信号与系统

离散时间系统的变换域分析

理想取样信号的拉普拉斯变换

抽样信号的时域表达式：

$$x_s(t) = x(t).\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

对上式取双边拉氏变换：

$$X_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s\,(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt$$

交换积分与求和次序：

$$X_s(S) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} x(nT)e^{-st}\delta(t-nT)dt$$

从拉普拉斯变换到Z变换

由$\delta(t)$的抽样性质可知：

$$X_s(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-snT}\text{；令}z=e^{sT}\text{或}s=\frac{1}{T}\ln z$$

$$\boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\qquad z=e^{sT}}$$

定义：一个离散时间序列$x(n)$的Z变换为Z^{-1}的一个幂级数（洛朗级数的特例），Z一般为复变数，每一项的系数为$x(n)$相应的值数值。（$x(n)$的生成函数$\rightarrow z^n$）

思考：这个级数一定收敛吗？

Z变换的收敛域

收敛的充分条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$

- 根据级数理论
- 借助于S平面与Z平面的映射

根据级数理论判别

（1）比值判定（达朗贝尔准则）：

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$

$\rho < 1,$ 级数收敛

$\rho > 1,$ 级数发散

$\rho = 1,$ 不能确定

（2）根值判定（柯西准则）：

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

$\rho < 1,$ 级数收敛

$\rho > 1,$ 级数发散

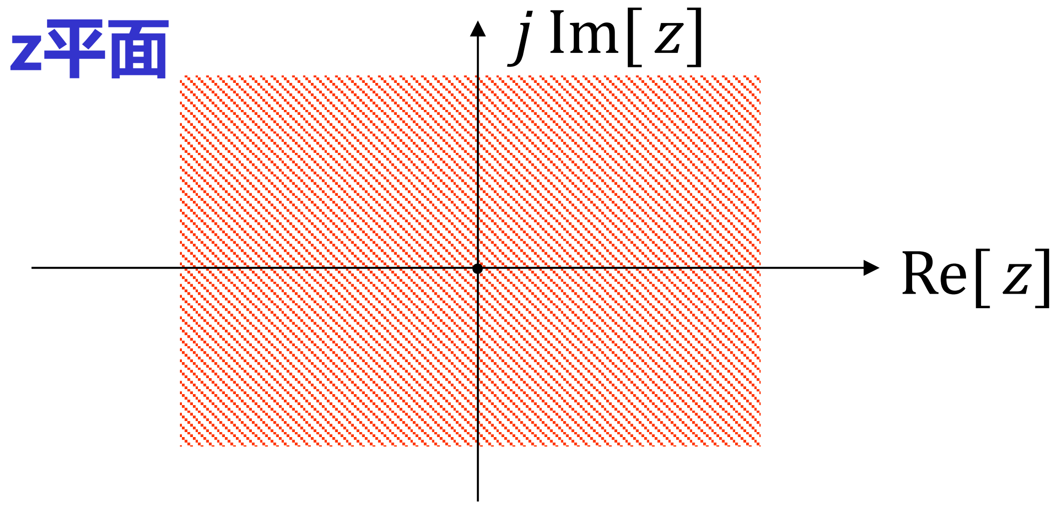
$\rho = 1,$ 不能确定

有限序列的收敛域

（1）有限序列：在有限区间内，有非零的有限值的序列$\boldsymbol{x(n)}$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}\qquad n_1\le n\le n_2$$

$n_1<0$时，$z=\infty$和$n_2>0$时$z=0$外，所有z值都收敛



右边序列的收敛域

（2）右边序列：只在$\boldsymbol{n \geq n_1}$区间内，有非零的有限值的序列$\boldsymbol{x(n)}$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad n_1 \leq n \leq \infty$$

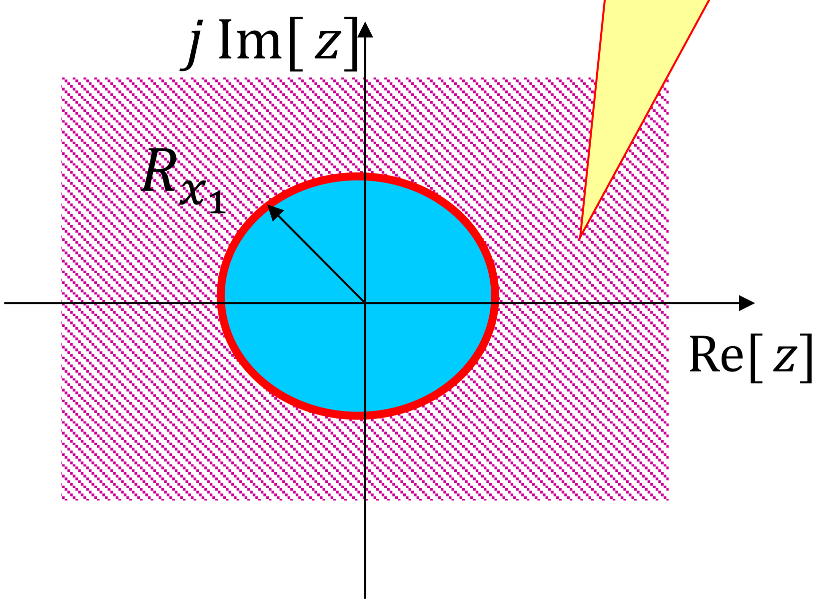
圆外为收敛域，
若$\boldsymbol{n_1}<\mathbf{0}$则不
包括$Z=\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n) z^{-n}|}<1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|}=R_{x_1}<|z|$$

$$|z|>R_{x_1}$$

收敛半径



左边序列的收敛域

（3）左边序列：只在$n \le n_2$区间内，有非零的有限值的序列$x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le n_2$$

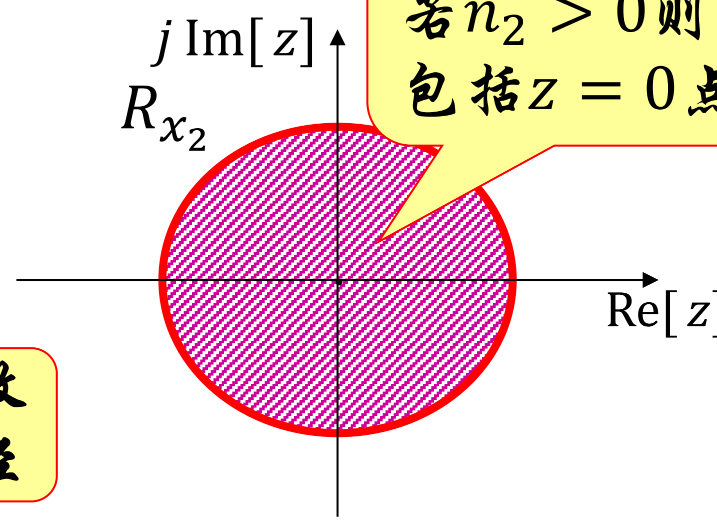
$$X(z) \overset{m=-n}{=} \sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m)z^{m} = \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n)z^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(-n)z^n|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(-n)|} < |z|^{-1}$$

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}} = R_{x_2}$$

收敛半径



圆内为收敛域，若$n_2 > 0$则不包括$z=0$点

双边序列的收敛域

（4）双边序列：在$-\infty < \boldsymbol{n} < +\infty$区间内，有非零的有限值的序列$\boldsymbol{x(n)}$

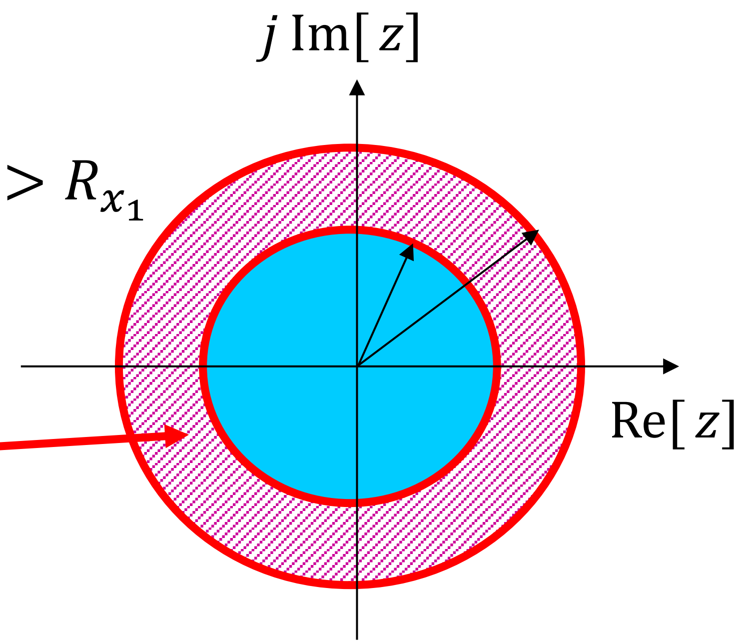
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\qquad -\infty\le n\le\infty$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

圆内收敛

圆外收敛

$R_{x_2} > R_{x_1}$



$R_{x_2} > R_{x_1}$ 有环状收敛域

$R_{x_2} < R_{x_1}$ 没有收敛域

例1

求下列序列的Z变换,并标明收敛域，画出零极图。

$$(1).\ x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$$

$$(2).\ x(n)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(-n-1)$$

$$(3).\ x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}[u(n)-u(n-8)]$$

$$(4).\ x(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & n\geq 0\\ 2^{n} & n<0\end{cases}$$

例1（续一）

$$(1)\quad x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

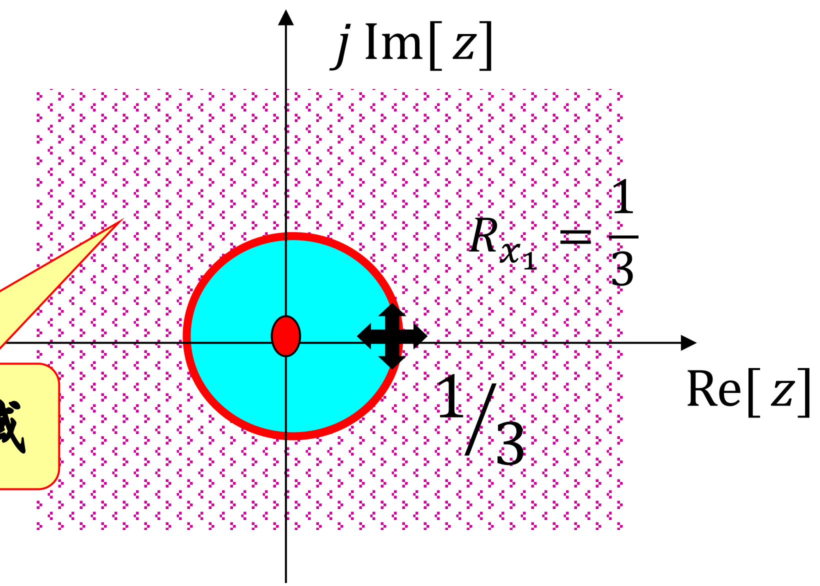
右边序列

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$R_{x_1}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ |z|>\frac{1}{3}$$

