信号与线性系统

第二章 连续系统的时域分析

绪论复习

- 什么是信号？
- 信号的描述方法
- 信号的分类
- 信号的简单运算
- 什么是系统？
- 系统的分类
- 系统分析的方法是什么？
- 信号与线性系统的研究对象是：确定信号与线性时不变系统。

线性时不变连续系统的建模

描述线性时不变连续系统的数学模型是线性常系数微分方程。

对于电系统，列写数学模型的基本依据有如下两方面。

(1) 元件约束，与元件的连接方式无关

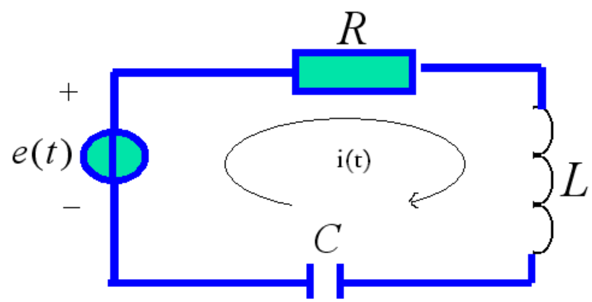
电阻: $i_R(t) = \dfrac{u_R(t)}{R}$ $\qquad u_R(t) = Ri_R(t)$

电容: $i_c(t) = C\dfrac{du_c(t)}{dt}$ $\qquad u_c(t) = u_c(t_0) + \dfrac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_c(\tau)d\tau$

电感: $u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$ $\qquad i_L = i_L(t_0) + \dfrac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\tau)d\tau$

(2) 连接方式约束，KVL 和 KIL, 与元件的性质无关.

建模例题



$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = e(t)$$

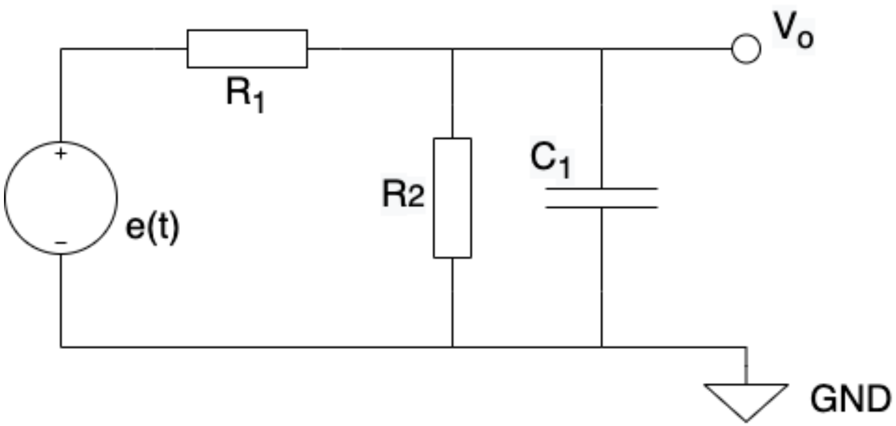
$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = e(t)$$

$$\boxed{L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{de(t)}{dt}}$$

建模例题

- 如右图电路，求 v_o

$$e(t)=\left[\frac{v_o(t)}{R_2}+C\frac{dv_o(t)}{dt}\right]R_1+v_o(t)$$



化简得：

$$\frac{dv_o(t)}{dt}+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}v_o(t)=\frac{1}{R_1C}e(t)$$

线性连续时间系统的数学模型

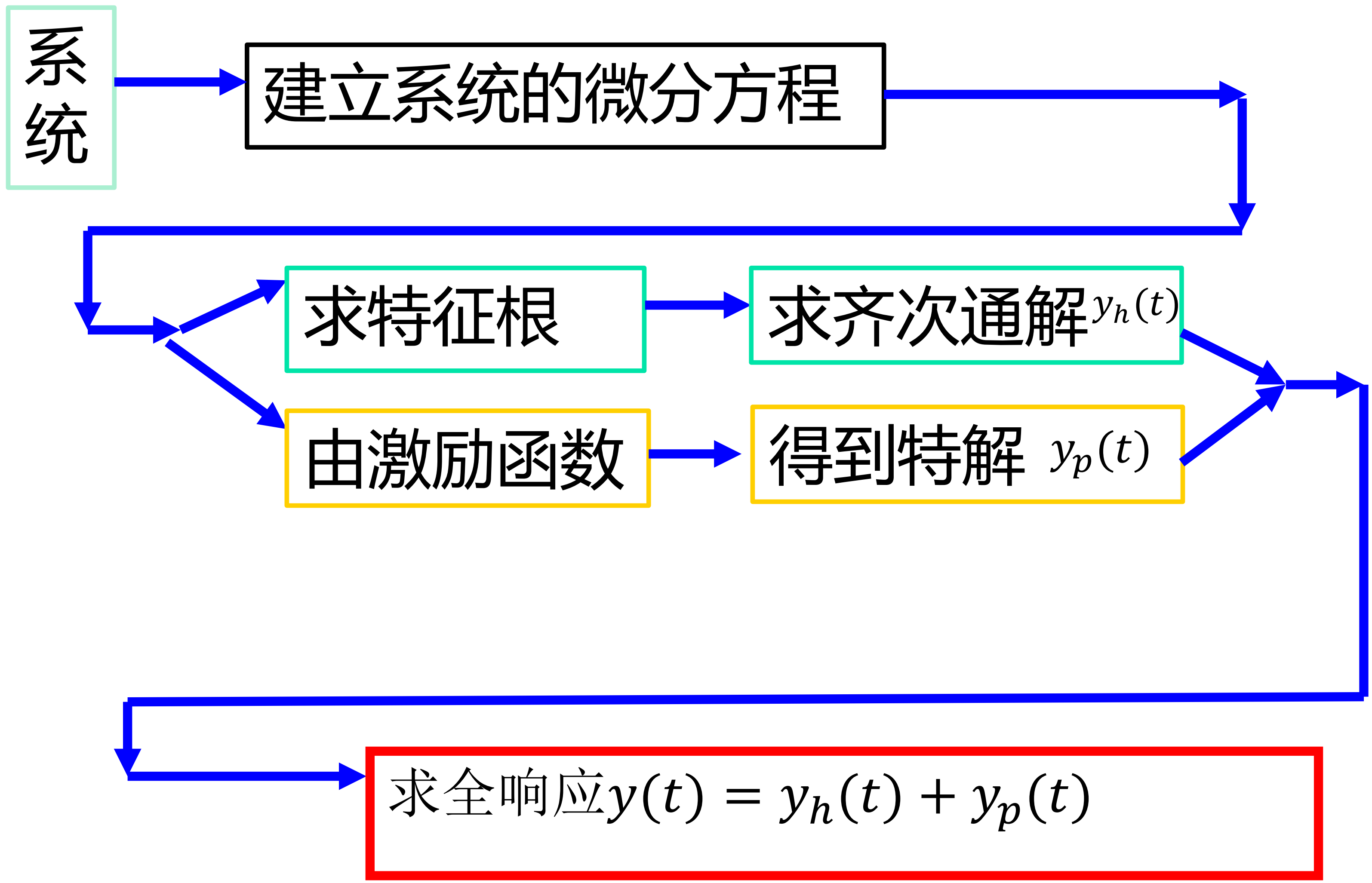
- 对于线性连续时间系统而言，其数学模型是一个的n阶线性常微分方程，可以用下式来表达（式中各系数a和b都是常数）：

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)$$

$$=b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0 e(t)$$

- 该方程又称为系统的输入——输出方程
- 方程的阶数称为系统的阶数
- 一般情况下，电路储能元件的个数即为方程的阶数

数学模型求解——经典法



二阶齐次微分方程的经典解法

- 二阶齐次微分方程的标准形式：

$$y'' + py' + qy = 0$$

- 解算思路——拼凑法，猜想方程解的形式为：

$$y = e^{\lambda x}$$

代入方程，可得：

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0$$

$$\because e^{\lambda x} \neq 0$$

$$\therefore \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

特征方程

二阶齐次微分方程的经典解法（续）

特征方程的根为：$\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

令$\Delta=\mathrm{p}^2-4\mathrm{q}$，则有：

当$\Delta>0$时，有两线性无关的特解：$y_1=e^{\lambda_1 t}$和$y_2=e^{\lambda_2 t}$

因此，方程的通解为：$y=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$

二阶齐次微分方程的经典解法（续）

当$\Delta = 0$时，$\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2}$，则方程的一个特解为：$y_1 = e^{\lambda_1 t}$

设另一特解为$y_2 = u(t)e^{\lambda_1 t}$，代入方程并化简：

$u'' + (2\lambda_1 + p)u' + (\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)u = 0$，

比较等式两边：

$\because u'' = 0 \therefore$ 取$u = t$，得另一特解为：$y_2 = te^{\lambda_1 t}$

方程的通解为：$y = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t}$

- 疑问1：为什么在重根的时候，还有另一个特解？
- 疑问2：为什么可以取 $u = t$，而不是 $u = at + b$？

二阶齐次微分方程的经典解法（续）

当$\Delta < 0$时，有一对共轭的复根：

$\lambda_1 = \alpha + j\beta$，$\lambda_2 = \alpha - j\beta$

因此，方程有特解：$y_1 = e^{(\alpha+j\beta)t}, y_2 = e^{(\alpha-j\beta)t}$

利用欧拉公式，可得：

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2j}(y_1 - y_2) = e^{\alpha t}\sin\beta t$$

方程的通解为：$y = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t)$

- 疑问1：为什么利用欧拉公式？

二阶齐次微分方程例题1

求解：$y'' - 2y' - 3y = 0$

特征方程为：$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

特征根为：$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$

通解为：$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$

二阶齐次微分方程例题2

求解：$y'' + 4y' + 4y = 0$

特征方程为：$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

特征根为：$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$

通解为：$y = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$

N阶齐次微分的经典解法

- N阶齐次微分方程的标准形式：

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$$

特征方程为：

$$\lambda^n + P_1 \lambda^{n-1} + \cdots + P_{n-1}\lambda + P_n = 0$$

特征方程的根	通解中的对应项
若是k重根r	$(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$
若是k重共轭复根$\alpha \pm j\beta$	$[(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) \cos \beta x$ $+(D_0 + D_1 x + \cdots$ $+ D_{k-1} x^{k-1}) \sin \beta x] e^{\alpha x}$

二阶非齐次微分方程的经典解法

- 二阶非齐次微分方程的标准形式：

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

- 解算思路——拼凑法，针对不同的激励函数，有不同的拼凑思路。
- 最基本的激励函数为：

$P_m(x)e^{\gamma x}$，其中$P_m(x)$是 m 阶代数多项式

- 常见类型：直流型、正弦型，均可以通过欧拉公式等方法，由基本的指数型组合而成。

二阶非齐次微分方程的经典解法（续）

设方程的特解为：$\bar{y} = Q_m(t)e^{\gamma t}$，其中$Q_m(t)$是 m 阶多项式

代入方程并化简可得：

$$Q'' + (2\gamma + p)Q' + (\gamma^2 + p\gamma + q)Q = P_m$$

分以下三种情况讨论：

若γ不是特征方程的根，则方程的解为：$\bar{y} = Q_m(t)e^{\gamma t}$

若γ是特征方程的单根，则方程的解为：$\bar{y} = tQ_m(t)e^{\gamma t}$

若γ是特征方程的重根，则方程的解为：$\bar{y} = t^2Q_m(t)e^{\gamma t}$

将$\bar{y}$代入原方程，并化简，比较等式两边的多项式，可得$Q_m(t)$的系数

二阶非齐次微分方程的经典解法（续）

特别的，当$P_m(x)=A$时，特解$\bar{y}$：

$$\bar{y}=\begin{cases}\dfrac{A}{\gamma^2+p\gamma+q}e^{\gamma x}, & \gamma\text{不是特征方程的根}\\ \dfrac{A}{2\gamma+p}xe^{\gamma x} & \gamma\text{是特征方程的单根}\\ \dfrac{A}{2}x^2e^{\gamma x} & \gamma\text{是特征方程的重根}\end{cases},$$

共振现象

二阶非齐次微分方程例题1

求通解$y'' + 6y' + 9y = 5xe^{-3x}$

特征方程：$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

特征根：$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$

齐次通解：$Y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$

$\because \lambda = -3$是重根 $\therefore$ 特解$\bar{y} = x^2(Ax + B)e^{-3x}$

代入原方程，并化简： $6Ax + 2B = 5x$

比较多项式：$A = \dfrac{5}{6}$，$B = 0$

方程的通解为：$y = Y + \bar{y} = (c_1 + c_2 x + \dfrac{5}{6}x^3)e^{-3x}$

二阶非齐次微分方程例题2

已知某线性时不变连续时间系统的动态方程为：

$y'' + 6y' + 8y = e^{-t}$，初始条件为$y(0) = 1$，$y'(0) = 2$

求系统的完全响应$y(t)$。

通过非齐次线性微分方程的解题步骤可知，方程的通解为：

$$y(t) = (c_1e^{-2t} + c_2e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t})$$

将初始条件代入，并解二元一次方程组，可得：

$c_1 = \frac{5}{2}$，$c_2 = -\frac{11}{6}$

完全响应$y(t) = \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{11}{6}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t}$

二阶非齐次微分方程例题3

求解$y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}$，其中$y(0) = 1$，$y'(0) = 0$

特征根为：$\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = -3$

齐通解为：$Y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$

$\because$ 激励部分的$\lambda = \lambda_1$ $\therefore$ 特解为$\bar{y} = p_1 e^{-2t} + p_2 t e^{-2t}$

方程的通解为：

$y = Y + \bar{y} = (c_1 + p_1)e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + p_2 t e^{-2t}$

