信号与系统

第三章:连续信号的正交分解

基本要求：

- 掌握**周期**信号的频谱分析方法，即**傅里叶级数**； (1)
- 掌握**非周期**信号频谱密度函数的概念，即**傅里叶变换**; (2)
- 掌握周期信号与非周期信号的频谱特点； (2)
- 熟记典型信号的傅里叶变换;
- 掌握傅里叶变换的性质。 (3)

重点与难点：

- 周期信号的傅里叶级数；
- 非周期信号的傅里叶变换；
- 信号的频谱；
- 傅里叶变换的性质及其应用。

上章回顾

- 零输入响应、零状态响应定义、求解
- 系统的单位冲激响应定义、求解
- 卷积的定义，性质及计算

本讲内容

- 信号的正交分解
- 周期信号的傅里叶级数

引言

线性系统分析方法，是将复杂信号分解为简单信号之和（或积分），通过系统对简单信号的响应求解系统对复杂信号的响应。

在时域法中，将信号分解为冲激信号的积分，根据系统的冲激响应通过卷积计算出系统对信号的响应。

在本章以及下一章将要介绍的频域法中，将信号分解为一系列正弦函数的和（或积分），通过系统对正弦信号的响应求解系统对信号的响应。

在进行频域法时，首要问题就是如何将信号分解为一系列正弦信号的和（或者积分）。这就是本章要讨论的信号分析问题。

频域在工程中也有很重要的意义。很多信号的特性与频域都有很重要的关系。研究频域可以得到很多具有实用价值的结论。

让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶

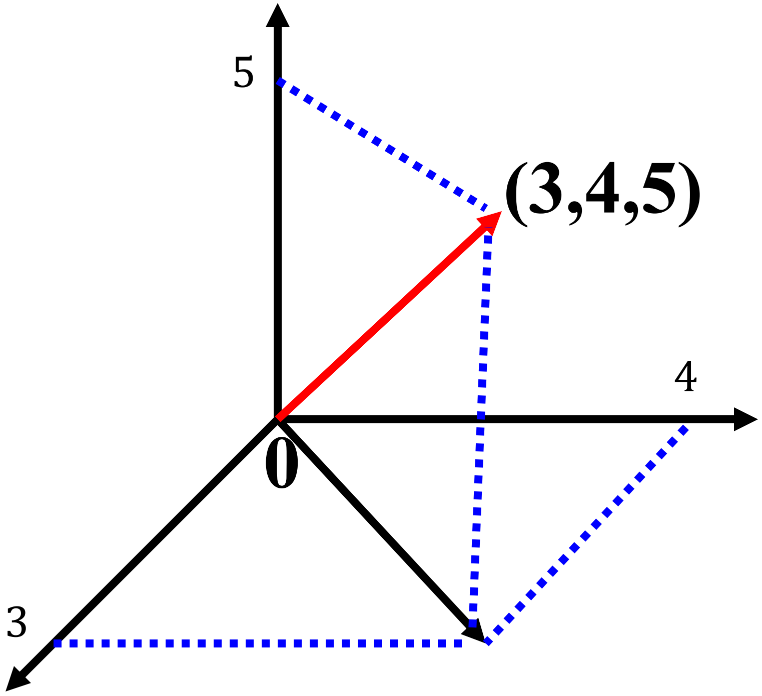
(1768-1830) – 法国数学家、物理学家

- 十八世纪中叶是否有用信号都能用复指数的线性组合来表示引发激烈争论
- 1759年拉格朗日反对发表
- 1807年提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”
- 1822年首次发表“热的分析理论”
- 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件

- 十七世纪微积分诞生后，**无穷级数**作为一种工具在数学的发展中起到了巨大的推动作用。复杂的代数函数和超越函数，需要把它们展开成无穷级数并逐项微分、积分，才能处理他们。
- 除了涉及微积分的原因外，还与函数的插值有关。为适应航海、天文学和地理学的发展，要求三角函数表、对数函数表和航海表的插值有较大的精确度。
- 由于天文现象的周期性，**三角级数**广泛应用于天文理论研究。三角级数的插值问题可以确定行星在介于观测到的位置之间的位置。
- 1729年欧拉提出了如下的**三角级数展开式**：

$$y(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\sin 2k\pi x+A_k(\cos 2k\pi x-1)\}$$