圆外为收敛域



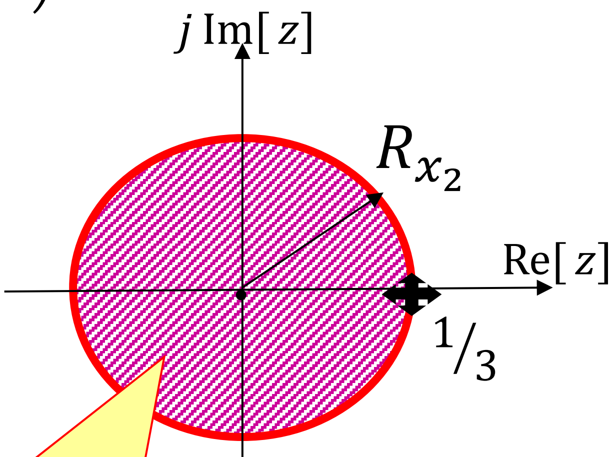
例1（续二）

$$(2)\quad x(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

左边序列

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \overset{n=-m}{=} -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-m}$$

$$= 1 - \sum_{m=0}^{\infty}(3z)^m = 1 - \frac{1}{1-3z} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$



圆内为收敛域

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(3z)^n|} < 1$$

$$|z| < \frac{1}{3} = R_{x_2}$$

收敛半径

$n_2 = -1 < 0$　z可以为0

例1（续三）

$$(3)\quad x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n[u(n)-u(n-8)]$$

有限长序列

$$X(z)=\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1-(\frac{1}{3}z^{-1})^8}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z^8-(\frac{1}{3})^8}{z^7(z-\frac{1}{3})}$$

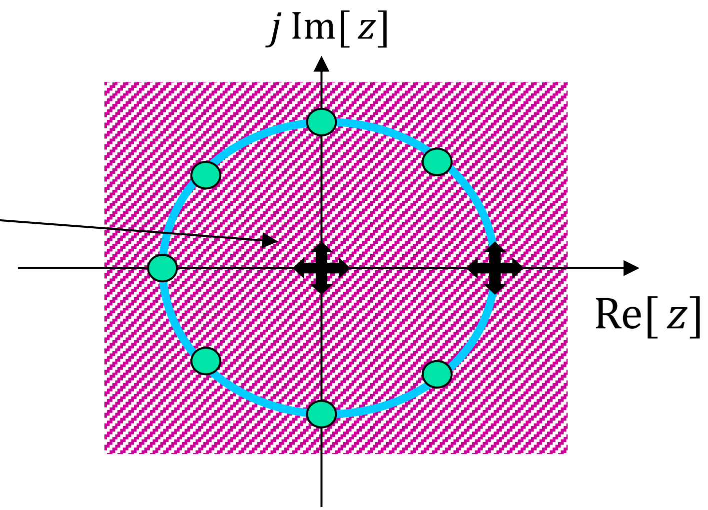
收敛域为除了 0 的整个 z 平面

$$z^8=(\frac{1}{3})^8e^{j2k\pi}$$

$$z=\frac{1}{3}e^{j\frac{2K\pi}{8}}$$ → 8个零点

$$z=0$$ → 7阶极点

$$z=\frac{1}{3}$$ → 1阶极点



例1（续四）

(4)双边序列： $x(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^n & n\geq 0\\ 2^n & n<0\end{cases}$

解：$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}=$

$[\ldots+(2^{-1}z)^3+(2^{-1}z)^2+\ldots]$

$+[1+\frac{1}{3}z^{-1}+(\frac{1}{3}z^{-1})^2+(\frac{1}{3}z^{-1})^3+\ldots]$

例1（续五）

第一项仅含有Z的正幂无穷级数

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{(2^{-1}z)^k}<1,\text{条件是}|z2^{-1}|<1\text{或}|z|<2$$

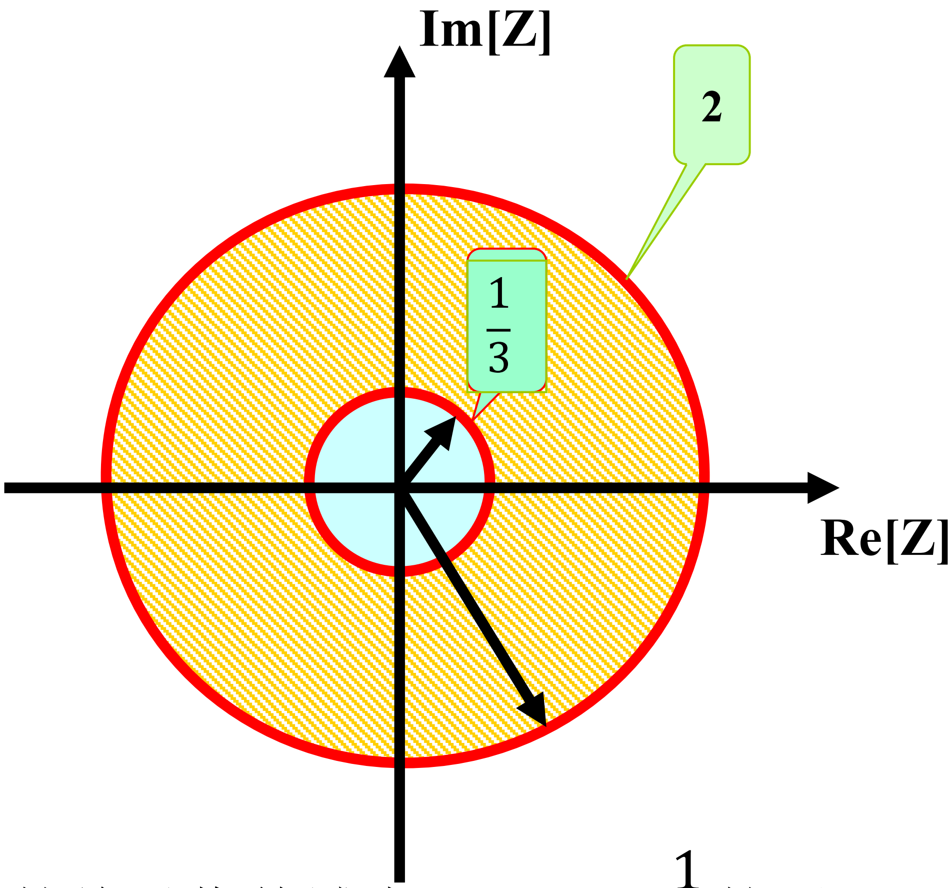
$$|z|<\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{2^k}=2$$

第二项仅含有Z的负幂的无穷级数

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{(\left(\frac{1}{3}\right)^k z^{-k})}<1\text{或}|z|>\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{1}{3}^k\right)}>\frac{1}{3}$$

$$\therefore F(z)\text{的绝对收敛域为}2>|z|>\frac{1}{3}$$

例1（续六）：



$F(z)$的绝对收敛域为$2 > |z| > \frac{1}{3}$的圆环。

单边Z变换

单边Z变换的定义：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

注意：通常所说的Z变换指的是单边Z变换，如果是双边Z变换，则要明确说明。

典型序列的Z变换

- 单位样值序列
- 单位阶跃序列
- 斜变序列
- 指数序列
- 正弦、余弦序列

单位样值序列的Z变换

$$(1)\quad \mathcal{Z}[\delta(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1 \quad (|z| \geq 0)$$

$$(2)\quad \mathcal{Z}[\delta(n-m)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-m) z^{-n}$$

$$= \begin{cases} z^{-m} & m > 0, z \neq 0, \text{不然级数发散} \\ 0 & m < 0\text{，此级数存在} \end{cases}$$

单位阶跃序列、单边指数序列的Z变换

$$\mathcal{Z}[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

$$\mathcal{Z}[a^n u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > a)$$

Z变换的基本性质

- 线性
- 位移性
- 序列指数加权（Z 域尺度变换）
- 序列线性加权（Z 域微分）
- 卷积定理
- 初值定理和终值定理

Z变换的线性性质

- 对离散时间信号，若有：

$$f_1(n) \leftrightarrow F_1(z), f_2(n) \leftrightarrow F_2(z)$$

- 则

$$af_1(n) + bf_2(n) \leftrightarrow aF_1(z) + bF_2(z)$$

正弦序列的Z变换

$$\mathcal{Z}[e^{j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$$

$$\mathcal{Z}[e^{-j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}$$

$$\mathcal{Z}[\sin\omega_0 n] = \mathcal{Z}[(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n})/2j]$$

$$= (\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}})/2j$$

$$= \frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$$

Z变换的时移（位移、移序）特性

- 对离散时间信号，若有：

$$f(n) \leftrightarrow F(z)$$

- 则

$$f(n+1) \leftrightarrow z(F(z)-f(0))$$

$$f(n+l) \leftrightarrow z^{l}\left(F(z)-\sum_{i=0}^{l-1} f(i) z^{-i}\right)$$

Z变换的尺度变换特性

- 对离散时间信号，若有：

$$f(n) \leftrightarrow F(z)$$

- 则

$$a^n f(n) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$$

Z变换的微分特性

- 对离散时间信号，若有：

$$f(n) \leftrightarrow F(z)$$

- 则

$$nf(n) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}F(z)$$

Z变换的卷积性质

- 对离散时间信号，若有：

$$f_1(n) \leftrightarrow F_1(z), f_2(n) \leftrightarrow F_2(z)$$

- 则

$$f_1(n) * f_2(n) \leftrightarrow F_1(z)F_2(z)$$

Z变换的初值定理和终值定理

- 对离散时间信号，若有：

$$f(n) \leftrightarrow F(z)$$

- 则

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

$$f(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z)$$

例2

- 若初始为$y(0) = 1, y(1) = 2$，求差分方程：

$$y(k+2) - y(k+1) - y(k) = 0$$

的解。

例2

- 对方程两边同时求变换，根据变换的线性特性，有：

$$\mathcal{Z}[y(k+2)]-\mathcal{Z}[y(k+1)]-\mathcal{Z}[y(k)]=0$$

- 再用变换的移位特性，可得：

$$z^2[Y(z)-y(0)-z^{-1}y(1)]-z[Y(z)-y(0)]-Y(z)=0$$

- 将初始条件带入上面的方程，整理得:

$$(z^2-z-1)Y(z)=z^2+z$$

- 由此可得：

$$Y(z)=\frac{z^2+z}{z^2-z-1}$$

- 这正是变换解差分方程的基本思想。

例3

- 用卷积定理，由单位阶跃序列的z变换求单位斜变序列$ku(k)$的z变换。

解：斜变序列可表示为：

$$ku(k)=u(k)*u(k-1)$$

故：$\mathcal{Z}[ku(k)]=\mathcal{Z}[u(k)]\cdot\mathcal{Z}[u(k-1)]$

单位阶跃序列的z变换为：$u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$

根据移序性质：$u(k-1)\leftrightarrow z^{-1}\frac{z}{z-1}=\frac{1}{z-1}$

所以：$ku(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{z}{(z-1)^2}$

逆Z变换的解法

①围线积分法(留数法）

②幂级数展开法(长除法）

③部分分式展开法

④逆Z变换表

围线积分法(留数法)

- 这种方法是借助于复变函数的留数定理，把逆Z变换的积分表示为围线C内包含$X(z)z^{n-1}$的各极点的留数之和。在使用这种方法时要注意以下两点：
  - 对于同一个表达式$X(z)$，当给定的收敛域不同时，所选择的积分围线也不相同，最后将得到不同的逆变换序列$x(n)$。
  - 应当注意收敛域内围线所包围的极点情况，特别要关注对于不同的n值，在$z=0$处的极点可能具有不同的阶次。