代入原方程，得$p_2 = 1$

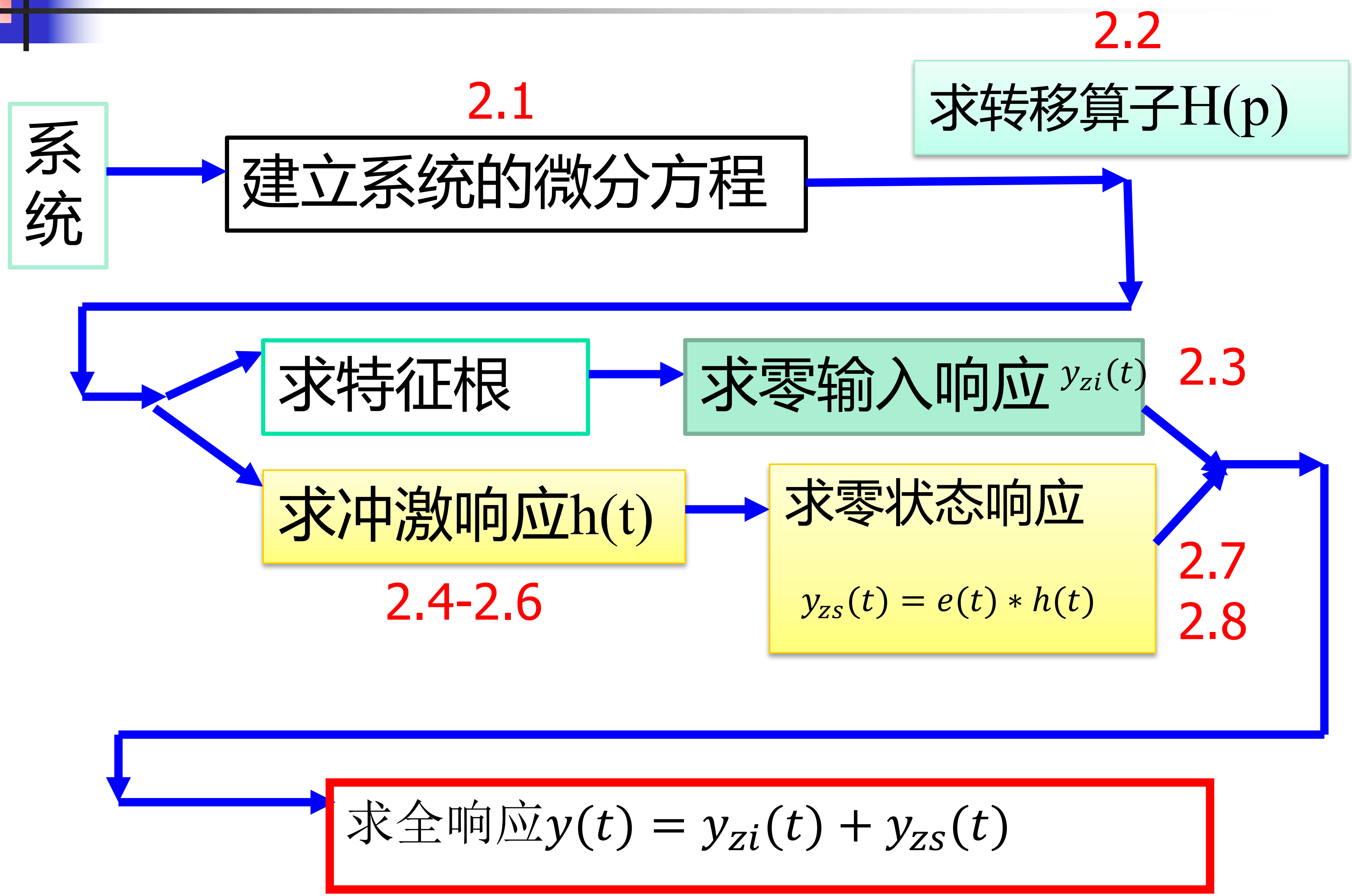
代入初始条件，解二元一次方程组得：$(c_1 + p_1) = 2$，$c_2 = -1$

$\therefore$ 方程的全解为：$y = 2e^{-2t} - e^{-3t} + te^{-2t}$

非齐次微分方程的古典解法的几点考虑

- 非齐次微分方程古典解法的完备性证明
- 通解与自然响应、特解与受迫响应
- 当激励信号为复杂函数时，受迫响应的求解非常困难！
- 在某些特殊的情况下，无法得到受迫响应
- 解决方法一：变换域求解微分方程
  - 傅立叶变换
  - 拉普拉斯变换
- 解决方法二：零输入响应(z.i.r)与零状态响应(z.s.r)
- 零状态响应的时域叠加积分法
  - 卷积积分
  - 杜阿梅尔积分
  - 数值积分运算与微分方程的数值解法

数学模型求解——ZIR/ZSR方法



系统方程的算子表示法

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) = b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

令$p = \dfrac{d}{dt}$， $p^i = \dfrac{d^i}{dt^i}$，

则原方程可写成如下的（算子）形式：

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0) r(t) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p \quad + b_0) e(t)$$

记为 $D(p)r(t) = N(p)e(t)$ **或** $r(t) = \dfrac{N(p)}{D(p)}e(t)$

转移算子

$$r(t)=\frac{N(p)}{D(p)}e(t)$$

记 $H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0}$

称为该系统的转移算子。

- **由微分方程的算子形式可以很方便地得到方程的解；**
- **算子形式的微分方程与其拉普拉斯变换式形式类似，转移算子也与系统函数的形式类似。**

练习：写出下列微分方程的转移算子。

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=2\frac{d^2}{dt^2}e(t)+9\frac{d}{dt}e(t)+11e(t)$$

算子的运算性质

性质1 以p的正幂多项式出现的运算式，在形式上可以像代数多项式那样进行展开和因式分解。例如：

$$(p+2)(p+3)y(t)=(p^2+5p+6)y(t)$$
$$(p^2-4)f(t)=(p+2)(p-2)f(t)$$

性质2 设$A(p)$和$B(p)$是p的正幂多项式， 则

$$A(p)B(p)f(t)=B(p)A(p)f(t)$$

算子的运算性质

性质3 微分算子方程等号两边p的公因式不能随便消去。

例如，由下面方程

$$py(t) = pf(t)$$

不能随意消去公因子p而得到$y(t)=f(t)$的结果。因为$y(t)$与$f(t)$之间可以相差一个常数c。 正确的结果应写为

$$y(t) = f(t) + c$$

也不能由方程 $(p + a)y(t) = (p + a)f(t)$

通过直接消去方程两边的公因式$(p + a)$得到$y(t) = f(t)$，因为$y(t)$与$f(t)$之间可以相差ce^{-at}，其正确的关系是：

$$y(t) = f(t) + ce^{-at}$$

算子的运算性质

性质4 $$D(p)\cdot\frac{A(p)}{D(p)B(p)}f(t)=\frac{A(p)}{B(p)}f(t)$$

但是： $$\frac{A(p)}{B(p)D(p)}\cdot D(p)f(t)\neq\frac{A(p)}{B(p)}f(t)$$

例如： $p\cdot\frac{1}{p}f(t)=f(t)$ 但是： $\frac{1}{p}\cdot pf(t)\neq f(t)$

这是因为：

$$p\cdot\frac{1}{p}f(t)=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau=f(t)$$

而： $$\frac{1}{p}\cdot pf(t)=\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{d}{d\tau}f(\tau)\right)d\tau=f(t)-f(-\infty)\neq f(t)$$

系统的零输入响应

回顾常系数微分方程求解

响 应

需要一个方程

系 统

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=2\frac{d^2}{dt^2}e(t)+9\frac{d}{dt}e(t)+11e(t)$$

需要若干初始条件

初始能量

$$r(0)=2,\ r'(0)=1$$

需要输入函数的表达式

激 励

$$e(t)=2e^{-3t}$$

两个重要的概念

零输入响应和**零状态响应**:

a.仅由初始时刻的储能引起的响应，记为$r_{zi}(t)$

b.仅由激励信号所产生的响应，记为$r_{zs}(t)$

分解性:能把由初始储能引起的响应和由激励引起的响应分离开来的系统的性质。

对于**初始状态不为零**的系统，如果它同时满足以下条件：

（1）分解性；
（2）零输入响应线性；
（3）零状态响应线性

也称其为线性系统。

常系数微分方程代表的系统是线性系统，且是LTI系统。

零输入响应的求解

思考：根据零输入响应的定义，你能给出零输入响应的求解方法吗？与经典解法中的齐次解求解有何异同？

求齐次解的步骤：

(1) 建立系统的数学模型（常微分方程）；
(2) 由特征方程求特征根；
(3) 由特征根得到齐次通解的形式（含待定系数）；
(4) 由激励得到特解；
(5) 得到全响应后代入初始条件，得到齐次通解中的待定系数。

求零输入响应的步骤：

(1) 建立系统的数学模型（常微分方程）；
(2) 由特征方程求特征根；
(3) 由特征根得到齐次通解的形式（含待定系数）；
(4) 代入初始条件，得到待定系数，从而得到零输入响应。

零输入响应的求解

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

特征方程

若n阶常系数微分方程的特征根为n个单根 λ_i，则零输入响具有如下形式（与齐次通解形式相同）：

$$r_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}$$

若特征根有重根，零输入响应的形式也与齐次通解形式相同。不同的是，零输入响应中的待定系数直接由初始条件求出。

零输入响应的求解例题

例1 系统方程为

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+2\frac{di(t)}{dt}+i(t)=\frac{de(t)}{dt},\ t>0$$

激励 $e(t)=3e^{-2t}$, **初始条件为** $i(0)=0,\ i'(0)=1$

求系统的零输入响应。

答案：$i(t)=te^{-t},\ t\geq 0$

思考：

求初始条件为 $i(0)=0, i'(0)=2$ **时的零输入响应**

求初始条件为 $i(0)=0, i'(0)=0$ **时的零输入响应**

系统的零输入响应（续）

- n阶方程的齐次通解中（假设特征方程有n个单根），有n个待定系数，需要n个初始条件进行求解

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r(0) \\ r'(0) \\ r''(0) \\ \vdots \\ r^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}$$

初始条件？0+和0-的讨论

- 在实际问题中，初始条件常常并不以响应函数$r(t)$及其各阶导数在$t=0$时的值，这种方便的形式给出，需要转换，转换方法——“具体情况，具体分析”。
- 一般情况下，给定的初始条件是激励接入前一霎那测量的系统状态。如果激励在0时刻接入，我们称：这组状态为0^-时的状态
- 当激励接入后的一霎那，测量的系统状态称为：0^+时的状态
- 显然，0^-状态只和$t<0$时系统的储能有关；而0^+状态需要考虑激励接入的影响
- 零输入响应和自然响应有何不同？
  - 零输入时， 0^-状态和0^+状态完全相同
  - 自然响应的求解，应考虑激励的接入，使用0^+状态作为初始条件
  - 如何由0^-状态计算0^+状态？冲激函数匹配法，积分法等（详见：郑君里所著《信号与线性系统》）
  - 幸运的是，在使用零输入——零状态法求解微分方程时， 初始条件的计算比较简单

奇异函数

本节介绍本课程特定的几个信号：

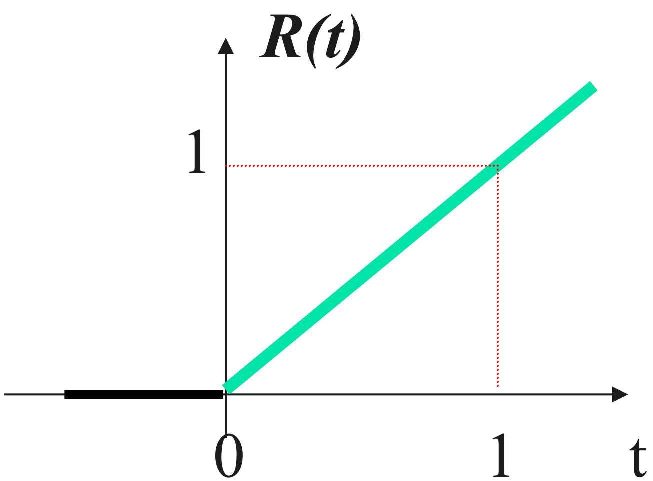
1. **斜变信号**
2. **单位阶跃信号**
3. **单位冲激信号**
4. **冲激偶信号**

