde $R_2(0.1,0.1)$ es el resto de Taylor que se calcula como sigue

$$R_2(0.1,0.1) = \frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}\left(\begin{array}{c}3\\k\end{array}\right)\frac{\partial^3 f(\alpha,\beta)}{\partial^k x \partial^{3-k} y}(0.1-0)^k(0.1-0)^{3-k} =$$

$$= f'''_{xxx}(\alpha,\beta)(0.1)^3 + 3f'''_{xxy}(\alpha,\beta)(0.1)^3 + 3f'''_{xyy}(\alpha,\beta)(0.1)^3 + f'''_{yyy}(\alpha,\beta)(0.1)^3,$$

donde $0 \le \alpha \le 0.1$ y $0 \le \beta \le 0.1$.

Calculamos las derivadas de orden 3 y las evaluamos en el punto (α, β)

$$
\begin{aligned}
f'''_{xxx}(x,y) = &\ \frac{16}{(1+2x+3y)^3} \Longrightarrow f'''_{xxx}(\alpha,\beta) = \frac{16}{(1+2\alpha+3\beta)^3} \Longrightarrow f'''_{xxx}(\alpha,\beta) \leq 16,\\
f'''_{xxy}(x,y) = &\ \frac{24}{(1+2x+3y)^3} \Longrightarrow f'''_{xxy}(\alpha,\beta) = \frac{24}{(1+2\alpha+3\beta)^3} \Longrightarrow f'''_{xxy}(\alpha,\beta) \leq 24,\\
f'''_{xyy}(x,y) = &\ \frac{36}{(1+2x+3y)^3} \Longrightarrow f'''_{xyy}(\alpha,\beta) = \frac{36}{(1+2\alpha+3\beta)^3} \Longrightarrow f'''_{xyy}(\alpha,\beta) \leq 36,\\
f'''_{yyy}(x,y) = &\ \frac{54}{(1+2x+3y)^3} \Longrightarrow f'''_{yyy}(\alpha,\beta) = \frac{54}{(1+2\alpha+3\beta)^3} \Longrightarrow f'''_{yyy}(\alpha,\beta) \leq 54,
\end{aligned}
$$

ya que estas expresiones tienen el valor máximo si sus denominadores tienen el valor mínimo, es decie para $\alpha = 0,\ \beta = 0$.
De aquí obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon = &\ |R_2(0.1, 0.1)| \leq \frac{1}{3!}\left(16(0.1)^3 + 3\cdot 24\cdot(0.1)^3 + 3\cdot 36\cdot(0.1)^3 + 54\cdot(0.1)^3\right) =\\
= &\ \frac{(0.1)^3}{3!}(16+72+108+54) = \frac{125}{3}10^{-3} = 10^{-3}41.\bar{6} = 0.041\bar{6}.
\end{aligned}
$$

2. Es demana,

a) Escriviu l'equació del pla tangent a la superfície de $\mathbb{R}^3$ definida per l'equació: $z = \sqrt[3]{x\,y}$, en el punt $P\ (1,\ 1,\ 1)$.

b) Calculeu aproximadament mitjançant un polinomi de Taylor de primer grau la quantitat $\sqrt[3]{0.99\cdot 1.01}$. Calculeu l'error en aquesta aproximació, és a dir doneu una fita superior del residu en aquest càlcul.

Solución. a) La función $f(x,y) = \sqrt[3]{xy} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \in \mathcal{C}^1(P) \Longrightarrow$ existe el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $P(1,1,1)$ y su ecuación es

$$z = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1).$$

Calculamos las derivadas de primer orden y las evaluamos en el punto $(1,1)$:

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) = &\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}, \quad \Longrightarrow \quad f'_x(1,1) = \frac{1}{3},\\
f'_y(x,y) = &\ \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}, \quad \Longrightarrow \quad f'_y(1,1) = \frac{1}{3},
\end{aligned}
$$