幂级数展开法

- Z变换实际上是一个涉及Z的正幂和负幂的幂级数，这个级数的系数就是离散时间序列的序列值。因此，若能把$F(z)$展开为一个Z的幂级数，就可求得逆Z变换。
- 若z变换象函数是有理函数，即其分子分母皆为多项式，这可先根据其收敛域判断出离散时间序列是右边序列还是左边序列，然后采用多项式长除法，分别展开为Z的负幂无限或正幂无限的幂级数，再确定各个序列值。
- 泰勒级数展开法适用于有理形式或一些非有理形式的Z变换，长除法只适用于有理形式的Z变换象函数。且收敛域限于某个圆周的内部或外部，对于收敛域为有限环域的有理象函数，无法直接用长除法。
- 参考例题：8-8

部分分式展开法

- 基本思路
  - 单个单边复指数序列的Z变换象函数，都是一些简单的有理函数，其收敛域也是单纯的。单边复指数序列的线性组合的 Z变换的象函数也是有理函数，其收敛域分别是每一项复指数分量相应的收敛域的交集
- 具体方法
  - 部分分式展开法是将一个有理形式的多项式分式展开成低阶次有理分式的线性组合
  - 由于$\alpha^n u(n)$ ↔️ $\frac{z}{z-\alpha}$，因此需要对：$\frac{F(z)}{z}$进行部分分式分解。

例4

求$F(z)=\frac{z+2}{2z^2-7z+2}$的原函数。

解：（1）如果是右边序列，将$\frac{F(z)}{z}$展开成部分分式，可得：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{\frac{2}{3}}{z}+\frac{\frac{1}{3}}{z-3}+\frac{-1}{z-\frac{1}{2}}$$

所以：

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)+\frac{1}{3}3^k u(k)-\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)$$

收敛域为：

$$|z|>3$$

例4（续一）：

（2）如果是左边序列，由部分分式法可得：

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)-\frac{1}{3}3^{k}u(-k-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u(-k-1)$$

收敛域为：

$$|z|<\frac{1}{2}$$

（3）如果是双边序列，由部分分式法可得：

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)-\frac{1}{3}3^{k}u(-k-1)-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u(k)$$

收敛域为：

$$\frac{1}{2}<|z|<3$$

例5 用留数法求解：$F(z)=\dfrac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}$

解：

$$F(z)z^{k-1}=\frac{(2z^2-0.5z)}{z^2-0.5z-0.5}z^{k-1}=\frac{(2z-0.5)z^k}{(z-1)(z+0.5)}$$

若已知f(k)为因果序列，则当k<0时，f(k)＝0；

当k≥0时极点的情况：显然其极点在z=1和z=-0.5,那么被积函数在这两个极点处的留数分别为

$$\mathrm{Re}\,s\,[F(z)z^{k-1}]_{z=1}=\left.\frac{(2z-0.5)z^k}{z+0.5}\right|_{z=1}=1$$

$$\mathrm{Re}\,s\,[F(z)z^{k-1}]_{z=0.5}=\left.\frac{(2z-0.5)z^k}{z-1}\right|_{z=0.5}=(-0.5)^k$$

所以：$f(k)=u(k)+(-0.5)^k u(k)$

用单边Z变换求解差分方程

解差分方程的方法：

（1）时域经典法

（2）卷积和解法

（3）Z变换解法

例6

例：

$$y(n)-by(n-1)=x(n)$$
$$x(n)=a^n u(n) \quad y(-1)=2 \quad y(n)=?$$

里面已含有初始条件

$$Y(z)-bz^{-1}[Y(z)+zy(-1)]=X(z)$$
$$[1-bz^{-1}]Y(z)=X(z)+by(-1)$$
$$Y(z)=\frac{X(z)+by(-1)}{1-bz^{-1}}$$
$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{az}{z-a}-\frac{bz}{z-b}\right]+\frac{2bz}{z-b}$$

完全解

$$y(n)=ZT^{-1}[Y(z)]=\left[\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})+2b^{n+1}\right]u(n)$$

例7

例：

$$y(n)+0.1y(n-1)-0.02y(n-2)=10u(n)$$

$$y(-1)=4 \quad y(-2)=6 \qquad y(n)=?$$

$$Y(z)+0.1z^{-1}[Y(z)+zy(-1)]-0.02z^{-2}[Y(z)+z^2y(-2)+zy(-1)]=\frac{10z}{z-1}$$

$$(1+0.1z^{-1}-0.02z^{-2})Y(z)=\frac{10z}{z-1}+0.08z^{-1}-0.28$$

完全解

$$Y(z)=\frac{9.26}{1-z^{-1}}+\frac{0.66}{1+0.02z^{-1}}-\frac{0.2}{1-0.1z^{-1}}$$

$$y(n)=[9.26+0.66(-0.02)^n-0.2(0.1)^n]u(n)$$

z变换与拉普拉斯变换的关系

拉普拉斯变换和z变换是两种不同的变换，分别处理连续时间信号和离散时间信号。但是，在一定的条件下，两者也是相互联系的。

下面分别讨论：

1、s平面与z平面的对应关系；

2、由z变换得到拉氏变换、傅氏变换；

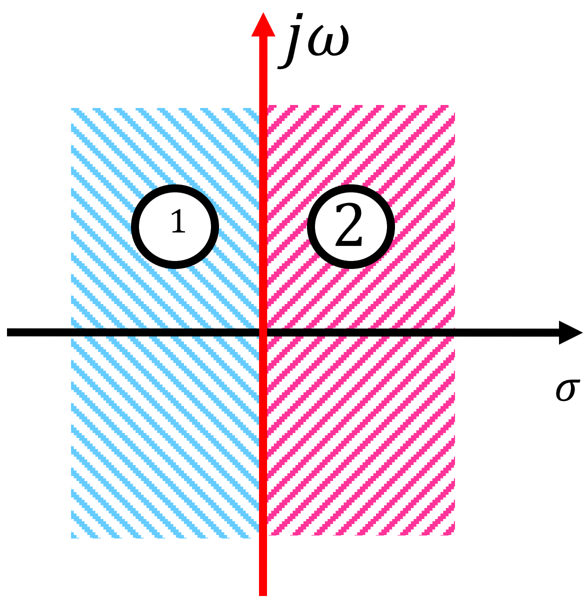
3、由拉氏变换得到z变换。

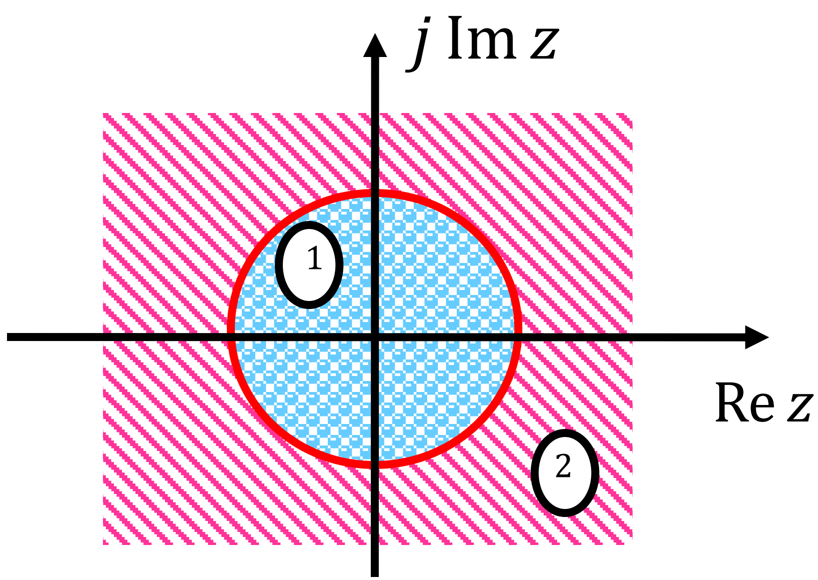
从s平面到z平面的映射

设 $s = \sigma + j\omega \qquad z = re^{j\theta}$

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

则 $|z| = r = e^{\sigma T} \qquad \theta = \omega T$





z变换 ⟶ 拉普拉斯变换/傅里叶变换

前面，我们借助理想抽样信号的单边拉氏变换引出了z变换，即

$$F(z)|_{z=e^{sT}} = F_\delta(s)$$

离散序列的Z变换

理想取样信号的L变换

$$F(z)|_{z=e^{j\omega T}} = F_\delta(j\omega)$$

理想取样信号的F变换

拉普拉斯变换 ⟶ z变换

$$F(s) \longrightarrow f(t) \longrightarrow f_\delta(n) \longrightarrow F(z)$$

为导出两者的关系，现在由拉普拉斯反变换开始：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds \Rightarrow f(nT)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{snT}ds$$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{snT}ds\right)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\sum_{n=0}^{\infty}(e^{sT}z^{-1})^{n}\,ds$$

$$ROC:|e^{sT}z^{-1}|<1 \Rightarrow |z|>|e^{sT}|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(e^{sT}z^{-1})^{n}=\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{sT}}$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{F(s)}{1-e^{sT}z^{-1}}ds=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{zF(s)}{z-e^{sT}}ds$$

$$F(z)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}s\left[\frac{zF(s)}{z-e^{sT}}\right]_{s=p_i}$$

连续信号的拉氏变换与z变换的关系

$$F(z)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}s\left[\frac{zF(s)}{z-e^{sT}}\right]_{s=p_i}$$

若$F(s)$只含一阶极点，则

$$F(s)=\sum_{i}\frac{A_i}{s-p_i}$$

$$F(z)=\sum_{i}\frac{zA_i}{z-e^{p_iT}}$$

课外作业

课外作业

作业:8.2 8.3(6) 8.7(2) 用部分分式展开法 8.10

系统函数 H(z)

联系s域中零状态响应与激励间的运算关系称为s域系统函数，简称为系统函数。其定义如下：

$$H(s)=\frac{R_{zs}(s)}{E(s)} \qquad H(s)\Longleftrightarrow\begin{cases}h(t)\\H(p)\\H(j\omega)\end{cases}$$

类似地，联系z域中零状态响应与激励间的运算关系称为z域系统函数，简称为系统函数。其定义如下：

$$H(z)=\frac{R_{zs}(z)}{E(z)} \qquad H(z)\Longleftrightarrow\begin{cases}h(n)\\H(S)\\H(e^{j\omega})\end{cases}$$

离散时间系统的系统函数 - 推导参见P375

$$H(S) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_0}$$

注：S为移序算子。前文使用E为移序算子。

转移算子

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{m} b_l z^l}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

系统函数

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

特征多项式

例1（例题8-13）激励为单位阶跃序列，系统为

$$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=e(k+1)+e(k)$$

初始条件为：(1) $y_{zi}(0)=0, y_{zi}(1)=0$

(2) $y(0)=0, y(1)=0$

求系统分别在两种初始条件下的响应。

解:(1)已知零输入响应的初始条件为0，因为$y_{zi}(k)=0$，所以系统的全响应是零状态响应。

系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{z+1}{z^2-5z+6}$$

而 $E(z)=\dfrac{z}{z-1}$ ，故

$$Y(z)=E(z)H(z)=\frac{z(z+1)}{(z-1)(z^2-5z+6)}$$
$$=\frac{z}{z-1}-3\frac{z}{z-2}+2\frac{z}{z-3}$$