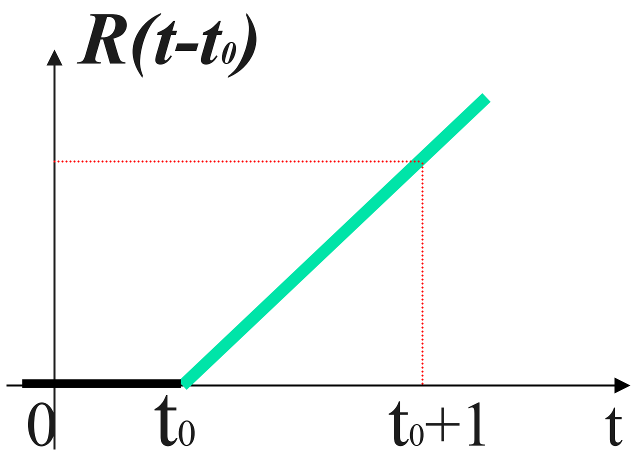
这些信号（函数）或其各阶导数有一个或多个间断点，这样的函数统称为奇异函数。

单位斜变信号

$$t \geq t_0 \; R(t) = t$$
$$t < t_0 \; R(t) = 0$$

$$t \geq t_0 \; R(t - t_0) = t - t_0$$
$$t < t_0 \; R(t - t_0) = 0$$

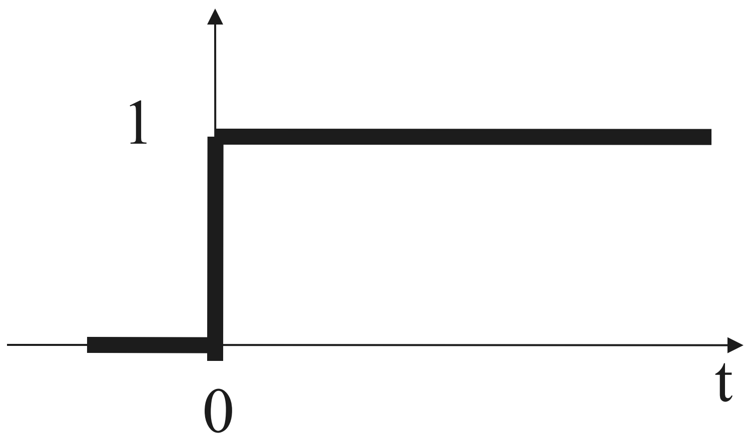


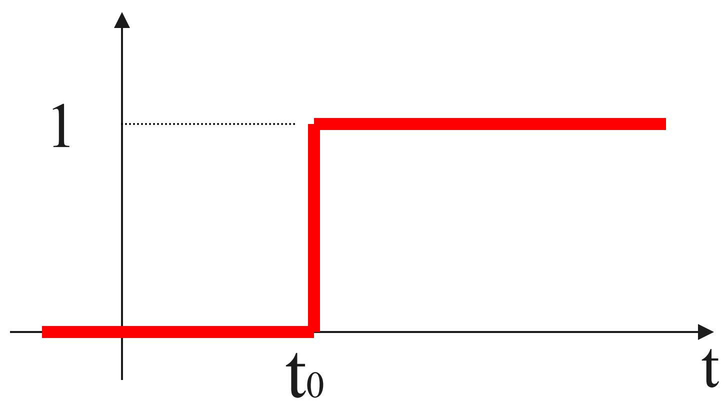


单位阶跃信号 $\varepsilon(t)/u(t)$

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

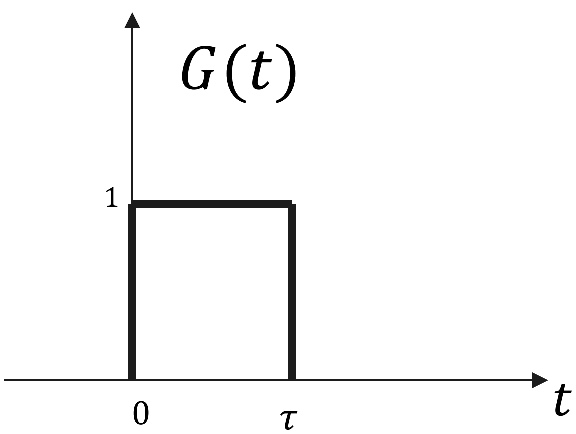


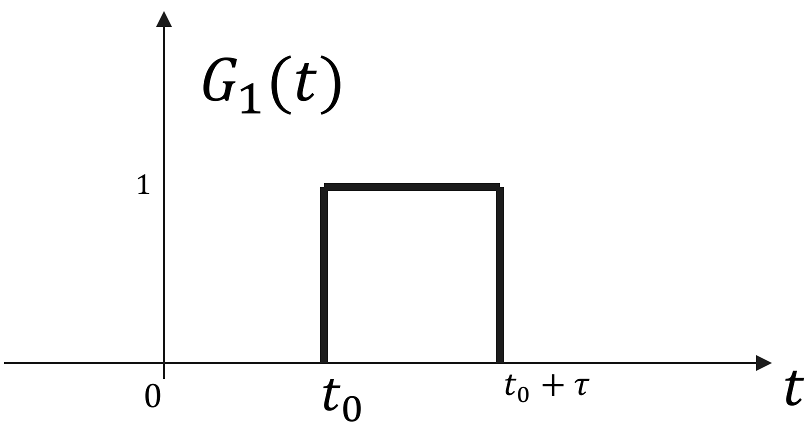


矩形脉冲（门函数）

$$G(t) = u(t) - u(t-\tau)$$

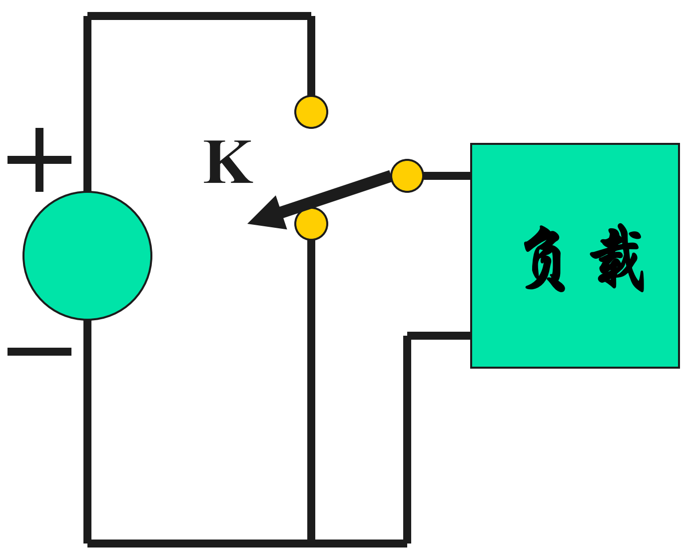
$$G_1(t) = u(t-t_0) - u(t-t_0-\tau)$$

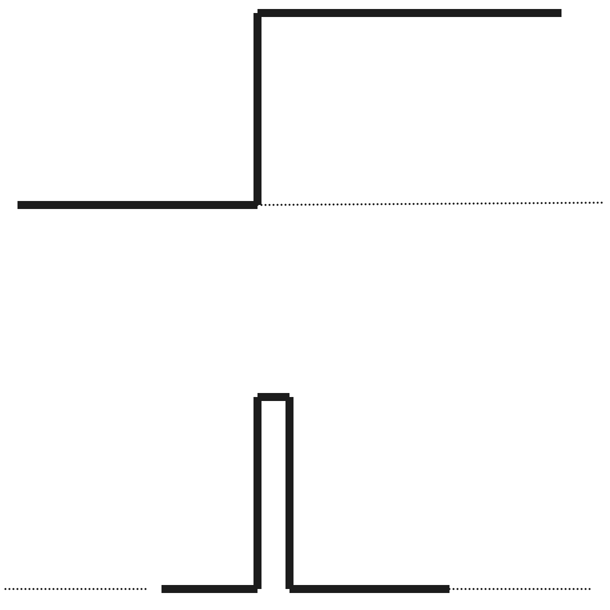




物理含义

(1)在t=0的时刻接入单位直流电压 - 单位阶跃函数
(2)突然接通又马上断开电源 - 矩形脉冲



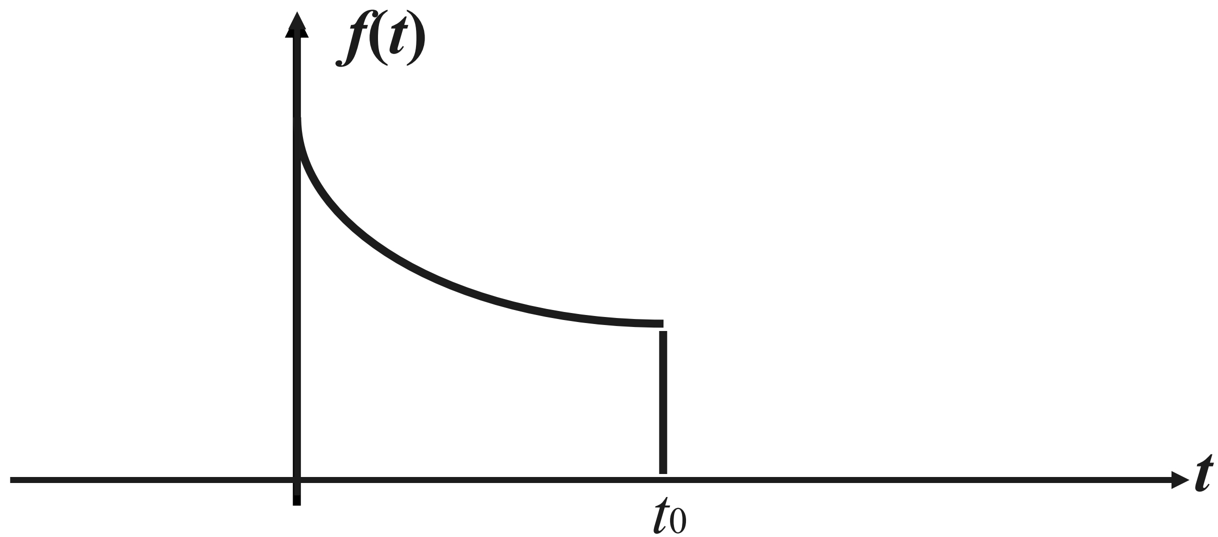


信号取单边或加窗

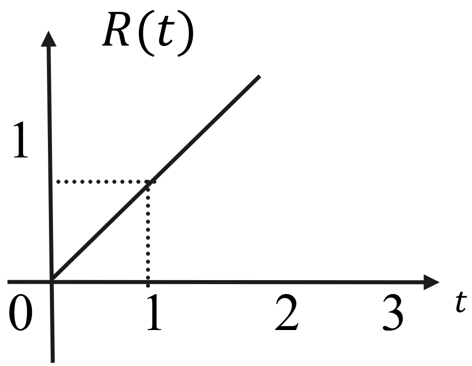
$$f(t)u(t)$$

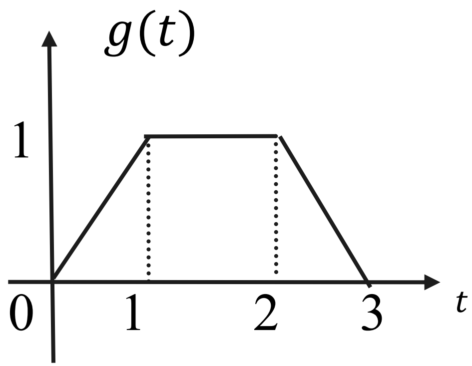
$$f(t)[u(t)-u(t-t_0)]$$

例： $$f(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-t_0)]$$



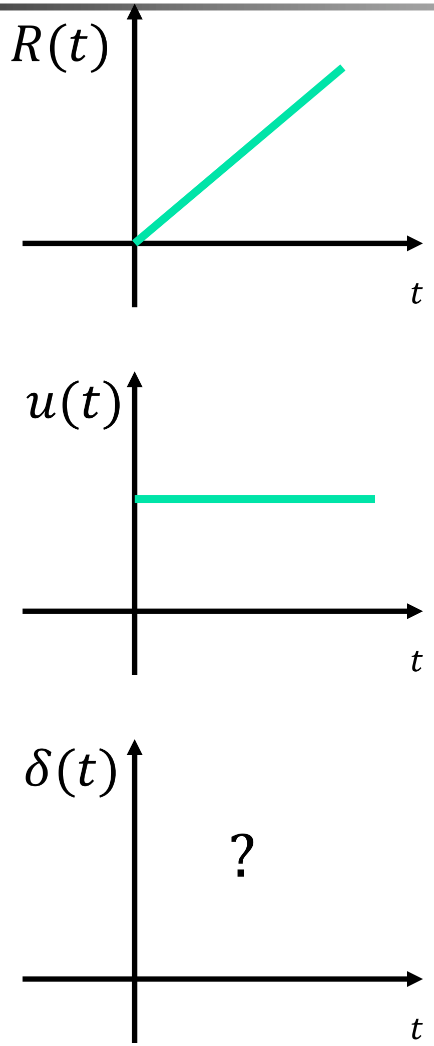
用阶跃信号表示其他信号





$$R(t) = tu(t)$$

$$g(t) = t[u(t) - u(t-1)] + [u(t-1) - u(t-2)] \\ + (3-t)[u(t-2) - u(t-3)]$$



$R(t)$

$\downarrow$ **求导**

$u(t)$

$\downarrow$ **求导**

$\delta(t)$

单位冲激函数 $\delta(t)$

1.定义:有多种定义方式

a.Dirac定义:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$

性质（抽样性）：

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

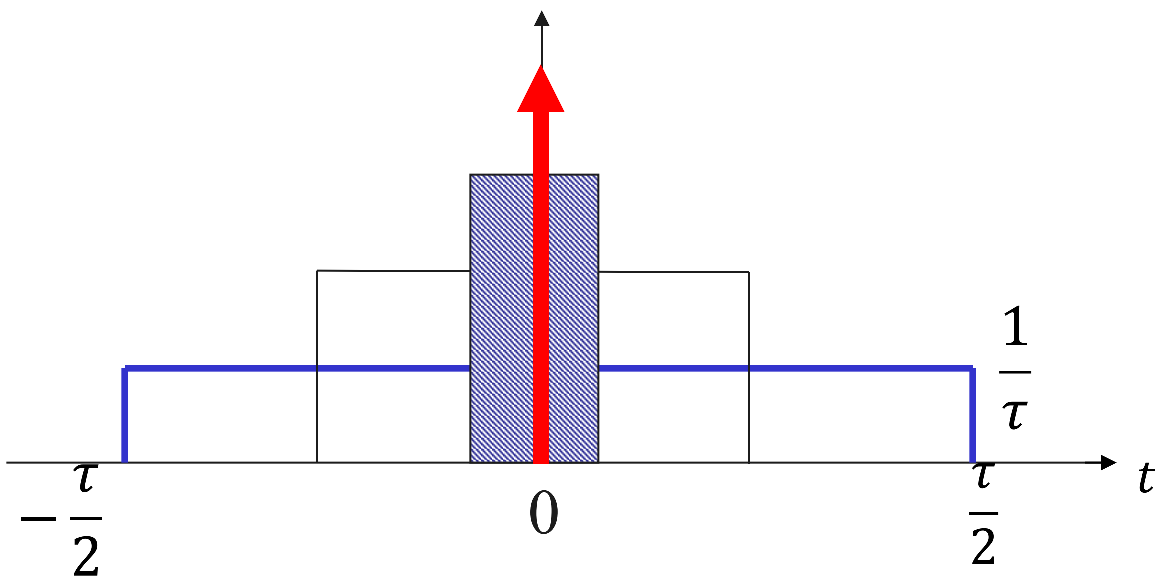
b.利用冲激函数的抽样性:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$ （若f(t)在t=0连续）