矢量的正交分解



记：

$V = [3,4,5]$

$V_1 = [1,0,0]$

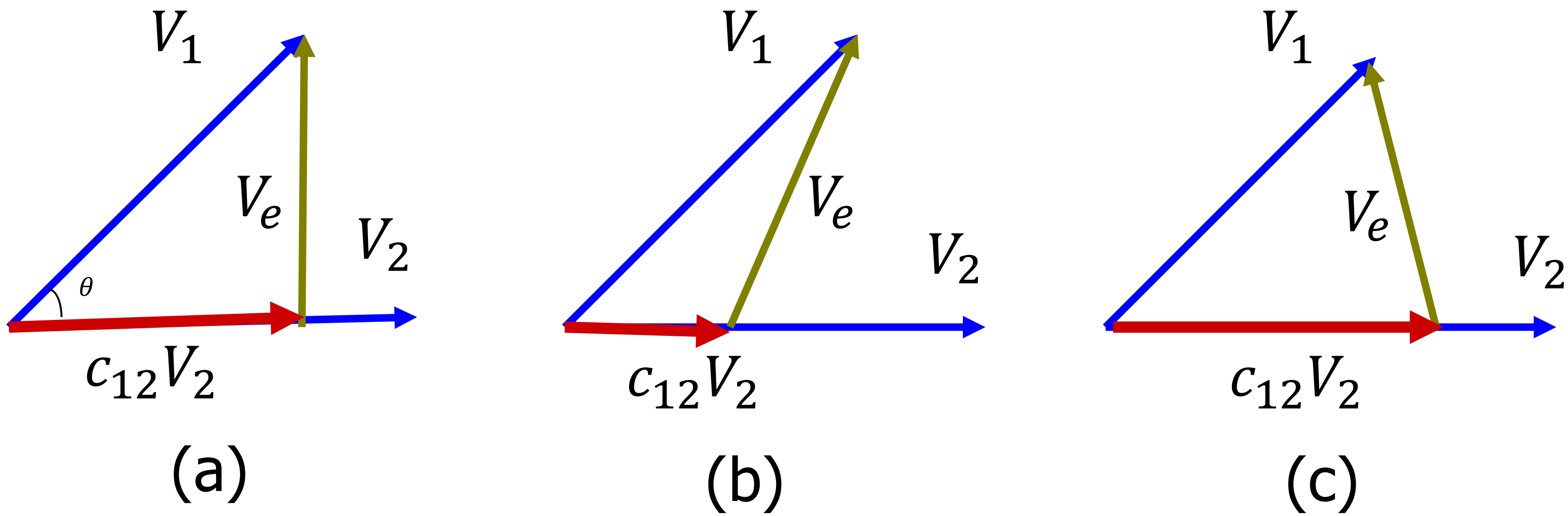
$V_2 = [0,1,0]$

$V_3 = [0,0,1]$

$$[3,4,5] = 3[1,0,0] + 4[0,1,0] + 5[0,0,1]$$

矢量的投影

矢量 V_1 在另一个矢量 V_2 上的分量为 V_1 在 V_2 上的投影。



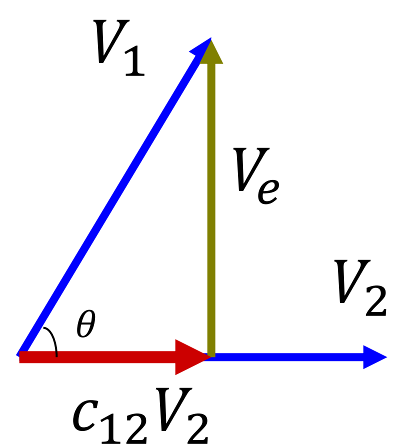
记 V_e 为 V_1 与它在 V_2 上投影的差，称为误差，即

$$V_1 - c_{12}V_2 = V_e$$

矢量的垂直投影

现在求误差 V_e 最小的情况下 c_{12} 的值。显然这时有

$$|c_{12}V_2| = |V_1|\cos\theta = \frac{|V_1||V_2|\cos\theta}{|V_2|} = \frac{V_1\cdot V_2}{|V_2|}$$



$$c_{12} = \frac{V_1\cdot V_2}{|V_2|^2} = \frac{V_1\cdot V_2}{V_2\cdot V_2}$$

矢量的内积

上式还可以通过求误差矢量长度的平方最小来求：

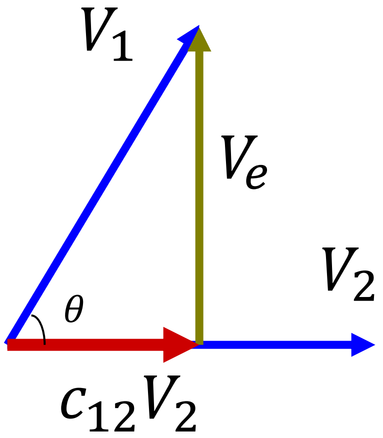
$$|V_e|^2 = |V_1 - c_{12}V_2|^2$$

$$\frac{d}{dc_{12}}|V_e|^2 = \frac{d}{dc_{12}}|V_1 - c_{12}V_2|^2 = 0$$

矢量的正交

c_{12}表示V_1和V_2互相接近的程度。

当$V_1 \cdot V_2 = 0$时，$c_{12} = 0$ 称V_1和V_2相互垂直（**正交**）。



正交矢量 ⟹ **正交矢量集** ⟹ **完备正交矢量集**

正交矢量集

- 正交矢量集的定义：

对于矢量集$\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$，具有如下的关系：

$$\begin{cases} U_m \cdot U_m = K_m \\ U_l \cdot U_m = 0 \ \ (l \neq m) \end{cases}$$

我们称该矢量集为正交矢量集，特别的：当$K_m = 1$时，称为：归一化正交矢量集

完备的正交矢量集

- 完备的正交矢量集的定义：

假设矢量集$\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \in U$是空间$U$中的正交矢量集，若在空间$U$中找不到任何一个非零矢量$U_l$满足：

$$\begin{cases} U_l \cdot U_l = K_l \\ U_l \cdot U_m = 0 \ \ (l \neq m, m \in \{1, 2, \ldots, n\}) \end{cases}$$

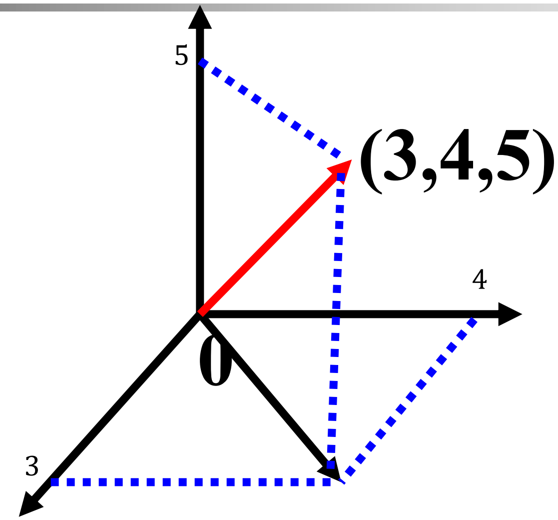
我们称该矢量集为完备的正交矢量集。

矢量的正交分解

- 矢量的正交分解：

假设矢量集$\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \in U$是空间$U$中完备的正交矢量集，则空间$U$中的任意一个矢量$A$，均可分解为：

$$A = C_1U_1 + C_2U_2 + \cdots + C_nU_n$$



(1) 基之间是什么关系？ 正交 ⟹ 正交函数

(2) 为什么是三个基？ 完备 ⟹ 完备正交函数集

(3) 在三个基上的坐标如何得到？ 正交分解 ⟹ 函数正交分级（级数）

实函数的投影和内积

考虑两个定义在 (t_1, t_2) 上的实函数 $f_1(t), f_2(t)$

定义函数投影： $c_{12}f_2(t) \qquad (t_1 < t < t_2)$

则投影误差：$\varepsilon = f_1(t) - c_{12}f_2(t)$

均方误差为：

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f_1(t) - c_{12}f_2(t)]^2 dt$$

$$\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dc_{12}}[f_1^2(t) - 2c_{12}f_1(t)f_2(t) + c_{12}^2 f_2^2(t)]dt$$

令$\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}} = 0$，可解的：$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt}$

定义函数内积：$f_1(t) \cdot f_2(t) = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt$，则

$$c_{12} = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_2 \cdot f_2}$$

实函数的正交

若 $c_{12}=0$ 则称实函数 $f_1(t)$与$f_2(t)$在区间 (t_1,t_2) 上正交，即：

$$f_1\cdot f_2=\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)dt=0$$

问题1：$sin(t)$与$cos(t)$在区间$(0,2\pi)$上正交吗?

