Departament d'Estadística
i Investigació Operativa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Càlcul de Probabilitats

Bloc 1 – Probabilitat i Estadística

Setembre 2018

Índex

1. Experiència aleatòria
   a. Definició
   b. Operacions amb conjunts
   c. Successos. Representació.
2. Probabilitat
   a. Definició i propietats
   b. Independència
   c. Probabilitat condicionada.
   d. Probabilitat a posteriori. Bayes
   e. Probabilitat condicionada, conjunta i marginal

Objectiu

Diferenciar el tipus de probabilitat segons el denominador

Programa	Compila	No compila	Total
C++	72	48	120
Java	64	16	80
Total	136	64	200

Programa	Compila	No compila	Total
C++	0.36	0.24	0.60
Java	0.32	0.08	0.40
Total	0.68	0.32	1.00

Quina és la probabilitat de que s'executi en C++ i compili? **0.36 (72/200)**

Programa	Compila	No compila	Total
C++	0.60	0.40	1.00
Java	0.80	0.20	1.00
Total	-	-	-

Quina és la probabilitat de que compili un programa en C++? **0.60 (72/120)**

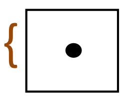
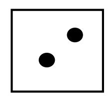
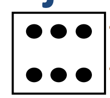
Programa	Compila	No compila	Total
C++	0.53	0.75	-
Java	0.47	0.25	-
Total	1.00	1.00	-

Quina és la probabilitat que provingui de C++ si ha compilat? **0.53 (72/136)**

Experiència aleatòria. Definicions

- Els **fenòmens deterministes** porten a uns mateixos resultats a partir d'unes mateixes condicions inicials. [Ex: si poso la mà al foc, em cremaré]

- Els **fenòmens aleatoris** tenen una certa incertesa en el resultat d'una propera realització de l'experiència aleatòria. [Ex: Si llenço un dau, no sé quin número sortirà]

- Tota experiència aleatòria té associat un **conjunt de resultats possibles** (Ω ={w1,w2,…}) [Ex: en un dau, Ω ={ … }]

- Qualsevol subconjunt de Ω és un **esdeveniment o succés** (A,B,…). [Ex: Ω (segur) o $\varnothing$ (impossible)]

- Una **partició** és un conjunt d'esdeveniments $A_i \neq \varnothing$, disjunts i que la seva unió és Ω. [Ex: en un dau,
A_1 = # parell ; A_2 = # senar → $A_1 \cup A_2 = \Omega$ i $A_1 \cap A_2 = \varnothing$]

Experiència aleatòria. Exemples

- Simples
  - llençar una moneda → Ω ={cara, creu}
  - llençar un dau → Ω ={1,2,3,4,5,6}
  - extreure una bola d'una urna (blanca, negra) → Ω ={b,n}

- Complexes
  - extreure amb reposició dues boles d'una urna → Ω ={bb, bn, nb, nn}
  - segons el resultat del llançament d'una moneda (c,+), escollir una urna d'entre dues amb composició diferent, i extreure'n una bola (b,n):

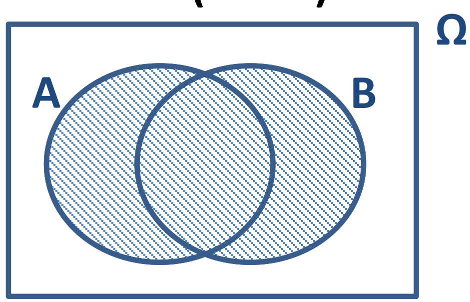
    Ω ={cb, cn, +b, +n}
  - cas servidor i xarxa: possibilitats segons si servidor i/o xarxa funcionen (y) o no (n)

    Ω ={yy, yn, ny, nn}

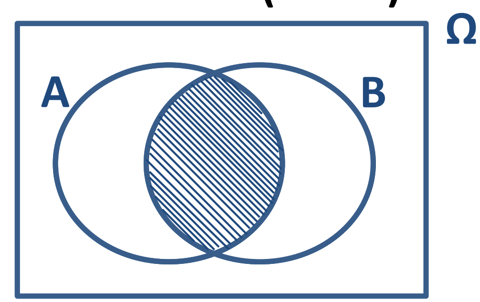
Experiència aleatòria. Operacions amb conjunts

Com que els esdeveniments són conjunts, totes les operacions dels conjunts es poden aplicar, i el resultat és un altre esdeveniment.

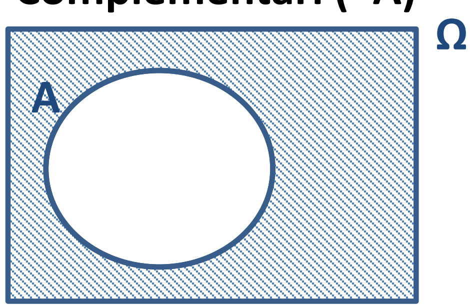
Unió (A U B)



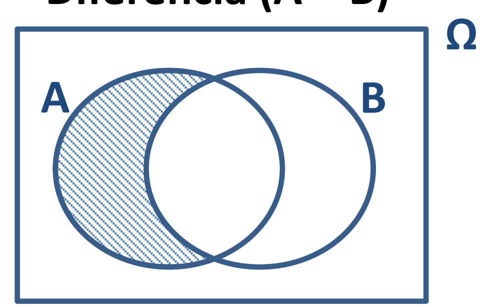
Intersecció (A ∩ B)



Complementari (¬A)



Diferència (A – B)



Definicions: Dos conjunts, A i B són **complementaris** (o formen una **partició**) si $A \cap B = \varnothing$ i $A \cup B = \Omega$
Dos conjunts, A i B són **disjunts** si $A \cap B = \varnothing$

Experiència aleatòria. Exercicis

- Trobar Ω en els següents casos
  - nombre de defectes (“tares”) en una peça industrial

    Solució: Ω ={ }
  - treure dues boles d’una urna amb 4 boles negres i una blanca

    Solució: Ω ={ }
  - diferència en valor absolut entre el nombre de cares i creus en 10 tirades

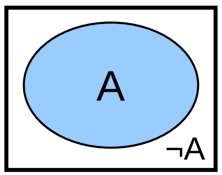
    Solució: Ω ={ }

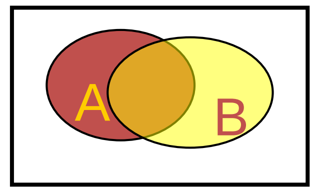
- Operacions amb conjunts. Verifiqueu:
  - $A \cap B = \neg(\neg A \cup \neg B)$
  - $A \cup B = \neg(\neg A \cap \neg B)$

Experiència aleatòria. Representacions de succesos

Usem representacions gràfiques per visualitzar millor el procés d'una experiència aleatòria