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$ （若f(t)在$t=t_0$连续）

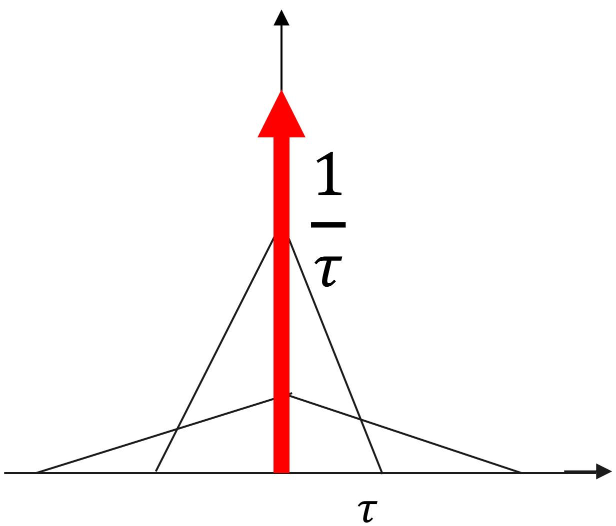
C.定义：宽为 τ ，高为 $\frac{1}{\tau}$ 的矩形脉冲，保持面积1不变，使宽度趋于0时的极限，就是单位冲激信号。即

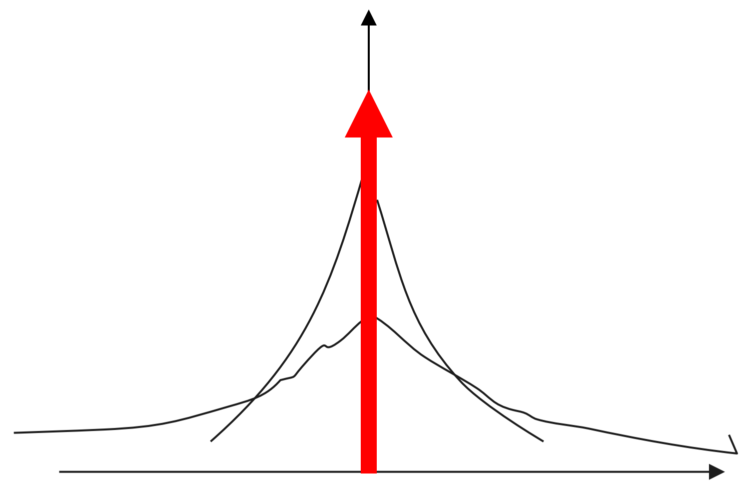
$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$$



其他函数演变的单位冲激函数

- 三角脉冲的极限
- 双边指数脉冲的极限





$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{\tau}(1-\frac{|t|}{\tau})[u(t+\tau)-u(t-\tau)]\right\}$$

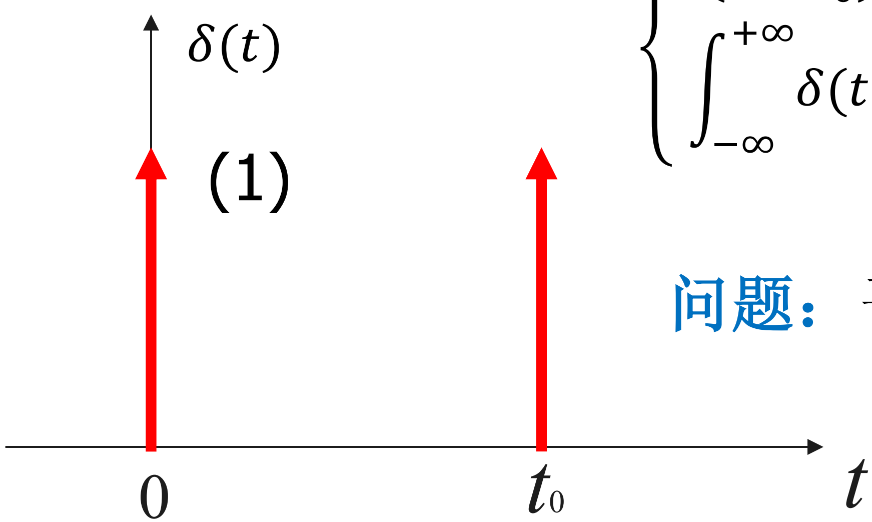
$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}[\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}]$$

冲激信号图形与平移

如果矩形脉冲的面积不是1，而是A，则表示一个冲激强度为A倍单位值的δ函数。

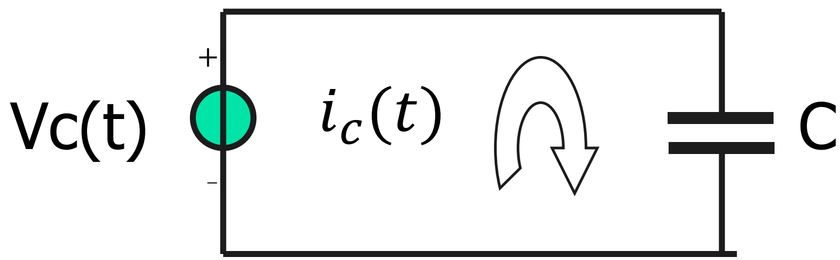
冲激函数用箭头表示，并将冲激强度注于箭头旁，如图。

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 & t\neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=1 \end{cases}$$



问题：平移后的取样特性？

2. 冲激函数的物理意义



- 由于冲激电流的出现，允许电容两端的电压跳变。
- 由于冲激电压的出现，允许电感电流跳变。
- 冲激函数可以看作是强度很大而作用时间很短的物理量的理想模型。

3. 冲激函数的性质

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

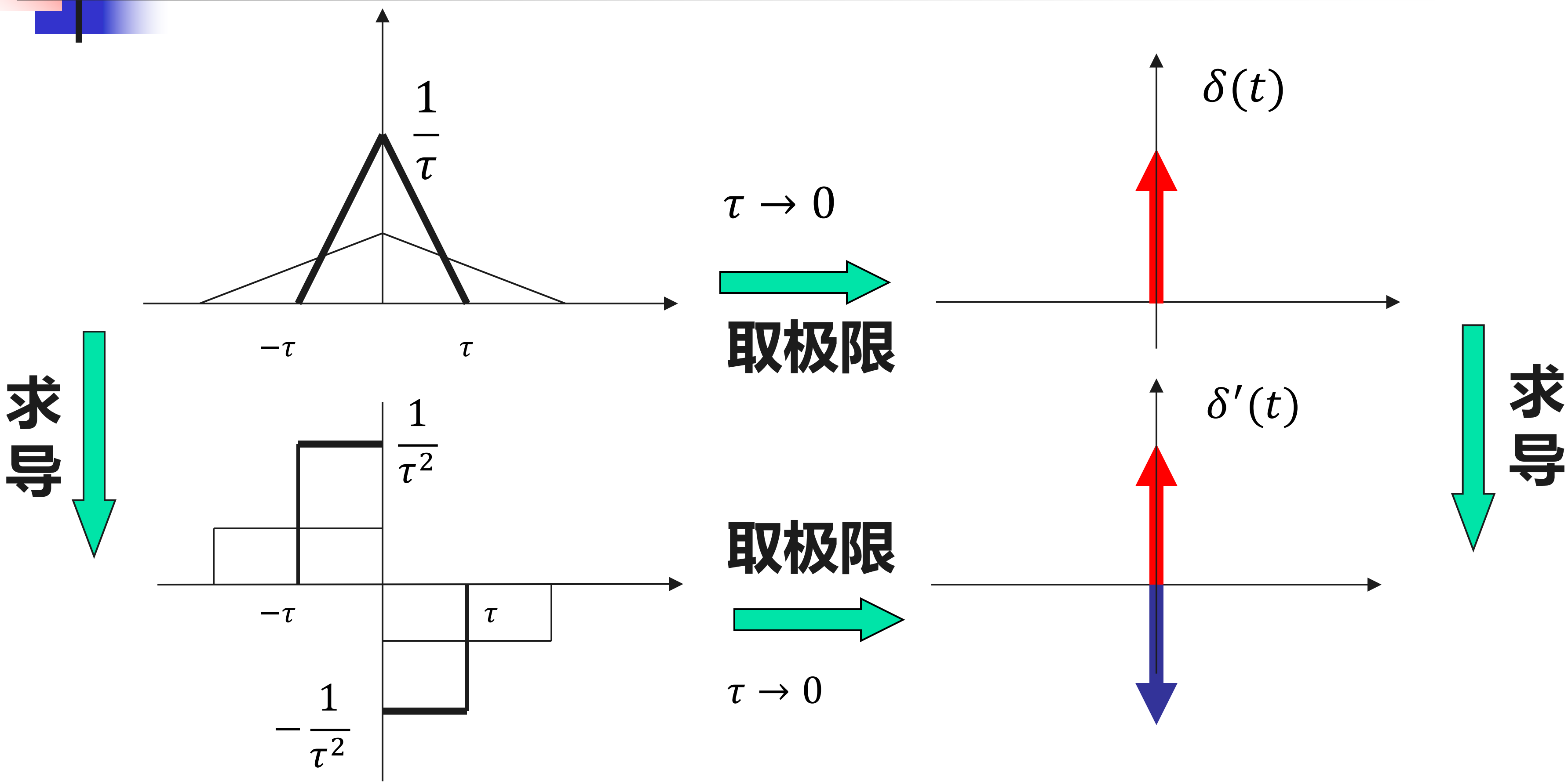
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

冲激偶信号 —— $\delta'(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)$



冲激偶信号是这样一种函数：当t从负值趋于零时，它是一强度为无限大的正的冲激函数；当t从正值趋于零时，它是一强度为无限大的负的冲激函数。

冲激偶的性质

$$\int_{-\infty}^{t} \delta'(t)dt = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$$

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt = -f'(t_0)$$

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

函数名 特性	$\delta(t)$	$\delta^{'}(t)$
1. 引出	$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$ $\delta(t) = 0(t \neq 0)$	$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt = 0$
2. 奇偶	$\delta(-t) = \delta(t)$	$\delta'(-t) = -\delta'(t)$
3. 抽样	$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$	$f(t)\delta'(t) =$ $f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$
4. 积分	$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t)$	$\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)d\tau = \delta(t)$