问题2：$sin(t)$与$cos(t)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上正交吗?

提示：倍角公式 $sin(2t)=2sin(t)cos(t)$

函数的正交分解

任意函数可表示为完备正交函数集中的分量之和:

$$f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \ldots + c_i g_i(t) + \cdots = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i\, g_i(t)$$

由均方误差最小准则，系数 c_i 应满足：

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt} \qquad \left(c_i = \frac{V \cdot V_i}{V_i \cdot V_i}\right)$$

复变函数的正交

上述对实函数的讨论可以扩展到复变函数，只要将方均误差中误差函数的平方改为误差函数的模的平方。这样

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2{}^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t) dt}$$

两复变函数正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1{}^*(t) f_2(t) dt = 0$$

其他定义和结论可类似得到。

正交函数集举例

已知余弦函数集$\{\cos t, \cos 2t, \cdots, \cos nt\}$（$n$为整数）

(1)证明该函数集在区间$(0,2\pi)$内为正交函数集

(2)该函数集在区间$(0,2\pi)$内是完备正交函数集吗？

(3)该函数集在区间$(0,\pi/2)$内是正交函数集吗？

$$\int_0^{\pi/2} \cos it \cos rt\,dt = \frac{1}{i^2 - r^2}\left[i \sin\frac{i\pi}{2}\cos\frac{r\pi}{2} - r\cos\frac{i\pi}{2}\sin\frac{r\pi}{2}\right]$$

- 结论：
  - 一个函数集是否正交，与它所在区间有关，在某一区间可能正交，而在另一区间又可能不正交。
  - 在判断函数集正交时，是指函数集中所有函数应两两正交，不能从一个函数集中的某 n 个函数相互正交，就判断该函数集是正交函数集。

常见完备正交函数集

- 三角函数集

$$\{1, \sin(n\omega t), \cos(n\omega t)\} \qquad n \in N$$

- 指数函数集

$$\{e^{nj\omega t}\} \qquad n \in Z$$

- 沃尔什函数集
- 小波函数集

周期信号的三角傅里叶级数

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_1+T} \cos^2(n\Omega t)dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \sin^2(n\Omega t)dt = \frac{T}{2} \\ \int_{t_1}^{t_1+T} \cos(m\Omega t)\cos(n\Omega t)dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \sin(m\Omega t)\sin(n\Omega t)dt = 0，m \neq n \\ \int_{t_1}^{t_1+T} \sin(m\Omega t)\cos(n\Omega t)dt = 0，m、n\text{为任何整数} \\ \text{其中}T = \frac{2\pi}{\Omega}\text{为上述三角函数的公共周期，}m、n\text{均为正整数} \end{cases}$$

对于任何一个周期为T的周期信号$f(t)$，在区间$(t_1，t_1+T)$内，都可以表示为：

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\Omega t) + b_n\sin(n\Omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos(n\Omega t + \phi_n) \end{aligned}$$

其中$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$，

$$\phi = -\arctan(\frac{b_n}{a_n})$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

周期信号的三角傅里叶级数（续）

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos(n\Omega t)dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} \cos^2(n\Omega t)dt} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos(n\Omega t)dt \\ b_n = \dfrac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin(n\Omega t)dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} \sin^2(n\Omega t)dt} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin(n\Omega t)dt \end{cases}$$

其中，$a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)dt$，

则直流分量$\overline{f(t)} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)dt = \dfrac{a_0}{2}$

狄利克雷条件：

1. 在一周期内，函数绝对可积，即 $\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T} |f(t)|dt$ 应为有限值
2. 在一周期内，函数$f(t)$的极值数目为有限；
3. 在一周期内，函数$f(t)$连续，或者具有有限个间断点

电子技术中的周期信号大都能满足该条件，因此以后除非有需要，一般不作特别说明

复指数形式 $\{e^{jn\Omega t}\}$, $n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{jn\Omega t}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n\,e^{jn\Omega t}}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\Omega t}\,dt$$

$$\dot{A}_n=2c_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)e^{-jn\Omega t}\,dt \qquad \dot{A}_n=A_n e^{j\phi_n}$$

- **引入了负频率变量，没有物理意义，只是数学推导；**
- **c_n 一般是复函数，称为复数振幅；** $c_n=|c_n|e^{j\varphi_n}$

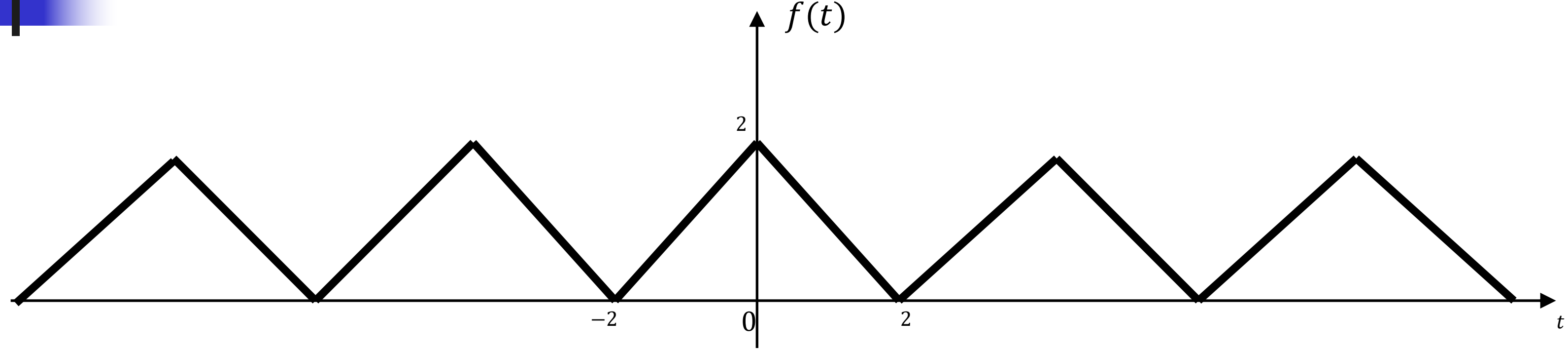
三种傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\,\Omega t+b_n\sin n\,\Omega t)$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\phi_n)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{jn\Omega t}$$

