FIB
Departament d'Estadística i Investigació Operativa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
UPC

Variable aleatòria

Bloc 2 – Probabilitat i Estadística

Setembre 2019

Índex

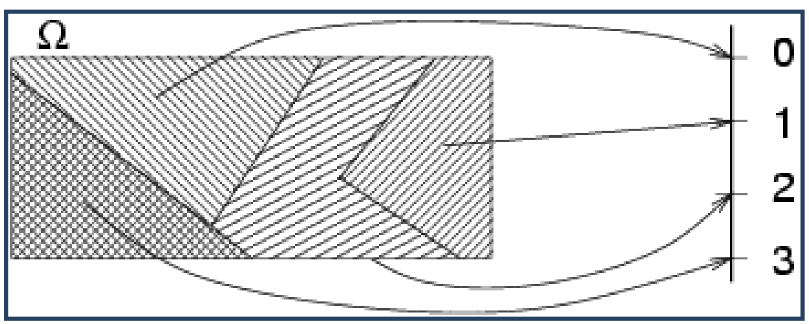
Variable aleatòria. Definició

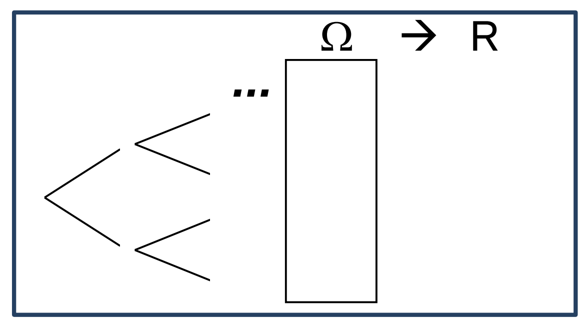
- La majoria d'experiències aleatòries porten a resultats interpretables com un número. Ens interessa l'estudi de l'experiment des del **punt de vista numèric**.
- Una **variable aleatòria** X és una aplicació entre el conjunt Ω i la recta real:

$$X:\ \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

Notació: Le variables aleatòries les denotarem amb un símbol tal com *X*, *Y*, *Z*, …(lletra llatina majúscula)

- Una variable indueix una partició de Ω amb els valors que adopta:





- Les probabilitats definides en Ω es transfereixen als valors de la VA *X*, definint unes **funcions de probabilitat** (o de densitat) i de **distribució de probabilitat**:

$$\Omega \xrightarrow{\ X\ } \mathbf{R} \xrightarrow{\ \text{prob.}\ } [0,1]$$

Variable aleatòria. Tipus

Distingim dos tipus de VA:

- Si el conjunt de valors que poden agafar és enumerable (és a dir, un conjunt de valors enters (0..n), el conjunt dels naturals N,...), la VA és **Discreta (VAD)**

  Per exemple, en l'experiència de llençar una moneda 3 vegades:

  – VAD X = "cara o creu en l'últim llançament" (possibles valors: 0,1; probabilitats: ½, ½)

  – VAD Y = "número de cares" (possibles valors: 0,1,2,3; probabilitats: ?)

  O en un servidor durant un període de temps:

  – VAD Z = "número de caigudes del sistema" (possibles valors: 0,1,2,3,4,5,6,...; probabilitats:?)

- Si agafa valors d'un conjunt no discret (és a dir, normalment la recta real o un segment d'ella) la VA és **Contínua (VAC)**

  – VAC X = "temps entre caigudes del sistema" (possibles valors: R^+)

  – En general, les VAC són mesures físiques de temps, longituds,....

Variable aleatòria. Funció de prob. i distr. en VAD

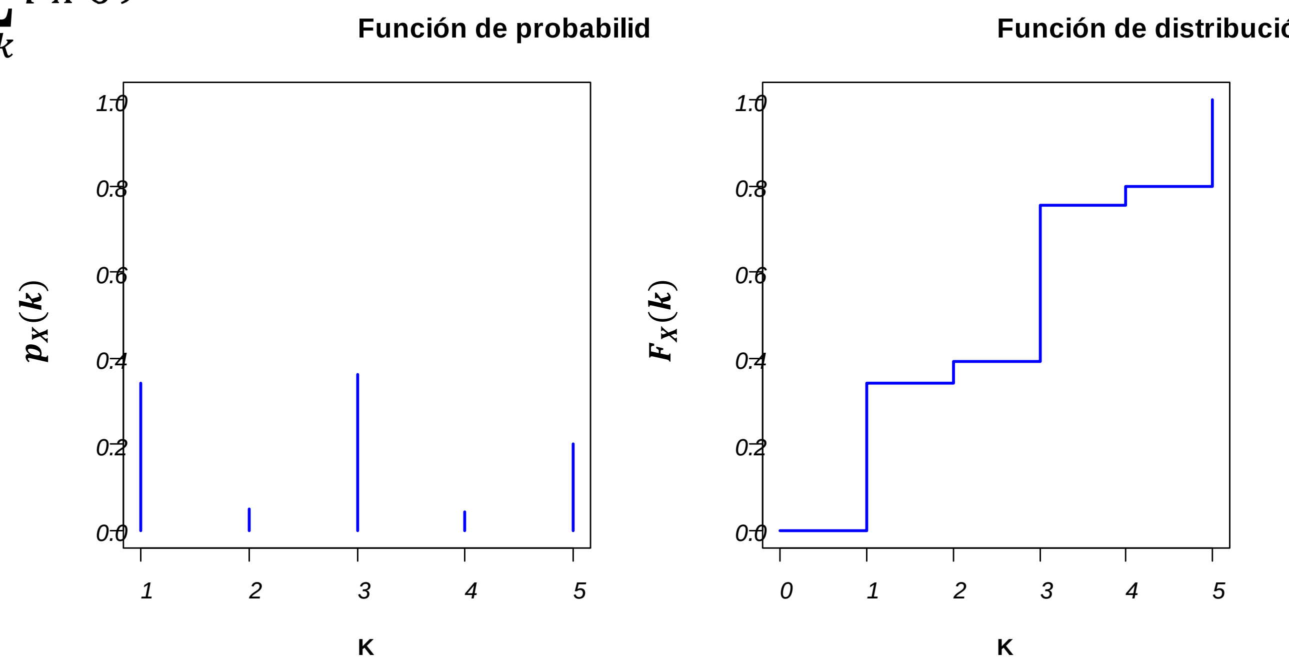
Les funcions de **probabilitat i distribució** es defineixen segons si són VAC o VAD

- La **funció de probabilitat** (p_X) en una VA DISCRETA (VAD) defineix la probabilitat puntual de cada un dels possibles valors k

$p_X(k) = P(X = k)$ (complint $\sum_k p_X(k) = 1$)

- La **funció de distribució** (F_X) de probabilitat en una VAD defineix la probabilitat acumulada, és a dir:

$$F_{X(k)} = P(X \leq k) = \sum_{j \leq k} p_X(j)$$



Variable aleatòria. Funció de dens. i distr. en VAC

- La **funció de densitat** de probabilitat (***f_X***) d'una VA CONTINUA és la funció que recobreix l'àrea on està definida la variable complint:

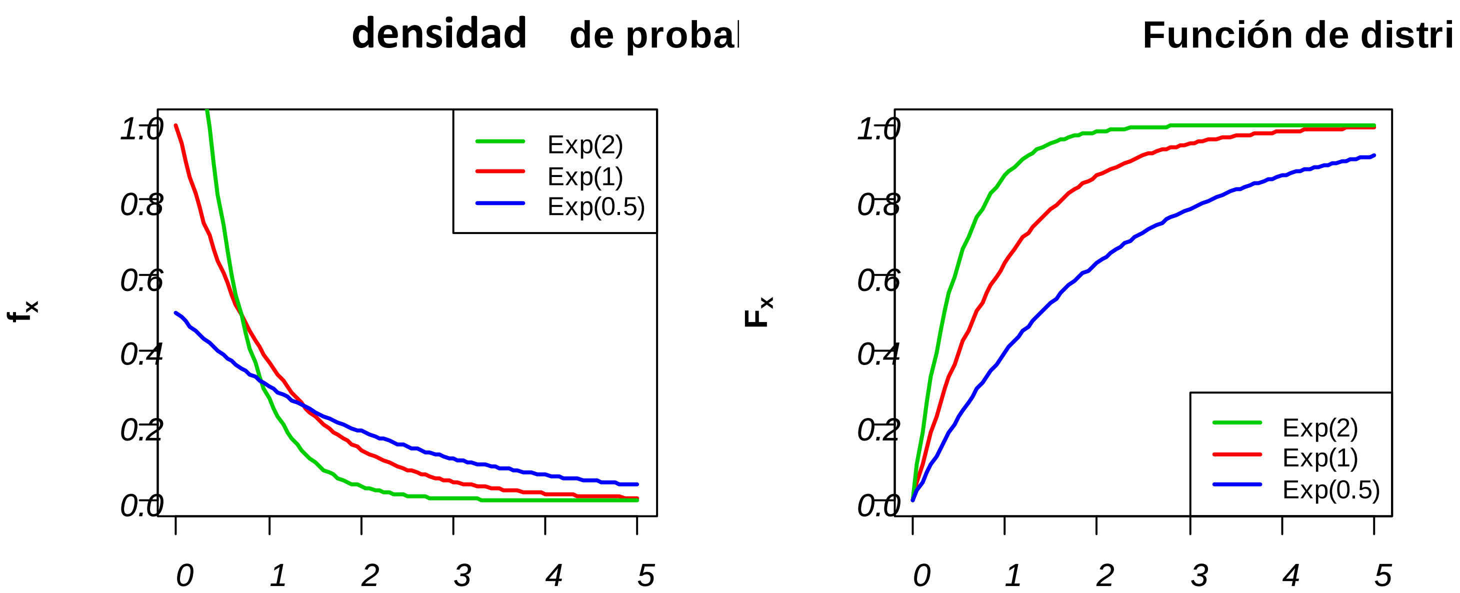
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

Observem que $f_X(k)$ és el valor de la funció en k, però no és una probabilitat puntual, $f_X(k) \neq P(X=k)$, i $P(X=k)$ val 0

- La **funció de distribució** de probabilitat (**F_X**) d'una VA CONTINUA defineix la probabilitat acumulada, és a dir:

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \int_{-\infty}^{k} f_X(x)\,\mathrm{dx}$$

Observem que $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$



Variable aleatòria. Funció de dens. i distr. en VAC

És a dir, en el cas VA CONTINUA, qualsevol **funció positiva**, $f_X(x) \geq 0$, que compleix:

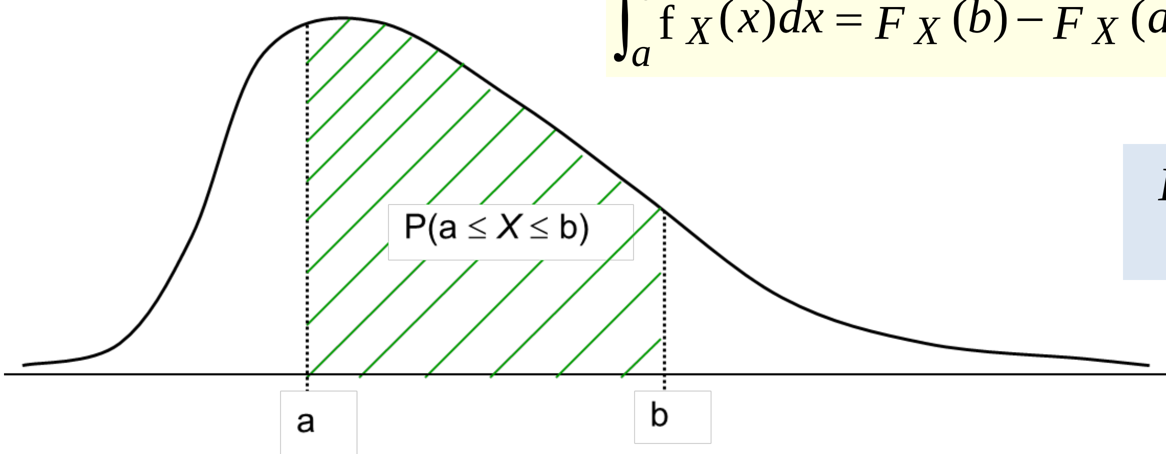
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

és una funció de densitat vàlida, és a dir, caracteritza la variable. La funció de distribució s'obté amb:

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx$$

Tota l'àrea sota la funció de densitat és sempre igual a 1. En particular, l'àrea que hi ha sota la funció de densitat entre els límits *a* per l'esquerra i *b* per la dreta és:

$$\int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$



L'àrea sota f_X equival a una probabilitat!

Variable aleatòria. Càlcul de probabilitats

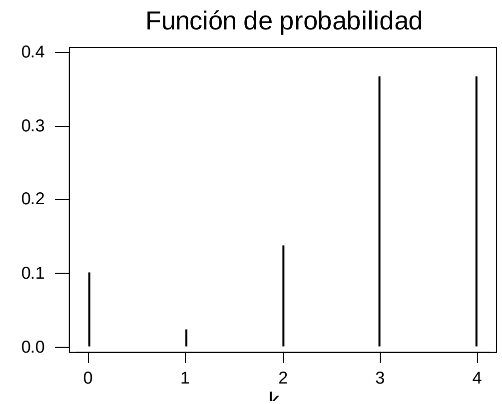
- **VAD**
  - $P(X = k) = p_X(k)$
  - $P(X \leq k) = F_X(k) = \sum_j^k p_X(j)$
  - $P(X<k) = P(X \leq k\text{-}1) = F_X(k\text{-}1)$
  - $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a\text{-}1)$
  - $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F_X(b\text{-}1) - F_X(a)$
- **VAC**
  - $P(X = k) = 0 \quad (\neq f_X(k))$
  - $P(X \leq k) = F_X(k)$
  - $P(X<k) = P(X \leq k) = F_X(k)$
  - $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

Variable aleatòria. Exemple de VAD

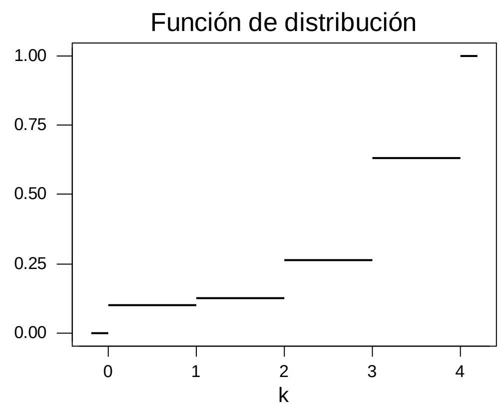
Reprenem l'exemple del servidor i la xarxa. Ara amb 4 intents de connexió, probabilitat de funcionar el servidor p_1=0.9 i probabilitat de funcionar la xarxa p_2= 0.8. Definim la VAD X = "nº de connexions aconseguides"

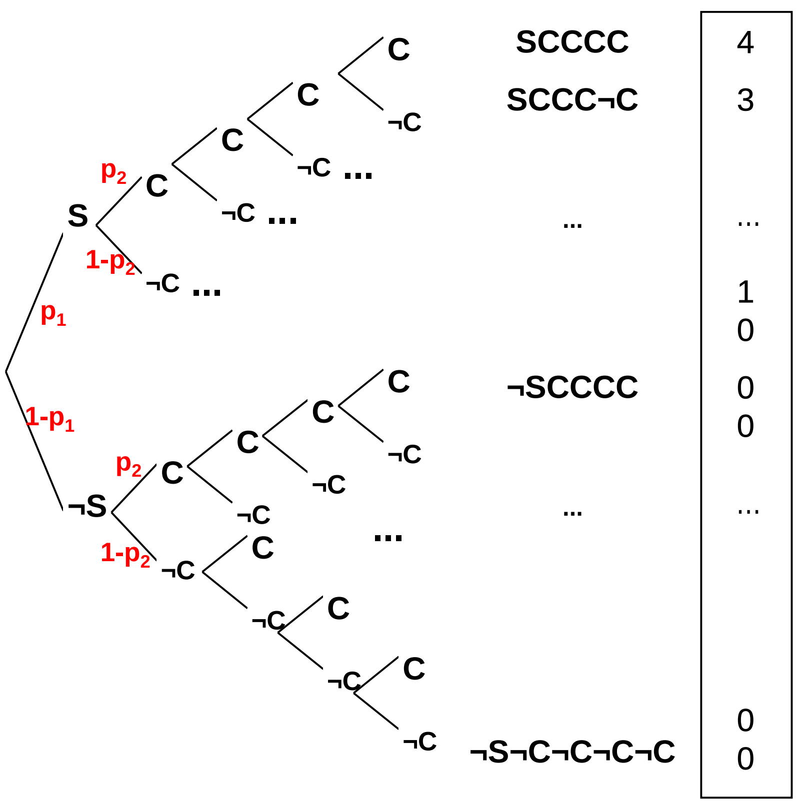
$$P(X=0)= 1- p_1+ p_1\cdot(1- p_2)^4 \rightarrow \qquad P(X=k)= p_1\cdot p_2^k\cdot(1- p_2)^{4-k}\binom{4}{k} \qquad k>0$$