信号的时域分解

通过前面的学习，我们知道了

- 线性系统的全响应可以分解为零输入响应，零状态响应
- 零输入响应求解方法

问题：零状态响应怎么求？

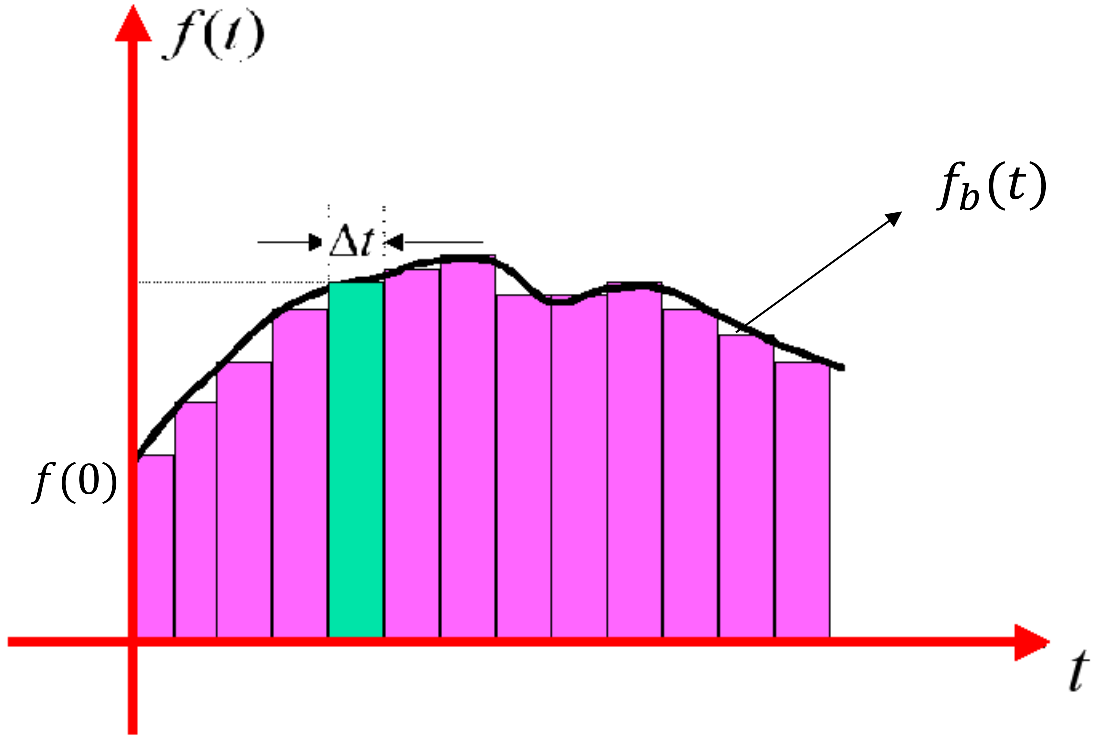
分三步走：

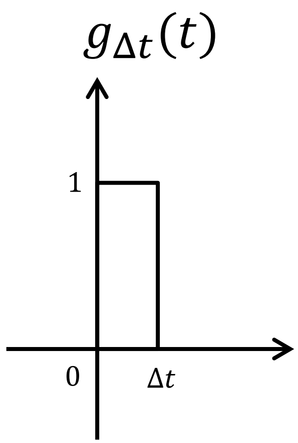
2.5 把信号分解成冲激函数的线性组合（积分）

2.6 求激励为冲激函数时的零状态响应（单位冲激响应）

2.7 由系统的线性时不变性，就可得到激励为任意信号时的零状态响应

任何函数表示为冲激函数的积分



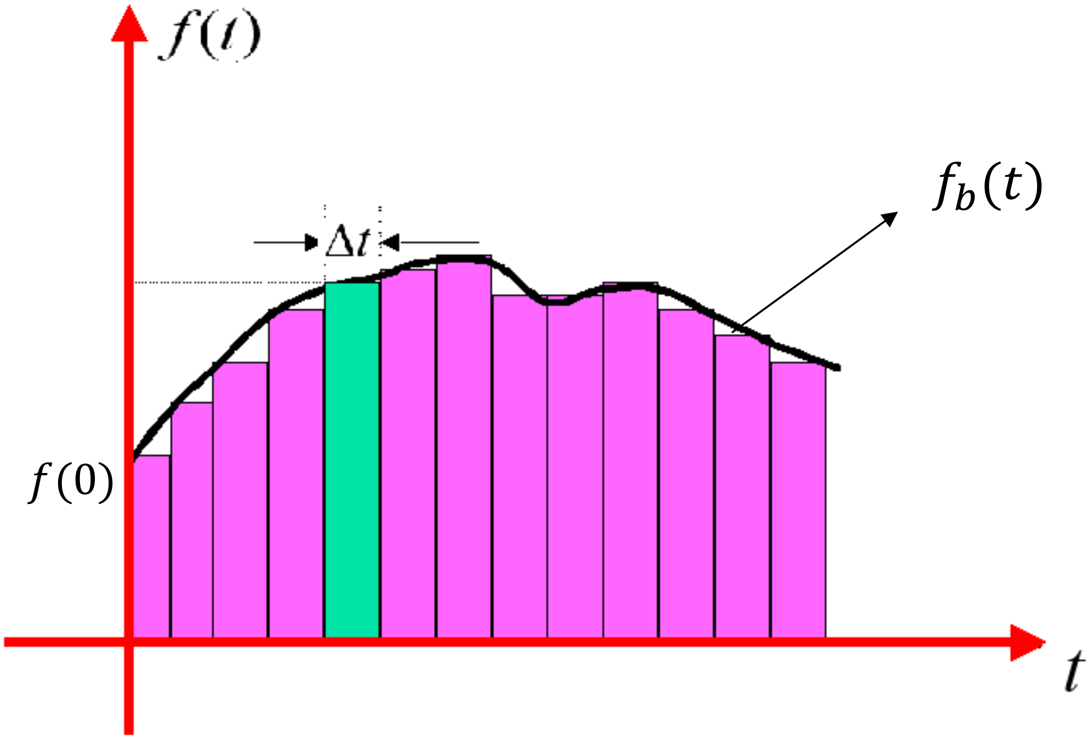


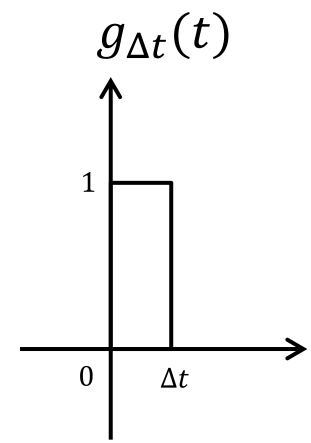
$$f_1(t) = f(0)g_{\Delta t}(t)$$

$$f_2(t) = f(\Delta t)g_{\Delta t}(t-\Delta t)$$

$$f_{k+1}(t) = f(k\Delta t)g_{\Delta t}(t-k\Delta t)$$

任何函数表示为冲激函数的积分





$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t) g_{\Delta t}(t - k\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t) \frac{g_{\Delta t}(t - k\Delta t)}{\Delta t} \Delta t$$

$$\Delta t \to d\tau,\ k\Delta t \to \tau$$

$$= \int_0^t f(\tau)\,\delta(t - \tau) d\tau$$

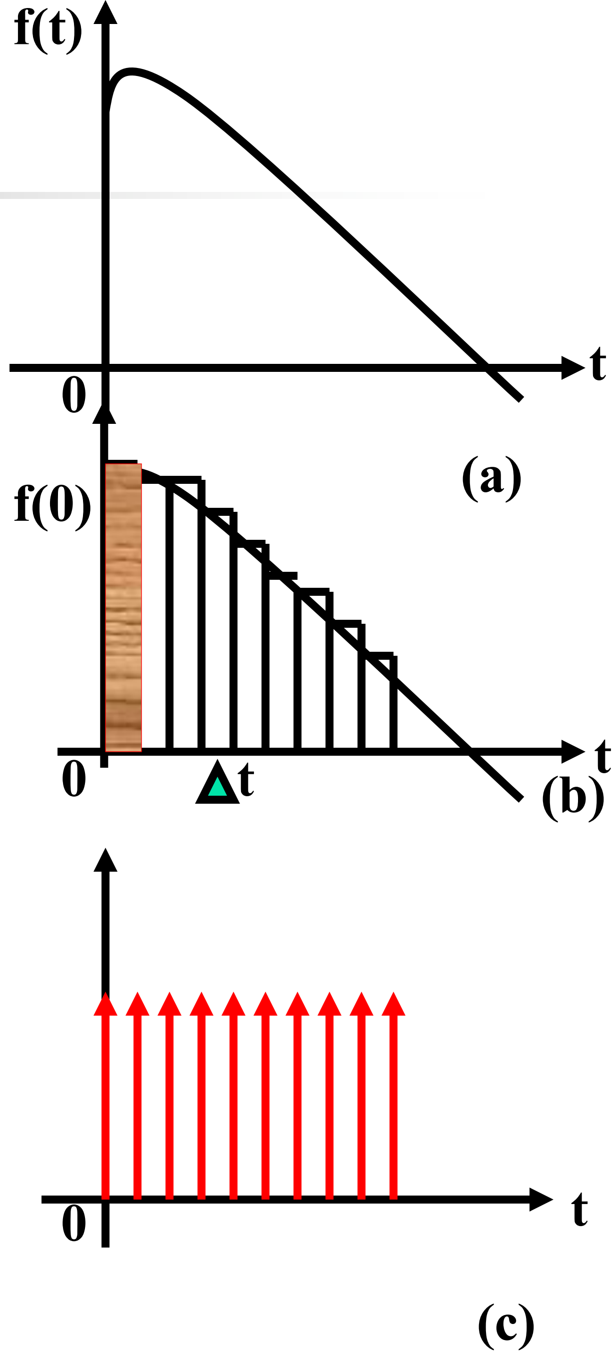
回顾：

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t) g_{\Delta t}(t - k\Delta t)$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t) \frac{g_{\Delta t}(t - k\Delta t)}{\Delta t} \Delta t$$

令 $\Delta t \to d\tau,\ k\Delta t \to \tau$

$$\boxed{f(t) = \int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$



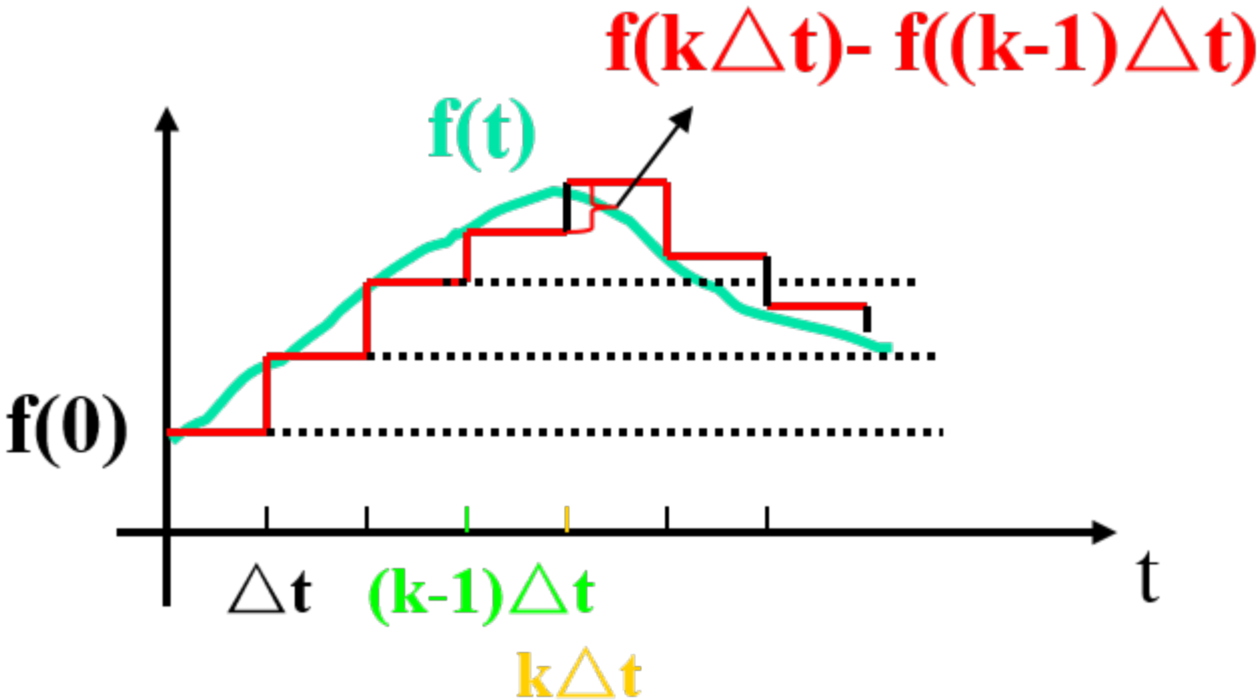
结论：任何函数表示为冲激函数的积分

$$\boxed{f(t) = \int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

$$\boxed{f(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

任何函数表示为阶跃函数的积分



$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

小结

- 常微分方程的建立与经典解法
  这些名词要掌握 ：特征方程，特征根，
  自由响应，受迫响应
- 常微分方程“换肤” ：算子表示，转移算子
- 零输入响应
- 单位冲激函数，单位阶跃函数
- 信号的分解

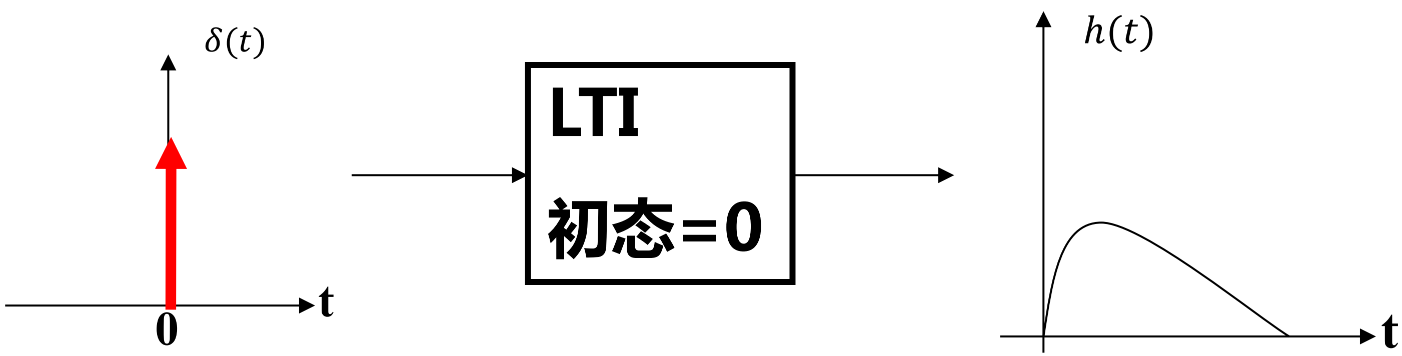
课外作业

阅读：2.1-2.5　　预习：2.6-2.9

作业：2.4 (3)，2.5(1), 2.7

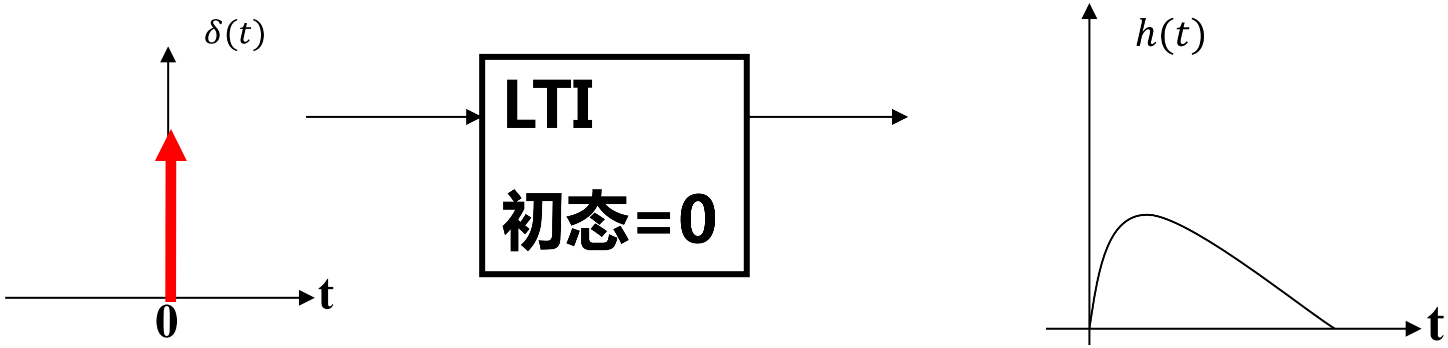
单位冲激响应

一线性时不变系统，其初始状态为零，输入为单位冲激信号$\delta(t)$所引起的响应称为**单位冲激响应**，简称冲激响应，用$h(t)$表示。



类似地，可以给出**阶跃响应**的定义。阶跃响应用$r_{\varepsilon}(t)$表示。

通过单位冲激响应来判读系统的因果性



如果系统还是因果系统，则其冲激响应是因果信号，即

$$h(t) = 0,\ t < 0$$

反之亦然，即 $h(t)$ 可用来判断系统的因果性。

将来还用 $h(t)$ 来判断系统的稳定性。

深入理解冲激响应

已知某线性时不变系统：

$$\frac{d^3}{dt^3}r(t)+2\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+r(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+5\frac{d}{dt}e(t)+2e(t)$$