例1 计算下列周期三角形脉冲的傅里叶级数展开式。

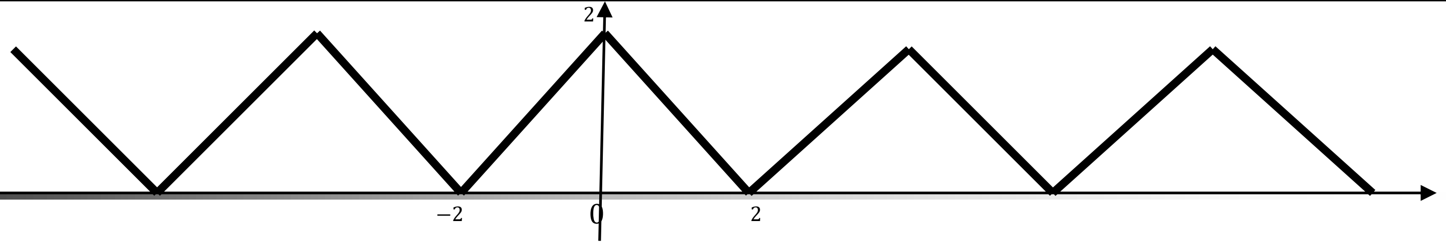


解： $T=4,\ \Omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_T f(t)\,dt=\frac{1}{2}\times 2\int_{-2}^{0}(t+2)dt=2$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(t)\sin n\Omega t dt\qquad=0$$



$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\,\Omega\,t dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\cos n\,\Omega t dt$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\int_{-2}^{0}(t+2)\cos\frac{n\pi t}{2}dt$$

$$= \frac{2}{n\pi}(t+2)\sin\frac{n\pi t}{2}\Big|_{-2}^{0} - \frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi t}{2}dt$$

$$= (\frac{2}{n\pi})^2\cos\frac{n\pi t}{2}\Big|_{-2}^{0} \qquad = \begin{cases} 0 & ,n\text{为偶数} \\ \dfrac{8}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{n^2} & ,n\text{为奇数} \end{cases}$$

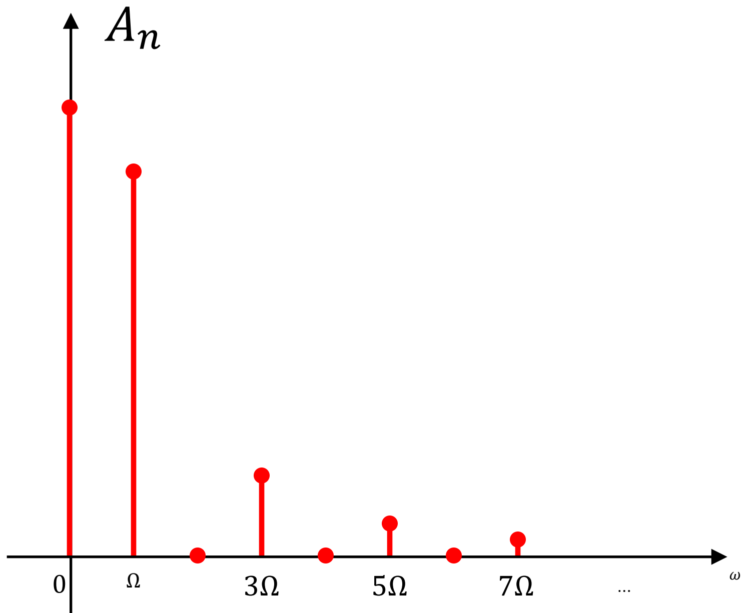
$$f(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2}(\cos\Omega\,t + \frac{1}{9}\cos 3\,\Omega t + \frac{1}{25}\cos 5\,\Omega t + \ldots\ldots) \qquad (\Omega = \frac{\pi}{2})$$

频谱

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n)$$

$A_n \sim \omega$ - **幅度谱** $\phi_n \sim \omega$ - **相位谱**

$$f(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2}(\cos \Omega t + \frac{1}{9}\cos 3\Omega t + \frac{1}{25}\cos 5\Omega t + \ldots\ldots)$$



可以看到，三角脉冲波的幅度以 $\frac{1}{n^2}$ 的速率快速衰减。

周期信号频谱的特点

- 振幅频谱与相位频谱
- 单边频谱与双边频谱
- 周期信号频谱的特点
  - 离散性：不连续频谱（离散频谱）
  - 谐波性：n次谐波（n为整数）
  - 收敛性：各次谐波的振幅，总的趋势是随着谐波次数的增高而逐渐减小的；当谐波次数无限增高时，谐波分量的振幅无限趋小。从物理上来说，这体现了频宽的有限性。
- 信号的频带宽度：对于一个信号，从零频率开始到需要考虑的最高分量的频率间的这一频率范围，称为：频宽
  - 零点准则
  - 能量准则