k	$P_X(k)$
0	0.10144
1	0.02304
2	0.13824
3	0.36864
4	0.36864



k	$F_X(k)$
$(-\infty,0)$	0.00000
[0,1)	0.10144
[1,2)	0.12448
[2,3)	0.26272
[3,4)	0.63136
$[4,+\infty)$	1.00000



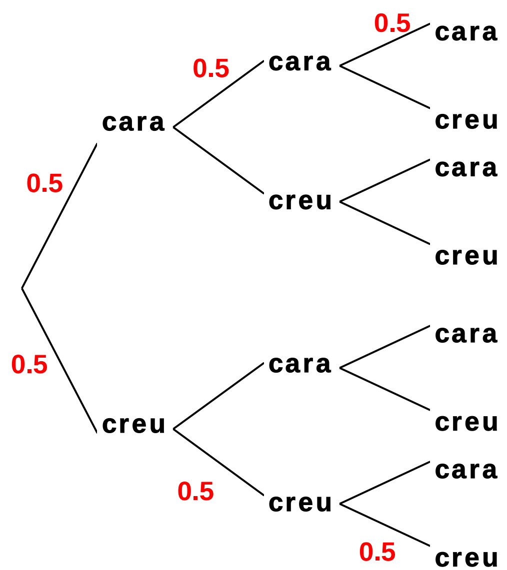


Variable aleatòria. Exemple de VAD

Estudiarem l'experiència aleatòria de **llençar una moneda equilibrada <u>tres</u> vegades.** Calcularem:

- P(A) sent A = "obtenir **2 cares**"
- P(B) sent B = "obtenir **almenys 2 cares**"

[al bloc 1 s'han calculat les probabilitats a partir de l'arbre i dels successos; ara ho calcularem definint la variable aleatòria X = "número de cares"]

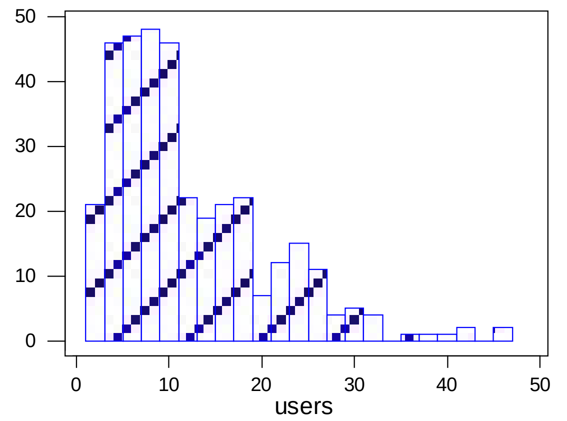


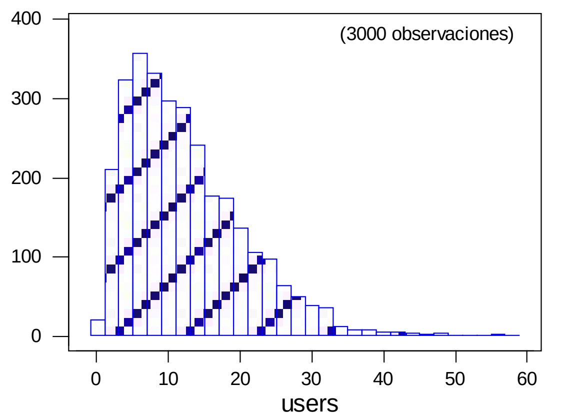
(Cara,Cara,Cara) = w1	P(w1) = 1/8	X = 3
(Cara,Cara,Creu) = w2	P(w2) = 1/8	X = 2
(Cara,Creu,Cara) = w3	P(w3) = 1/8	X = 2
(Cara,Creu,Creu) = w4	P(w4) = 1/8	X = 1
(Creu,Cara,Cara) = w5	P(w5) = 1/8	X = 2
(Creu,Cara,Creu) = w6	P(w6) = 1/8	X = 1
(Creu,Creu,Cara) = w7	P(w7) = 1/8	X = 1
(Creu,Creu,Creu) = w8	P(w8) = 1/8	X = 0

Variables observades. Distribució empírica

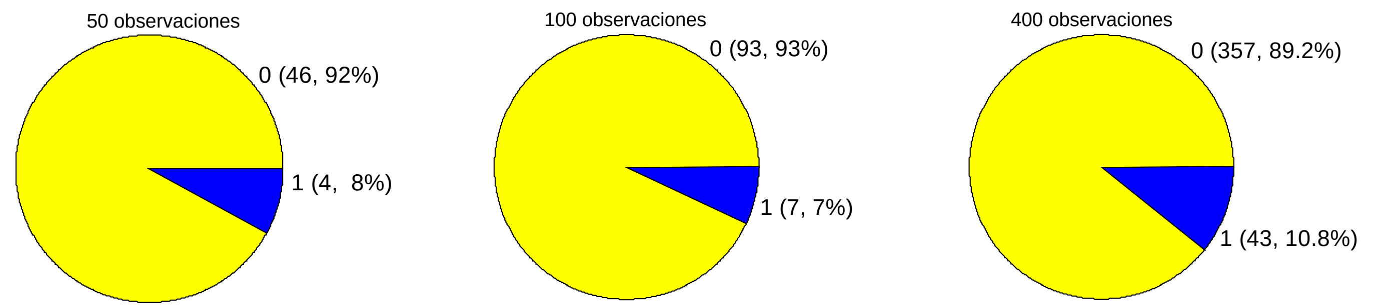
La repetició d'una experiència (en condicions *estables*) posa de manifest la **variabilitat dels resultats**. No es poden esperar sempre els mateixos resultats, l'aparença de la distribució dels valors serà diferent, però amb un número suficientment gran d'observacions serà *semblant* a la situació "teòrica".

Per exemple, si un tècnic de sistemes recull informació del número d'usuaris, tindrà una aproximació a la VA teòrica del número d'usuaris



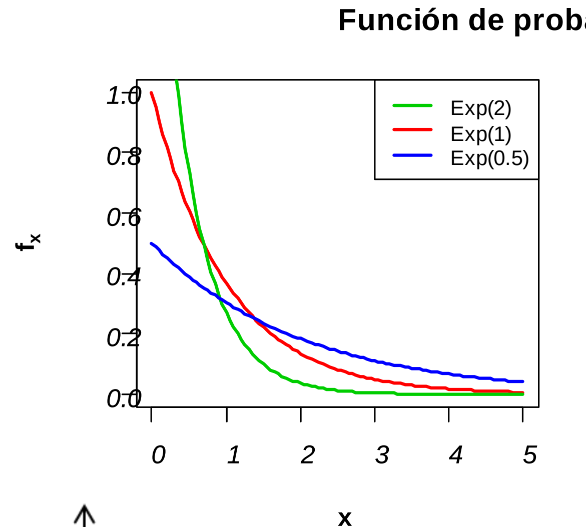


I si recull informació sobre si la paginació és normal (0) o elevada (1)

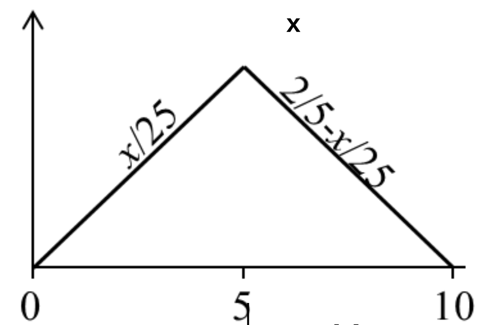


Variable aleatòria. Exemple de VAC

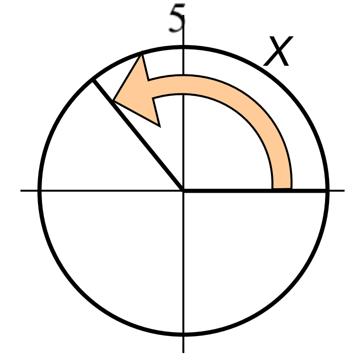
Exemple 1. La “vida útil d’un transistor en anys” segueix una distribució que decreix exponencialment.