1、要求其单位冲激响应 $\boldsymbol{h(t)}$，还需要其他条件吗？

2、已知系统的单位冲激响应为 $\boldsymbol{h(t)}$，

该系统的单位阶跃响应 $\boldsymbol{r_\varepsilon(t)}$ 怎么求？

$$r_\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

接下来我们只讨论冲激响应的求法。

单位冲激响应的求解

- 思路：
  - 通过物理解释，简化数学问题
- 对于方程：$D(p)r(t) = N(p)e(t)$，其单位冲激响应方程为：$D(p)h(t) = N(p)\delta(t)$
- 由系统的线性时不变性可知，我们可以先求解方程：$D(p)h_0(t) = \delta(t)$，则$h(t) = N(p)h_0(t)$
- 对方程$D(p)h_0(t) = \delta(t)$，我们可以将其视为一个初始状态为0^+的零输入响应，即求解初始条件为0^+的齐次微分方程$D(p)h_0(t) = 0$的解。
  - 系统在一瞬间输入了若干能量，存储在系统的储能元件里，这就相当于系统在$t = 0^+$时具有某种初始状态
  - 等到 $t > 0$ 时，系统已经不再有输入信号，所以响应就由上述储能状态唯一地确定

单位冲激响应的求解

- 注意到：单位冲激响应和单位阶跃响应，均指零状态响应，即 0^- 状态为 0
- 对 $D(p)h_0(t)=\delta(t)$，若 $D(p)h_0(t)$ 的某个低阶项在 0^+ 时刻不为零的话，那么其必然含有 $\delta(t)$ 项，则高阶项中会出现“冲激对偶”。但是，激励项中不包含“冲激对偶”，方程左右两边不能配平。因此，只有最高阶项在 0^+ 时刻不为零，而其它各项必然在 0^+ 时刻为零，方程才能配平，即 $h_0^{(n)}(t)=\delta(t)$
- 左右两边取 $0^- \to 0^+$ 的定积分，并考虑到 0^- 状态为 0，我们可以得到：

$$\begin{cases} h_0^{(n-1)}(0^+)=1 \\ h_0^{(n-2)}(0^+)=h_0^{(n-3)}(0^+)=\cdots=h_0(0^+)=0 \end{cases}$$

- 使用该结论时，注意一个隐藏条件：

$D(p)$的最高阶系数为 1！

单位冲激响应的求解（例题1）

- p.50，例题2-5：设系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=e(t)$$

试求此系统的冲激响应。

解：此系统的特征方程为：

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$

可得方程的齐次通解为：

$$h_0(t)=(k_1t+k_2)e^{-2t}\varepsilon(t)$$

为什么此处有$\varepsilon(t)$？

因为$N(p)=1$，可得：$h(t)=N(p)h_0(t)=h_0(t)$

代入 0^+ 初始条件为：$h(0^+)=0$，$h'(0^+)=1$ 可得：

$$k_1=1,\ k_2=0$$

所以：

$$h(t)=te^{-2t}\varepsilon(t)$$

单位冲激响应的求解（例题2）

- p.48，例题2-3

电路的微分方程为：$pi(t)+\frac{1}{RC}i(t)=\frac{1}{R}p\delta(t)$

1. 方程的齐次通解为：$i_0(t)=ke^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)$
2. 初始条件：$i_0(0^+)=1$，得$k=1$
3. 方程的解为：$i(t)=\frac{1}{R}pi_0(t)=\frac{1}{R}\bullet(e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t))'$
4. 化简：$i(t)=\frac{1}{R}(-\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)+e^{-\frac{1}{RC}t}\delta(t))$

$\because t=0$时，$e^{-\frac{1}{RC}t}=1 \therefore e^{-\frac{1}{RC}t}\delta(t)=\delta(t)$

$$i(t)=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)$$

冲激响应的求解 – 部分分式分解法

设连续LTI系统的转移算子为$H(p)$

思路：

- 首先对$H(p)$进行部分分式分解；
- 研究简单系统的冲激响应；
- 利用LTI系统的齐次性、叠加性、时不变性，将简单系统的冲激响应进行叠加，求得系统的的冲激响应。

部分分式分解

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+4\frac{dr(t)}{dt}+3r(t)=\frac{d^3e(t)}{dt^3}+5\frac{d^2e(t)}{dt^2}+7\frac{de(t)}{dt}+4e(t)$$

对$H(p)$进行部分分式分解

$$H(p)=\frac{p^3+5p^2+7p+4}{p^2+4p+3}\quad=\frac{(p^3+5p^2+7p+3)+1}{p^2+4p+3}$$

$$=\frac{(p+1)(p^2+4p+3)+1}{p^2+4p+3}\quad=(p+1)+\frac{1}{p^2+4p+3}$$

$$=(p+1)+\frac{1}{2}(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+3})$$

部分分式分解的一般性讨论

假设 $H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$ 是真分式，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$是特征方程的根，那么 $H(p)$ 总可以分解为：

$$H(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{p-\lambda_i}$$

理由：上式经过通分后，分子是一个$n-1$阶多项式$Q(p)$，含有n个待定系数$k_1,k_2,\ldots,k_n$。比较$Q(p)$和$N(p)$的各阶系数，可以求得k_i。

简单系统 1 $H(p)=\dfrac{k}{p-\lambda}$

此时，响应$\boldsymbol{r(t)}$和输入$\boldsymbol{e(t)}$满足的微分方程为

$$r'(t)-\lambda r(t)=ke(t)$$

根据$\boldsymbol{h(t)}$的定义，若在上式中令$\boldsymbol{e(t)=\delta(t)}$，则$\boldsymbol{r(t)=h(t)}$，所以有

$$h'(t)-\lambda h(t)=k\delta(t)$$

这是关于$\boldsymbol{h(t)}$的一阶微分方程。方程两边同时乘以$\boldsymbol{e^{-\lambda t}}$

$$e^{-\lambda t}h'(t)-\lambda e^{-\lambda t}h(t)=\left(e^{-\lambda t}h(t)\right)'=k\delta(t)\Rightarrow h(t)=ke^{\lambda t}\varepsilon(t)$$

于是

$$\boxed{H(p)=\frac{k}{p-\lambda}\to h(t)=ke^{\lambda t}u(t)}$$

简单系统 2　$H(p)=\frac{k}{(p-\lambda)^2}$

$$\boxed{H(p)=\frac{k}{(p-\lambda)^2}\rightarrow h(t)=kte^{\lambda t}u(t)}$$

将这一结果推广到特征方程在 $p=\lambda$ 处有 n 重根的情况，有

$$\boxed{H(p)=\frac{k}{(p-\lambda)^n}\rightarrow h(t)=\frac{k}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t}u(t)}$$

简单系统3　$H(p)=kp^n \quad (n>0)$

此时，响应 $\boldsymbol{h(t)}$ 为

$$\boxed{H(p)=kp^n \rightarrow h(t)=k\delta^{(n)}(t)}$$

特别的是，当 $H(p)=k$ 时：

$$\boxed{H(p)=k \rightarrow h(t)=k\delta(t)}$$

部分分式法小结

- 确定系统的转移算子$H(p)$
- 将$H(p)$进行部分分式法展开为如下格式：

$$H(p)=\sum_{i=1}^{p}K_i p^i+\sum_{j=1}^{l}\frac{K_j}{\left(p-\lambda_j\right)^{r_j}}$$

- 得到各分式对应的冲激响应分量 $h_i(t), h_j(t)$
- 将所有的 $h_i(t), h_j(t)$ 相加，得到系统的冲激响应 $h(t)$

单位冲激响应的求解（例题3）

$$r''(t)+4r'(t)+3r(t)=e'(t)+2e(t)$$

转移算子部分分式展开：

$$H(p)=\frac{p+2}{p^2+4p+3}$$
$$=\frac{p+2}{(p+1)(p+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+3}\right)$$

系统的冲激响应为：

$$h(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t})\varepsilon(t)$$

单位冲激响应的求解（例题4）

P.50，例题2-6：

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=2\frac{d^2}{dt^2}e(t)+9\frac{d}{dt}e(t)+11e(t)$$

转移算子部分分式展开：

$$H(p)=\frac{2p^2+9p+11}{p^2+4p+4}$$

$$=2+\frac{p+3}{p^2+4p+4}$$

$$=2+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+2)^2}$$

系统的冲激响应为：

$$h(t)=2\delta(t)+(e^{-2t}+te^{-2t})\varepsilon(t)$$

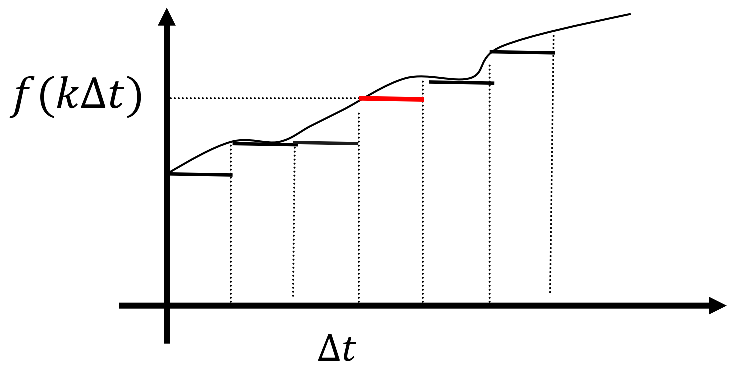
叠加积分　零状态响应的计算公式

问题：激励为任意信号时的零状态响应怎么求？

由2.5节我们知道： $f(t)=\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

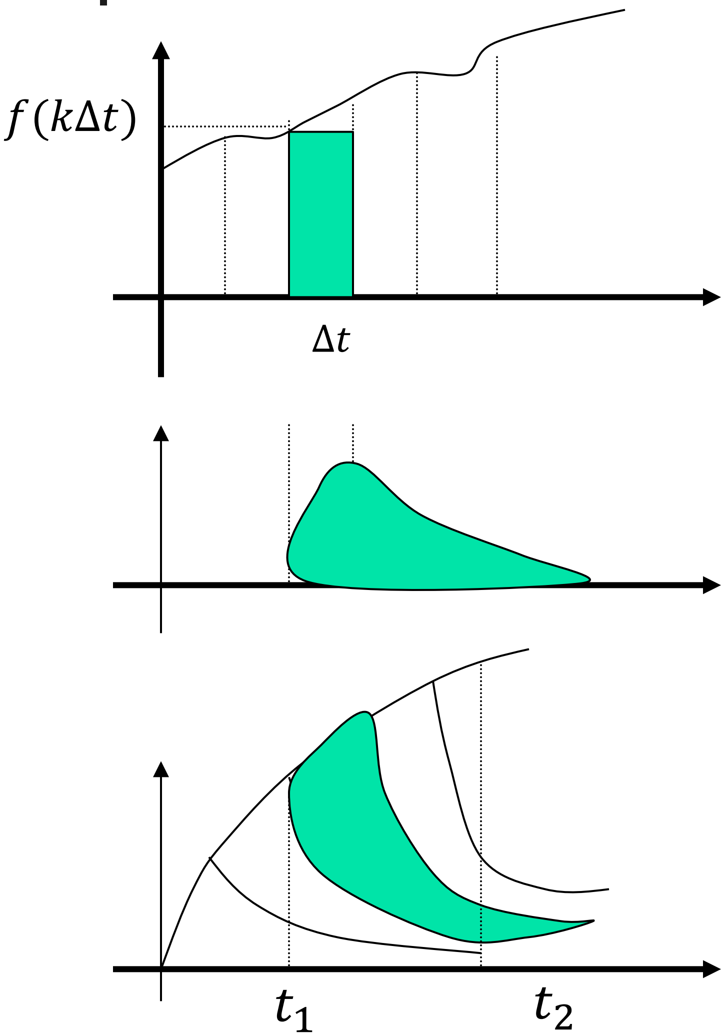
由2.6节我们知道：

对线性时不变系统



$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t)\frac{g_{\Delta t}(t-k\Delta t)}{\Delta t}\Delta t$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t$$



$$f(k\Delta t)\delta(t-\Delta t)\Delta \mathrm{t}$$

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

$$f(k\Delta t)h(t-k\Delta t)\Delta \mathrm{t}$$

$$r_{zs}(t) \approx \sum_{k=0}^{+\infty} f(k\Delta t)h(t-k\Delta t)\,\Delta t$$

$$r_{zs}(t) \approx \sum_{k=0}^{+\infty} f(k\Delta t)h(t-k\Delta t)\,\Delta t$$

令 $\Delta t \to d\tau,\ k\Delta t \to \tau$

$$\boxed{r_{zs}(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

激励　　冲激响应

——LTI系统零状态响应求解公式

零状态响应的推导小结

激励信号	响应信号	理论依据
$\delta(t)$	$h(t)$	定义
$\delta(t-\tau)$	$h(t-\tau)$	时不变性
$(f(\tau)\Delta\tau)\delta(t-\tau)$	$(f(\tau)\Delta\tau)h(t-\tau)$	齐次性
$\sum\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\Delta\tau$	$\sum\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\,h(t-\tau)\Delta\tau$	叠加性
$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$	求和→积分

卷积积分的定义

设 $f_1(t), f_2(t)$ **是定义在** $(-\infty, +\infty)$ **区间上的两个连续时间信号，我们将积分**

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

称为$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积 (Convolution)。

注意：

在数学定义中，积分限为：$(-\infty, \infty)$，但是对于一个服从因果律的实际系统，若激励信号是一个有始信号，积分限可以缩小为：$(0^-, t)$

卷积积分的计算方法

- 图解法
- 解析法
  - 利用函数式计算卷积（利用已知的卷积表）
  - 利用性质计算卷积
- 数值解法
  - 将连续系统转换为离散系统求解

图解法求卷积积分

$$y(t)=f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

1）换元：将 $f(t)$ 和 $g(t)$ 中的自变量由 t 改为 τ

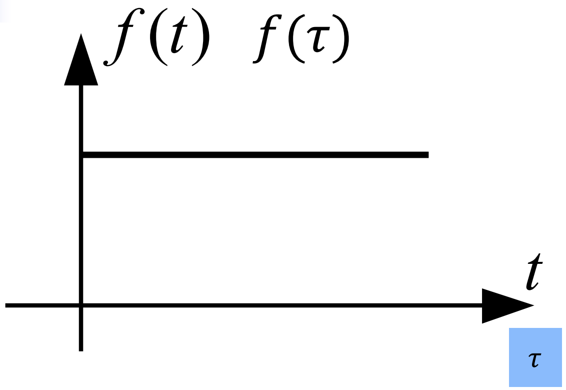
2）翻转/平移：把其中一个信号翻转、平移；

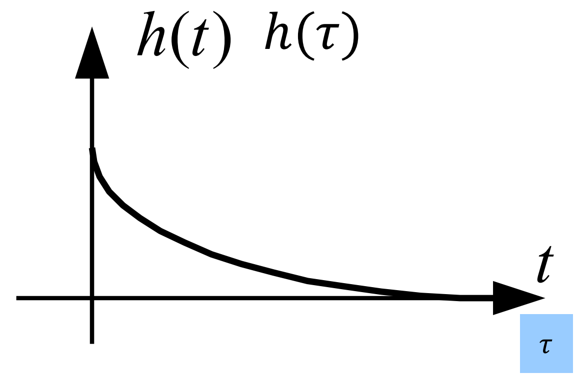
$$g(\tau)\xrightarrow{\text{翻转}}g(-\tau)\xrightarrow{\text{平移}t}g(-(\tau-t))=g(t-\tau)$$