信号的奇偶分解

对于任意信号，都可分解成奇分量和偶分量的叠加：

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)}$$

偶函数项 **奇函数项**

周期偶函数 $f(-t) = f(t)$

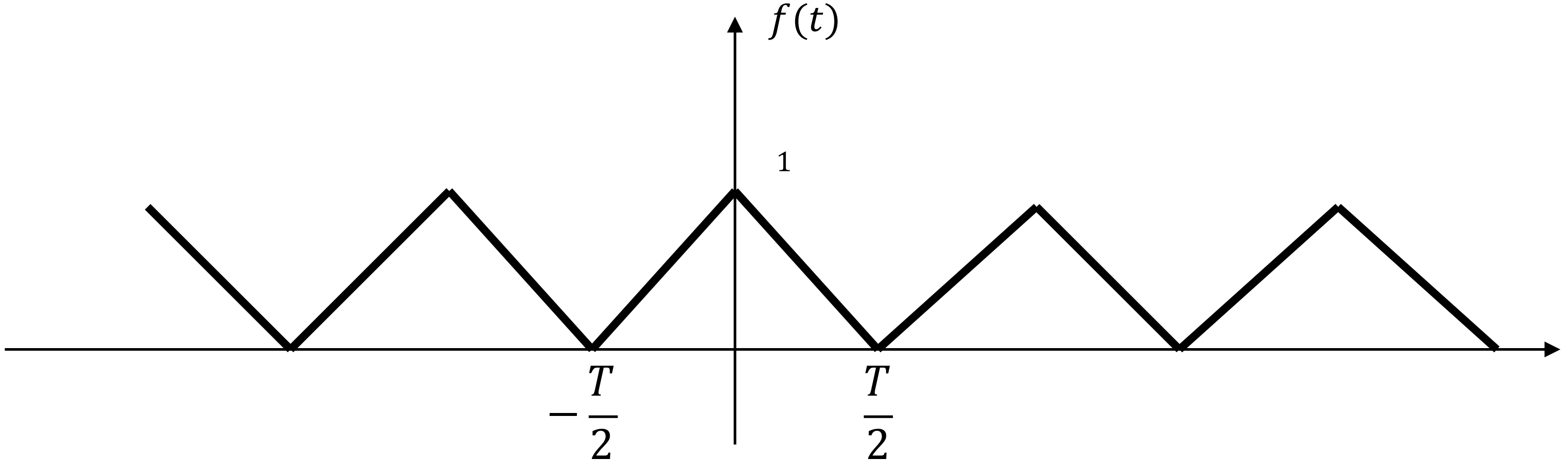
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\,\Omega\,t dt = 0$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,\Omega t$$

$$c_n = c_{-n} = \frac{1}{2}a_n = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\,\Omega\,t dt$$ **（实偶）**

$$\phi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n} = arctg0 = 0 \pm \pi$$

周期三角函数



$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}(\cos\Omega t+\frac{1}{9}\cos 3\Omega t+\frac{1}{25}\cos 5\Omega t+\ldots\ldots)$$

$$(\Omega=\frac{2\pi}{T})$$

周期奇函数 $f(-t) = -f(t)$

$$a_0 = a_n = 0$$

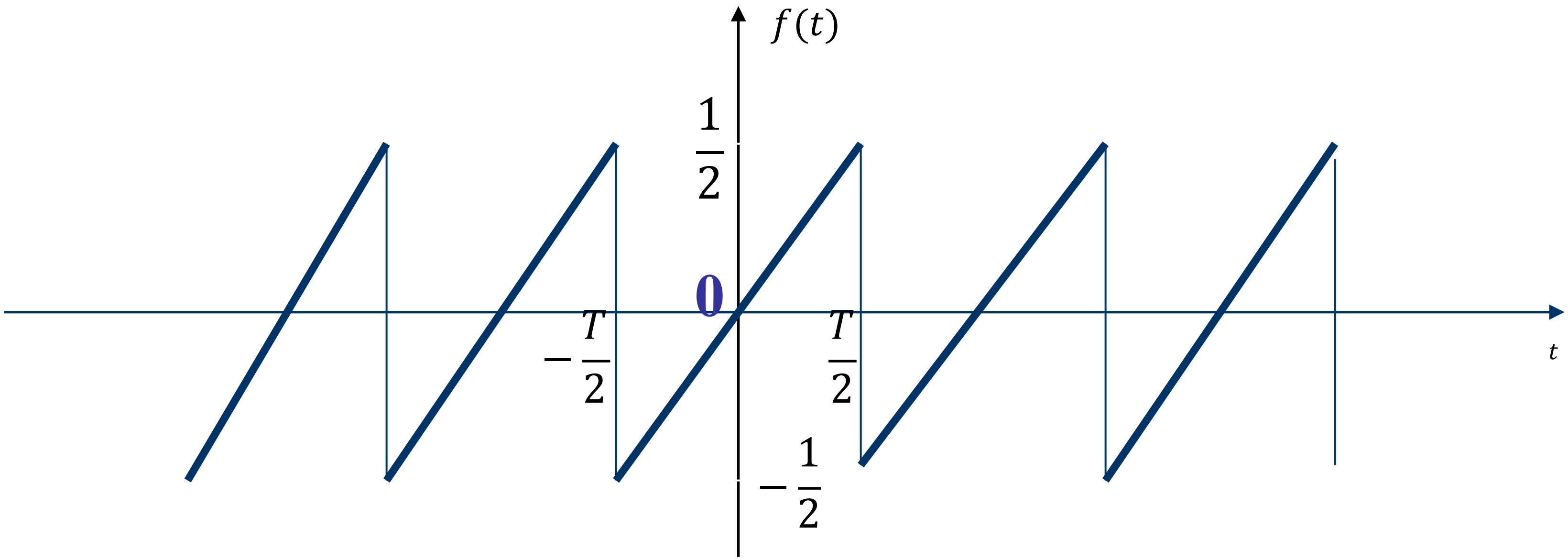
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,\Omega t$$

$$c_{\pm n} = \pm j\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\,\Omega t dt = \pm\frac{jb_n}{2}$$

实奇 ⟶ 虚奇

$$\phi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n} = \arctan\infty = \pm\frac{\pi}{2}$$