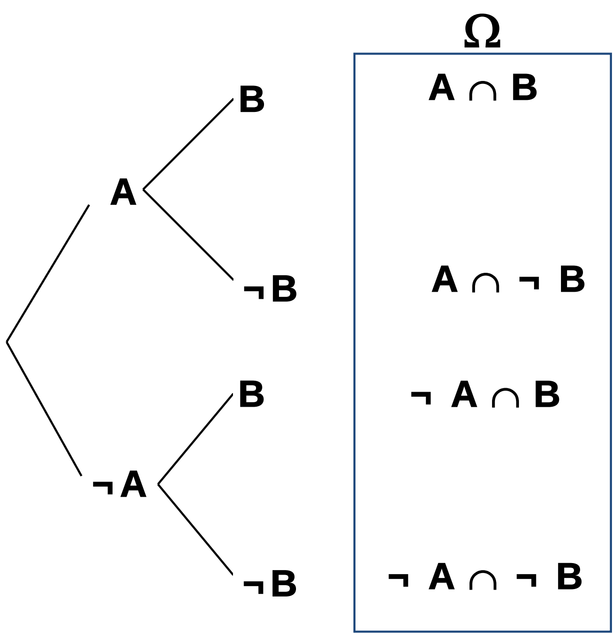
- Conjunts/diagrames de Venn



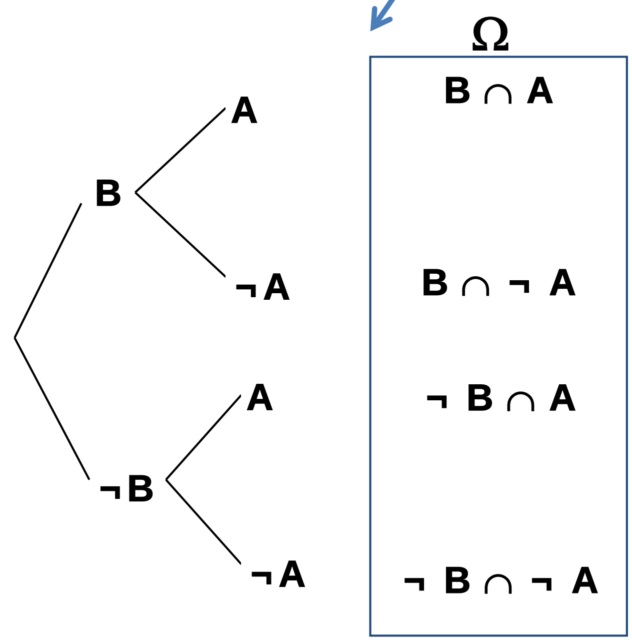


Atenció: No tenen perquè estar endreçats cronològicament!

- Arbres



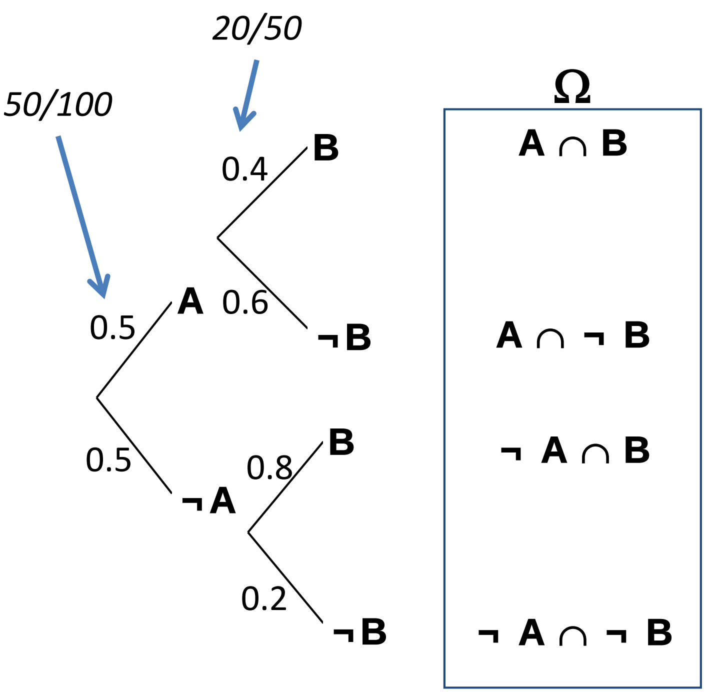
o bé



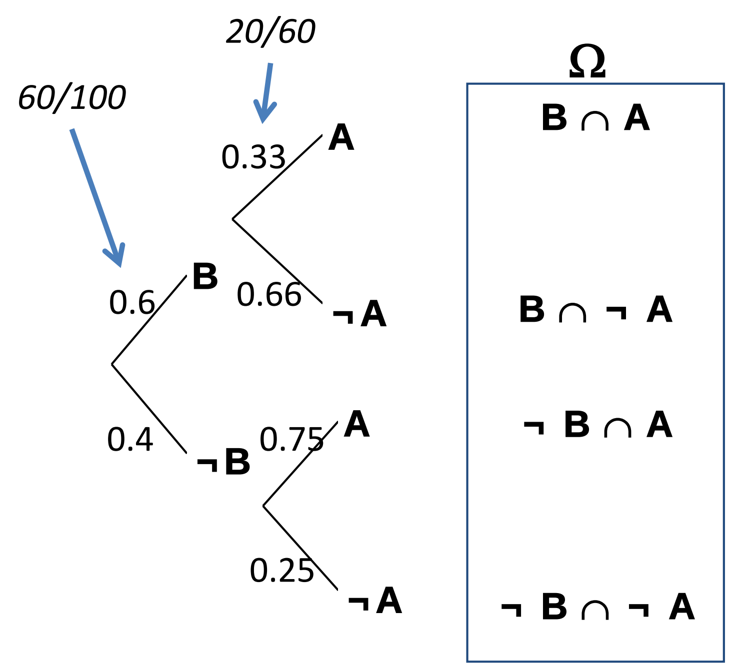
Experiència aleatòria. Arbre a partir de taula 2x2