对此式作z反变换，得到

$$y(k)=\left(1-3(2)^k+2(3)^k\right)u(k)$$

(2)给出的是全响应的初始条件为0。在方程两边作z变换，得

$$z^2[Y(z)-y(0)-y(1)z^{-1}]-5z[Y(z)-y(0)]+6Y(z)$$
$$=z[E(z)-e(0)]+E(z)$$

整理得

$$(z^2-5z+6)Y(z)=z\left(\frac{z}{z-1}-1\right)+\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{2z}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{z}{z-1}-2\frac{z}{z-2}+\frac{z}{z-3}$$

对此式作z反变换，得到

$$y(k)=\left(1-2(2)^k+3^k\right)u(k)$$

系统函数零极点分布对系统特性的影响

- 极点分布决定系统单位函数响应的模式

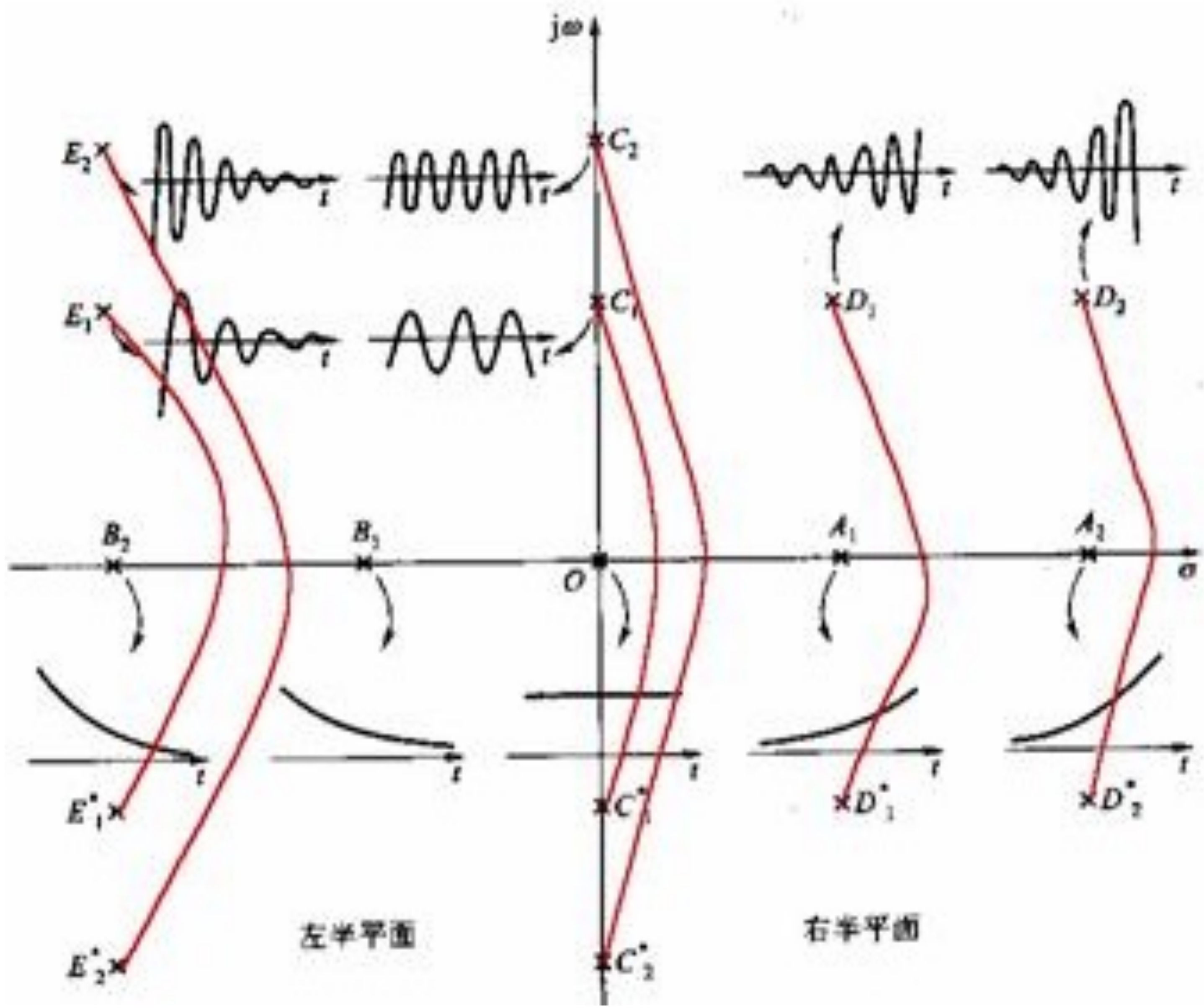
  （增长，衰减）

- 极点分布决定系统稳定性

  （前提：因果系统）

- 零极点分布决定系统频响特性

H(s)极点与单位冲激响应模式的关系



小结：

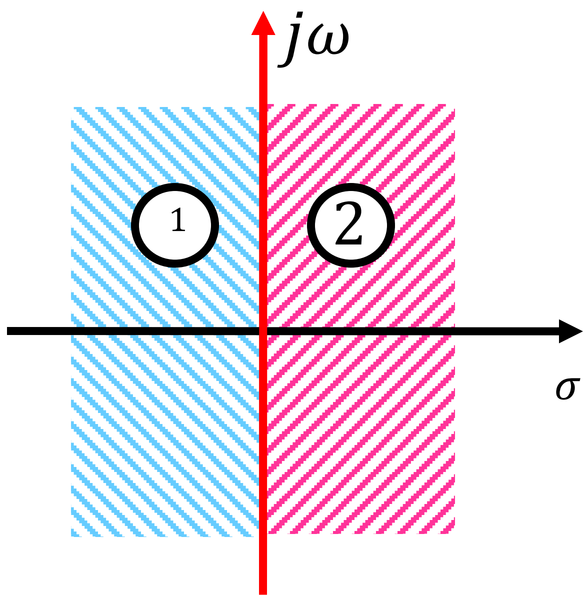
- H(s)在左半平面的极点 对应h(t)中的**暂态分量**。
- H(s)在虚轴上的单极点 对应h(t)中的**稳态分量**。
- H(s)在虚轴上二阶或更高阶极点及右半平面的极点 对应h(t)中**随时间的增长而增长的分量**。

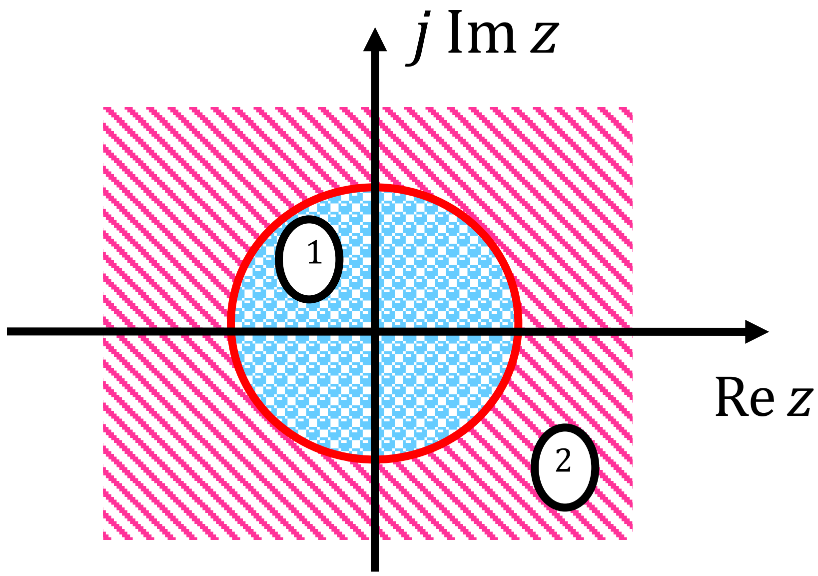
s平面到z平面的映射

设 $s=\sigma+j\omega \qquad z=re^{j\theta}$

$$z=e^{sT}=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$

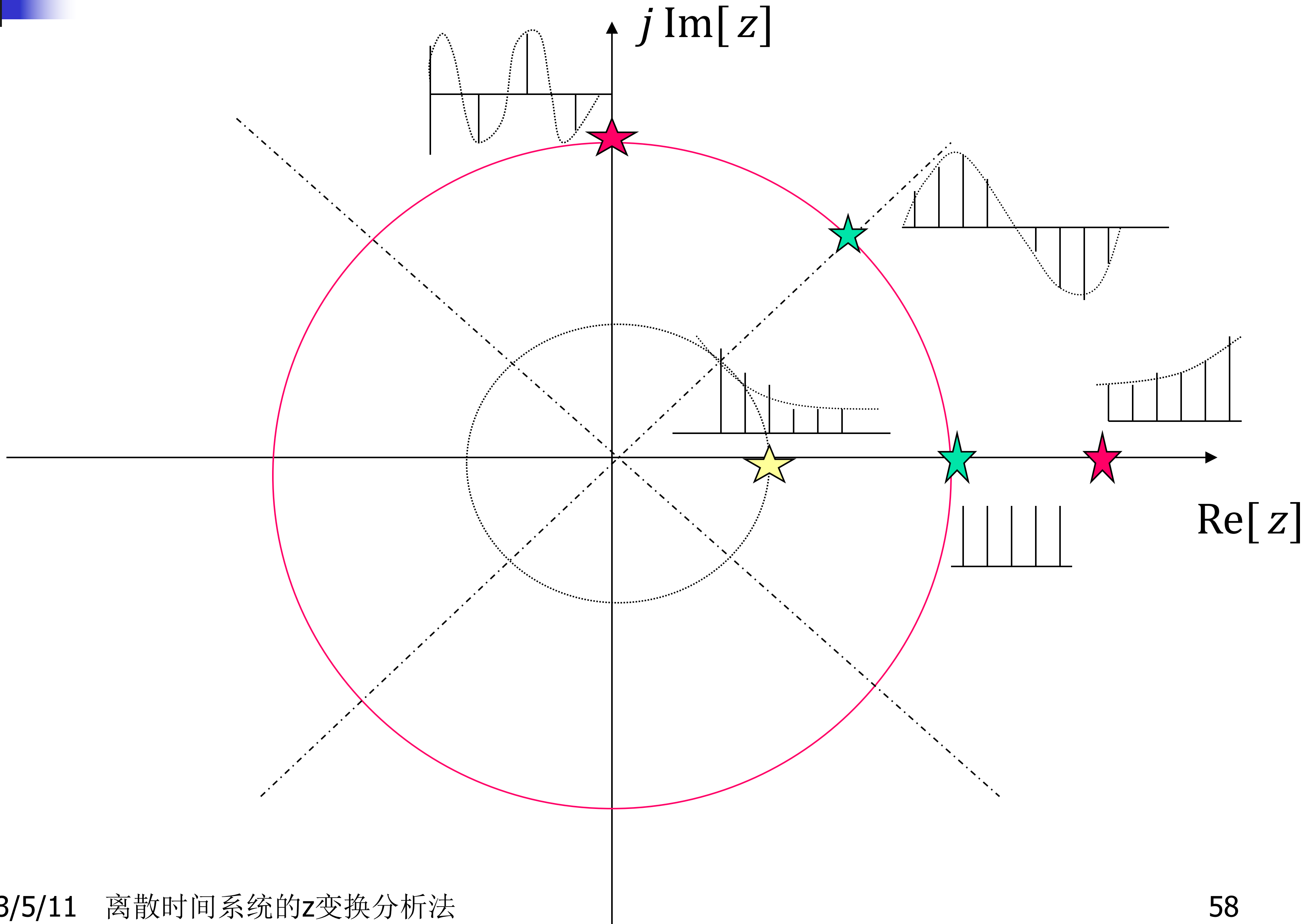
则 $|z|=r=e^{\sigma T} \qquad \theta=\omega T$





