TEMA 8. DERIVADAS PARCIALES Y DIRECCIONALES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

8.1. Derivadas direccionales y derivadas parciales. Definición. Interpretación geométrica. Vector gradiente

Derivada direccional de una función de varias variables en un punto en la dirección (y sentido) de un vector

Definición

Sea $f : R^n \to R$ una función

sea $a = (a_1, a_2, \ ..., \ a_n) \in int\,(Dom\,f)$

sea $v = (v_1, v_2, \ ..., \ v_n) \in R^n \ : \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \ ... + {v_n}^2} = 1$

La **derivada direccional de** f **en el punto** a **en la dirección (y sentido) del vector** v es:

$$D_v f(a) = lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda v) - f(a)}{\lambda}$$

Interpretación geométrica

Si $f : R^2 \to R$ es una función de dos variables

$a = (a_1, a_2) \in int\,(Dom\,f)$

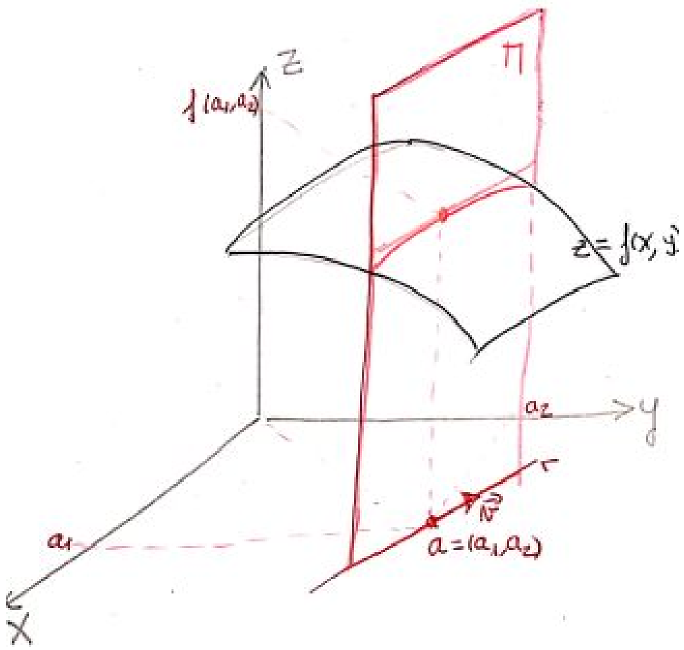
$v = (v_1, v_2) \in R^2$ es un vector unitario ($\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = 1$)

$z = f(x, y)$ es la ecuación de una superficie de R^3

$int\,(Dom\,f)$ es un subconjunto abierto del plano XY

en el plano XY consideremos la recta r que pasa por a y tiene la dirección de v.

Consideramos el plano π perpendicular al plano XY y que contiene la recta r. El plano π corta a la gráfica de f según una curva que pasa por el punto $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$; la pendiente de la recta del plano π tangente a esta curva en ese punto es la derivada direccional de f según v en el punto a.



$$D_v f(a) = lim_{\lambda\to 0}\frac{f(a+\lambda v)-f(a)}{\lambda}$$

Derivadas parciales de una función de varias variables

Las derivadas parciales son las derivadas direccionales en las direcciones de los ejes de coordenadas:

Definición

Sea $f : R^n \to R$ una función,
sea $a=(a_1,a_2,\ ...,\ a_n) \in int\,(Dom\,f)$,
sea $\{e_1,\ e_2,\ ...,\ e_n\}$ la base canónica de R^n
(es decir $e_1=(1,0,0,...,0),\ e_2=(0,1,0,...,0),...,\ e_n=(0,...,0,1)$)
sea $i \in \{1,2,...,n\}$
La i**-ésima derivada parcial o derivada parcial respecto a la** i**-ésima variable** de la función f en el punto a es la derivada direccional de f en a en la dirección del vector e_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = f'_{x_i}(a) =$$

$$lim_{\lambda\to 0}\frac{f(a+\lambda e_i)-f(a)}{\lambda} = lim_{\lambda\to 0}\frac{f((a_1,...,\ a_i,\ ...,\ a_n)+\lambda(0,...,0,1,0,...,0))-f(a_1,...,\ a_i,\ ...,\ a_n)}{\lambda}$$

$$= lim_{\lambda\to 0}\frac{f(a_1,...,\ a_i+\lambda,\ ...,\ a_n)-f(a_1,...,\ a_i,\ ...,\ a_n)}{\lambda}$$

Podemos ver que esta definición corresponde a la de la derivada en el punto a_i de la función de una variable definida por

$$x \to f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1} ..., a_n)$$

Por esto el cálculo de una derivada parcial de una función de varias variables se reduce al cálculo de derivadas de funciones de una variable.

Ejemplo (Ejercicio 1 Sección 8.1) Calcular las derivadas parciales de primer orden de la función $f(x, y) = (sin\ x)^{sin\ y}$

La función tiene dos variables: x e y $\Rightarrow$ tiene dos derivadas parciales: respecto de x y respecto de y.