Amb aquesta taula, es poden construir 2 arbres

	B	¬B	Total
A	20	30	50
¬A	40	10	50
Total	60	40	100

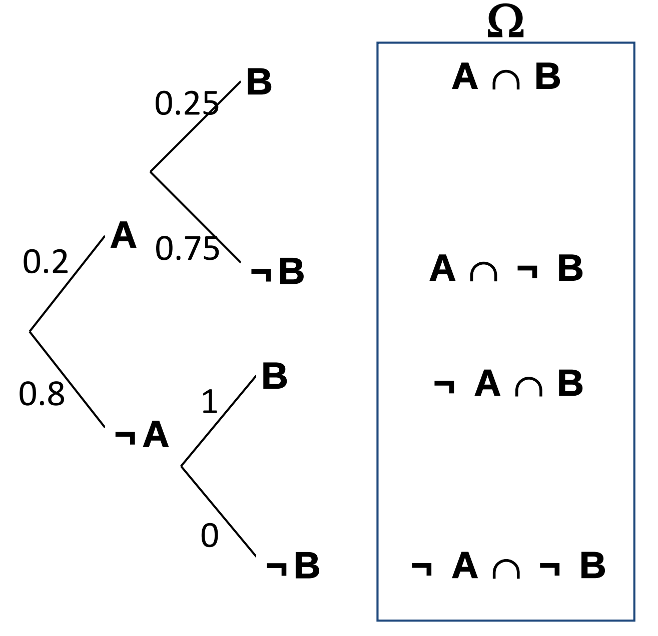


o bé



Exp. aleatòria. Exercici: Taula 2x2 a partir d’arbre

Amb aquest arbre i el número total (n=100) es pot construir la taula. **Prova-ho!**



	B	¬B	Total
A			
¬A			
Total			100

Probabilitat. Definició i propietats

- Per quantificar la incertesa podem definir **una aplicació** que **a cada succés li fa correspondre un valor entre 0 i 1** que anomenem **probabilitat**
- Propietats per definició:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_0) + P(A_1) + \ldots + P(A_n)$ si $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$
  - $P(\Omega) = 1$
- Propietats deduïdes:
  - $P(\neg A) = 1 - P(A)$
  - $P(\emptyset) = 0$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

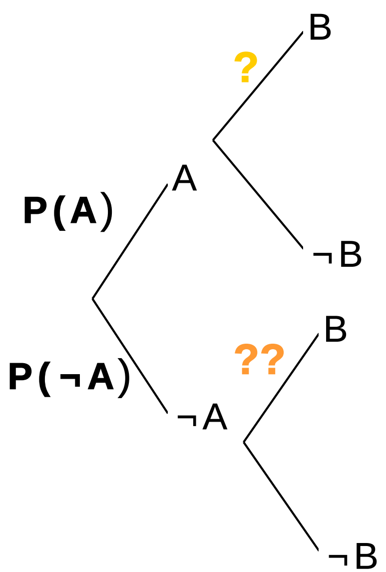
NOTA: El cas particular en que la probabilitat s'obté de casos favorables/casos totals es presenta en condicions d'*equiprobabilitat* (tots els successos elementals tenen la mateixa probabilitat). No es pot generalitzar a qualsevol experiència! [Ex: es podria aplicar a un llançament d'una moneda però no als possibles resultats d'una travessa]

Probabilitat. Independencia

Independència aplicat a 2 (o més) esdeveniments és defineix com:

A i B són independents sii $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

[***3 o més succesos són independents si són independents 2 a 2***]



$\mathbf{P(A \cap B)} = P(A) \cdot P(B)$

$\mathbf{P(A \cap \neg B)} = P(A) \cdot P(\neg B)$

$\mathbf{P(\neg A \cap B)} = P(\neg A) \cdot P(B)$

$\mathbf{P(\neg A \cap \neg B)} = P(\neg A) \cdot P(\neg B)$

Podem associar probabilitats a cada branca.

Si A i B són independents, obtenim que a l'arbre:

a) "?" és P(B)

b) "??" és P(B)

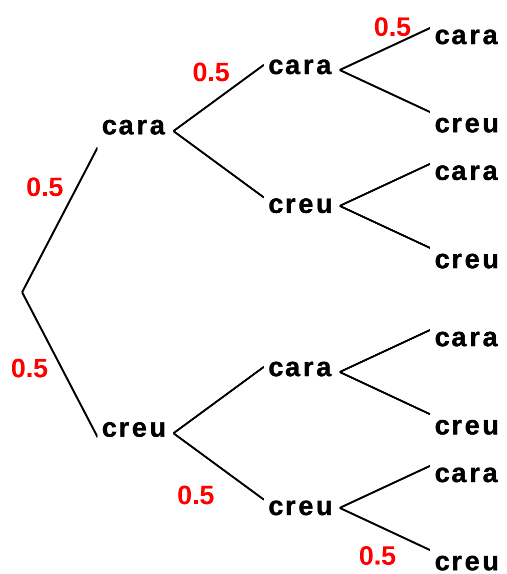
c) Per tant, com a conseqüència d'a) i b), "?" = "??"

Probabilitat. Independencia. Exemple

- Estudiarem l’experiència aleatòria de **llençar una moneda equilibrada <u>tres</u> vegades.**
- Abans de fer cap realització i coneixent les característiques de l’experiència, calcularem:
  - P(A) sent A = “obtenir **2 cares”**
  - P(B) sent B = “obtenir **almenys 2 cares”**

(*al bloc 2 es calcularan les probabilitats mitjançant una variable aleatòria*)

Independència



(Cara,Cara,Cara) = w1	P(w1) = P(C)·P(C)·P(C) = 1/8
(Cara,Cara,Creu) = w2	P(w2) = 1/8
(Cara,Creu,Cara) = w3	P(w3) = 1/8
(Cara,Creu,Creu) = w4	P(w4) = 1/8
(Creu,Cara,Cara) = w5	P(w5) = 1/8
(Creu,Cara,Creu) = w6	P(w6) = 1/8
(Creu,Creu,Cara) = w7	P(w7) = 1/8
(Creu,Creu,Creu) = w8	P(w8) = 1/8

Probabilitat. Independencia. Exemple

Calcular:

– A = “Obtenir dues cares”
– B = “Obtenir almenys dues cares”

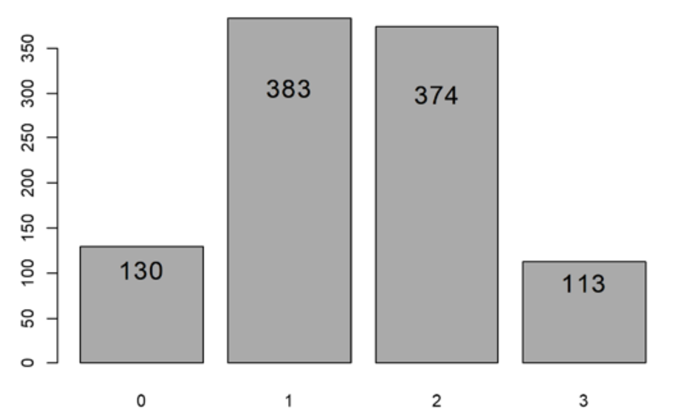
Solució: si es coneixen tots els resultats d’una experiència aleatòria, i la probabilitat de cada esdeveniment elemental, acumulem probabilitats:

P(A) = P(w2) + P(w3) + P(w5) = 1/8+1/8+1/8 = 3/8

P(B) = P(w2) + P(w3) + P(w5) + P(w1) = 1/8+1/8+1/8+1/8 = 1/2

Nota: Per altra part, si l’experiència es realitza repetidament, *observarem* unes freqüències semblants a les probabilitats de l’esdeveniment.