极点分布对h(n)的影响

■ **图7 - 19**



极点分布对系统稳定性的影响

<table>
<tr><td rowspan="2">因果</td><td colspan="2">响应不早于激励</td><td>激励最高序号不大于响应最高序号</td></tr>
<tr><td colspan="2">$h(t)=0,\quad t<0$</td><td>$h(n)=0,\quad n<0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">稳定</td><td colspan="2">$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert h(t)\rvert<\infty$</td><td>$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert h(n)\rvert<\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">因果系统</td><td>$\int_{0}^{\infty}\lvert h(t)\rvert<\infty$</td><td>$\sum_{n=0}^{\infty}\lvert h(n)\rvert<\infty$</td></tr>
<tr><td>系统函数H(s)的所有极点全部位于s平面的左半开平面</td><td>?</td></tr>
</table>

在判别因果系统的稳定性时，在s域是看H(s)的极点是否全部落于s平面的左半开平面，而在z域则是看H(z)的极点是否全部落于z平面的单位圆内。

但是对于非因果系统，收敛区并不是在圆外区域，极点不限于单位圆内。

已知系统函数如下，试说明分别在(1)(2)两种情况下系统的稳定性：

$$H(z)=\frac{-9.5z}{(z-0.5)(z-10)}$$

$$(1)|z|>10 \qquad (2)0.5<|z|<10$$

解: (1)　由收敛区可以看出系统为因果系统。

$$z_1=0.5 \quad z_2=10 \quad |z_2|>1$$

存在极点位于单位圆外，所以不稳定。实际上

$$H(z)=\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z-10}$$

$$\Rightarrow h(n)=[(0.5)^n-(10)^n]u(n)$$

不是绝对可和的。

（2）由收敛区可以看出此时系统是非因果系统。

$$H(z)=\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z-10} \qquad 0.5\le |z|\le 10$$

$$\Rightarrow h(n)=(0.5)^n u(n)+\underbrace{(10)^n u(-n-1)}_{10^{-\infty}}$$

是绝对可和的，因此该非因果系统是稳定的。

已知某因果系统的系统函数如下：

$$H(z)=\frac{z^2+z}{z^2-z+1}$$

试说明该系统是否稳定。

解：

$$H(z)=\frac{z^2+z}{(z-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})(z-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

临界稳定

$$p_1=\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad p_2=\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad |p_{1,2}|=1$$

序列的傅里叶变换（DTFT）

序列的傅里叶变换：

由$s-z$的关系来看: 当$\sigma=0, s=j\omega'$时

则$z=e^{sT}=e^{j\omega' T}=e^{j\omega}$, 其中：$\omega=\omega'\mathrm{T}$

于是相当于自变量沿着z=1单位圆周变化，则：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}=X(e^{j\omega})$$

序列的傅里叶正变换

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

注意：序列的傅里叶变换（DTFT）不是离散傅里叶变换（DFT）。

序列的傅里叶逆变换（IDTFT）

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} e^{-j\omega}\, d(e^{j\omega})$$

序列
的傅里叶
逆变换

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega$$

例10

若$x(n)=u(n)-u(n-5)$,求此序列的傅里叶变换。

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\left(\frac{e^{j\frac{5}{2}\omega}-e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\right)$$

$$=e^{-j2\omega}\left[\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right]=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\phi(\omega)}$$

其中，幅频特性为：

$$\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right|$$

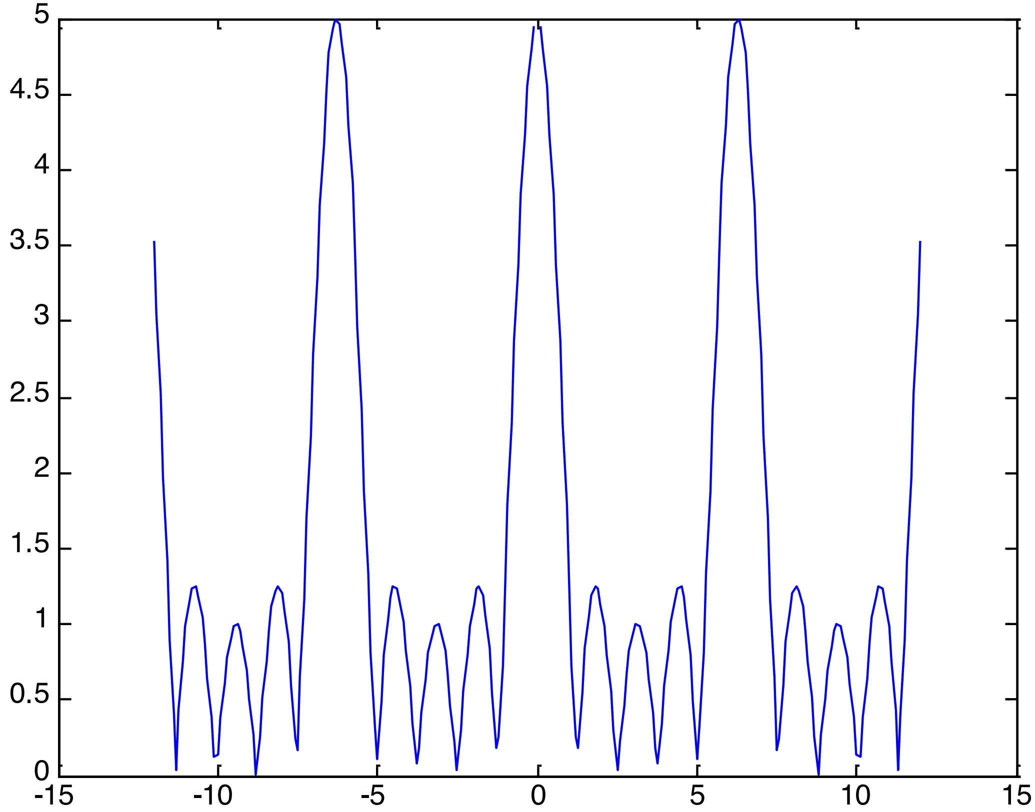
而相频特性为：

$$\phi(\omega)=-2\omega+\arg\left[\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right]$$

Matlab program

```
k=0;
for w=-12:0.1:12 %角频率
    k=k+1;
    wc(k)=w;%The value of the kth w
    X(k)=exp(-
j*2*w)*sin(2.5*w)/sin(0.5*w);
end
%the complex modulus (magnitude)
XA=abs(X);
plot(wc,XA);
%phase angles, in radians
XP=angle(X);
figure,plot(wc,XP);
```