Exemple 2. “L’esforç requerit per desenvolupar un projecte” es pot mesurar en persones/mes, per exemple segons la figura.



Exemple 3. “L'angle X senyalat per la agulla d’una ruleta al parar-se”, $0 \leq X \leq 2\pi$.



$F_X(k) = P(X \leq k) = k/(2\pi)$.

Probabilitats acumulades. Quantils

- Sigui X una variable aleatòria, i α un valor real $(0 \leq \alpha \leq 1)$ diem que x_α és el **quantil α** de X si es compleix: $F_X(x_\alpha) = \alpha$
- Calcular un quantil és el problema invers al càlcul de **probabilitats acumulades**. La funció inversa de la funció de distribució ens retorna x_α
- L'equivalent mostral dóna lloc als **quantils** utilitzats en estadística descriptiva. Expressats en percentatge dóna lloc als **percentils**.
- Exemples: el primer quartil (Q1) és el percentil 25 o quantil 0.25, el tercer quartil (Q3) és el percentil 75 o quantil 0.75, la mediana (Me) és el percentil 50 o quantil 0.50.

Probabilitats acumulades. Exemple amb VAC

Exemple 2 de diapositiva 12:

Quantes persones/mes són necessàries per al 90% dels projectes? Quin és el quantil 0.9 per a la variable "esforç per desenvolupar projecte"? Amb quin valor x fem que $F_X(x) = 0.9$?

Pista: podem trobar analíticament F_X, i resoldre l'equació, o en aquest cas podem aprofitar que l'àrea sota la funció de densitat és un triangle...

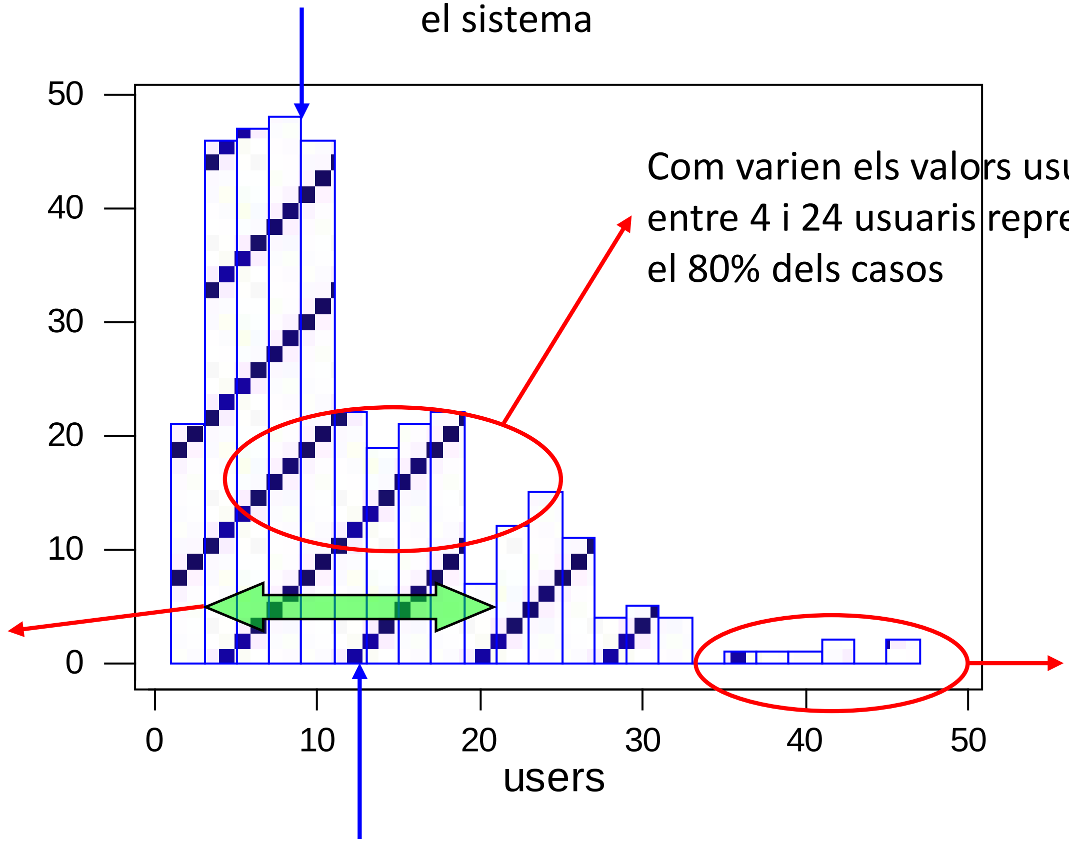
Solució: 7.76 homes/mes.

Probabilitats acumulades. Distribució empírica

El 50% dels casos hi ha com a molt 9 usuaris en el sistema

Com varien els valors usuals: entre 4 i 24 usuaris representen el 80% dels casos

La desviació típica és d’uns 8.5 usuaris



Un 2% dels casos correspon a més de 35 usuaris

La carga mitjana és de 11.5 usuaris

Indicadors de V.A. Quins són?

- Indicadors en una mostra: Una mostra de valors expressa amb *n* observacions la variabilitat d'una experiència; si volem resumir aquestes dades utilitzarem la **mitjana mostral** i la **desviació estàndard mostral** S_x [tal com es veu a l'Estadística descriptiva]

- Indicadors en una variable aleatòria:
  - De tendència central, usem el **valor esperat o esperança**
    - **Notació: E(X) o μ_X**
  - De dispersió, usem la **variància** o la seva arrel quadrada, la **desviació estàndard**
    - **Notació per la variància: V(X) o σ_X^2**
    - **Notació per la desviació estàndard: σ_X**

Indicadors de V.A. Com es calculen?

- **Esperança de X**

$$\boldsymbol{VAD} \rightarrow E(X) = \mu_X = \sum_{\forall k} (k \cdot p_X(k))$$

$$\boldsymbol{VAC} \rightarrow E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

- **Variància de X**

$$\boldsymbol{VAD} \rightarrow V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{\forall k} \left[\left(k - E(X)\right)^2 \cdot p_X(k) \right] \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{V(X)}$$

$$\boldsymbol{VAC} \rightarrow V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 \cdot f_X(x) dx \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{V(X)}$$

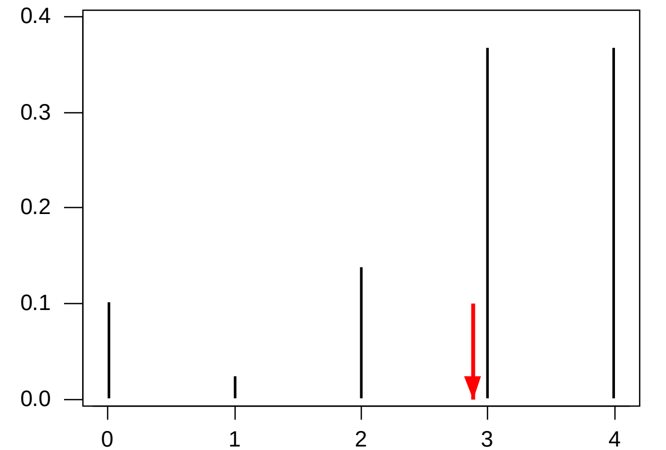
- **Relació entre Esperança i Variància (en VAD i VAC):**

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - E(X)^2$$

Indicadors de V.A. Exemple

En l'exemple del servidor i de la xarxa, analitzem l'esperança i variància de la variable *X* "número de connexions al servidor amb *n*=4"

k	$P_X(k)$	$k\cdot P_X(k)$	$(k-\mu)^2$	$(k-\mu)^2\cdot P_X(k)$
0	0.10144	0	8.2944	0.84138
1	0.02304	0.02304	3.5344	0.08143
2	0.13824	0.27648	0.7744	0.10705
3	0.36864	1.10592	0.0144	0.00531
4	0.36864	1.47456	1.2544	0.46242
		$\mu=\sum k\cdot P_X(k)=2.88$		$\sigma^2=\sum(k-\mu)^2\cdot P_X(k)=1.50$
				$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=1.22$



L'esperança 2.88 indica que s'espera un promig de 2.88 connexions si l'experiència es repetís un gran número de vegades. No s'ha d'arrodonir a un enter. L'esperança s'associa al centre de gravetat.