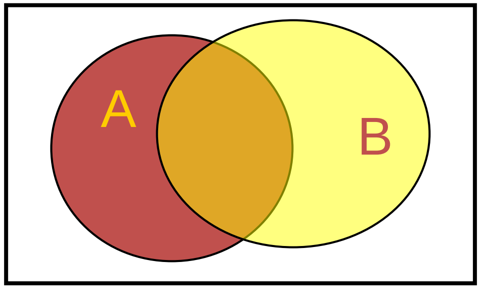
(*però això és un tema d’estadística descriptiva*)



Probabilitat condicionada (Veure aquest *vídeo*)

- Si un esdeveniment afecta a l'expectativa d'un altre parlem de **probabilitat condicionada P(A|B)** (es llegeix com a "probabilitat d'observar A tenint en compte que s'ha realitzat B" o "probabilitat de A condicionada per B") [Ex: A="Ploure"/B="Estar ennuvolat"]
- Per definició, si P(B)>0, llavors **P(A|B)** és:

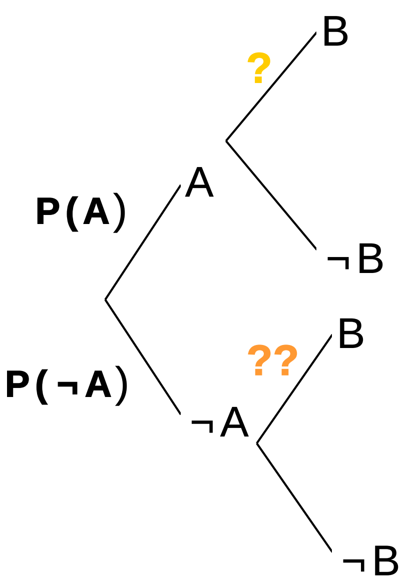
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



- A la pràctica, **condicionar per B significa que reduïm a B el conjunt de resultats observables**, i les probabilitats han de recalcular-se respecte P(B)
- En considerar P(A|B), **cada esdeveniment juga un paper diferent**: A és incert però B és conegut
- En general, **P(A|B) ≠ P(B|A) ≠ P(A ∩ B)** [Ex: A="Fumar"/B="Tenir càncer de pulmó". La probabilitat de ser fumador si tens càncer de pulmó és més alta que no la inversa]

Probabilitat condicionada. Representació

Els arbres d'esdeveniments incorporen les probabilitats condicionades.



$\mathbf{P(A \cap B)} = P(A) \cdot P(B|A)$

$\mathbf{P(A \cap \neg B)} = P(A) \cdot P(\neg B|A)$

$\mathbf{P(\neg A \cap B)} = P(\neg A) \cdot P(B|\neg A)$

$\mathbf{P(\neg A \cap \neg B)} = P(\neg A) \cdot P(\neg B|\neg A)$

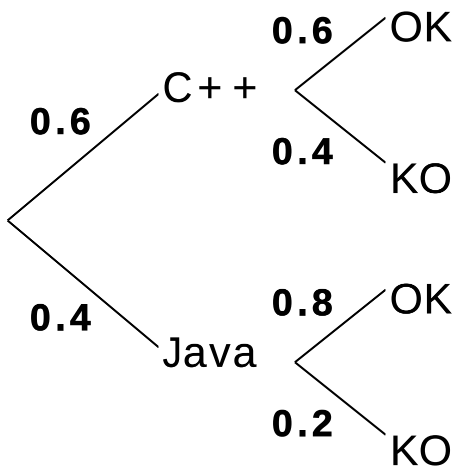
La branca que va de 'A' a 'B' porta una probabilitat condicionada P(B|A) (?): estem suposant que 'A' ha passat.

P(A∩B) és el producte de les probabilitats en el camí des del node arrel fins al node A∩B:

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$

Prob. condicionada. Representació. Exemples

Les probabilitats condicionades es col·loquen a les branques dels arbres:



El 80% dels programes Java compila a la primera… però **quin % dels programes que compilen a la primera estan escrits en Java?**

Sol: 32/68

	OK	¬OK	Total
C++	0.36	0.24	0.6
Java	0.32	0.08	0.4
Total	0.68	0.32	1

Independència i Probabilitat Condicionada

- Si A i B són independents

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) \overset{\text{Independents}}{=} P(A) \cdot P(B)/P(B) = P(A)$$

- Que passi B no canvia l'expectativa de A i viceversa, que passi A no canvia l'expectativa de B. Si A i B són independents, llavors:

$$P(B|A) = P(B|\neg A) = P(B)$$

- La idea d'esdeveniments independents està lligada a la de la *informació* que un aporta sobre l'altre: A i B són independents quan la probabilitat d'A és la mateixa, indiferentment del que passi amb B.

Independència i Prob. Condicionada. Exemple

Per estudiar l'eficiència en un aeroport, una primera aproximació ens porta a estudiar les probabilitats d'haver-se d'esperar a l'hora de facturar i a l'hora d'embarcar. Considerem el cas d'un aeroport on s'ha comprovat que per a un viatger que arriba, la probabilitat de trobar cua a facturació és 0.4; i de trobar cua a l'embarcament és 0.6 si va trobar cua a facturació, i 0.2 si no en va trobar.

Calculeu les següents probabilitats:

a) de trobar cua a la facturació i a l'embarcament

b) de trobar cua a l'embarcament

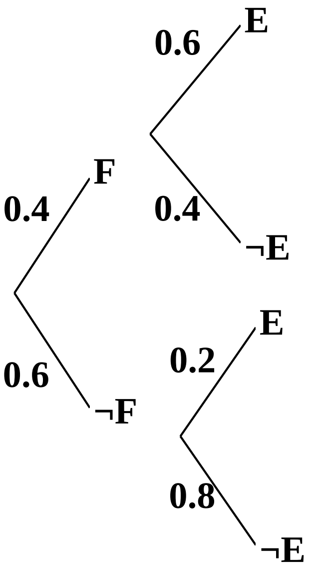
c) de trobar cua a l'embarcament si s'ha trobat cua a la facturació

d) d'haver trobat cua a la facturació si no ha trobat cua a l'embarcament

Independència i Prob. Condicionada. Exemple

F és “trobar cua a facturació”
¬F és “no trobar cua a facturació”

E és “trobar cua a embarcament”
¬E és “no trobar cua a embarcament”



a) $P(F \cap E) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$

b) $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \neg F) = 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.36$

c) $P(E|F) = 0.6$

d) $P(F|\neg E) = P(F \cap \neg E)/P(\neg E) = 0.16/0.64 = 0.25$

Independència i Prob. Condicionada. Exercici

Un client es vol connectar amb un servidor remot mitjançant una xarxa de comunicacions. El procés consisteix en realitzar ***n intents de connexió*** *a la xarxa en un període determinat. Tenim èxit si, en algun intent, hem trobat un camí per la xarxa fins al servidor i si el servidor està en marxa.*