周期锯齿波



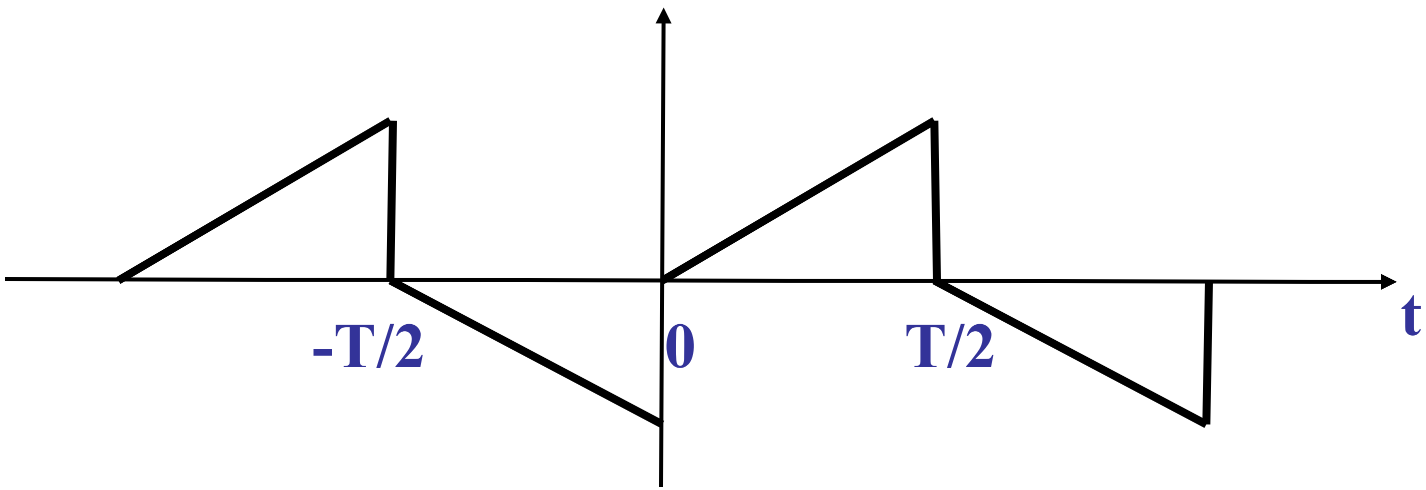
$$f(t)=\frac{1}{\pi}\left(\sin\Omega t-\frac{1}{2}\sin 2\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t-\ldots.\right)$$

$$\left(\Omega=\frac{2\pi}{T}\right)$$

奇谐函数

$$f(t+\frac{T}{2})=-f(t)$$

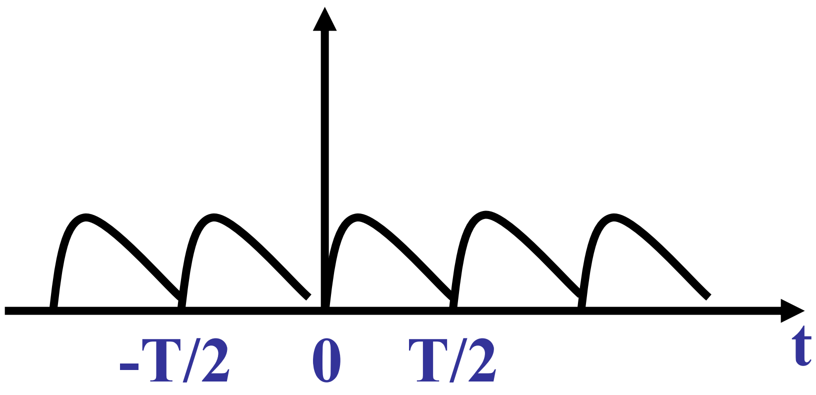
- **奇谐函数一定是周期函数，其周期为**T；
- **其任意半个周期的波形可由前半个周期波形沿横轴反褶后得到；**
- **这类函数常常有半周期是正值，半周期是负值，且正负两半周期的波形相同；**
- **奇谐函数不包含直流分量和偶次谐波，只包含奇次谐波。**