Para calcular la derivada parcial de f respecto de x, se deriva $f(x, y) = (sin\ x)^{sin\ y}$ como si fuera una función de solo la variable x (y la y fuese una constante):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (sin\ y) \cdot (sin\ x)^{sin\ y\ -1} \cdot (cos\ x)$$

Para calcular la derivada parcial de f respecto de y, se deriva $f(x, y) = (sin\ x)^{sin\ y}$ como si fuera una función de solo la variable y (y la x fuese una constante):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (sin\ x)^{sin\ y} \cdot (ln(sin\ x)) \cdot (cosy)$$

Vector gradiente de una función de varias variables en un punto

Sea $f : R^n \to R$ una función,

sea $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in int\ (Dom\ f)$,

Si f admite derivadas parciales en a respecto de todas las variables, el vector gradiente de f en a es:

$$\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

Ejemplo

Sea $f : R^3 \to R$ definida por $f(x,y,z) = x^2y\ cos\ xz + xe^{yz} - 7z^3$. Hallar el vector gradiente de f en el punto $(1,2,0)$

Primero las derivadas parciales respecto de las tres variables:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\ cos\ xz - x^2yz\ sin\ xz + e^{yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\ cos\ xz + xze^{yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \ -x^3y\ sin\ xz + xye^{yz} - 21z^2$$

Ahora las evaluamos en el punto haciendo $x = 1,\ y = 2,\ z = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,0) = 4 - 0 + 1 = 5$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,0) = 1 + 0 = 1$, $\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,0) = 0 + 2 = 2$,

Por lo tanto: $\nabla f(1,2,0) = (5,\ 1,\ 2).$

8.2. Plano tangente y recta normal a una superficie en un punto. Dirección óptima.

Definiciones

Sea $f : R^n \to R$ una función,

sea $a = (a_1, a_2,\ ...,\ a_n) \in int\,(Dom\,f)$,

Se dice que f es de clase C^0 en el punto a cuando f es continua en el punto a.

Se dice que f es de clase C^1 en el punto a cuando todas las derivadas parciales de primer orden de f son continuas en el punto a.

Plano tangente y recta normal a una superficie de R^3 en un punto de la misma

La **ecuación explícita de una superfície de** R^3 es del tipo $z = f(x, y)$ siendo $f : R^2 \to R,\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ una función de dos variables.
La **ecuación implícita de una superfície de** R^3 es del tipo $F(x, y, z) = 0$ siendo $F : R^3 \to R,\ (x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$ una función de tres variables.

Sea $f : R^2 \to R,\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ una función de dos variables.
Sea $(a, b) \in int\,(Dom\, f)$
Sea f de clase C^1 en el punto (a, b).
Consideramos la superficie de ecuación explícita $z = f(x, y)$
La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ es:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

La ecuación continua de la recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ es:

$$\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$$

Sea $F : R^3 \to R,\ (x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$ una función de tres variables.
Sea $(a, b, c) \in int\,(Dom\, F)$
Sea F de clase C^1 en el punto (a, b, c).
Consideramos la superficie de ecuación implícita $F(x, y, z) = 0$
La ecuación del plano tangente a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en el punto (a, b, c) es:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) \cdot (x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) \cdot (y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \cdot (z - c) = 0$$

La ecuación continua de la recta normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en el punto (a, b, c) es:

$$\frac{x-a}{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)} = \frac{y-b}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)} = \frac{z-c}{\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)}$$

Dirección óptima

Proposición

Sea $f : R^n \rightarrow R$ una función,
sea $a = (a_1, a_2, \ ..., \ a_n) \in int\,(Dom\,f)$,
sea f de clase C^1 en el punto a
sea $v = (v_1, v_2, \ ..., \ v_n) \in R^n \ : \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \ ... + {v_n}^2} = 1$
Entonces la derivada direccional de f en el punto a en la dirección (y sentido) del vector v es el producto escalar del vector gradiente de f en el punto a por el vector v:

$$D_v f(a) = \nabla f(a) \bullet v$$

Por lo tanto: $D_v f(a) = \nabla f(a) \bullet v = |\nabla f(a)| \cdot |v| \cdot cos\,\alpha$, siendo α el ángulo que forman $\nabla f(a)$ y el vector unitario v.

Por lo tanto:

La derivada direccional máxima en el punto a tiene lugar para $\alpha = 0$, es decir, en la dirección y el sentido del $\nabla f(a)$, y su valor es precisamente $|\nabla f(a)|$, es decir, el módulo del vector gradiente.
La derivada direccional mínima en el punto a tiene lugar para $\alpha = \pi$, es decir, en la dirección del $\nabla f(a)$ pero sentido contrario, y su valor es precisamente $-|\nabla f(a)|$.
La derivada direccional es nula si $\alpha = \pi/2$, es decir, en cualquier dirección ortogonal al gradiente.