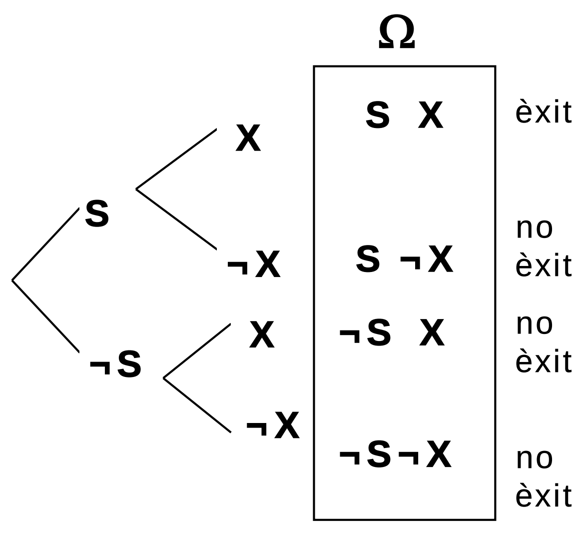
En primer lloc representarem l'experiència pels casos de 1 i 2 intents:

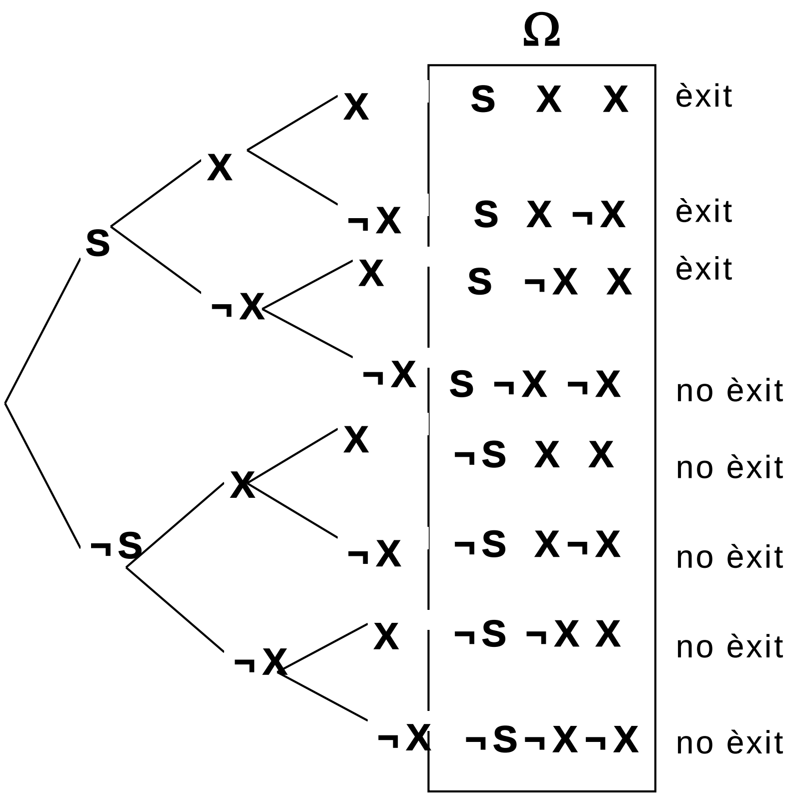
S = "el servidor està en marxa" (respon)
¬S = "no en marxa" (no respon)
X = "la petició del client ha trobat camí per la xarxa"
¬X = "no camí a la xarxa"

1) Representeu l'arbre pels casos 1 i 2 intents

Independència i Prob. Condicionada. Exercici

Arbres de probabilitat





Source: (repàs de combinatòria: Lecture4 a Instructor Resources a http://www.janehorgan.com/)

Independència i Prob. Condicionada. Exercici

Si en aquest exemple podem suposar:

- en n intents, el servidor no canvia d'estat
- els estats del servidor i de la xarxa són independents
- els n intents de connexió són independents uns d'altres
- el servidor falla, a l'atzar, 1 de cada 10 vegades: $P(\neg S)=p1=1/10$
- i la xarxa una de cada 5 vegades $P(\neg X)=p2=1/5$

Podem calcular la probabilitat d'èxit, és a dir, de contactar i poder treballar amb el servidor si només es realitza un intent, fent:

$$P(\text{el servidor funciona} \cap \text{la xarxa funciona}) = P(S \cap X) =$$

$$=$$

Independents

Independència i Prob. Condicionada. Exercici

Si definim T_i com l'esdeveniment connectar en algun dels i intents, llavors podem calcular la probabilitat d'èxit si:

- només es realitza un intent

$$P(T_1) = P(S \cap X) = P(S) \cdot P(X) = (1 - p1) \cdot (1 - p2)$$

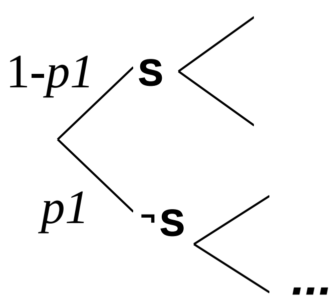
- es realitzen dos intents (1–Prob("no èxit en 2 intents"))

$$P(T_2) = 1 - P(\neg T_2) = 1 - (p1 + (1 - p1) \cdot (p2)^2)$$

$$on \quad P(\neg T_2) = P(\overline{S}) + P(S \cap \overline{X} \cap \overline{X}) = p1 + (1 - p1) \cdot (p2)^2$$

- es realitzen n intents (1–Prob("no èxit en n intents"))

$$P(T_n) = 1 - P(\neg T_n) = 1 - (p1 + (1 - p1) \cdot (p2)^n) \to_{n \to \infty} 1 - p1$$