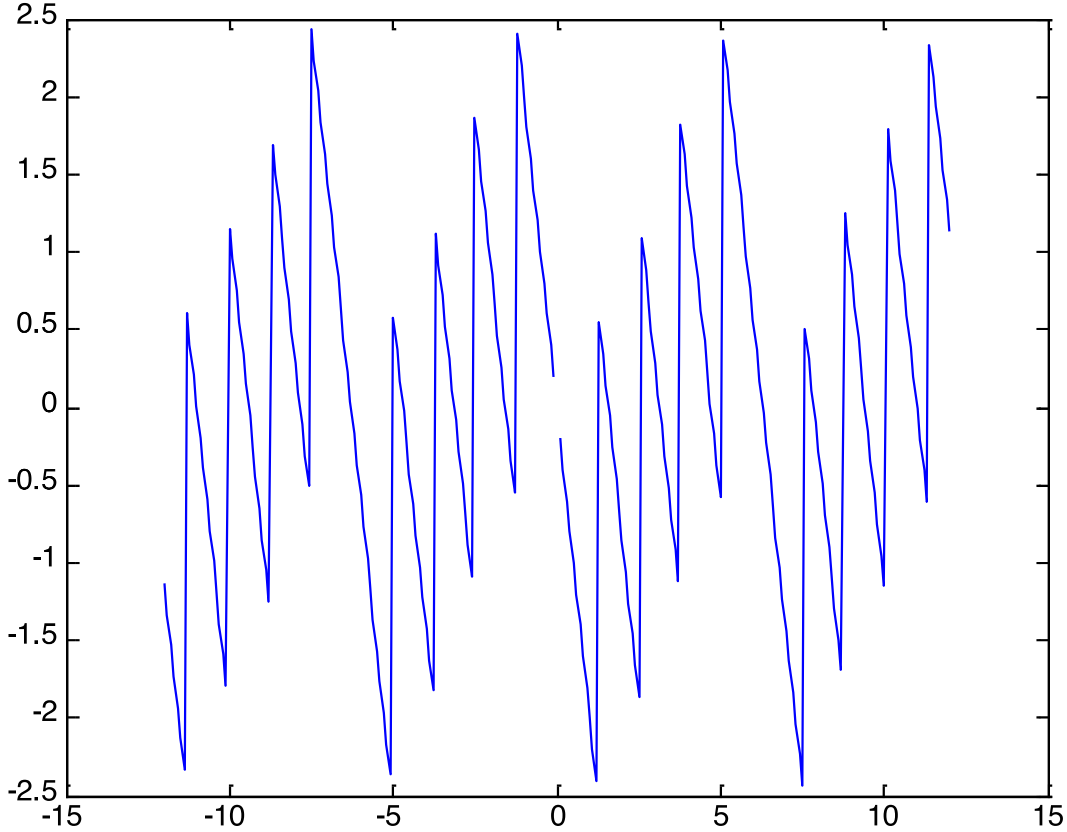
例10（续一）



图：信号$x(n)$的幅度谱图

与矩形方波的谱有什么样的联系？

例10（续二）



图：信号$x(n)$的相位谱图

DTFT的特点

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\ n}$$

特点：

(1) $X(e^{j\omega})$是ω的连续函数。

(2) $X(e^{j\omega})$是ω的周期函数，周期为2π；

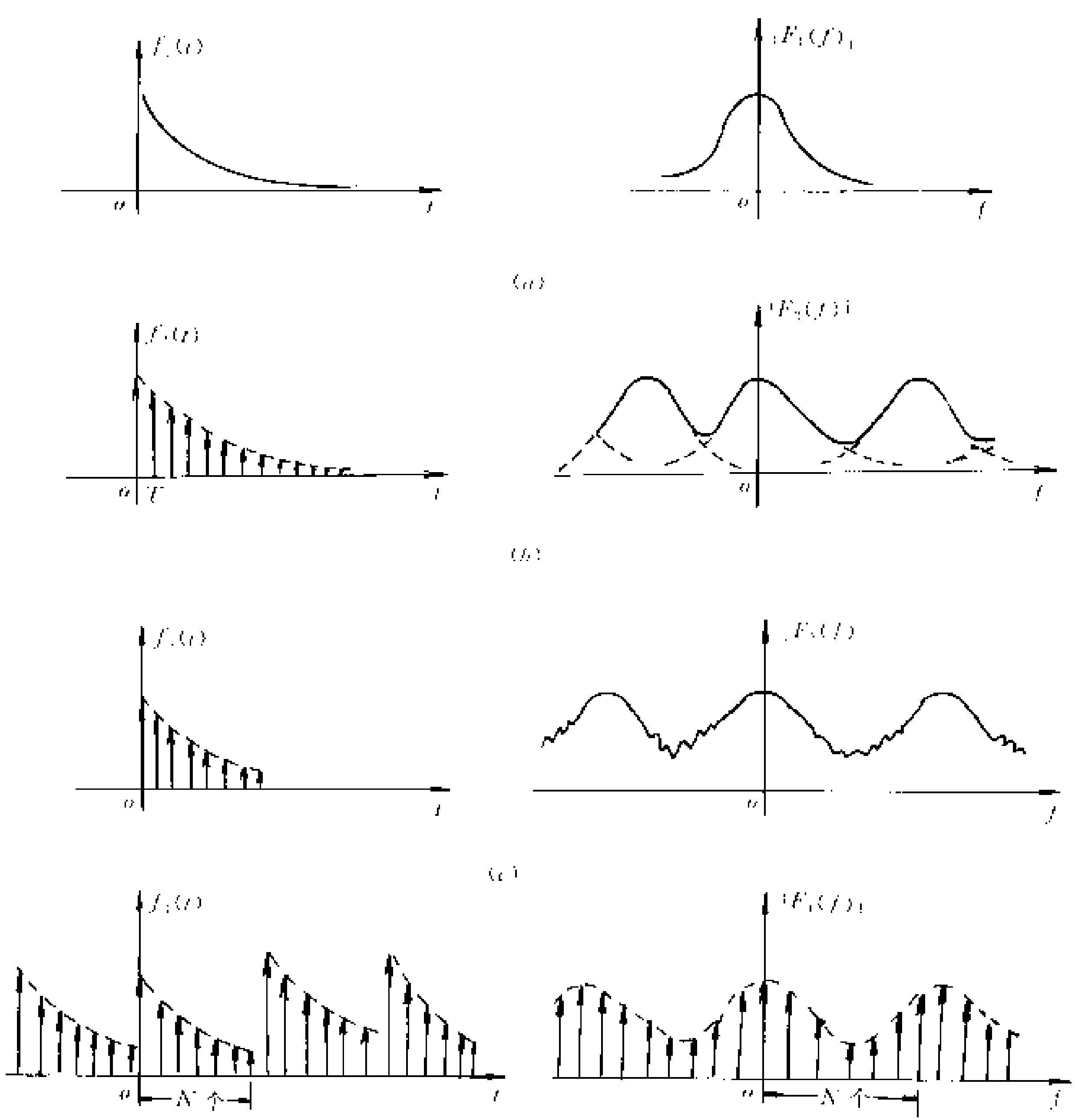
幅度谱以$\omega = \pi$为对称轴。

结论：离散序列的频谱是连续的，且是周期的。

傅里叶变换的几种形式

以时间为自变量的信号 ⟷ 傅里叶变换对 ⟷ 以频率为自变量的频谱函数

时域信号	频谱	变换名称
非周期连续信号	连续频谱	傅里叶变换
周期性连续信号	离散频谱	傅里叶级数
离散信号	周期性连续频谱	序列的傅里叶变换
⇩	⇩	
周期性离散信号	周期性离散频谱	离散傅里叶变换



离散傅里叶变换

离散时间系统的频率响应

定义：系统频率响应函数即系统单位样值响应的傅里叶变换

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow \delta(n) * h(n) = r(n) = h(n)$$

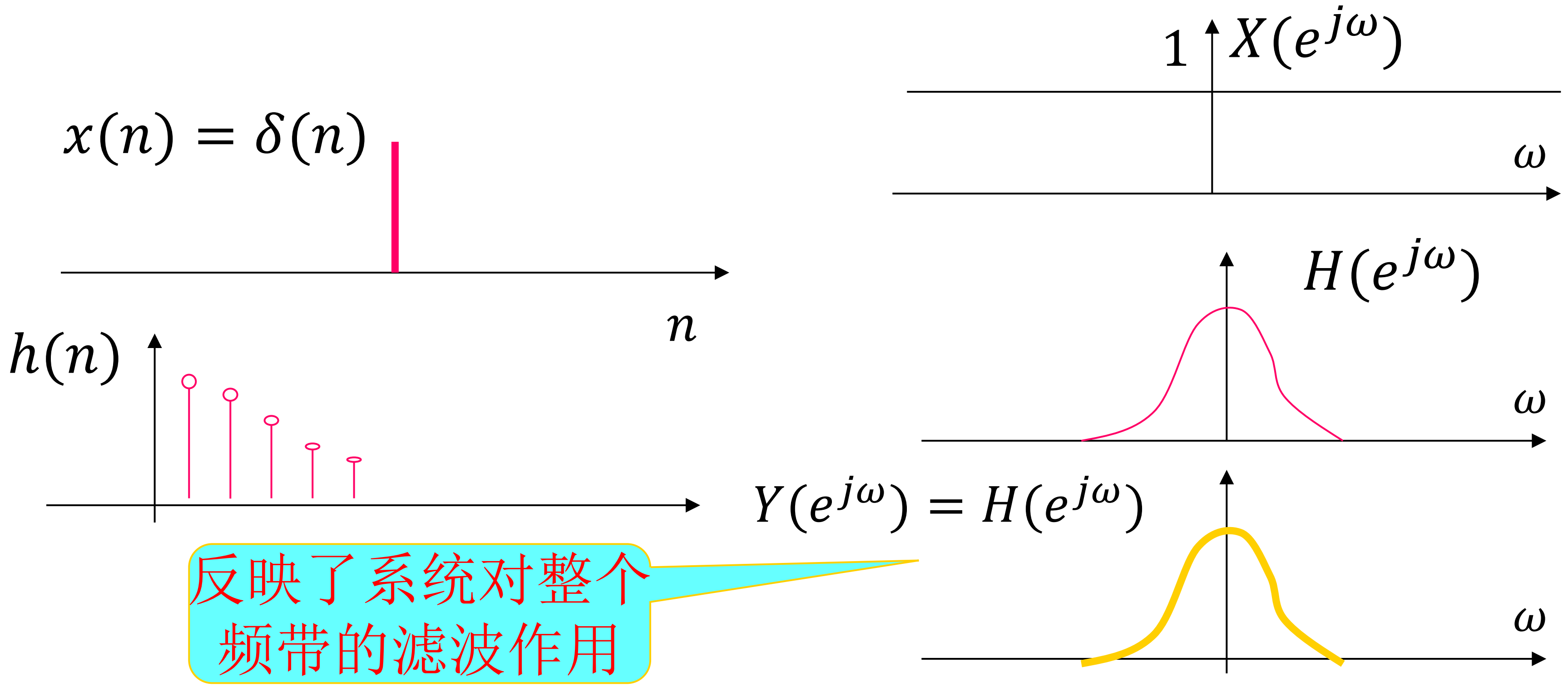
- 当$\boldsymbol{h(n)}$已知时，下列表达式表示系统频率响应函数，

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

- $H(e^{j\omega})$是以 $\boldsymbol{h(n)}$ 为加权系数，对各次谐波进行加权或改变的情况。

物理解释

- 系统的激励是$\boldsymbol{\delta(n)}$时，它的频谱覆盖了$-\infty \le \boldsymbol{\omega} \le \infty$的范围，于是系统的单位样值响应$\boldsymbol{h(n)}$可以看成对各次谐波滤波的总效果



系统频率响应函数

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\phi(\omega)}$$

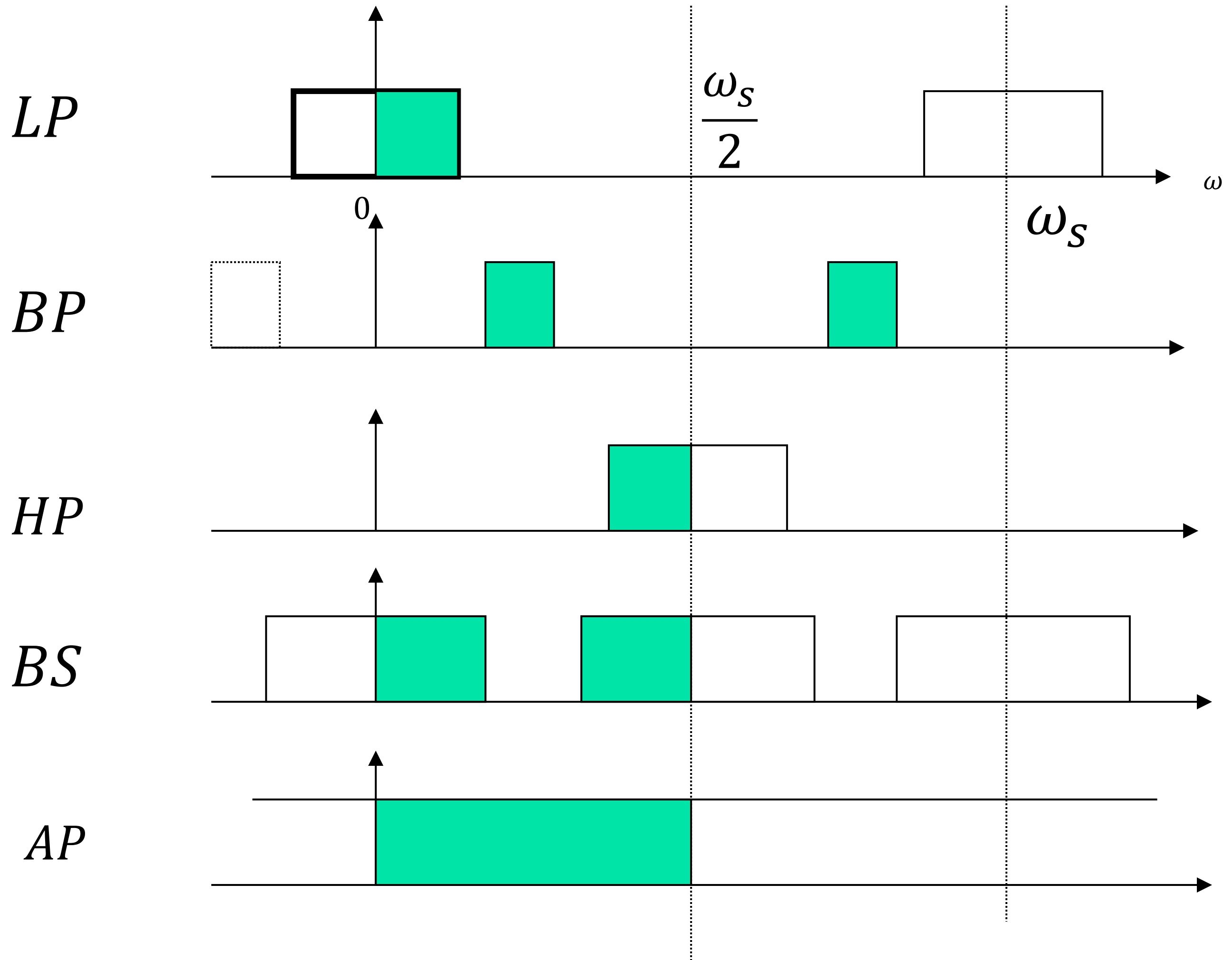
滤波器的幅频特性是$\left|H(e^{j\omega})\right|$，且对信号有相移作用$\phi(\omega)$。

