Capítulo 8

Derivades. Vector Gradient.

8.1 Problemas

1. Calculeu les derivades parcials de primer ordre de la funció $f(x,y) = (\sin x)^{\sin y}$.

Solución. Para calcular f'_x consideramos y como una constante y aplicamos las reglas y técnicas de derivación para funciones de una variable x, entonces

$$f'_x(x,y) = \cos x \, \sin y \, (\sin x)^{\sin y - 1}.$$

Para calcular f'_y consideramos x como una constante y aplicamos las reglas y técnicas de derivación para funciones de una variable y, entonces

$$f'_y(x,y) = \cos y \, \ln(\sin x) \, (\sin x)^{\sin y}.$$

2. Donada $f(x,y) = x^2 + y^2$, calculeu la derivada direccional de la funció f en el punt $P = (2,3)$ segons la direcció del vector $\overrightarrow{v} = (3/5, 4/5)$.

Solución. Sabemos que si

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^1(P) \\ v = (v_1,\, u_2): \ \|u\| = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow D_v f(P) = \nabla f(P) \cdot v.$$

En nuestro caso $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ (polinómica) $\Longrightarrow f \in \mathcal{C}^1(P)$ y

$$\bigtriangledown f(P) = (f'_x(P),\, f'_y(P)) = (2x,\, 2y) = (4,6).$$

Además $\|v\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)} = 1$. Por lo tanto

$$D_v f(P) = \nabla f(P) \cdot v = (4,6) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{36}{5}.$$

3. Trobar la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ en el punt $M(1,1)$ en la direcció que forma un angle de $\pi/3$ amb la direcció positiva de l'eix OX.

Solución. Consideramos u un vector unitario ($\|u\| = 1$) con origen en el punto $(0,0)$ y dirección que forma un angulo de $\pi/3$ con la dirección positiva del eje OX. Las coordenadas de este vector son

$$u = (u_1, u_2) = (\|u\| \cos \pi/3,\, \|u\| \sin \pi/3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

En nuestro caso $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ (polinómica) $\Longrightarrow z \in \mathcal{C}^1(M)$ y

$$\bigtriangledown z(P) = (z'_x(M),\, z'_y(M)) = (2x,\, -2y) = (2,-2).$$

Por lo tanto $\quad D_v z(M) = \nabla z(M) \cdot u = (2,-2) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}.$

4. Determineu els valors de a, b, c tals que la derivada direccional de la funció

$$f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$$

en el punt $(1, 2, -1)$ tingui un valor màxim de 64 en una direcció paral.lela a l'eix OZ.

Solución. Sea $P = (1, 2, -1)$.
En primer lugar observamos que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ (polinómica) $\Longrightarrow f \in \mathcal{C}^1(P)$ y

$$\bigtriangledown f(P) = (f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)) = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c)$$

ya que

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_x(x, y, z) = ay^2 + 3cz^2x^2 \\ f'_y(x, y, z) = 2axy + bz \\ f'_z(x, y, z) = by + 2cx^3z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'_x(P) = f'_x(1, 2, -1) = 4a + 3c \\ f'_y(P) = f'_y(1, 2, -1) = 4a - b \\ f'_z(P) = f'_z(1, 2, -1) = 2b - 2c \end{array} \right. .$$

En segundo lugar recordamos que, según el sentido geometrico del vector gradiente, la derivada direccional de la función f en el punto P es máxima en la dirección del vector gradiente $\bigtriangledown f(P)$ y su valor es igual a $\| \bigtriangledown f(P)\|$. Entonces

$$\max_v D_v f(P) = D_{\bigtriangledown f(P)}(P) = \| \bigtriangledown f(P)\|.$$

Por otro lado, según los enunciados del problema, el vector en la dirección del cual la derivada direccional en P es máxima es paralelo al eje OZ o, lo que es lo mismo, es paralelo al vector $(0, 0, \lambda)$. En consecuencia

$$\bigtriangledown f(P) = (f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)) = (0, 0, \lambda).$$