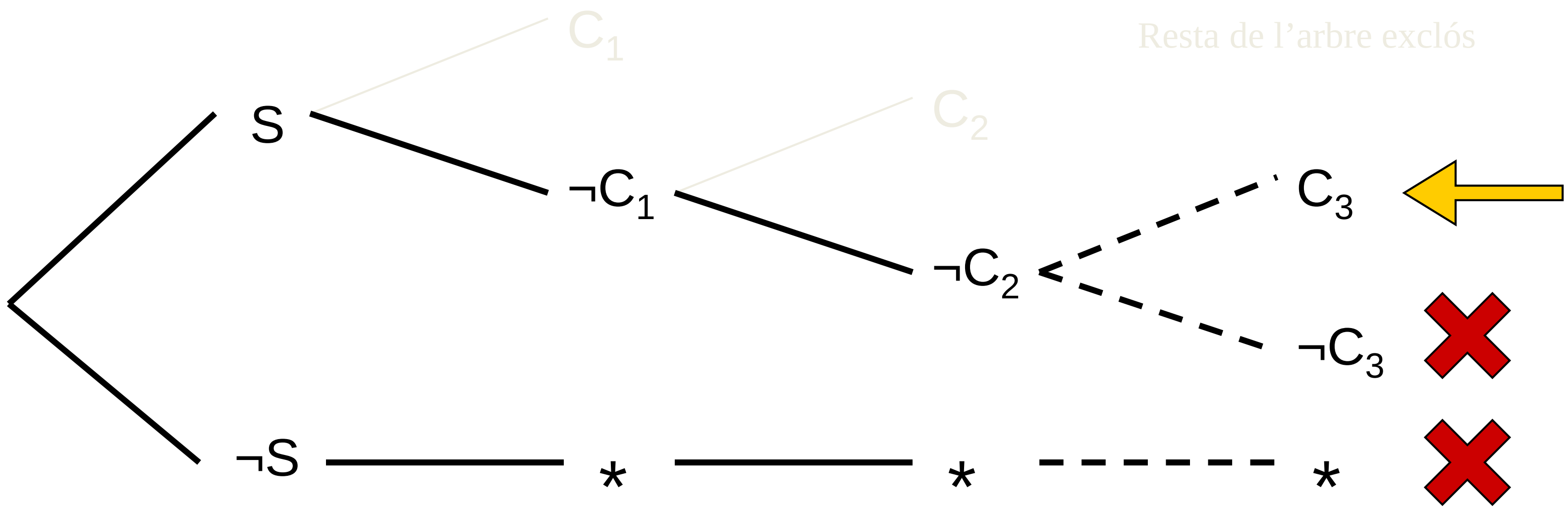


Si n augmenta, la probabilitat d'èxit tendeix a ***1-p1***

(tendeix a P(S), la probabilitat que el servidor funcioni, ja que si n és gran la probabilitat que en algun intent la xarxa no falli tendeix a 1)

Independència i Prob. Condicionada. Exercici

Ara suposem que s'han realitzat dos intents de connexió sense èxit (no sabem si per causa de la xarxa o del servidor). ¿Quina és la probabilitat de connectar en un tercer intent?



Sabent que teníem definit T_i com l'esdeveniment "connectar en algun dels i intents", llavors $\neg T_2$ serà "no connectar en 2 intents". Així, cal calcular:

$$P(S \cap X_3 \mid \neg T_2) = \frac{P(S \cap X_3 \cap \neg T_2)}{P(\neg T_2)}$$

Independència i Prob. Condicionada. Exercici

En primer lloc calculem la probabilitat del numerador. Com que:

$$S\cap X_3\cap\neg T_2 = S\cap X_3\cap [\neg S\cup(S\cap\neg X_1\cap\neg X_2)] = S\cap\neg X_1\cap\neg X_2 \cap X_3$$

llavors la seva probabilitat és:

$$P(S\cap X_3\cap\neg T_2) = 0.9\cdot 0.2\cdot 0.2\cdot 0.8 = 0.0288$$

Fallar en dos intents i tenir èxit en el tercer (amb el servidor en marxa) és un succés amb poques “possibilitats” (menys del 3%). I així, la probabilitat que busquem es compensa quan es compara amb el succés que condiciona (¬T2 que tampoc és molt freqüent):

$$P(S\cap X_3 \mid \neg T_2) = \frac{P(S\cap X_3\cap\neg T_2)}{P(\neg T)} = \frac{0.0288}{0.136} = 0.2118$$

Aquesta probabilitat també la podem comparar amb la de connectar en un tercer intent sense tenir cap informació prèvia (probabilitat “bruta” de connectar en el tercer intent és $P(S \cap X_3)=0.72$). Per tant, no connectar en els dos intents previs és una mala senyal: ¡les possibilitats baixen del 72% a un 21%!

Probabilitat a posteriori. Fórmula de Bayes

A partir de la definició de probabilitat condicionada:

$$\mathrm{P(A\,|\,B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$

i de la probabilitat de la intersecció aïllada de la condicionada complementària:

$$\mathrm{P(B\,|\,A)} = \frac{\mathrm{P(B \cap A)}}{\mathrm{P(A)}} \rightarrow P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(B\,|\,A) \cdot P(A)$$

es dedueix la fórmula de Bayes:

$$\mathrm{P(A\,|\,B)} = \frac{\mathrm{P(B\,|\,A) \cdot P(A)}}{\mathrm{P(B)}}$$

que, coneixent P(A) i P(B), permet passar de P(A|B) a P(B|A) i viceversa (usualment en l'enunciat del cas, les probabilitats condicionades en un sentit són conegudes i interessa calcular les condicionades complementàries). [Exemple: si conec la probabilitat de pluja si està ennuvolat i vull conèixer la probabilitat d'ennuvolat si ha plogut]

Prob. a posteriori. Probabilitats totals i Bayes

Podem calcular la probabilitat d'un succés B_k a partir de les probabilitats de les interseccions d'aquest amb una partició $A_1,A_2,\ldots A_j$ de W:

$$P(B_k) = P(B_k \cap A_1) + P(B_k \cap A_2) + \ldots + P(B_k \cap A_j) =$$

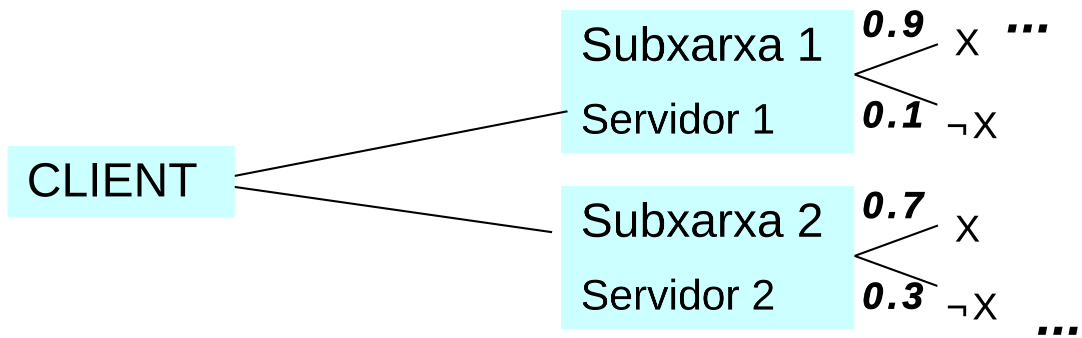
$$= P(B_k|A_1)\cdot P(A_1) + P(B_k|A_2)\cdot P(A_2) + \ldots + P(B_k|A_j)\cdot P(A_j)$$

Llei de probabilitats totals (LPT). S'aplica quan disposem d'una partició, i la probabilitat del succés d'interès és senzilla d'obtenir si està condicionat per un element qualsevol de la partició.