Entonces la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $P(1,1,1)$ es $\quad z = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1), \quad$ o lo que es lo mismo $\quad x + y - 3z + 1 = 0.$

b) El polynomio de Taylor de grado 1 en el punto $(1,1)$ coincide con la parte derecha de la ecuación del plano tangente

$$z = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1).$$

En consecuencia el polynomio de Taylor de grado 1 de f en $(1,1)$ es

$$P_1(x,y) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1).$$

Determinamos aproximadamente $\sqrt[3]{0.99 \cdot 1.01}$ utilizando $P_1(x,y)$ del modo siguiente

$$\sqrt[3]{0.99 \cdot 1.01} = f(0.99, 1.01) \approx P_1(0.99, 1.01) = 1 - \frac{0.01}{3} + \frac{0.01}{3} = 1$$

Calculamos el error absoluto en esta aproximación:

$$\varepsilon = |f(0.99, 1.01) - P_1(0.99, 1.01)| = |R_1(0.99, 1.01)| =$$

$$= \frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(\alpha,\beta)(0.99-1)^2 + 2f''_{xy}(\alpha,\beta)(0.99-1)(1.01-1) + f''_{yy}(\alpha,\beta)(1.01-1)^2\right),$$

donde $0.99 \le \alpha \le 1$ y $1 \le \beta \le 1.01$.
Calculamos

$$\begin{aligned}
f''_{xx} &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f''_{xx}(\alpha,\beta) = -\frac{2}{9}\alpha^{-\frac{5}{3}}\beta^{\frac{1}{3}},\\
f''_{yy} &= -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{5}{3}} \Longrightarrow f''_{yy}(\alpha,\beta) = -\frac{2}{9}\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{-\frac{5}{3}},\\
f''_{xy} &= \frac{1}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} \Longrightarrow f''_{xy}(\alpha,\beta) = \frac{1}{9}\alpha^{-\frac{2}{3}}\beta^{-\frac{2}{3}},
\end{aligned}$$

Por lo tanto ‘

$$\begin{aligned}
\varepsilon = &\left|\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(\alpha,\beta)10^{-4} - 2f''_{xy}(\alpha,\beta)10^{-4} + f''_{yy}(\alpha,\beta)10^{-4}\right)\right| = \frac{10^{-4}}{2}\left|-\frac{2}{9}\alpha^{-\frac{5}{3}}\beta^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}\alpha^{-\frac{2}{3}}\beta^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{-\frac{5}{3}}\right|\\
= &\frac{10^{-4}}{9}\left(\alpha^{-\frac{5}{3}}\beta^{\frac{1}{3}} + \alpha^{-\frac{2}{3}}\beta^{-\frac{2}{3}} + \alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{-\frac{5}{3}}\right) = \frac{10^{-4}}{9}\cdot\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{\alpha^{\frac{5}{3}}\beta^{\frac{5}{3}}} = \frac{10^{-4}}{9}\cdot\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\cdot\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

donde $0.99 \le \alpha \le 1$ y $1 \le \beta \le 1.01$. Para encontrar una cota superior del error cometido aumentamos el numerador, sustituyendo $\alpha = 1,\ \beta = 1.01$, y disminuimos el denominador sustituyendo $\alpha = 0.99,\ \beta = 1$ y obtenemos

$$\varepsilon \le \frac{10^{-4}}{9}\cdot\frac{(1.01)^2 + 1\cdot\ 1.01 + 1}{(0.99\cdot 1)^2}\cdot 1^{\frac{1}{3}}\cdot 1.01^{\frac{1}{3}} = \frac{1.0201 + 1.01 + 1}{9\cdot 0.9801}\sqrt[3]{1.01}\cdot 10^{-4} \le \frac{3.0301}{8.8209}\cdot 1.01\cdot 10^{-4} < 0.5\,10^{-4}.$$

3. Trobeu els extrems relatius de les funcions següents. En algun dels punts crítics, el determinant de la matriu hessiana és zero, i, per tant, cal determinar el caràcter del punt fent ús directament de les definicions de màxim, mínim o punt de sella.