La desviació 1.22 informa sobre la magnitud de la dispersió de la variable. Major desviació suposa major probabilitat de buscar un valor allunyat del valor esperat. Menor desviació, major concentració.

Indicadors de V.A. Propietats

Siguin *X* i *Y* dues variables aleatòries, i *a* i *b* dos escalars

Propietats de l'Esperança	Propietats de la Variància
$E(a+X) = a + E(X)$	$V(a+X) = V(X)$
$E(bX) = b \cdot E(X)$	$V(bX) = b^2 \cdot V(X)$
$E(a+bX) = a + b\,E(X)$	$V(a+bX) = b^2 \cdot V(X)$
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$	$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ si són ind.
$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ si són ind.	$V(X \cdot Y) = ?$

Indicadors de V.A. Exemple

En l'experiència aleatòria de **llençar una moneda equilibrada <u>tres</u> cops**, hem calculat probabilitats definint la variable aleatòria "número de cares".

X	$P_X(X)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Calcula la esperança i la variància

$E(X) = 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/8 = 1.5$

$V(X) = (0 - 1.5)^2 \cdot 1/8 + (1 - 1.5)^2 \cdot 3/8 + (2 - 1.5)^2 \cdot 3/8 + (3 - 1.5)^2 \cdot 1/8 = 0.75$

Nota: NO confondre amb l'*<u>indicador de tendència central d'una mostra</u>:* **mitjana** d'unes dades recollides al realitzar repetidament l'experiència aleatòria. [Per exemple, si recollim 8 realitzacions en 50 voluntaris — cadascú repeteix 8 vegades, els tres llençaments i apunta el promig del nombre de cares en les 8 experiències. Una possiblitat és: dos voluntaris han tret de mitjana 0.75 cares; un ha tret 2.125 cares, i la resta han quedat entremig d'aquests valors, sent el cas més repetit, el treure 1.375 cares de mitjana]

Conclusió : La mitjana mostral pot variar; l'esperança no.

Indicadors de V.A. Exercici

Considerem el conjunt de tots els paquets de 3 bits que es poden enviar per una línia de comunicació:

$\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

Suposem que totes les seqüències són equiprobables.

Es defineixen dues variables aleatòries:

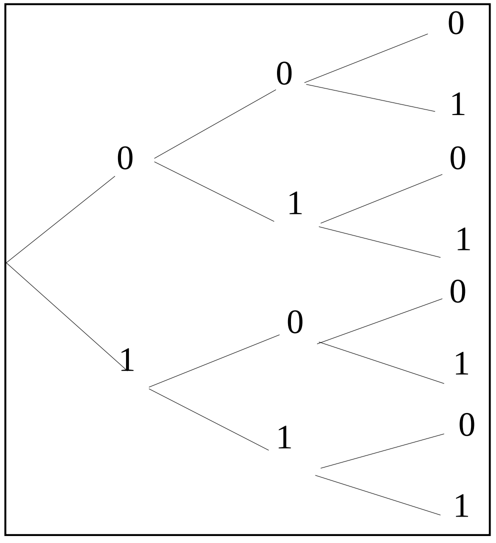
X: “suma dels 3 bits” $\rightarrow$ $\Omega_X = \{0,1,2,3\}$

Y: “alternances en la seqüència de bits”. $\rightarrow$ $\Omega_Y = \{0,1,2\}$

1) Construïu l’arbre de probabilitats
2) Definiu la funció de probabilitat de les variables X i Y
3) Calculeu els valors esperats
4) Calculeu les variàncies

Indicadors de V.A. Exercici - Solució

1) Arbre de probabilitats



Possibilitats	X (suma)	Y (#alternances)
000		
001		
010		
011		
100		
101		
110		
111		

3) Esperances

E(X) =

E(Y) =

2) Funcions de probabilitat

x	$P_X(x)$
0	
1	
2	
3	

y	$P_Y(y)$
0	
1	
2	

4) Variàncies

V(X) =

V(Y) =

Indicadors de V.A. Exercici

Continuant amb l'exemple de l'aeroport, ens plantegem estudiar determinades variables aleatòries per a modelar i obtenir informació en diversos aspectes del funcionament d'un aeroport.

En primer lloc, s'ha establert que la distribució de X: "nombre de viatgers que arriben a un punt de facturació per minut" és com es veu a continuació:

k	$P_X(X = k) = Px(k)$	$P_X(X \leq k) = Fx$
5	0.12	0.12
6	0.32	0.44
7	0.48	0.92
8	0.08	1

Calculeu la probabilitat que arribin 7 viatgers;
menys de 7 viatgers;
més de 7 viatgers;
entre 7 i 8 viatgers.

Trobem també l'esperança, la variància i la desviació tipus:

E(X) =

V(X) = $\rightarrow \sigma_X =$

Indicadors de V.A. Exercici

D'una altra banda, quan s'ha estudiat el temps que un viatger roman en el taulell de facturació, s'ha trobat que la següent funció:

$$f_X(k) = 0.2 \cdot e^{-0.2k} \quad \text{per } x > 0$$

és un model adequat per a representar la variable aleatòria T de "temps (en minuts)".

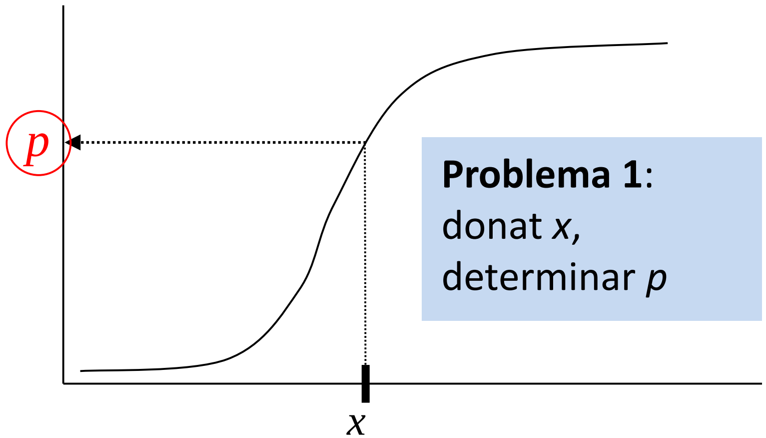
Calculeu la probabilitat que el temps sigui 7 minuts;
menys de 7 minuts;
més de 7 minuts;
entre 7 i 8 minuts

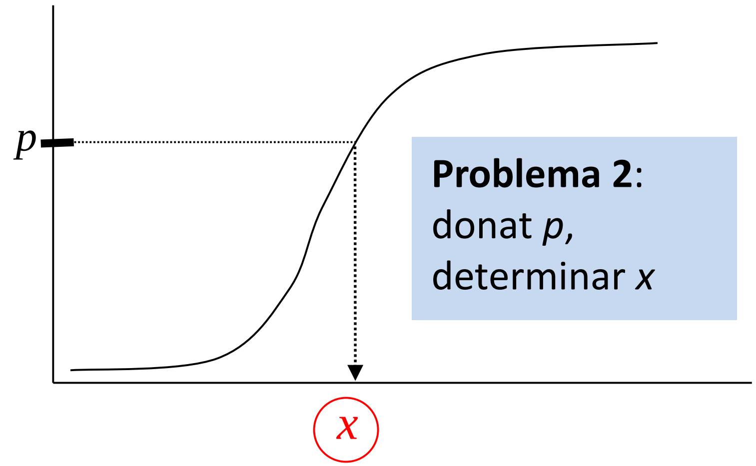
Com podem saber quin és el temps que, en mitjana*, un viatger roman en facturació?