Combinant la fórmula de Bayes amb la llei de probabilitats totals (i una partició $\{A_i\}$ adequada) s'obté el teorema de Bayes:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A_i} \mid \mathrm{B_k}) = \frac{\mathrm{P}(B_k \mid A_i)\cdot \mathrm{P}(A_i)}{\sum_{\mathrm{j}} \mathrm{P}(B_k \mid A_j)\cdot \mathrm{P}(A_j)}$$

Probabilitat a posteriori (LPT). Exemple

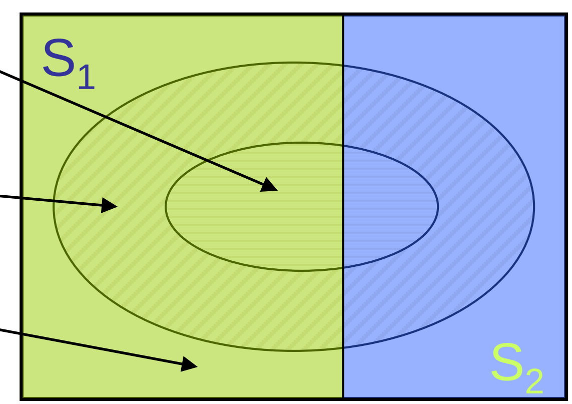


Ara considerem que tenim dues subxarxes amb dos servidors i en triem una o altra a l'atzar (50%). I llavors fem els intents sempre sobre la mateixa xarxa (en la primera falla la connexió 1 de cada 10 cops, i en la segona 3 de cada 10). Per a n=2 (2 intents de connexió). ¿Com calcular la probabilitat d'obtenir Y = 0, 1, 2 connexions assumint independència entre tots els esdeveniments?

conjunt de resultats associat a "**2 connexions**" (Y_2)

conjunt de resultats associat a "**1 connexió**" (Y_1)

conjunt de resultats associat a "**0 connexions**" (Y_0)



Probabilitat a posteriori (LPT). Exemple

En aquest cas podem calcular fàcilment les probabilitats de Y_0, Y_1 o Y_2 condicionades pel servidor:

$P(Y_0 | S_1) = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$
$P(Y_0 | S_2) = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09$
$P(Y_1 | S_1) = 0.1 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.1 = 0.18$
$P(Y_1 | S_2) = 0.3 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.3 = 0.42$
$P(Y_2 | S_1) = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81$
$P(Y_2 | S_2) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49$

Quines probabilitats han de sumar 1?

I com que Y_0, Y_1 o Y_2 poden ser expressats com a unió de conjunts disjunts (ja que $\{S_1, S_2\}$ és una *partició*):

LPT

$$Y_i = (Y_i \cap S_1) \cup (Y_i \cap S_2); \quad \Rightarrow P(Y_i) = P(Y_i \cap S_1) + P(Y_i \cap S_2) = P(Y_i | S_1) \cdot P(S_1) + P(Y_i | S_2) \cdot P(S_2)$$

Calcula:

$P(Y_0) \rightarrow$ **0** connexions, 1 de cada 20 vegades

$P(Y_1) \rightarrow$ **1** connexió, 3 de cada 10 vegades

$P(Y_2) \rightarrow$ **2** connexions, 13 de cada 20 vegades

Probabilitat a posteriori. Exercici

I ara suposant que s'han aconseguit k connexions, **amb quina probabilitat hem estat atesos pel servidor *i*?**

Agafant el nombre de connexions com una partició i els dos servidors com una altra partició podem aplicar:

$$P(A_i|B_k) = \frac{P(B_k|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_j P(B_k|A_j) \cdot P(A_j)}$$

Calculeu les probabilitats a posteriori

A priori	*i=1*	*i=2*	**P(Yk)**		A posteriori	*i=1*	*i=2*
$P(Y_0 \mid Si)$	0.01	0.09	0.05		**$P(Si \mid Y_0)$**		
$P(Y_1 \mid Si)$	0.18	0.42	0.30		**$P(Si \mid Y_1)$**		
$P(Y_2 \mid Si)$	0.81	0.49	0.65		**$P(Si \mid Y_2)$**		
P(Si)	0.5	0.5					

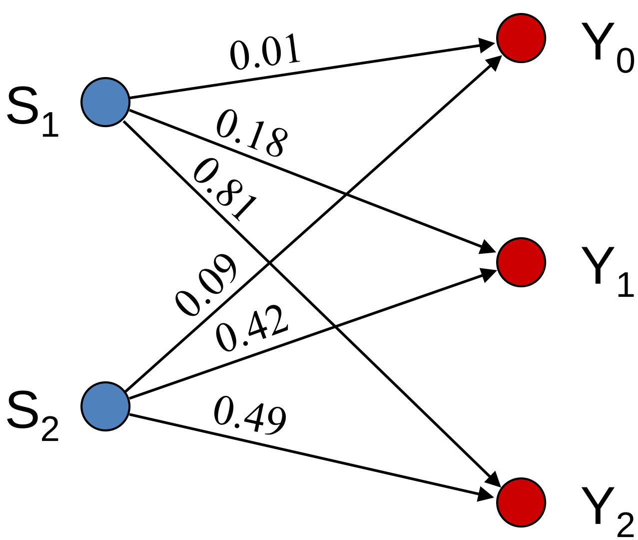
Si s'han aconseguit dues connexions, creiem que hem utilitzat el primer servidor amb probabilitat …..

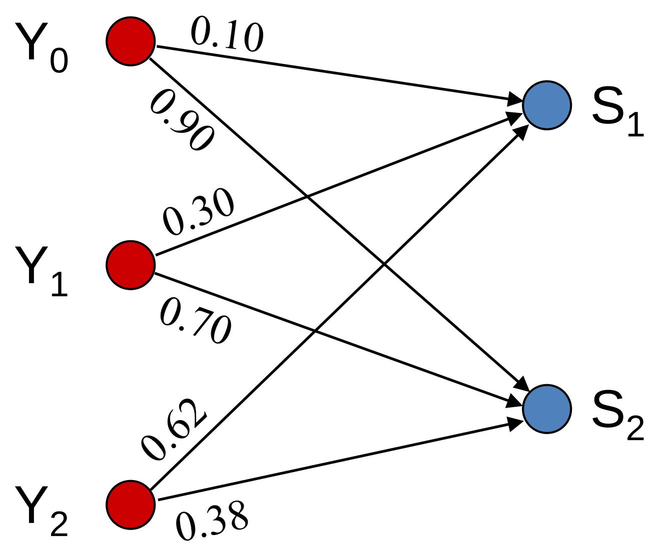
Probabilitat a posteriori. Teorema de Bayes

El teorema de Bayes transforma unes probabilitats condicionades en unes altres

$P(Y_k \mid S_i)$

$P(S_i \mid Y_k)$



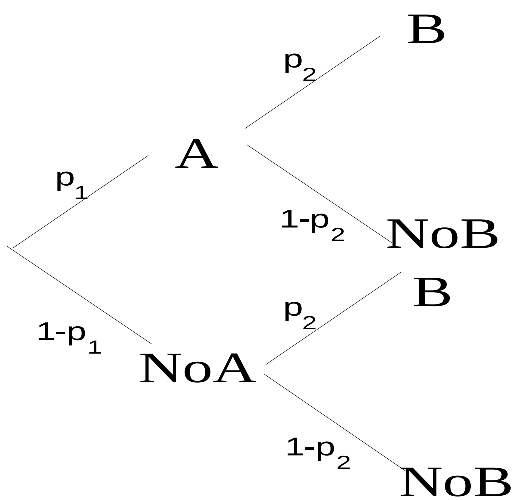


Coneixent el servidor utilitzat, calculem la probabilitat d'obtenir un número determinat de connexions.