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27\,;$

b) $f(x,y) = (x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)^2\,;$

c) $f(x,y) = y^2 - x^3\,;$

d) $f(x,y) = x^2y^2\ (1 - x - y)\,.$

Solución.
a) Para $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ determinamos los puntos críticos de f, que son los puntos donde

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x(x,y) = 3x^2 - 9y = 0 \\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 9x = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot x \\ \cdot y \end{array}\right. - \Longrightarrow 3(x^3 - y^3) = 0 \Longrightarrow 3(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0.$$

Para resolver la última ecuación estudiamos dos casos:
1) $x-y=0$. Entonces $y=x$ y sustituyendo en la primera ecuación del sistema deducimos que $3x^2-9x=0 \Longrightarrow x=0 \quad \text{y} \quad x=3$. Por lo tanto las coordenadas de los puntos críticos son $(0,0)$ y $(3,3)$.
2) $x^2+xy+y^2=0$. Entonces

$$x^2+xy+y^2=\left(x^2+2x\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}\right)+\frac{3y^2}{4}=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}\right)^2=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+\dfrac{y}{2}=0 \\ y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow (x,y)=(0,0).$$

Pasamos a determinar la naturaleza de los puntos críticos. Para ello aplicamos la condición suficiente de extremos relativos.
Calculamos las segundas derivadas, la matriz hesiana y su determinante

$$\begin{array}{l} f''_{xx}(x,y)=6x \\ f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=-9 \\ f''_{yy}(x,y)=6y \end{array} \Longrightarrow H=\left(\begin{array}{cc} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \triangle=\det H=f''_{xx}\,f''_{yy}-f''_{xy}f''_{yx}=f''_{xx}\,f''_{yy}-(f''_{xy})^2=36xy-81.$$

En consecuencia en el punto $(0,0)$ tenemos que

$$\triangle(0,0)=-81<0 \Longrightarrow \nexists \quad \text{extremo} \Longrightarrow (0,0) \text{ es punto silla,}$$

y en el punto $(3,3)$

$$\left\{\begin{array}{l} \triangle(3,3)=36\cdot 9-81>0 \\ f''_{xx}(3,3)=18>0 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{ en } (3,3)\ \exists \text{ mínimo relativo.}$$

b) Para que $f(x,y)=(x^2-2x+4y^2-8y)^2$ determinamos los puntos críticos de f que son los puntos donde

$$\left\{\begin{array}{rr} f'_x(x,y)= & 4(x^2-2x+4y^2-8y)(x-1)=0 \\ f'_y(x,y)= & 16(x^2-2x+4y^2-8y)(y-1)=0 \end{array}\right.$$

Para resolver este sistema estudiamos por separado dos casos:
1)

$$\left\{\begin{array}{l} x-1=0 \\ y-1=0 \end{array}\right. \Longrightarrow (x,y)=(1,1).$$

2) $x^2-2x+4y^2-8y=0$. Observamos que todos los puntos (x,y) que cumplen esta ecuación son puntos críticos de f.
Para determinar la naturaleza de los puntos críticos aplicamos la condición suficiente de extremos relativos.
Calculamos las segundas derivadas

$$\begin{array}{l} f''_{xx}(x,y)=4(x^2-2x+4y^2-8y)+8(x-1)^2, \\ f''_{yy}(x,y)=16(x^2-2x+4y^2-8y)+128(y-1)^2, \\ f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}=32(x-1)(y-1). \end{array}$$

En consecuencia en el punto $(1,1)$ resulta que

$$\det H(1,1)=\det\left(\begin{array}{cc} f''_{xx}(1,1) & f''_{xy}(1,1) \\ f''_{yx}(1,1) & f''_{yy}(1,1) \end{array}\right)=\det\left(\begin{array}{cc} -20 & 0 \\ 0 & -80 \end{array}\right)=1600>0$$

y $f''_{xx}(1,1) = -20 < 0$. Por lo tanto en el punto $(1,1)$ la función f tiene un máximo relativo.
En los puntos críticos que cumplen la ecuación $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y = 0$ tenemos que

$$\det H(x,y)|_{x^2-2x+4y^2-8y=0} = \det \left(\begin{array}{cc} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{array} \right)\Bigg|_{x^2-2x+4y^2-8y=0} =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} 8(x-1)^2 & 32(x-1)(y-1) \\ 32(x-1)(y-1) & 128(y-1)^2 \end{array} \right|_{x^2-2x+4y^2-8y=0} = 0.$$

