Teoria de la Computació

Tema 4: Expressions Regulars

Teoria:

- `Vídeos del 19 al 20`
- `Llibre TC (Llenguatges regulars i incontextuals) Capítol 6, des de la secció 6.1 fins la secció 6.4.`
- `Llibre M. Sipser, "Introduction to the Theory of Computation": Section 1.3 Regular Expressions.`

Exercicis per a l'avaluació contínua:

1. Trobeu expressions regulars que representin els següents llenguatges transformant un DFA en una expressió regular segons el mètode basat en el lema d'Arden.
   (a) Mots sobre $\{a, b\}$ amb un nombre parell de a's.
   (b) Mots sobre $\{a, b\}$ amb o bé un nombre parell de a's, o bé un nombre parell de b's.
   (c) Mots sobre $\{a, b\}$ acabats en $ababa$.
   (d) Mots sobre $\{a, b\}$ que no contenen el submot aba.
   (e) Mots sobre $\{a, b, c\}$ tals que, entre cada dues a's hi ha almenys una b.
   (f) Mots sobre $\{0, 1\}$ amb almenys dos 0's consecutius.
2. Donada una expressió regular, com construiríeu una altra expressió regular, de manera senzilla, que generi el llenguatge revers de la primera?
3. Donada una expressió regular r i un morfisme σ, com construiríeu una altra expressió regular, de manera senzilla, que generi $\sigma(\mathcal{L}(r))$?
4. Demostreu les equivalències següents entre expressions regulars:
   (a) $a^*(b + ca^*)^* = (a + b^*c)^*b^*$
   (b) $(bb + ba + a)^*baa^* = a^*b(aa^*b + ba^*b)^*aa^*$
   (c) $(\Lambda + b)a^*(b + bba^*)^* = b^*(a + bb + bbb)^*b^*$.
5. Donades dues expressions regulars r_1 i r_2, com decidiríeu:
   (a) $\mathcal{L}(r_1) = \mathcal{L}(r_2)$.
   (b) $\mathcal{L}(r_1) \subseteq \mathcal{L}(r_2)$.
   (c) $\mathcal{L}(r_1) = \emptyset$.
   (d) $|\mathcal{L}(r_1)| = \infty$.
   (e) $|\mathcal{L}(r_1) \cap \mathcal{L}(r_2)| = 0$.

(f) $|\mathcal{L}(r_1) \cap \mathcal{L}(r_2)| = \infty$.

6. (Lema d' Arden (bis)) Demostra que BA^* és solució de l'equació $X = XA + B$, que tota solució d'aquesta equació conté BA^*, i que en el cas de que A no contingui λ, aleshores BA^* n'és l'única solució.

7. Aprofitant el resultat de l'exercici anterior (Lema d' Arden (bis)), obteniu una expressió regular pel complementari de les paraules que representen un múltiple de 3 (és a dir, $\overline{\{w \in \{0,1\}^* \mid \texttt{valor}_2(w) \in \dot{3}\}}$). Per a això, escriu l'autòmat mínim per aquest llenguatge, crea una variable X_q per a cada estat q, i crea equacions (amb la incògnita a l'esquerra com en el Lema d' Arden (bis)) amb la idea de que la solució de cada X_q sigui el llenguatge dels mots que ens porten des de l' estat inicial a l'estat q.

8. Utilitza el mètode de l'exercici anterior per obtenir expressions regulars dels llenguatges següents aplicant el Lema d' Arden (bis). Compara-les amb expressions regulars que s'obtenen aplicant el Lema d'Arden tal i com s'explica en els vídeos.

   (a) Mots sobre $\{a, b\}$ amb un nombre parell de a's.

   (b) Mots sobre $\{a, b\}$ amb o bé un nombre parell de a's, o bé un nombre parell de b's.

   (c) Mots sobre $\{a, b\}$ acabats en $ababa$.

   (d) Mots sobre $\{a, b\}$ que no contenen el submot aba.

   (e) Mots sobre $\{a, b, c\}$ tals que, entre cada dues a's hi ha almenys una b.

   (f) Mots sobre $\{0, 1\}$ amb almenys dos 0's consecutius.