Sabent el número de connexions aconseguides, calculem la probabilitat d'haver utilitzat determinat servidor.

PROBABILITAT condicionada, conjunta i marginal

<u>Amb</u> independència



Condicionada

Marginal

Conjunta

	B	¬B	
A	A∩B	A∩¬B	p_1
¬A	¬A∩B	¬A∩¬B	$1-p_1$
	p_2	$1-p_2$	

Les condicionades són iguals a les marginals:

$P(B \mid A) = P(B \mid \neg A) = P(B) = p_2$

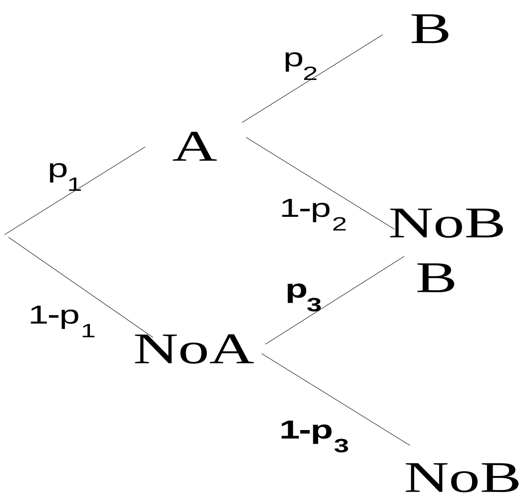
$P(\neg B \mid A) = P(\neg B \mid \neg A) = P(\neg B) = 1-p_2$

La conjunta (intersecció) és igual al producte de les marginals:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = p_1 \cdot p_2$

PROBABILITAT condicionada, conjunta i marginal

Sense independència



	B	¬B	
A	A∩B	A∩¬B	p_1
¬A	¬A∩B	¬A∩¬B	$1\text{-}p_1$
	p2	1-p2	

Les condicionades NO són iguals a les marginals:

$P(B \mid A) = p_2 \neq P(B \mid \neg A) = p_3 \neq P(B)$

$P(\neg B \mid A) = 1 - p_2 \neq P(\neg B \mid \neg A) = 1 - p_3 \neq P(\neg B)$

La conjunta (intersecció) NO és igual al producte de les marginals:

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

PROBABILITAT condicionada, conjunta i marginal. Exemple amb probabilitats

Si les probabilitats conjuntes són:

	A	No A	
B	0.06	0.54	0.60
No B	0.04	0.36	0.40
	0.10	0.90	

les condicionades per columnes són:

	A	No A
B	0.6	0.6
No B	0.4	0.4
	1	1

SÍ independència

Si les probabilitats conjuntes són:

	A	No A	
B	0.05	0.55	0.60
No B	0.05	0.35	0.40
	0.10	0.90	

les condicionades per columnes són:

	A	No A
B	0.5	0.61
No B	0.5	0.39
	1	1

NO independència

PROBABILITAT condicionada, conjunta i marginal. Exemple de freqüències

2 mostres (100 obs.), gènere i edat en 3 categories

	1	2	3	
masc.	6	24	30	60
fem.	4	16	20	40
	10	40	50	

	1	2	3
masc.	0.6	0.6	0.6
fem.	0.4	0.4	0.4
	1	1	1

SI independència

	1	2	3	
masc.	5	30	25	60
fem.	5	10	25	40
	10	40	50	

	1	2	3
masc.	0.5	0,75	0.5
fem.	0.5	0.25	0.5
	1	1	1

NO independència

Aplicació de Bayes. Exemple

Alguns processadors utilitzen un tipus especial de caches, on la memòria està distribuïda en quatre bancs. Aquests processadors són capaços de fer dos accessos simultàniament, mentre no tinguin que accedir al mateix banc. Quina és la probabilitat de conflicte?

Una situació simple assumeix que no hi ha cap relació entre el banc accedit per un accés i l'altre.

	Accés #2			
Accés #1	1/16	1/16	1/16	1/16
	1/16	1/16	1/16	1/16
	1/16	1/16	1/16	1/16
	1/16	1/16	1/16	1/16

Probabilitat conflicte = 1/4

Però potser el comportament del processador és més complex. Per exemple: certa propensió a utilitzar pel segon accés el següent banc:

	Accés #2			
Accés #1	0.05	**0.10**	0.05	0.05
	0.05	0.05	**0.10**	0.05
	0.05	0.05	0.05	**0.10**
	0.10	0.05	0.05	0.05

Probabilitat conflicte = 0.20

Aplicació de Bayes. Exercici

Per estudiar l'eficiència en un aeroport, una primera aproximació ens porta a estudiar les probabilitats d'haver-se d'esperar a l'hora de facturar i al control de passaports (CP). Considerem el cas d'un aeroport on s'ha comprovat que per a un viatger que arriba, la probabilitat de trobar cua a facturació és 0.64. Posteriorment s'ha comprovat que les probabilitats d'esperar o no per el CP depenen del fet d'haver esperat al moment de facturar, com mostra la següent taula:

	si s'ha hagut d'esperar per facturar	si no s'ha hagut d'esperar per facturar
no espera	0.187	0.238
espera el primer a la cua	0.687	0.461
espera perquè ja hi ha una cua	0.126	0.301

Calcula:

1. la probabilitat de no esperar a facturació ni a CP.
2. la probabilitat de ser atès immediatament al CP (és a dir, no hi ha ningú passant el control).
3. la probabilitat d'haver d'esperar a facturació o a CP.
4. la probabilitat d'haver d'esperar a un dels llocs (però només a un).
5. si un viatger arriba al CP i ha d'esperar perquè hi ha una persona passant el control, i cap més: quina és la probabilitat de haver esperat a facturació?
6. Els passatgers A i B arriben a l'aeroport en dos moments independents per agafar els seus vols. Trobeu la probabilitat que els dos hagin de posar-s'hi a la cua al CP.