Por lo tanto el criterio no decide y tenemos que hacer un estudio local. Para determinar la naturaleza de estos puntos aplicamos la definición de extremo relativo.
Por un lado observamos que f es un cuadrado perfecto y por lo tanto $f(x,y) \geq 0 \, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Por otro lado en los puntos críticos donde $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y = 0$ resulta que

$$f(x,y)|_{x^2-2x+4y^2-8y=0} = (x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)^2|_{x^2-2x+4y^2-8y=0} = 0,$$

en consecuencia, por definición, tenemos que en todos los puntos donde $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y = 0$ se tienen mínimos relativos.

c) Para $f(x,y) = y^2 - x^3$, determinamos los puntos críticos de f, que son los puntos donde

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_x(x,y) = -3x^2 = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Para determinar la naturaleza de este punto crítico aplicamos la condición suficiente de extremos relativos.
Calculamos las segundas derivadas, la matriz hesiana y su determinante

$$\begin{array}{l} f''_{xx}(x,y) = -6x \\ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0 \\ f''_{yy}(x,y) = 2 \end{array} \Longrightarrow H = \left(\begin{array}{cc} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \triangle = \det H = f''_{xx} \, f''_{yy} - f(''_{xy})^2 = -12x.$$

Por lo tanto $\triangle(0,0) = 0$ y el criterio no decide. Hacemos un estudio local de f en el entorno del punto $(0,0)$. En primer lugar calculamos $f(0,0) = 0$. En el segundo lugar comparamos el valor de f en el entorno de $(0,0)$ con el valor de $f(0,0) = 0$. En este problema utilizamos el método de restricciones de f a las rectas que pasan por el punto crítico en estudio $(0,0)$. Por ejemplo, estudiamos la restrición de f sobre la recta $y = 0$ y obtenemos que

$$f(x,y)|_{y=0} = f(x,0) = -x^3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} f(x,0) < 0, & \text{si } x > 0 \\ f(x,0) > 0, & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

que significa que en los puntos del eje OX por la derecha del origen $(y = 0, \ x > 0)$ la función f es menor que en el origen y en los puntos del eje OX por la izquierda del origen $(y = 0, \ x < 0)$ la función f es mayor que en el origen. En consecuencia, en el punto $(0,0)$ no existe extremo relativo y $(0,0)$ es punto silla.

d) Para $f(x,y) = x^2y^2(1-x-y) = x^2y^2 - x^3y^2 - x^2y^3$ determinamos los puntos críticos de f que son los puntos donde

$$\left\{ \begin{array}{rl} f'_x(x,y) = & 2xy^2 - 3x^2y^2 - 2xy^3 = xy^2(2-3x-2y) = 0 \\ f'_y(x,y) = & 2x^2y - 2x^3y - 3x^2y^2 = x^2y(2-2x-3y) = 0 \end{array} \right. .$$

Para resolver este sistema estudiamos tres casos:
1) $x = 0$. Observamos que todos los puntos que cumplen esta condición, es decir los punto $(0,y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$ son puntos críticos de f.
2) $y = 0$. Observamos que todos los puntos que cumplen esta condición, es decir los punto $(x,0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ son puntos críticos de f.
3) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - 2 = 0, \\ 2 - 2x - 3y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow x = y = \dfrac{2}{5} \Longrightarrow (x,y) = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\right).$
Para determinar la naturaleza de estos puntos críticos aplicamos la condición suficiente de extremos relativos. Calculamos las segundas derivadas y las evaluamos en estos puntos, obtenemos

$$\begin{array}{rl} f''_{xx}(x,y) = & 2y^2 - 6xy^2 - 2y^3 = 2y^2(1-3x-y) \\ f''_{yy}(x,y) = & 2x^2 - 2x^3 - 6x^2y = 2x^2(1-3y-x), \\ f''_{xy}(x,y) = & 4xy - 6x^2y - 6xy^2 = 2xy(2-3x-3y). \end{array}$$