* Nota: la paraula "mitjana" tant pot referir-se a l'esperança com a la mitjana mostral comú. En quin contexte s'està aplicant aquí?

Recapitulació. Tipus de problemes en VAC

El cas de VAC, és habitual plantejar problemes en els dos sentits:





Donat ***x*** calcular la probabilitat ***p*** tq:

$$p = F_X(x) = P(X \le x)$$

Donada una probabilitat ***p*** calcular ***x*** tq:

$$x = F_X^{-1}(p) \qquad (P(X \le x) = p)$$

Exemple: si els llits dels hotels mesuren 200 cm, quina proporció de congressistes poden dormir ben estirats?

Exemple: si desitgem que pugin dormir ben estirats el 98% dels congressistes, quina longitud han de tenir els llits?

Recapitulació. Tipus de problemes en VAD

Problema 1: donat x, determinar $P(X=x)$

Problema 2: donat x, determinar $P(X\leq x)$

Problema 3: donat $P(X\leq x)$, determinar x

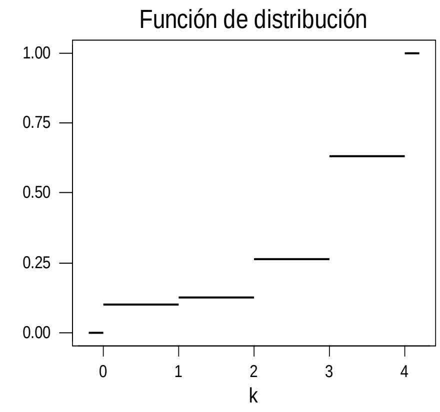
El cas del càlcul de quantils en VAD la solució pot ser aproximada:

Exemple:

Quin és el quantil de 0.25?
[o quin *és el percentil* 25? o del 25%]

2 és el valor on es troba una probabilitat de 0.25

k	$F_X(k)$
$(-\infty,0)$	0.00000
[0,1)	0.10144
[1,2)	0.12448
[2,3)	0.26272
[3,4)	0.63136
$[4,+\infty)$	1.00000

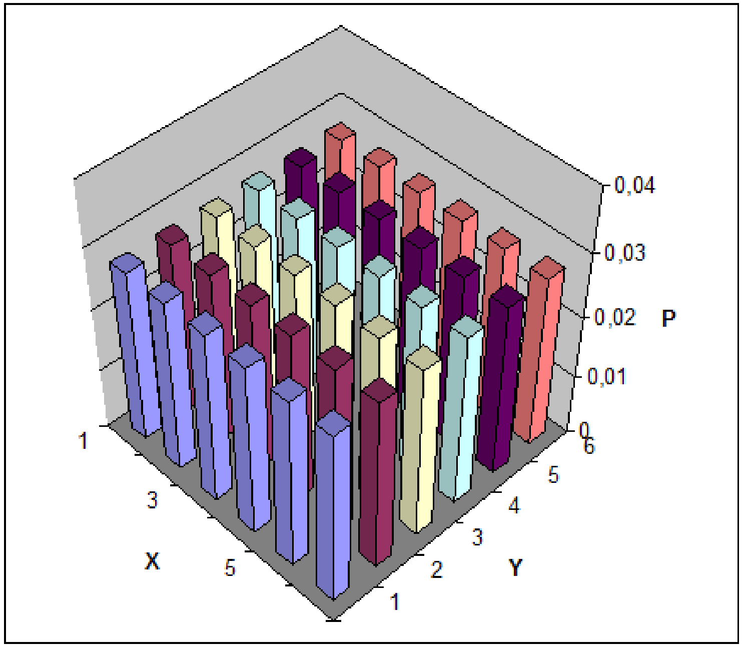


Opció a seguir: Agafarem el primer valor tal que la funció de distribució superi la probabilitat desitjada

Parells de variables. VAD

- Quan d'una experiència s'obtenen dues variables *X* i *Y*, quines relacions aleatòries es duen a terme entre elles?
- Per exemple, llancem dues vegades un dau equilibrat, i anomenem *X* al "primer resultat" i *Y* al "segon resultat".
- Raonablement, els dos llançaments són independents, llavors:

$$P(X=x \cap Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y) = 1/6\cdot 1/6 = 1/36, \quad \text{per} \quad x, y = 1, 2, \dots, 6.$$



Funcions de probabilitat en parell de VAD

- Definim **funció de probabilitat conjunta** de *X* i *Y:*

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X{=}x \cap Y{=}y)$$

- Definim la **funció de probabilitat de X condicionada per Y**:

$$P_{X|Y=y}(x) = P_{X,Y}(x,y) \,/\, P_Y(y)$$

- *X* i *Y* són **V.A. independents si:**

$$P_{X,Y}(x,y)= P_X(x)\cdot P_Y(y) \quad \Leftrightarrow \quad P_{X|Y=y}(x)= P_X(x) \quad \Leftrightarrow \quad P_{Y|X=x}(y)= P_Y(y)$$

En quant als indicadors esperança i variància, si *X* i *Y* són **independents** , llavors:

- $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$
- $V(X\pm Y) = V(X) + V(Y)$ → ATENCIÓ: A l'expressió de la dreta sempre és un **"+"**

Funcions de prob. en parell de VAD. Exemple

En l'exemple de llançar dues vegades un dau equilibrat, a partir de les dues variables X "primer resultat" i Y "segon resultat" definim unes noves variables:

S = "suma dels dos resultats"

D = "diferència en valor absolut dels dos resultats"

Nota: Això **NO** són les taules de probabilitat conjunta, sinò unes taules auxliars amb els resultats possibles en les dues tirades

S=X+Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

K	$P_S(S=k)$
2	0.028
3	0.056
4	0.083
5	0.111
6	0.139
7	0.167
8	0.139
9	0.111
10	0.083
11	0.056
12	0.028

Nota: Per obtenir aquestes probabilitats es pot dividir els casos favorables entre els casos possibles només quan els succesos siguin equiprobables.

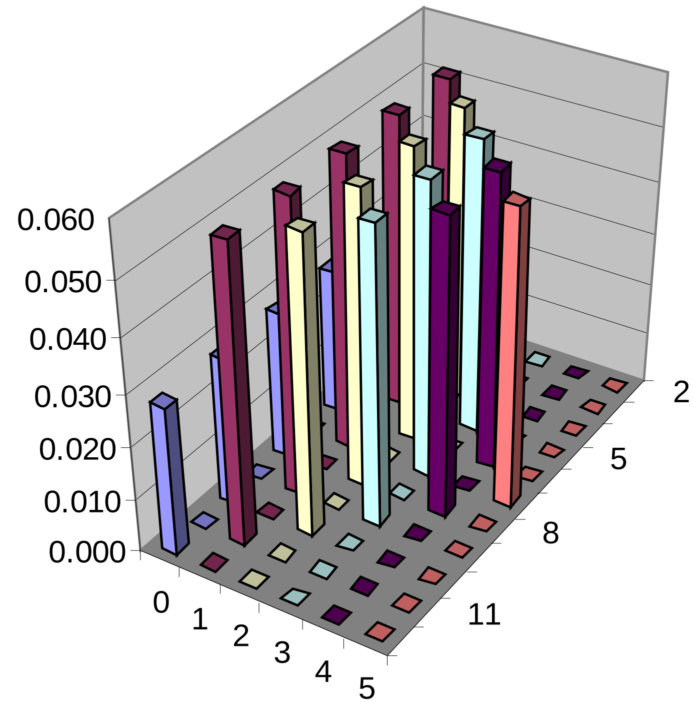
D=|X-Y|	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

K	$P_D(D=k)$
0	0.167
1	0.278
2	0.222
3	0.167
4	0.111
5	0.056

Funcions de prob. en parell de VAD. Exemple

A continuació, s'ha de trobar la funció P(*S*=s ∩ *D*=d), buscant els resultats coincidents.

