Teoria de la Computació

Tema 1: Teoria de Llenguatges

Teoria:

- `Vídeos 1, 2 i 3.`
- `Llibre TC (Llenguatges regulars i incontextuals): Capítol 1.`
- `Llibre M. Sipser, "Introduction to the Theory of Computation": Chapter 0. Introduction.`

Exercicis per a l'avaluació contínua:

1. Formalitzeu els següents llenguatges utilitzant la notació clàssica de conjunts, com a parell variable de mot ($w \in \Sigma^*$) i propietat (P) definida sobre mots, de manera que el llenguatge es pot definir com el conjunt $\{w \in \Sigma^* \mid P(w)\}$. Per a definir formalment la propietat P feu servir quantificadors universals i existencials, operadors booleans i les notacions sobre mides de mots que hem introduït.

   (a) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que contenen el submot ab.

   (b) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ tals que a la dreta de cada submot ab hi ha algun submot ba.

   (c) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que contenen el submot ab i el submot ba.

   (d) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b, c\}$ tals que entre cada dues b's hi ha alguna a.

   (e) Llenguatge de mots sobre $\{a, b\}$ tal que tota ocurrència de b està en posició parell (el primer símbol d'un mot ocupa la posició 1).

   (f) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ amb algun prefix amb més b's o igual que a's.

   (g) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ tals que qualsevol prefixe seu té més b's o igual que a's.

   (h) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ amb algun prefix de mida parell amb més b's o igual que a's.

   (i) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ tals que qualsevol prefixe seu de mida parell té més b's o igual que a's.

   (j) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que tenen un prefix i un sufix idèntics de mida major que 0 i menor que la mida del propi mot.

2. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions sobre mots x, y, z i llenguatges A, B, C en general.

   (a) $xy = yx$.

   (b) $xy = xz \Rightarrow y = z$.

   (c) $A(BC) = (AB)C$.

(d) $AB = BA$.

(e) $A \neq \emptyset \ \wedge \ AB = AC \ \Rightarrow \ B = C$.

(f) $A \neq \emptyset \ \wedge \ B \neq \emptyset \ \wedge \ AB = CD \ \wedge \ (\forall u \in A, v \in C : |u| = |v|) \ \Rightarrow \ A = C \ \wedge \ B = D$.

(g) $(A \cup B)C = AC \cup BC$ i $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

(h) $(A \cap B)C \subseteq AC \cap BC$ i $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$.

(i) $(A \cap B)C \supseteq AC \cap BC$ i $A(B \cap C) \supseteq AB \cap AC$.

3. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.

(a) $L^* = \{a, b\}^* \ \Rightarrow \ \{a, b\} \subseteq L$.

(b) $L_1^* L_2^* \subseteq (L_1 L_2)^*$.

(c) $L_1^* L_2^* \supseteq (L_1 L_2)^*$.

(d) $L_1^+ \cup L_2^+ = \{a, b\}^+ \ \wedge \ L_1^+ \cap L_2^+ = \emptyset \ \Rightarrow \ L_1 = \emptyset \ \vee \ L_2 = \emptyset$.

(e) $(L_1^* \cup L_2^*) \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$.

(f) $(L_1^* \cup L_2^*) \supseteq (L_1 \cup L_2)^*$.

(g) $(L_1 \cap L_2)^* \subseteq (L_1^* \cap L_2^*)$.

(h) $(L_1 \cap L_2)^* \supseteq (L_1^* \cap L_2^*)$.

(i) $L_1^* \subseteq L_2^* \ \Rightarrow \ L_1 \subseteq L_2$.

(j) $\overline{L^*} \subseteq \overline{L} \subseteq \overline{L}^*$.

(k) $\overline{L^*} \supseteq \overline{L} \supseteq \overline{L}^*$.

(l) $L_1 \neq \emptyset \ \wedge \ L_2 \neq \emptyset \ \wedge \ L_1 \cap L_2 = \emptyset \ \Rightarrow \ L_1^* \neq L_2^*$.

(m) $L^+ L^+ \subseteq L^+$.

(n) $L^+ L^+ \supseteq L^+$.

(o) $(L^2)^* \subseteq (L^*)^2$.