En consecuencia en el punto $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ resulta que

$$\det H\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \det \begin{pmatrix} f''_{xx}\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) & f''_{xy}\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) \\ f''_{yx}\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) & f''_{yy}\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\dfrac{24}{125} & -\dfrac{16}{125} \\ -\dfrac{16}{125} & -\dfrac{24}{125} \end{pmatrix} = \frac{(24)^2 - (16)^2}{(125)^2} > 0$$

y $f''_{xx}\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{24}{125} < 0$. Por lo tanto en el punto $(1,1)$ la función f tiene un máximo relativo.
En los puntos críticos que cumplen la ecuación $x = 0$ tenemos que

$$\det H(x,y)\big|_{x=0} = \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=0} = \begin{vmatrix} 2y^2(1-y) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

y en los puntos críticos que cumplen la ecuación $y = 0$ tenemos que

$$\det H(x,y)\big|_{y=0} = \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}\Bigg|_{y=0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^2(1-x) \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto en estos casos el criterio no decide y tenemos que hacer un estudio local. Para determinar la naturaleza de estos puntos aplicamos la definición de extremo relativo. En primer lugar calculamos $f(x,y)\big|_{x=0} = 0$ y $f(x,y)\big|_{y=0} = 0$. En segundo lugar comparamos el valor 0 de f en estos puntos con el valor de f en el entorno de estos puntos. Como se trata de un número infinito de puntos no es posible estudiarlos uno a uno. En este problema utilizaremos el método de estudio de la función f "por zonas".
Según este método determinamos todos los puntos donde f tiene la misma imagen que en los puntos críticos en estudio, es decir, los puntos donde f es igual a 0,

$$f(x,y) = x^2y^2(1-x-y) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ y = 0,\ y = 1-x,$$

se trata de tres rectas cuyas gráficas se dan en la Figura 1.
En la Figura 1 observamos que:

• las rectas $x = 0,\ y = 0$ (color negro) y la tercera recta $y = 1 - x$ (color verde) tienen tres puntos de intersección: $(0,0),\ (0,1),\ (1,0)$ y dividen todo el plano $\mathbb{R}^2$ en 7 zonas;

• $x^2y^2 \geq 0 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, es decir en todas 7 zonas, y
$1 - x - y < 0$ si $y > 1 - x$, es decir encima de la recta verde, y
$1 - x - y > 0$ si $y < 1 - x$, es decir debajo de la recta verde.
Por consiguiente,
$f(x,y) \leq 0$ encima de la recta verde, es decir en la región blanca y
$f(x,y) \geq 0$ debajo de la recta verde en la región beige;

• las dos rectas de color negro son rectas de puntos críticos en estudio y la recta de color verde solo contiene dos puntos críticos que son puntos de intersección con las rectas negras. Por lo tanto, además del punto azul $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$, donde existe un máximo relativo, f puede tener extremos relativos solo en los puntos de color negro;

•
$$\left.\begin{array}{l}\text{en los puntos de la región beige } f(x,y) \geq 0 \\ \text{en los puntos negros de la región beige } f(x,y) = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\exists \text{ mínimos relativos de } f \text{ en} \\ \text{los puntos negros de la región beige.}\end{array}$$
Entonces f tiene mínimos relativos en $\forall\,(x,y):\ y = 0,\ x < 1$ y $x = 0,\ y < 1$.

•
$$\left.\begin{array}{l}\text{en los puntos de la región blanca } f(x,y) \leq 0 \\ \text{en los puntos negros de la región blanca } f(x,y) = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\exists \text{ máximos relativos de } f \text{ en} \\ \text{los puntos negros de la región blanca.}\end{array}$$
Entonces f tiene máximos relativos en $\forall\,(x,y):\ y = 0,\ x > 1$ y $x = 0,\ y > 1$.