S/D	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
2	0.028	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.028
3	0.000	0.056	0.000	0.000	0.000	0.000	0.056
4	0.028	0.000	0.056	0.000	0.000	0.000	0.083
5	0.000	0.056	0.000	0.056	0.000	0.000	0.111
6	0.028	0.000	0.056	0.000	0.056	0.000	0.139
7	0.000	0.056	0.000	0.056	0.000	0.056	0.167
8	0.028	0.000	0.056	0.000	0.056	0.000	0.139
9	0.000	0.056	0.000	0.056	0.000	0.000	0.111
10	0.028	0.000	0.056	0.000	0.000	0.000	0.083
11	0.000	0.056	0.000	0.000	0.000	0.000	0.056
12	0.028	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.028
	0.167	0.278	0.222	0.167	0.111	0.056	1.000



Quan *S*=12 i *D*=0? Sols si *X*=6 i *Y*=6 → P(S=12,D=0) = 1/36

Quan *S*=9 i *D*=3? Quan *X*=6 i *Y*=3, o si *X*=3 i *Y*=6 → P(S=9,D=3) = 1/36 + 1/36=1/18

Quan *S*=7 i *D*=4? No existeix un resultat on es pugui produir aquesta combinació → P(S=7,D=4) = 0

Funcions de prob. en parell de VAD. Exemple

Són S i D independents? **No**. Es pot mirar de diverses maneres:

1) $P(S|D=i) \neq P(S)$ per alguna i
2) $P(D|S=i) \neq P(D)$ per alguna i
3) $P(D=i, S=j) \neq P(D=i) \cdot P(S=j)$ per alguna i i alguna j

Nota: És molt més fàcil demostrar la NO independència perquè només s'ha de trobar un cas que corrobori que no compleix la condició [P.ex, per demostrar que són independents, amb la primera propietat s'hauria de demostrar que $P(S|D=i) = P(S)$ per qualsevol ***i***]

	$P_{S\|D}(S\|D=0)$	$P_{S\|D}(S\|D=1)$	$P_{S\|D}(S\|D=2)$	$P_{S\|D}(S\|D=3)$	$P_{S\|D}(S\|D=4)$	$P_{S\|D}(S\|D=5)$
2	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.17	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	0.00
6	0.17	0.00	0.25	0.00	0.50	0.00
7	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	1.00
8	0.17	0.00	0.25	0.00	0.50	0.00
9	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	0.00
10	0.17	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Funcions de prob. en parell de VAD. Exemple

- Què passa amb μ i σ per la variable *S* quan està condicionada per *D* [llavors parlem d'*esperances* i *variàncies condicionades* perquè utilitzem $P_{X|Y=y}(x)$ en lloc de $P_X(x)$)]
- Per *D*=0, S té un valor esperat de 7, i una desviació estàndard de 3.42 (gran dispersió).
- A mesura que *D* creix, la esperança es manté, però la desviació disminueix perquè la probabilitat es concentra al voltant del 7

	$P_{S\|D}(S\|D=0)$	$P_{S\|D}(S\|D=1)$	$P_{S\|D}(S\|D=2)$	$P_{S\|D}(S\|D=3)$	$P_{S\|D}(S\|D=4)$	$P_{S\|D}(S\|D=5)$
2	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.17	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	0.00
6	0.17	0.00	0.25	0.00	0.50	0.00
7	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	1.00
8	0.17	0.00	0.25	0.00	0.50	0.00
9	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	0.00
10	0.17	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
μ	**7.00**	**7.00**	**7.00**	**7.00**	**7.00**	**7.00**
σ	**3.42**	**2.83**	**2.24**	**1.63**	**1.00**	**0.00**

Funcions de prob. en parell de VAD. Exercici

En l'exemple anterior dels paquets de 3 bits que es poden enviar a través d'una línea de comunicació [Ω = {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}] teniem les v.a.:

X: "suma dels 3 bits"

Y: "número d'alternances en la seqüència de bits"

Ompliu la taula amb la funció de probabilitat conjunta de les variables X i Y, a partir de la taula següent:

Possibilitats	X (suma)	Y (#alternances)
000	**0**	**0**
001	**1**	**1**
010	**1**	**2**
011	**2**	**1**
100	**1**	**1**
101	**2**	**2**
110	**2**	**1**
111	**3**	**0**

P_{YX}	*X=0*	*X=1*	*X=2*	*X=3*	
Y=0					1/4
Y=1					1/2
Y=2					1/4
	1/8	3/8	3/8	1/8	

Quant val E(Y|X=0)?

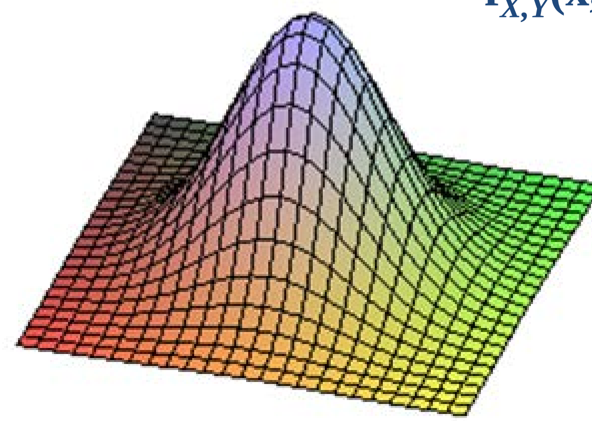
I V(Y|X=0)?

Parell de Variables. VAC

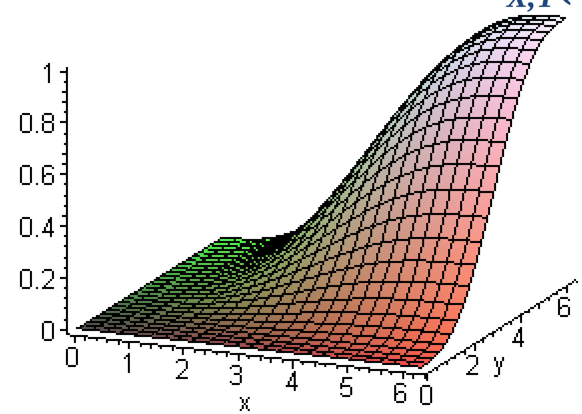
En cas de que existeixin dos variables contínues *X* i *Y* en la mateixa experiència, la relació comuna es reflecteix a través de la **funció de densitat conjunta, $f_{X,Y}(x,y)$.**

- Sigui $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$, *funció de distribució conjunta* de les variables aleatòries
- Si derivem $F_{X,Y}(x,y)$ respecte a les variables (x i y), obtenim $f_{X,Y}(x,y)$
- La definició de funcions condicionades és idéntica que per a V.A.D: $f_{X|Y=y}(x) = f_{X,Y}(x,y) / f_Y(y)$
- El volum total tancat sota $f_{X,Y}(x,y)$ és igual a 1, i una porció d'ell equival a una probabilitat

$\mathbf{f_{X,Y}(x,y)}$



$\mathbf{F_{X,Y}(x,y)}$



Indicadors de parell de V.A.