Además $\quad \| \bigtriangledown f(P)\| = \|(0, 0, \lambda)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \lambda^2} = |\lambda| = 64. \quad$ Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{ll} f'_x(1, 2, -1) = 4a + 3c = 0 & \Longrightarrow c = -\frac{4a}{3} \\ f'_y(1, 2, -1) = 4a - b \ = 0 & \Longrightarrow b = 4a \\ f'_z(1, 2, -1) = 2b - 2c = \lambda & \\ |\lambda| = 64 & \Longrightarrow \lambda = \pm 64 \end{array} \right| \Longrightarrow 2\left(4a + \frac{4a}{3}\right) = \pm 64 \Longrightarrow \frac{32a}{3} = \pm 64 \Longrightarrow a = \pm 6.$$

Sustituyendo $a = \pm 6$ en la primera y segunda ecuación, tenemos $b = \pm 24$ y $c = \mp 8$. Por lo tanto si $a = \pm 6$, $b = \pm 24$ y $c = \mp 8$ la derivada direccional de la función f en el punt $(1, 2, -1)$ tiene un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje OZ.

5. Escriure les equacions del pla tangent i de la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, en el punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \dfrac{y}{x}$, en el punt $M = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Recordatorio:

- La ecuación del plano tangente (PT) a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es
$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$
- La ecuación de la recta normal (RN) a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{o} \quad \frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}, \quad \text{si } f'_x(x_0, y_0) \neq 0,\ f'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Solución.

a) Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Es claro que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ (polinómica) $\Longrightarrow f \in \mathcal{C}^1(M) \Longrightarrow$ existe el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $M = (1, 2, 5)$. Calculamos $f'_x(x, y) = 2x$ y $f'_y(x, y) = 2y$, entonces $f'_x(1, 2) = 2$ y $f'_y(1, 2) = 4$. Sustituimos estos valores en la ecuación general del plano tangente y de la recta normal y tenemos, respectivamente,

PT: $\quad z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$ o, lo que es lo mismo, $2x + 4y - z - 5 = 0$ y

RN: $\quad \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 2}{4} = \dfrac{z - 5}{-1}$ o $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Sea $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$. Observamos que $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ y $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{Dom}\, f)$ por ser la composición de funciones de la clase $\mathcal{C}^1(\mathrm{Dom} f) \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^1(M)$ $\Longrightarrow$ existe el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $M = (1, 1, \frac{\pi}{4})$.
Calculamos

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \Longrightarrow f'_x(1, 1) = -\frac{1}{2},$$
$$f'_y(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \Longrightarrow f'_y(1, 1) = \frac{1}{2}.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación general del plano tangente y de la recta normal y tenemos, respectivamente,

PT: $\quad z = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}(x - 1) + \dfrac{1}{2}(y - 1)$ o, lo que es lo mismo, $x - y + 2z - \dfrac{\pi}{2} = 0$ y

RN: $\quad -2(x - 1) = 2(y - 1) = -\left(z - \dfrac{\pi}{4}\right)$ o $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ tals que el seu pla tangent sigui paral.lel el al pla XY.

Solución. Si la ecuación de un plano es $Ax+By+Cz+D=0$ entonces el vector normal al plano es $n = (A,B,C)$. El plano XY tiene la ecuación $z = 0 \implies A = 0$, $B = 0$, $C = 1$ y el vector normal al plano $z = 0$ es $n_{xy} = (0,0,1)$.
La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ es

$$z = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

o, lo que es lo mismo,

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0) - z = 0$$

$\implies A = f'_x(x_0,y_0)$, $B = f'_y(x_0,y_0)$, $C = -1$ y el vector normal al plano tangente es

$$n_{pt} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1).$$

Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos. Entonces, en nuestro caso, el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ es paralelo al plano XY si los vectores n_{xy} y n_{pt} son paralelos, es decir

$$n_{pt} = \lambda n_{xy} \iff (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1) = \lambda(0,0,1) \iff \left\{ \begin{array}{rrl} f'_x(x_0,y_0) = & 4 - 2x_0 + y_0 & = 0 \\ f'_y(x_0,y_0) = & 2 + x_0 - 2y_0 & = 0 \\ & -1 & = \lambda \end{array} \right. .$$

Resolviendo el sistema de las dos primeras ecuaciones tenemos que $x_0 = \dfrac{10}{3}$ e $y_0 = \dfrac{8}{3}$. Luego $f(x_0,y_0) = f\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{28}{3}$. Por lo tanto el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ es paralelo al plano XY en el punto $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{28}{3}\right)$.