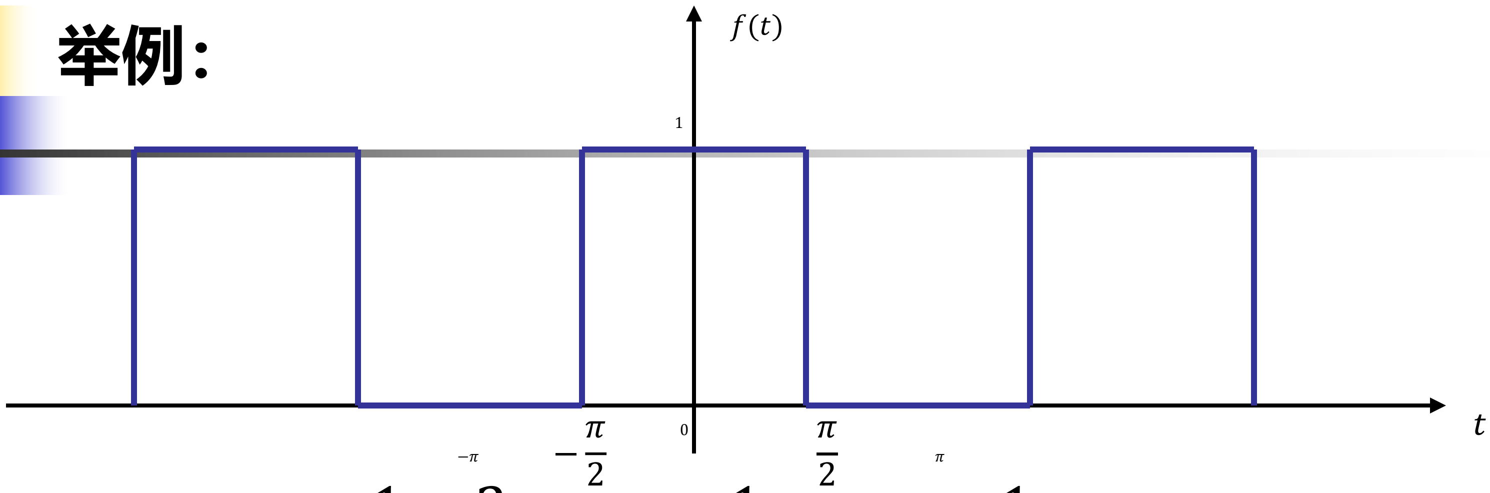
偶谐函数

$$f(t+\frac{T}{2})=f(t)$$

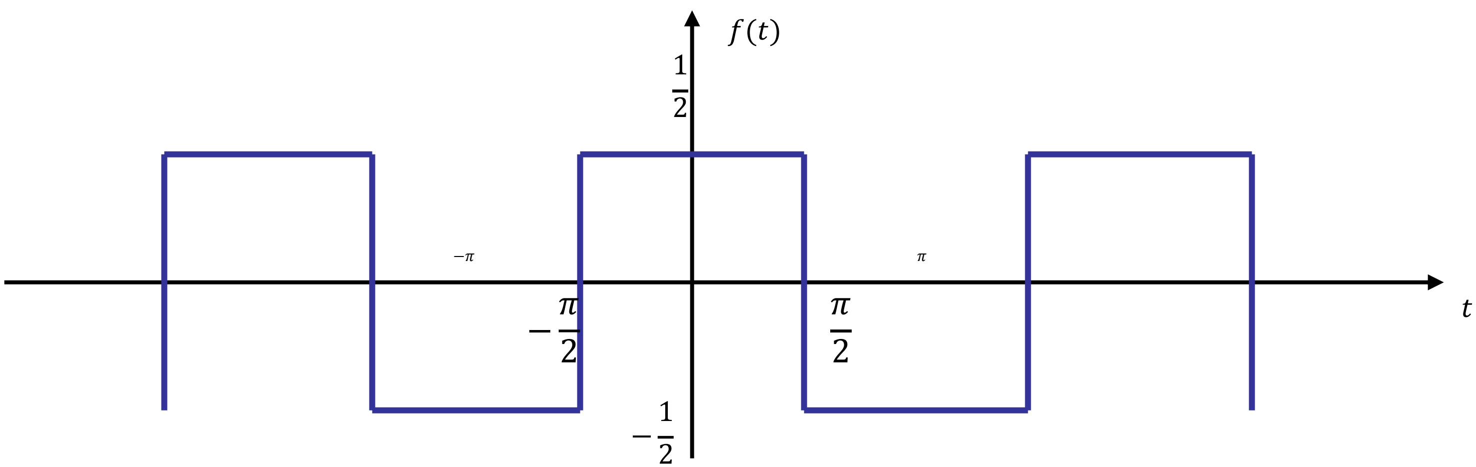
- **偶谐函数一定是周期函数，其周期为T/2;**
- **其任意半个周期的波形与前半个周期波形完全相同;**
- **偶谐函数只包含偶次谐波分量。**



举例：

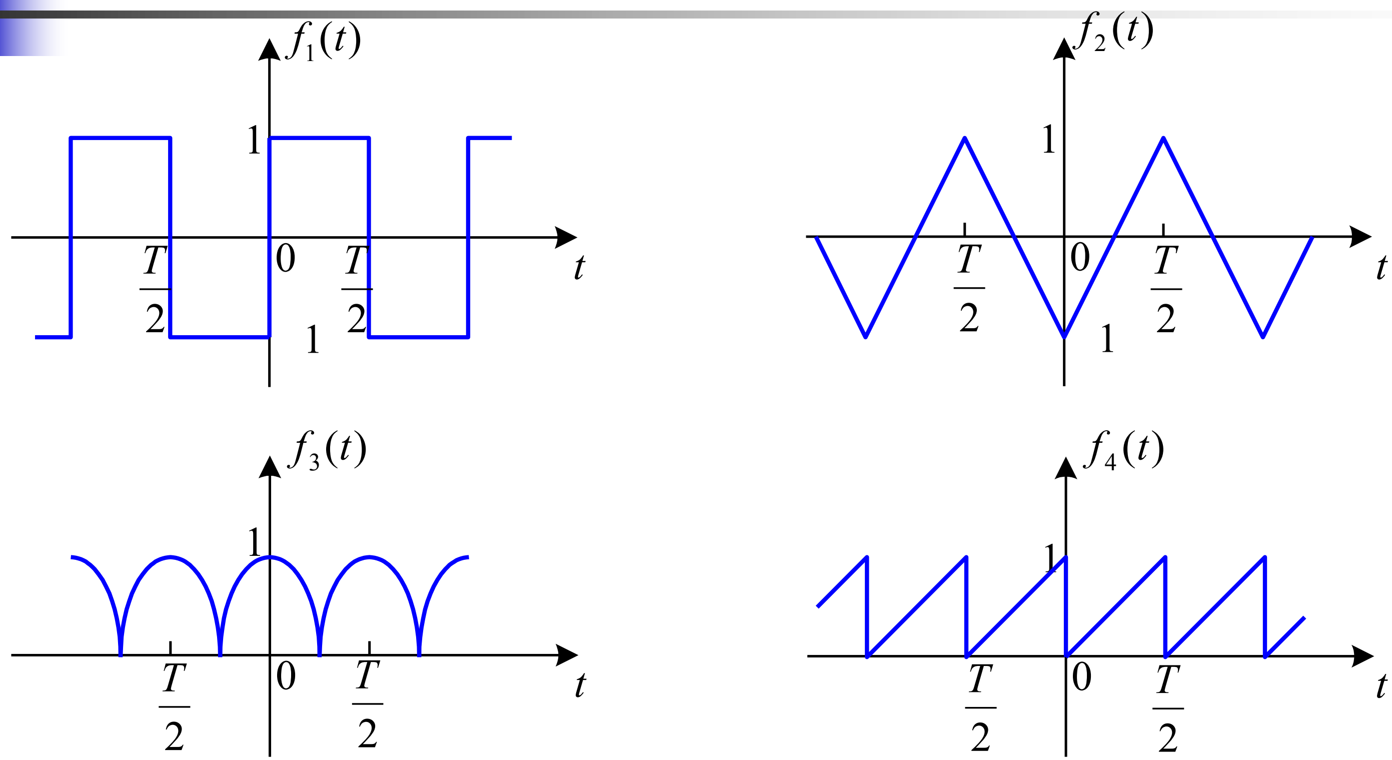


$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\cos t-\frac{1}{3}\cos 3t+\frac{1}{5}\cos 5t-\cdots)$$