因为$e^{j\omega}$是周期的，所以$H(e^{j\omega})$也是周期的，

其周期为重复频率为2π。

思考：周期性的物理含义是什么？

各种不同类型的滤波器



$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

系统频率响应的几何确定法

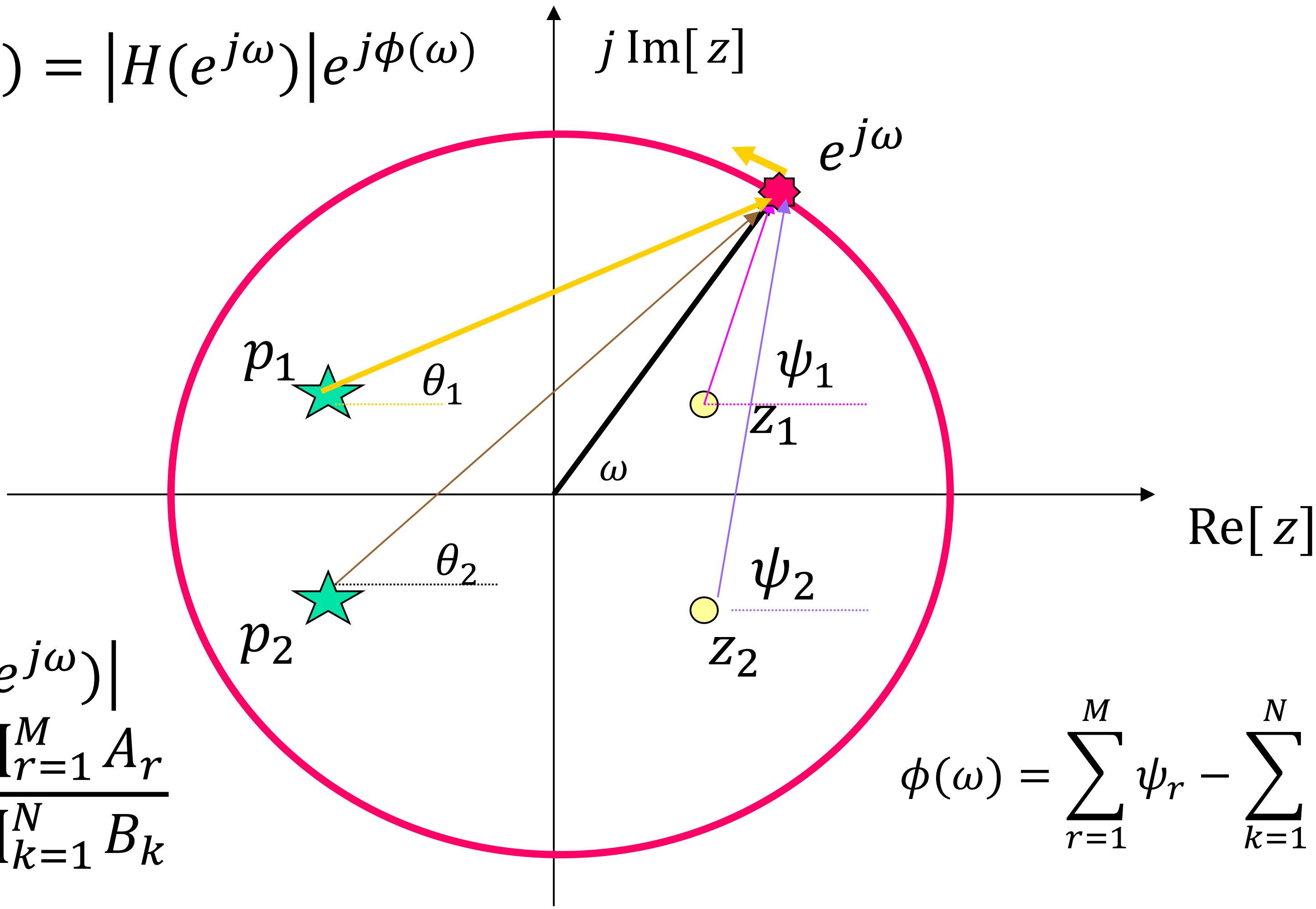
$$H(z)=\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}=\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\phi(\omega)}$$

$$e^{j\omega}-z_r=A_r e^{j\psi_r} \qquad e^{j\omega}-p_k=B_k e^{j\theta_k}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{\prod_{r=1}^{M}A_r}{\prod_{k=1}^{N}B_k} \qquad \phi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k$$

系统频率响应的几何确定法（续）

$$H(z) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\phi(\omega)}$$



$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\prod_{r=1}^{M} A_r}{\prod_{k=1}^{N} B_k}$$

$$\phi(\omega) = \sum_{r=1}^{M} \psi_r - \sum_{k=1}^{N} \theta_k$$

零极点对系统频率响应的影响

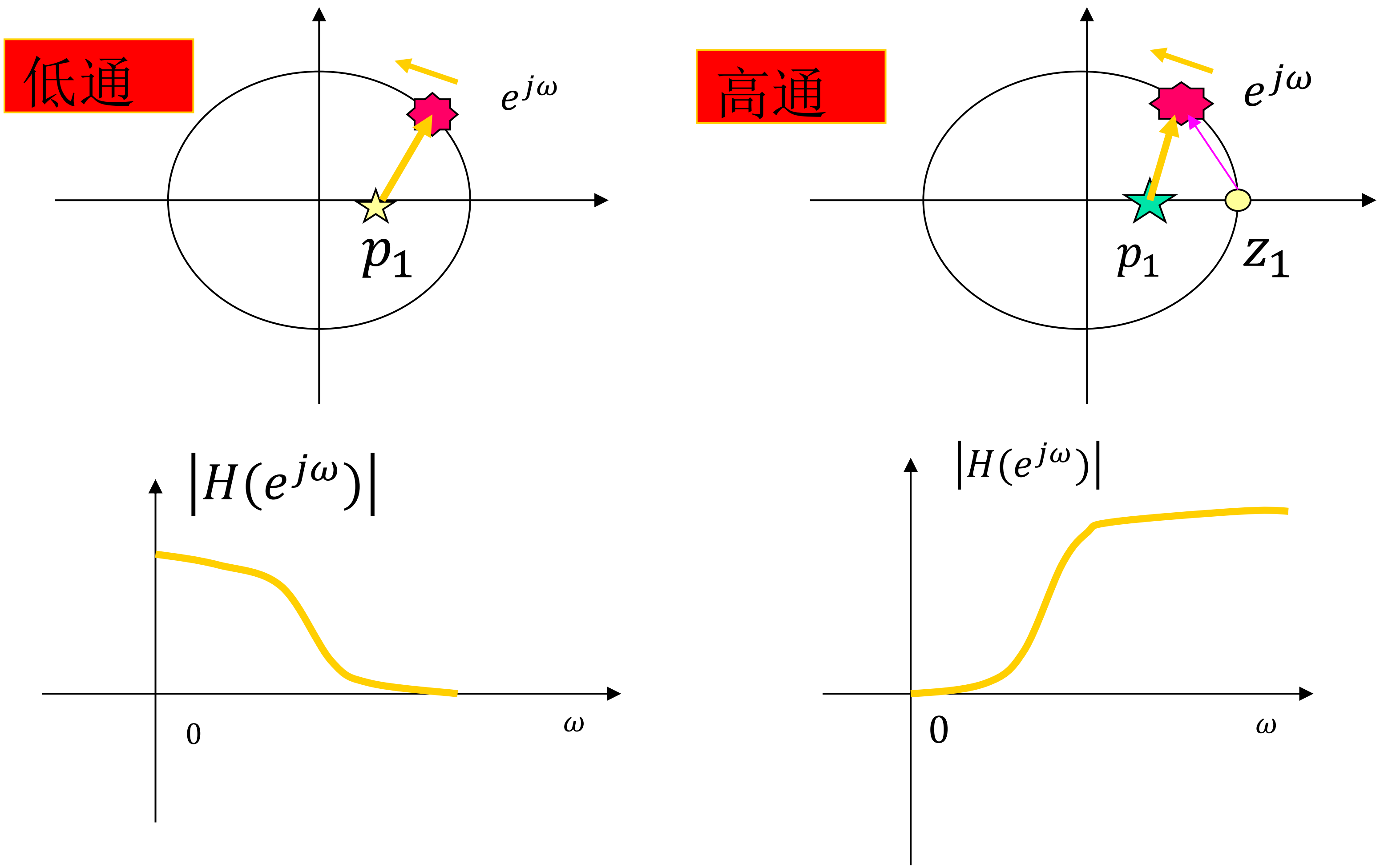
由几何法可以看出：

（1）$z=0$处的零极点对幅频特性$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$没有影响，只对相位有影响

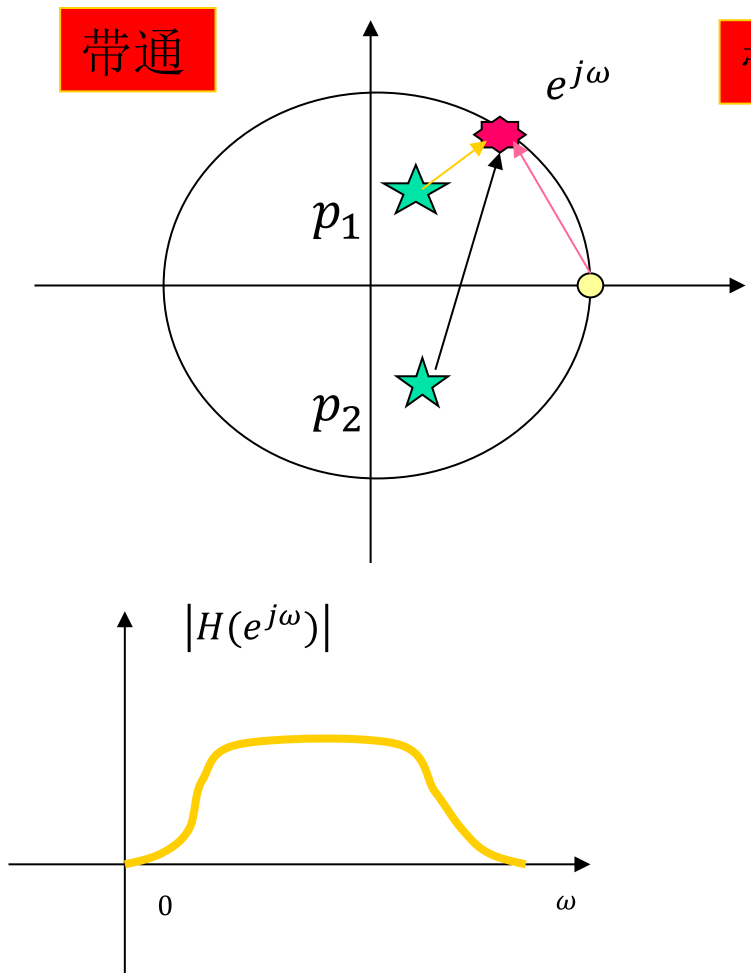
（2）当旋转某个极点p_i附近时，例如在同一半径上时，B_i较短，则$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$在该点应当出现一个峰值， B_i越短，p_i附近越尖锐。若p_i落在单位圆上，则 $B_i=0$ ，则 p_i 处的峰值趋于无穷大。