• en cualquier entorno de los puntos críticos $(1,0)$ y $(0,1)$, existen puntos de la región beige donde $f(x,y) \geq 0$ y existen puntos de la región blanca donde $f(x,y) \leq 0$. Por lo tanto $(1,0)$ y $(0,1)$ son puntos silla de f.

En la Figura 2 todos los puntos donde f tiene máximos y mínimos relativos están marcados en color azul y rojo, respectivamente, y dos puntos silla en color amarillo.

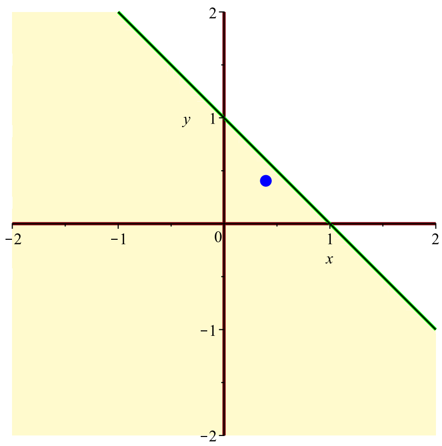

Figura 1

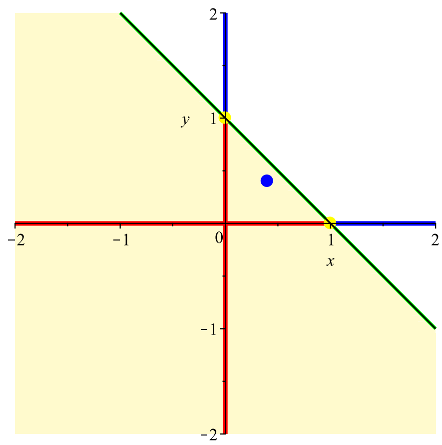

Figura 2

4. Trobeu els valors de a i b per tal que la funció $f(x,y) = ax^3 + 3bxy^2 - 15a^2x - 12y + 5$ tingui un mínim local al punt $(2,1)$.

Solución. Para que f tenga un mínimo relativo en $(2,1)$ este punto, en primer lugar, debe ser punto crítico, es decir

$$\left\{\begin{array}{lll} f'_x(x,y)\big|_{(x,y)=(2,1)} = & 3ax^2 + 3by^2 - 15a^2\big|_{(x,y)=(2,1)} = 0 & \Longrightarrow f'_x(2,1) = 12a + 3b - 15a^2 = 0, \\ f'_y(x,y)\big|_{(x,y)=(2,1)} = & 6bxy - 12\big|_{(x,y)=(2,1)} = 0 & \Longrightarrow f'_y(2,1) = 12b - 12 = 0 \Longrightarrow b = 1. \end{array}\right.$$

Sustituyendo $b = 1$ en la primera ecuación tenemos
$12a - 3 - 15a^2 = 0 \Longrightarrow 5a^2 - 4a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = -1/5.$
Considerando que

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) = 6ax &\quad\Longrightarrow f''_{xx}(2,1) = 12a, \\ f''_{yy}(x,y) = 6bx &\quad\Longrightarrow f''_{yy}(2,1) = 12b, \\ f''_{xy}(x,y) = 6by &\quad\Longrightarrow f''_{xy}(2,1) = 6b, \end{aligned}$$

$$\triangle = \det H(2,1) = \det \begin{pmatrix} 12a & 6b \\ 6b & 12b \end{pmatrix} = 36b(4a-1)$$

resulta que para $b = 1$ y $a = 1$

$$\triangle = 36 \cdot 3 = 108 > 0, \quad f''_{xx}(2,1) = 12 > 0 \Longrightarrow \exists \text{ mínimo relativo de } f \text{ en } \ (2,1)$$

y para $b = 1$ y $a = -1/5$

$$\triangle = 36 \cdot (-9/5) < 0 \Longrightarrow (2,1) \text{ es punto silla.}$$

Por lo tanto la función f tiene un mínimo local en el punto $(2,1)$ si $a = 1$ y $b = 1$.