- A partir d'un parell de variables *X* i *Y* definim indicadors de la seva relació bivariant (equivalents als mostrals que es veuen a estadística descriptiva)

- La covariància indica si existeix relació lineal o no, a partir del producte, per cada parell de valors, de la diferència respecte al seu valor esperat

$$\boldsymbol{VAD} \rightarrow Cov(X,Y) = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} (x - E(x))(y - E(y)) \cdot p_{XY}(x,y)$$

$$\boldsymbol{VAC} \rightarrow Cov(X,Y) = \iint_{\forall x,y} (x - E(x))(y - E(y)) \cdot f_{XY}(x,y)\,\mathrm{dxdy}$$

- La correlació indica si existeix relació lineal o no relativitzant-ho a valors entre -1 i 1 (a partir de la covariància i dividint per les desviacions corresponents)

$$corr(X,Y) = \rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Nota: per qualsevol parell de variables *X* i *Y* → $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

Nota: La correlació és més interpretable per estar estandaritzada

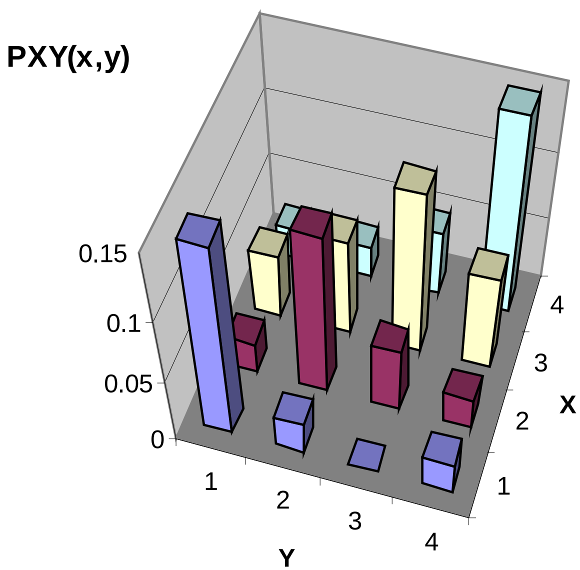
Indicadors de parell de V.A. Exemple

X/Y	1	2	3	4	
1	0.150	0.025	0.000	0.025	0.200
2	0.025	0.125	0.050	0.025	0.225
3	0.050	0.075	0.125	0.075	0.325
4	0.025	0.025	0.050	0.150	0.250
	0.250	0.250	0.225	0.275	1.000

Suposem dos variables *X* i *Y* que presenten la funció $P_{X,Y}(x,y)$ de la taula.
Veiem que:

$\mu_X = 2.625$ $\sigma_X = 1.065$

$\mu_Y = 2.525$ $\sigma_Y = 1.140$



Observeu la relació entre les variables: en general, el valor de Y és de la magnitud de *X*, hi ha una *relació directa*, encara que no sigui determinista [*Y* = *X*]

covariància → **Cov(*X*,*Y*) = 0.647**

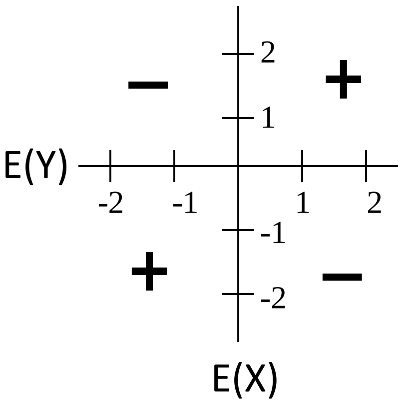
[idea de relació positiva]

correlació → $\boldsymbol{\rho_{X,Y} = 0.533}$

[indica *magnitud* de la relació, ja que sabem que l'indicador està entre -1 i 1]

Indicadors de parell de V.A. Exemple

Si una variable té $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ es diu que és una variable *centrada* i *reduïda* (estandaritzada). Igualment, diem que la correlació ve estandaritzada perquè pren valors entre -1 i 1.



Aquests quadrants indiquen el signe del producte resultant. Si la probabilitat es reparteix preferentment entre els quadrants positius, la relació entre *X* i *Y* és *directa*. En cas contrari la relació és *inversa* (si *X* augmenta, *Y* tendeix a disminuir).

- Si $|\rho_{X,Y}|=1$, la relació és total i lineal: $Y = a+b\cdot X$ (signe $\rho_{X,Y}$ = signe b)
- $|\rho_{X,Y}|$ a prop de 1 $\Rightarrow$ *X* i *Y* estan molt relacionades linealment
- *X* i *Y* independents $\Rightarrow \rho_{X,Y}=0$, però a la inversa no és cert
- La magnitud de la covariància depen de l'escala agafada per les variables [Per exemple, si canvio les unitats de metres a quilòmetres, la covariància canviarà però la correlació, no]

Indicadors de parell de V.A. Exercici

Tenim la distribució de probabilitat conjunta entre "Memòria d'un ordinador entre 1 i 6 GB" (M) i "nombre (entre 0 i 5) de bloquejos o incidències mensuals" (B)

Distribució conjunta M/B	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0.00	0.020	0.030	0.050	0.060	0.08
2	0.00	0.015	0.015	0.035	0.045	0.03
3	0.00	0.030	0.060	0.050	0.030	0.03
4	0.06	0.050	0.045	0.030	0.030	0.00
6	0.10	0.075	0.030	0.000	0.000	0.00

k	**$P_M(k)$**
1	0.24
2	0.14
3	0.20
4	0.215
6	0.205

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$P_B(k)$	0.16	0.19	0.18	0.165	0.165	0.14

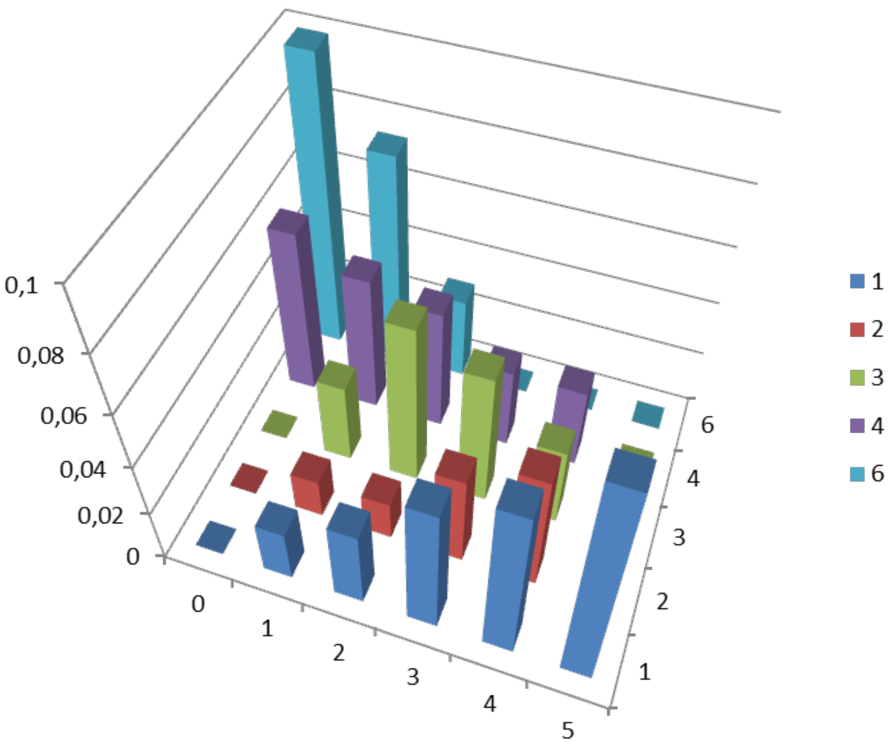
Distribucions marginals

1. Representeu $P_{M\,/\,B=3}()$ i $P_{M\,/\,B=4}()$. Que es dedueix d'això?
2. Representeu $P_{B\,/\,M=2}()$ i $P_{B\,/\,M=4}()$. Que es dedueix d'això?
3. Calculeu prob. que un ordinador tingui menys de 3 GB i més de 2 incidències
4. Calculeu prob. que tingui més de 2 incidències si té menys de 3 GB
5. Calculeu prob. que tingui més de 3 GB si ha tingut menys de 2 incidències

Indicadors de parell de V.A. Exercici

En mitjana, els ordinadors tractats tenen una memòria de 3.21 GB, i han patit una mitjana de 2.405 incidències mensuals. La distribució és bastant uniforme, amb desviacions estàndards de 1.765 GB i 1.66 inc./m.

Les dues variables no són independents, la funció $P_{M,B}()$ mostra una clara relació inversa (com més memòria, menys incidències):



Quant val la Covariància?

Quant val la Correlació?

Si $|\rho_{X,Y}|$ és alta, la variabilitat de *B* condicionada amb *M* és sensiblement menor que la global de *B*.

Indicadors de parell de V.A. Propietats

Siguin X i Y dues variables aleatòries, i a i b dos escalars:

- **Esperança**
  - $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) + Cov(X,Y)$
- **Variància**
  - $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\, Cov(X,Y)$
  - $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\, Cov(X,Y)$
- **Covariància**
  - $Cov(aX, bY) = a \cdot b \cdot Cov(X,Y)$
  - $Cov(X,X) = V(X)$