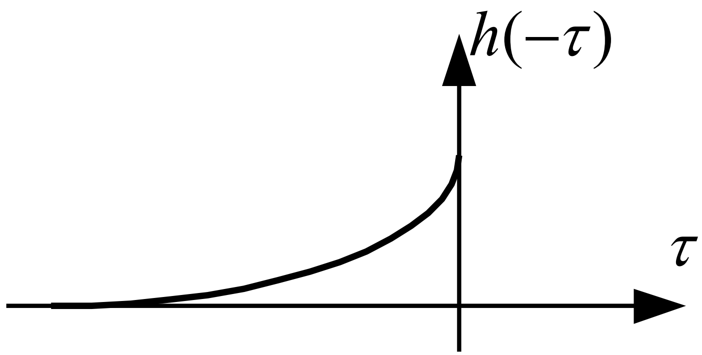
3）乘积/积分：将 $f(\tau)$ 与 $g(t-\tau)$ 相乘；对乘积后的图形积分。

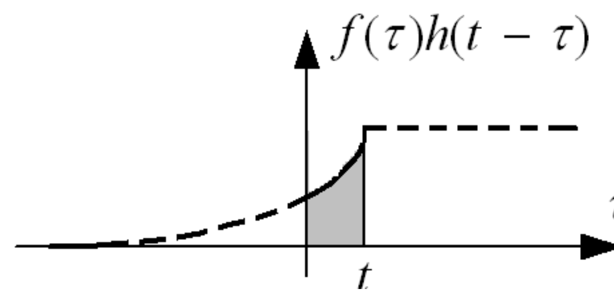
要点：确定积分限

例1 计算 $f(t) * h(t), f(t) = u(t), h(t) = e^{-t}u(t)$









$f(t) * h(t) = 0 \quad t < 0$

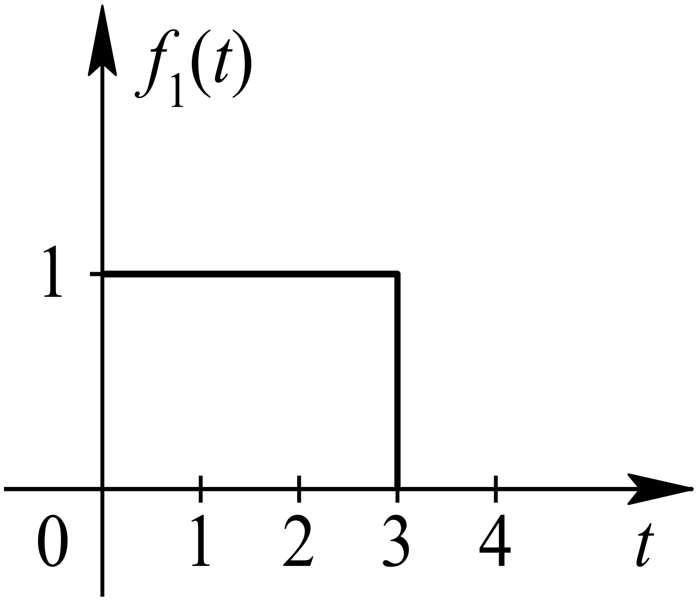
$$f(t) * h(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\, d\tau = 1 - e^{-t}, t > 0$$

卷积结果：$f(t) * h(t) = (1 - e^{-t})u(t)$

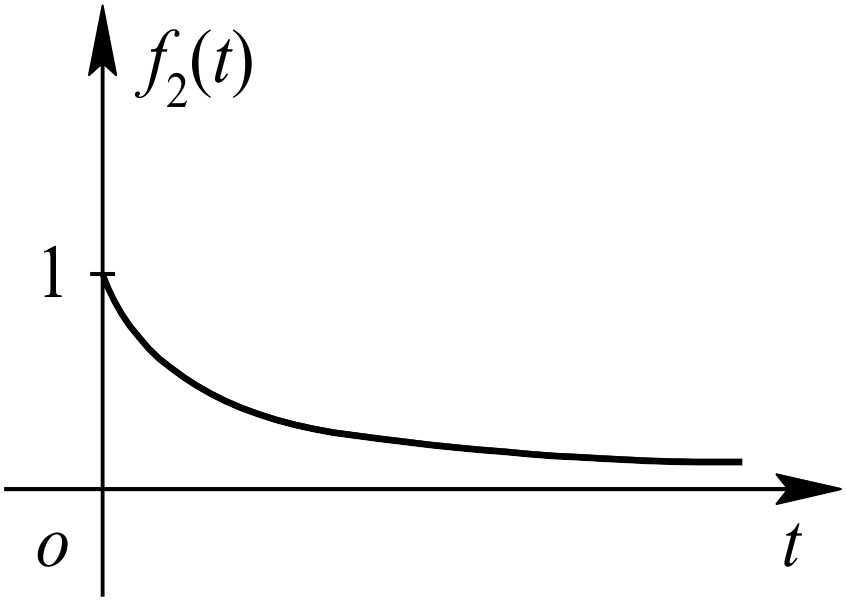
例2 求 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$，其中

$$f_1(t) = u(t) - u(t-3)$$

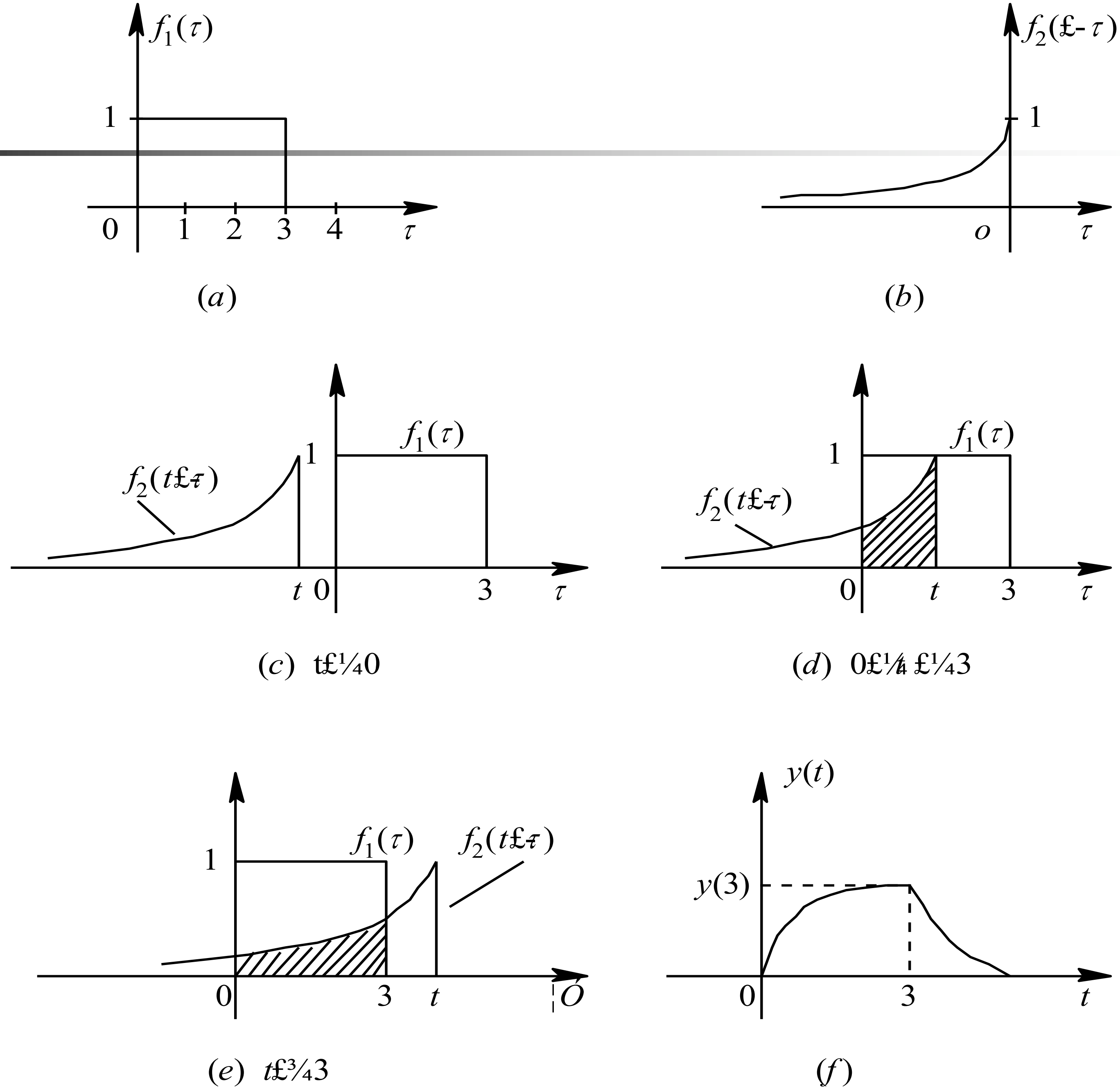
$$f_2(t) = e^{-t}u(t)$$



(a)



(b)



$f_1(\tau)$
1
0 1 2 3 4 τ
(a)
f_2(£- τ)
1
o τ
(b)
$f_1(\tau)$
1
f_2(t£τ)
t 0 3 τ
(c) t£¼0
$f_1(\tau)$
1
f_2(t£-τ)
0 t 3 τ
(d) 0£¼t £¼3
$f_1(\tau)$
1
f_2(t£τ)
0 3 t Ó
(e) t£¾3
y(t)
y(3)
0 3 t
(f)

当 $\boldsymbol{t<0}$ 时，$\boldsymbol{f_2(t-\tau)}$ 波形如图 $(\boldsymbol{c})$ 所示，对任一 $\boldsymbol{\tau}$，乘积 $\boldsymbol{f_1(\tau)f_2(t-\tau)}$ 恒为零，故 $\boldsymbol{y(t)=0}$。

当 $\boldsymbol{0<t<3}$ 时，$\boldsymbol{f_2(t-\tau)}$ 波形如图 $(\boldsymbol{d})$ 所示。

$$
\begin{aligned}
y(t) = f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-3)]\left[e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)\right]d\tau \\
&= \int_{0}^{t} e^{-(t-\tau)}d\tau \\
&= 1-e^{-t}
\end{aligned}
$$

当 $t>3$ 时，$\boldsymbol{f_2(t-\tau)}$ 波形如图（$\boldsymbol{e}$）所示，此时，仅在 $\boldsymbol{0<\tau<3}$ 范围内，乘积 $\boldsymbol{f_1(\tau)f_2(t-\tau)}$ 不为零，故有

$$
\begin{aligned}
y(t) &= f_1(t) * f_2(t) \\
&= \int_0^3 e^{-(t-\tau)} d\tau \\
&= (e^3-1)e^{-t}
\end{aligned}
$$

合并以上结果，得到：

$$
\begin{aligned}
y(t) &= (1-e^{-t})[u(t)-u(t-3)] - \left[e^{-t}-e^{-(t-3)}\right]u(t-3) \\
&= (1-e^{-t})u(t) - [1-e^{-(t-3)}]u(t-3)
\end{aligned}
$$

卷积的性质

代数性质

(1) $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

(2) $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

(3) $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

移不变性质

如果$f_1(t) * f_2(t) = f_3(t)$，**则**

$$f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f_3(t - t_1 - t_2)$$

卷积的微分和积分

(1)两函数相卷积后的导数等于两函数之一的导数与另一函数相卷积。

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t) = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt}$$

(2)两函数相卷积后的积分等于两函数之一的积分与另一函数相卷积。

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(t) * f_2(t)]dt = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(t)dt$$

奇异信号的卷积特性

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

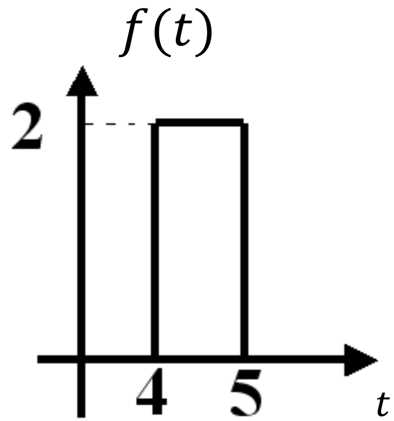
$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$

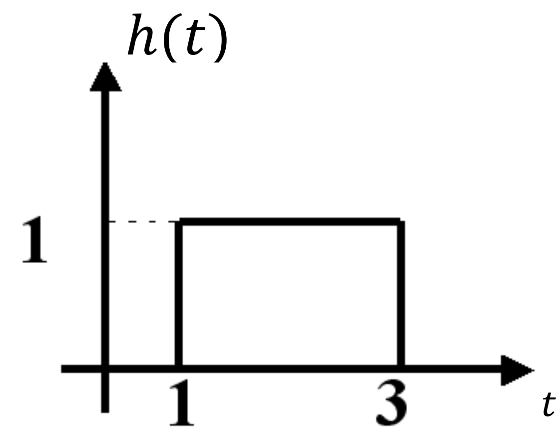
$$f(t - t_0) * \delta(t - t_1) = f(t - t_0 - t_1)$$