(p) $(L^2)^* \supseteq (L^*)^2$.

(q) $L \subseteq L^2 \Leftrightarrow (\lambda \in L) \vee (L = \emptyset)$.

(r) $L^2 \subseteq L \Leftrightarrow L = L^+$.

(s) $(\lambda \in L) \wedge (L^2 \subseteq L) \Leftrightarrow L = L^*$.

(t) $L = L^2 \Rightarrow (L = L^*) \vee (L = \emptyset)$.

4. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.

(a) $(xy)^R = y^R x^R$.

(b) $(L_1 L_2)^R = L_2^R L_1^R$.

(c) $(L_1 \cup L_2)^R = L_1^R \cup L_2^R$.

(d) $(L_1 \cap L_2)^R = L_1^R \cap L_2^R$.

(e) $\overline{L}^R = \overline{L^R}$.

(f) $(L^*)^R = (L^R)^*$.
(g) $(L_1L_2)^R = L_1^R L_2^R \;\Rightarrow\; L_1 = L_2$.

5. Quines de les següents definicions de la funció σ defineixen un morfisme (és a dir, cumpleixen $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ per a mots x, y qualssevol).

   (a) $\sigma(a_1a_2\cdots a_n) = a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_n$, essent $a_1, \ldots, a_n$, tot ells, símbols de l'alfabet.
   (b) $\sigma(a_1a_2a_3\cdots a_n) = a_1a_2a_2a_3a_3a_3\cdots\overbrace{a_n\cdots a_n}^{n)}$, essent $a_1, \ldots, a_n$, tot ells, símbols de l'alfabet.
   (c) $\sigma(w) = w$.
   (d) $\sigma(w) = \lambda$.
   (e) $\sigma(w) = a^{|w|}$.
   (f) $\sigma(w) = w^R$.
   (g) $\sigma(w) = \sigma_1(\sigma_2(w))$ per a morfismes σ_1, σ_2.

6. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general, on σ és un morfisme.

   (a) $\sigma(L_1L_2) = \sigma(L_1)\sigma(L_2)$.
   (b) $\sigma(L^n) = \sigma(L)^n$.
   (c) $\sigma(L_1 \cup L_2) = \sigma(L_1) \cup \sigma(L_2)$.
   (d) $\sigma(L^*) = \sigma(L)^*$.
   (e) $\sigma(L^R) = \sigma(L)^R$.
   (f) $\sigma(\overline{L}) = \overline{\sigma(L)}$.
   (g) $\sigma(L) = L \;\Rightarrow\; \forall x \in L : \sigma(x) = x$.

7. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.

   (a) $|L_1| \cdot |L_2| = |L_1 \cdot L_2|$.
   (b) $(\forall a, b \in \Sigma : (a \neq b \Rightarrow \sigma(a) \neq \sigma(b))) \Rightarrow |\sigma(L)| = |L|$, on σ és un morfisme.
   (c) $|L^R| = |L|$.
   (d) $|L^n| = |L|^n$.

8. Donat un llenguatge L, *shiftar* L dóna lloc a un nou llenguatge, que denotem $S(L)$, i que conté als mots que s'obtenen agafant cada mot de L i rotant-lo de totes les maneres possibles, formalment: $S(L) = \{vu \mid uv \in L\}$. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.

   (a) $S(L)^* \subseteq S(L^*)$.
   (b) $S(L)^* \supseteq S(L^*)$.
   (c) $\overline{S(L)} = S(\overline{L})$.

(d) $S(L^R) = S(L)^R$.

(e) $S(L_1 \cup L_2) = S(L_1) \cup S(L_2)$.

(f) $S(L_1 \cap L_2) = S(L_1) \cap S(L_2)$.

(g) $S(L_1 L_2) = S(L_1) S(L_2)$.

(h) $S(\sigma(L)) = \sigma(S(L))$, on σ és un morfisme.

9. Demostreu que no hi ha cap mot w que satisfaci $aw = wb$, essent a i b símbols de l'alfabet.

10. Demostreu que, per a qualsevol alfabet Σ, hi ha un únic llenguatge L que satisfà $L = \overline{\Sigma L}$. Quin és aquest llenguatge?