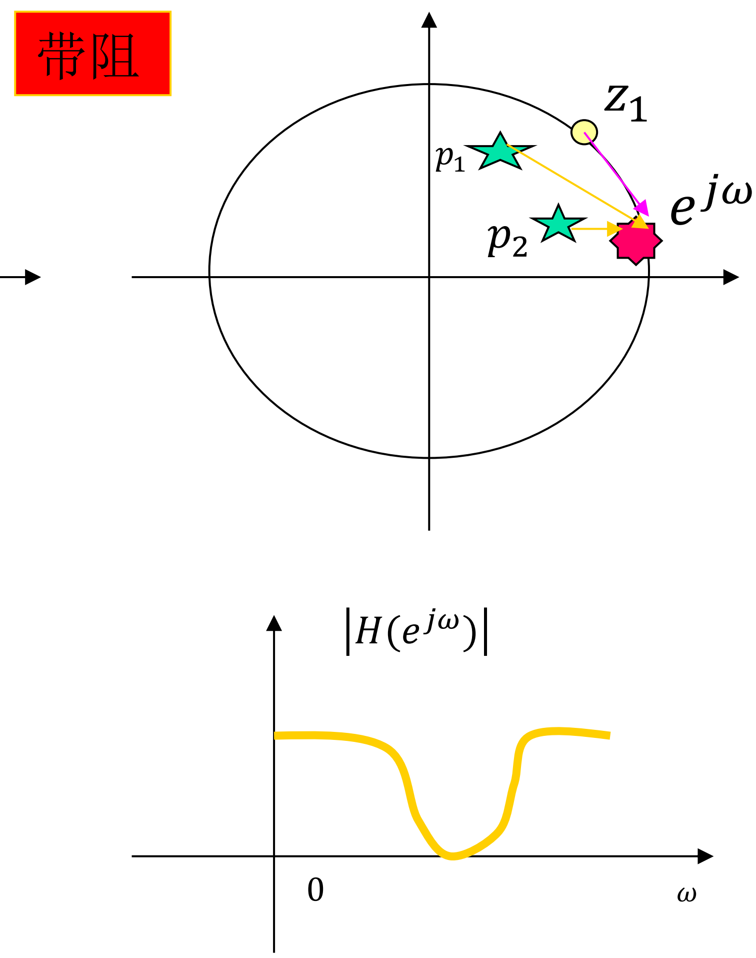
（3）对于零点则其作用与极点的作用正好相反。

低通、高通滤波器的零极点分布



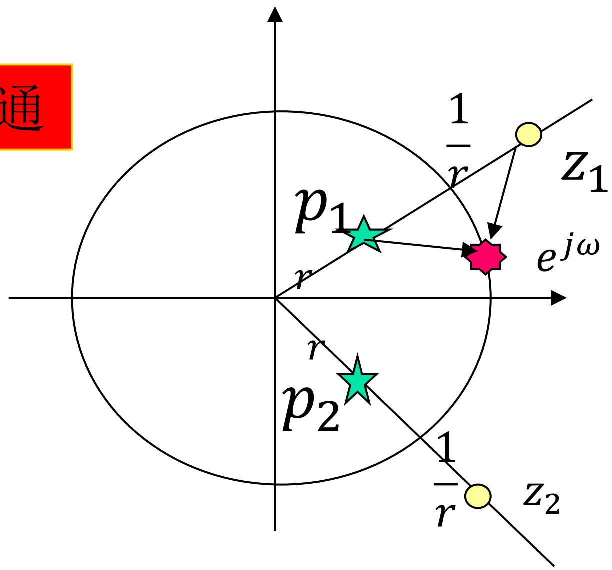
带通、带阻滤波器的零极点分布

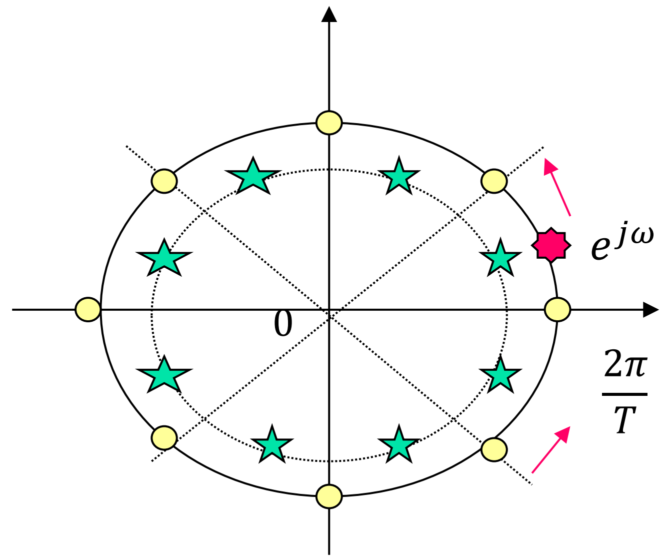


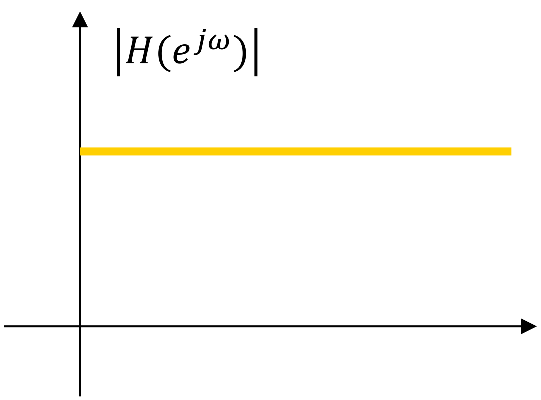


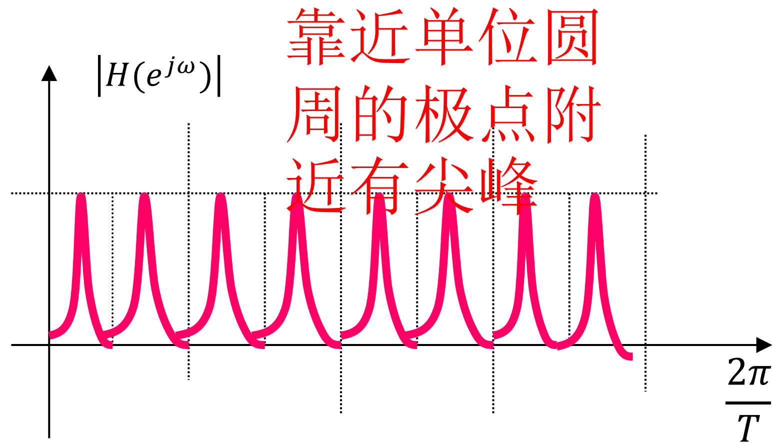
全通滤波器的零极点分布

全通



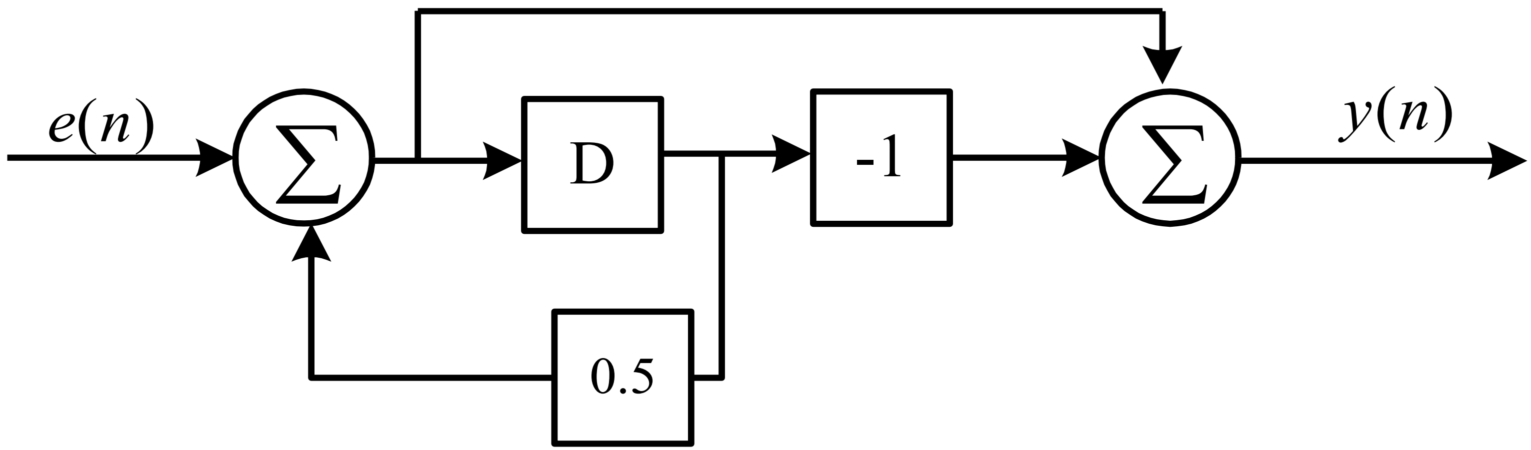






例题

某线性时不变离散因果系统的模拟框图如下图所示：



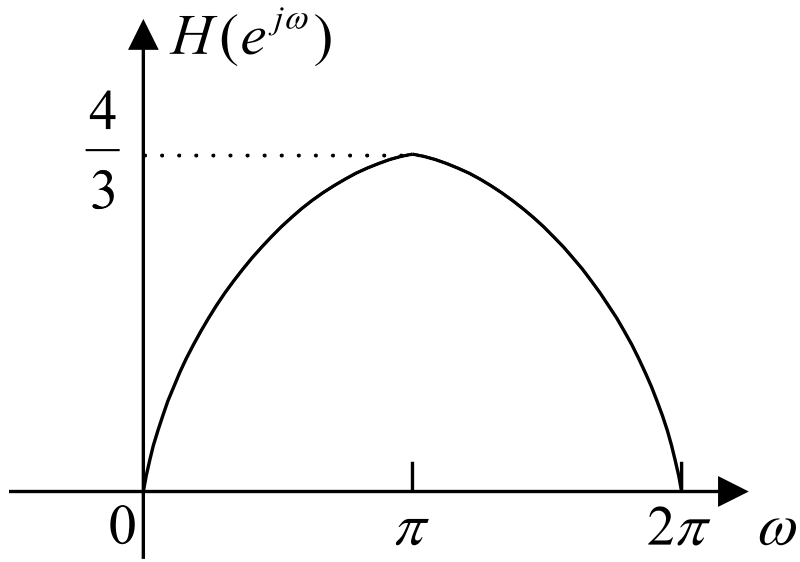
（1）写出描述该系统的差分方程，求系统函数；

（2）判定系统的稳定性。粗略画出系统的幅频特性曲线；

（3）若$e(n)=\varepsilon(n)$，求系统的零状态响应。

答案：（1）$y(n+1)-\frac{1}{2}y(n)=e(n+1)-e(n)$,　　$H(z)=\dfrac{z-1}{z-\frac{1}{2}}$

（2）此为因果系统，极点在单位圆内，故系统稳定。幅频曲线如下所示：



（3）$Y_{zs}(z)=H(z)E(z)=\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$　$\therefore y_{zs}(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\varepsilon(n)$

小结

(1)用z变换求离散系统的响应，跟初始条件的给法有关。

(2)根据系统函数的极点分布可以判断因果系统的稳定性。

(3)混合系统的系统函数与单位函数响应。

(4)序列的傅里叶变换是单位圆上的z变换。

(5)系统的频率响应特性、应用。

课外作业

作业:8.17(3), 8.18(5), 8.20, 8.23(1)

小结

(1)序列的傅里叶变换是单位圆上的z变换。

(2)系统的频率响应特性、应用。

作业: 8.20, 8.23（1）