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t)$$

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t) dt$$

求两个不同脉宽矩形脉冲的卷积。



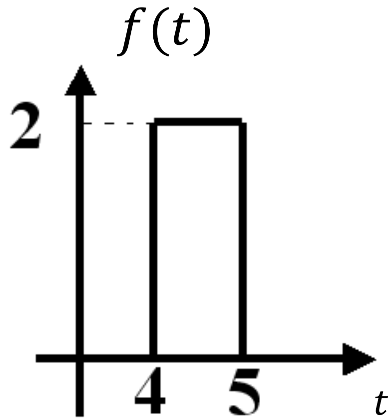


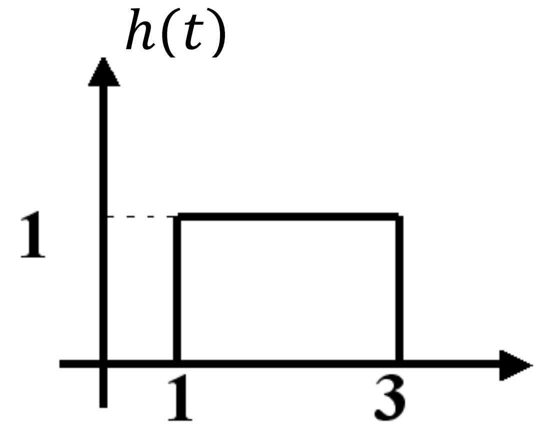
$$f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}2[u(\tau-4)-u(\tau-5)][u(t-\tau-1)-u(t-\tau-3)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}2u(\tau-4)u(t-\tau-1)d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}2u(\tau-4)u(t-\tau-3)d\tau$$

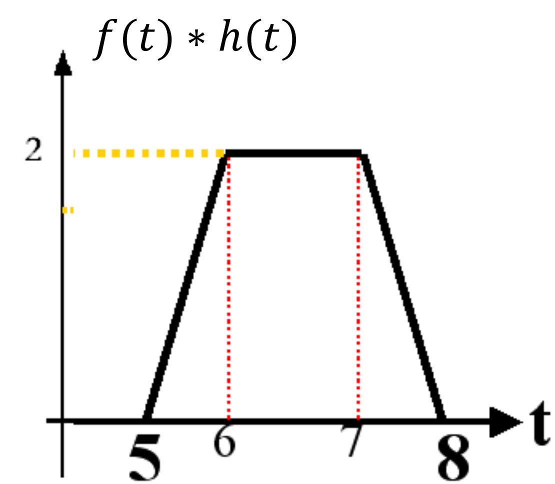
$$-\int_{-\infty}^{\infty}2u(\tau-5)u(t-\tau-1)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}2u(\tau-5)u(t-\tau-3)d\tau$$





$$f(t)*h(t)=2[(t-5)u(t-5)-(t-6)u(t-6)$$
$$-(t-7)u(t-7)+(t-8)u(t-8)]$$

$$f*h=\begin{cases} 0 & t<5 \\ 2t-10 & 5<t<6 \\ 2 & 6<t<7 \\ 16-2t & 7<t<8 \\ 0 & t>8 \end{cases}$$



结论：两个不同宽度的矩形脉冲的卷积是梯形脉冲。

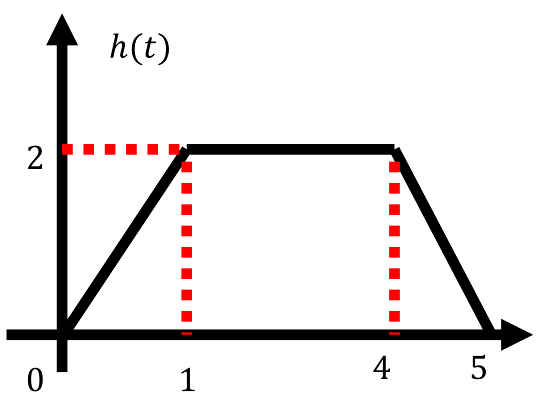
结论:若f1(t)与f2(t)为有限宽度的脉冲,则

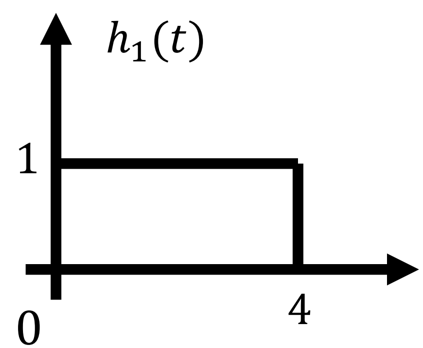
- f1*f2的面积为f1和f2面积之积；
- f1*f2的宽度为f1和f2宽度之和。

问题1 两个相同宽度的矩形脉冲的卷积是什么脉冲？

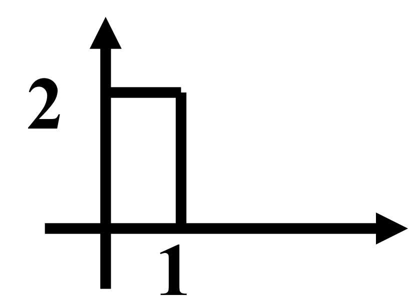
例题2-7.

问题2 已知 $h(t)=h_1(t)*h_2(t)$， $h(t)$ 与 $h_1(t)$ 如图所示，求 $h_2(t)$.





答案：



例4(例题2-10)利用卷积的微积分性质求下列卷积。

$$f_1(t)=u(t-t_1)-u(t-t_2),t_2>t_1$$

$$f_2(t)=e^{-t}u(t)$$

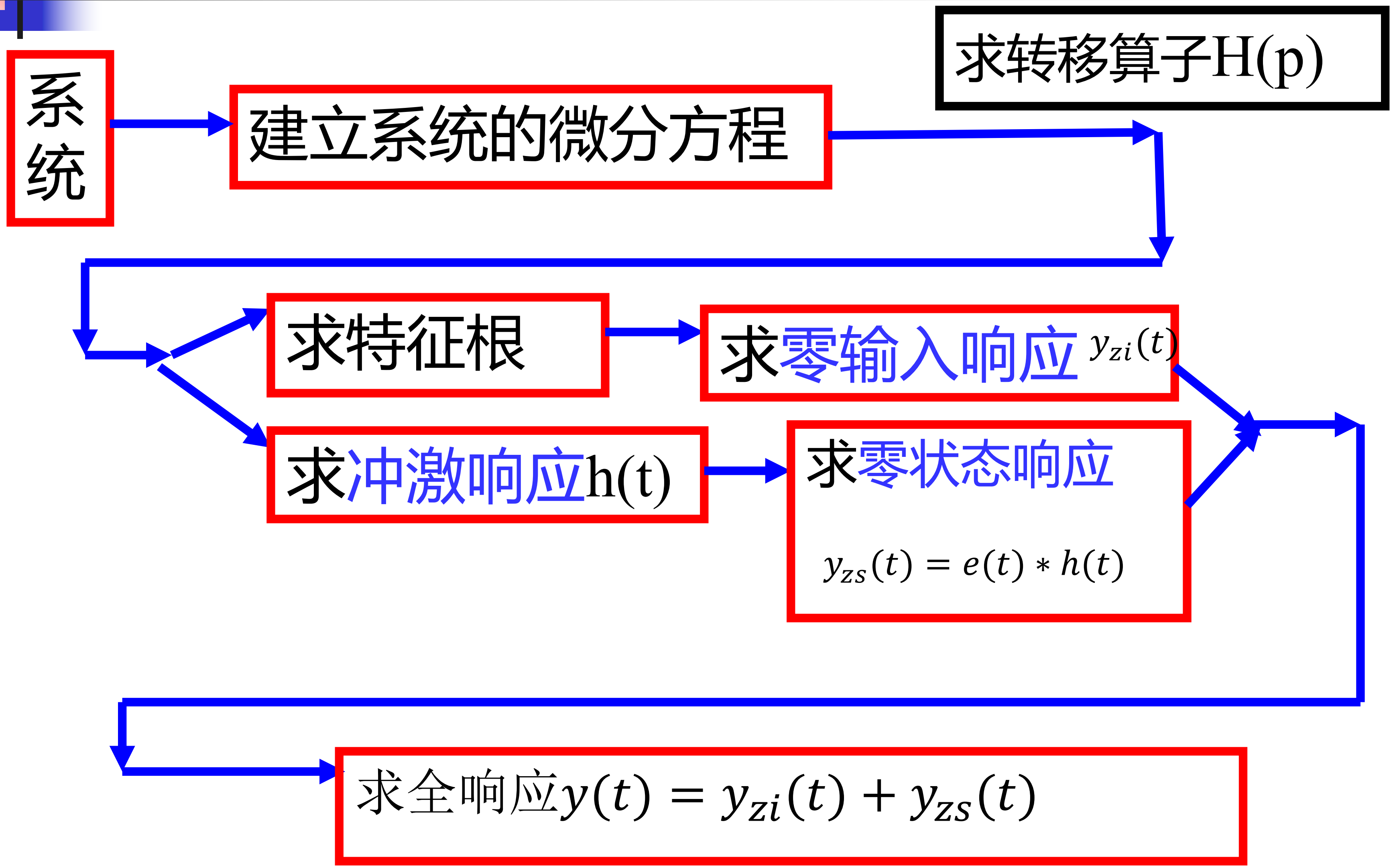
解：

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\frac{df_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau\\&=\frac{df_1(t)}{dt}*\int_{0}^{t}e^{-\tau}u(\tau)d\tau\\&=[\delta(t-t_1)-\delta(t-t_2)]*(1-e^{-t})u(t)\\&=\left[1-e^{-(t-t_1)}\right]u(t-t_1)-\left[1-e^{-(t-t_2)}\right]u(t-t_2)\end{aligned}$$

卷积的物理意义

- 信号的卷积表示了信号之间的相关性（相似度）
- 系统与信号的卷积表示了滤波（特征提取、调制）

线性系统响应的时域求解



全响应 = 零输入响应 + 零状态响应 ⇐ 从区分初始储能与激励作用考虑

= 自然响应 + 受迫响应 ⇐ 从微分方程经典法求解考虑

= 瞬态响应 + 稳态响应 ⇐ 从 $t \to \infty$ 的状态考虑

瞬态响应是指当t趋于无穷时，趋于零的那部分响应；
稳态响应是指当t趋于无穷时，保留下来的那部分响应。

问题：各种响应之间是什么关系呢？

综合例题

- p.65 例题2-11

$$u_c(t)$$

$$= \underbrace{e^{-t}\varepsilon(t)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{(1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t})\varepsilon(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}e^{-t}\varepsilon(t)}_{\text{自然响应}} + \underbrace{(1-\frac{1}{2}e^{-3t})\varepsilon(t)}_{\text{受迫响应}}$$

$$= \underbrace{(\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t})\varepsilon(t)}_{\text{瞬态响应}} + \underbrace{\varepsilon(t)}_{\text{稳态响应}}$$

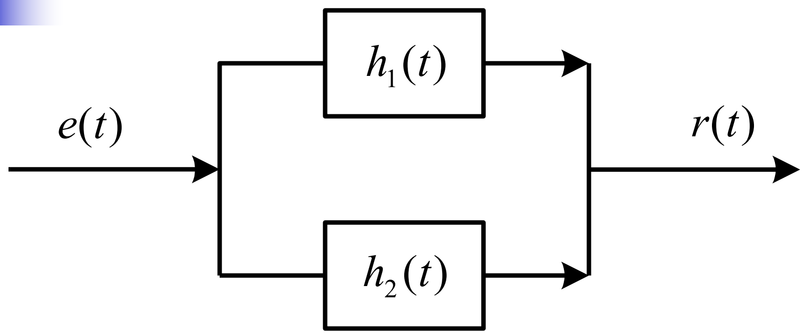
	自然响应	受迫响应	零输入响应	零状态响应
系统（特征根）	√	√	√	√
初始状态	√		√	
外加激励	√	√		√

- 自然响应和零输入响应都是齐次方程的解，两者具有相同的模式，此模式由方程的特征根决定。
- 但是两者系数不同。零输入响应由初始储能决定，自然响应同时依从于起始状态和激励信号。
- 若系统初始无储能，则零输入响应为零，但自然响应可以不为零。

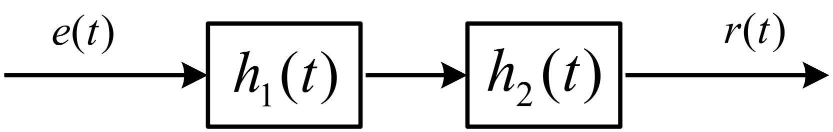
	自然响应	受迫响应	零输入响应	零状态响应
系统（特征根）	√	√	√	√
初始状态	√		√	
外加激励	√	√		√

- 零输入响应是自然响应的一部分。
- 零状态响应中又可分为自然响应和受迫响应。
- 若系统是稳定的，则其自然响应是瞬态响应；受迫响应中可能包含瞬态响应和稳态响应。

组合系统的冲激响应

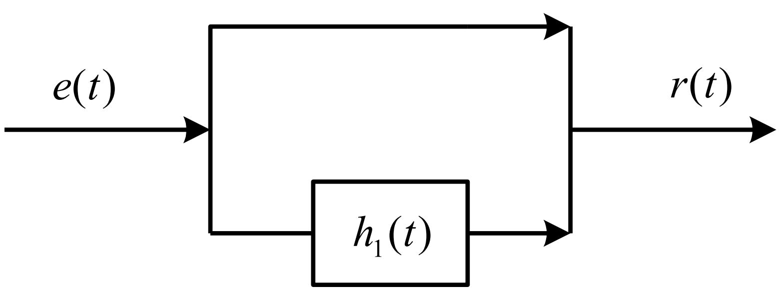


$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

思考：



$$h(t) = \delta(t) + h_1(t)$$

小结

- 冲激响应-很重要！
- 卷积，不要被它的名称吓住了
- 系统的零状态响应求解
- 分解—数学常用的思想

课外作业

阅读：2.6-2.9　预习：3.1-3.3

作业：2.16（5）

2.17

2.20（1）（2）