$$f(t)=\frac{2}{\pi}(\cos t-\frac{1}{3}\cos 3t+\frac{1}{5}\cos 5t-\cdots)$$

练习：利用信号的对称性，定性判断下列周期信号的FS中所含的频率分量。



答案:(1)奇函数＋奇谐：只含基波和奇次谐波的正弦分量

(2)偶函数＋奇谐：只含基波和奇次谐波的余弦分量

(3)偶函数＋偶谐：只含直流和偶次谐波的余弦分量

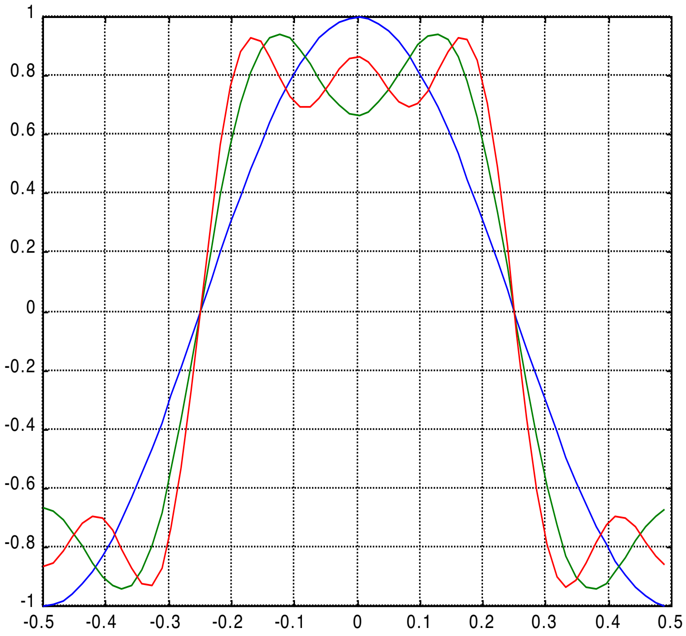
(4)偶谐：含直流和偶次谐波的分量

有限逼近与吉布斯现象

- 在实际进行信号分析时，不可能取无限次谐波项，而只能取有限项来近似地表示，从而不可避免地有误差：

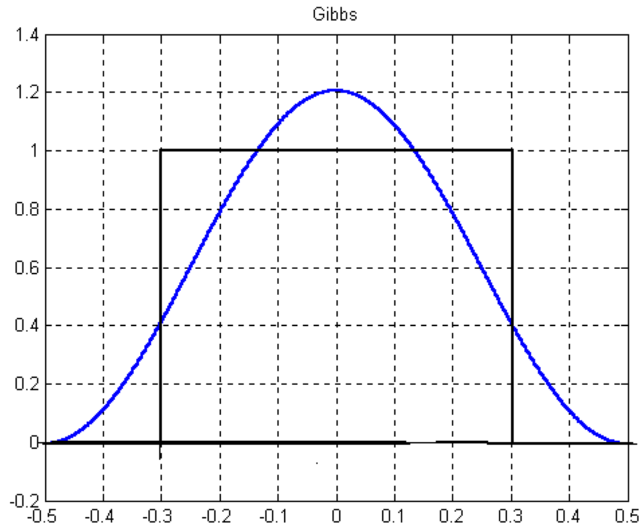
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(k\Omega t)+b_k\sin(k\Omega t)]+\varepsilon_n(t)$$

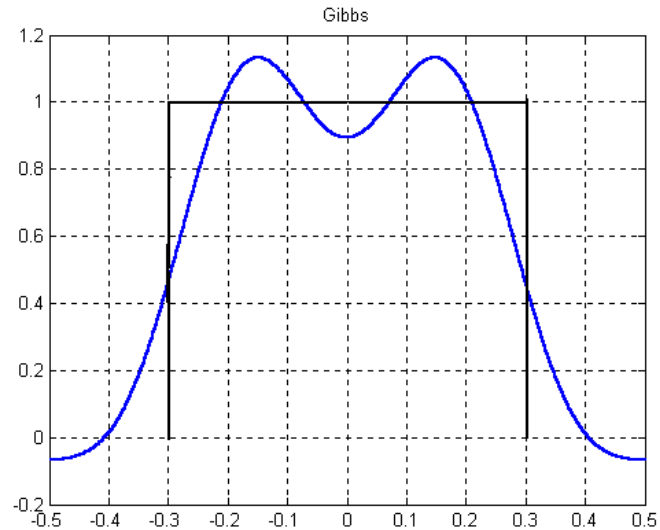
- 这一误差，随着 n 的增大而减小
- 在不连续点处，随着 n 的增大，起伏震荡的时间将缩短，但其引起的过冲值则趋于约9%的固定值，这种现象称为：吉布斯现象



对称方波有限项的傅里叶级数

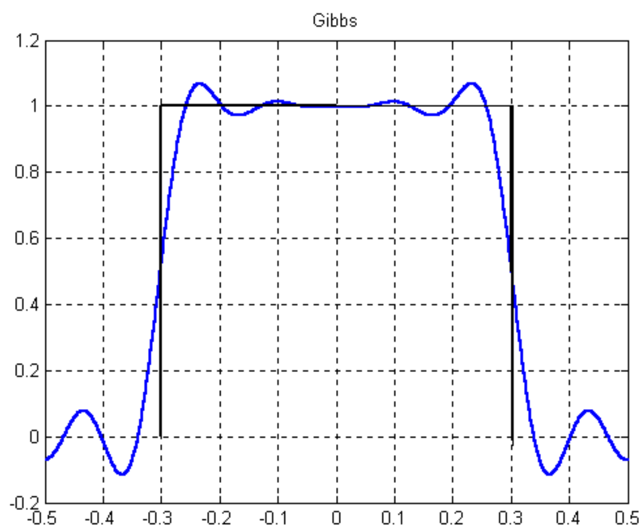
$N = 1$

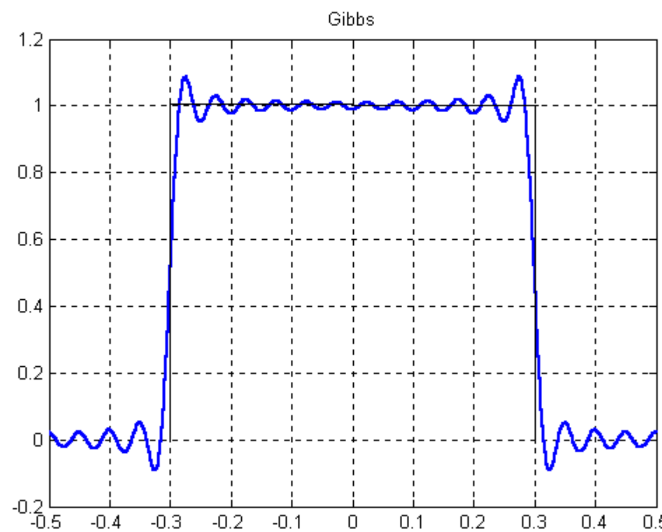




$N = 3$

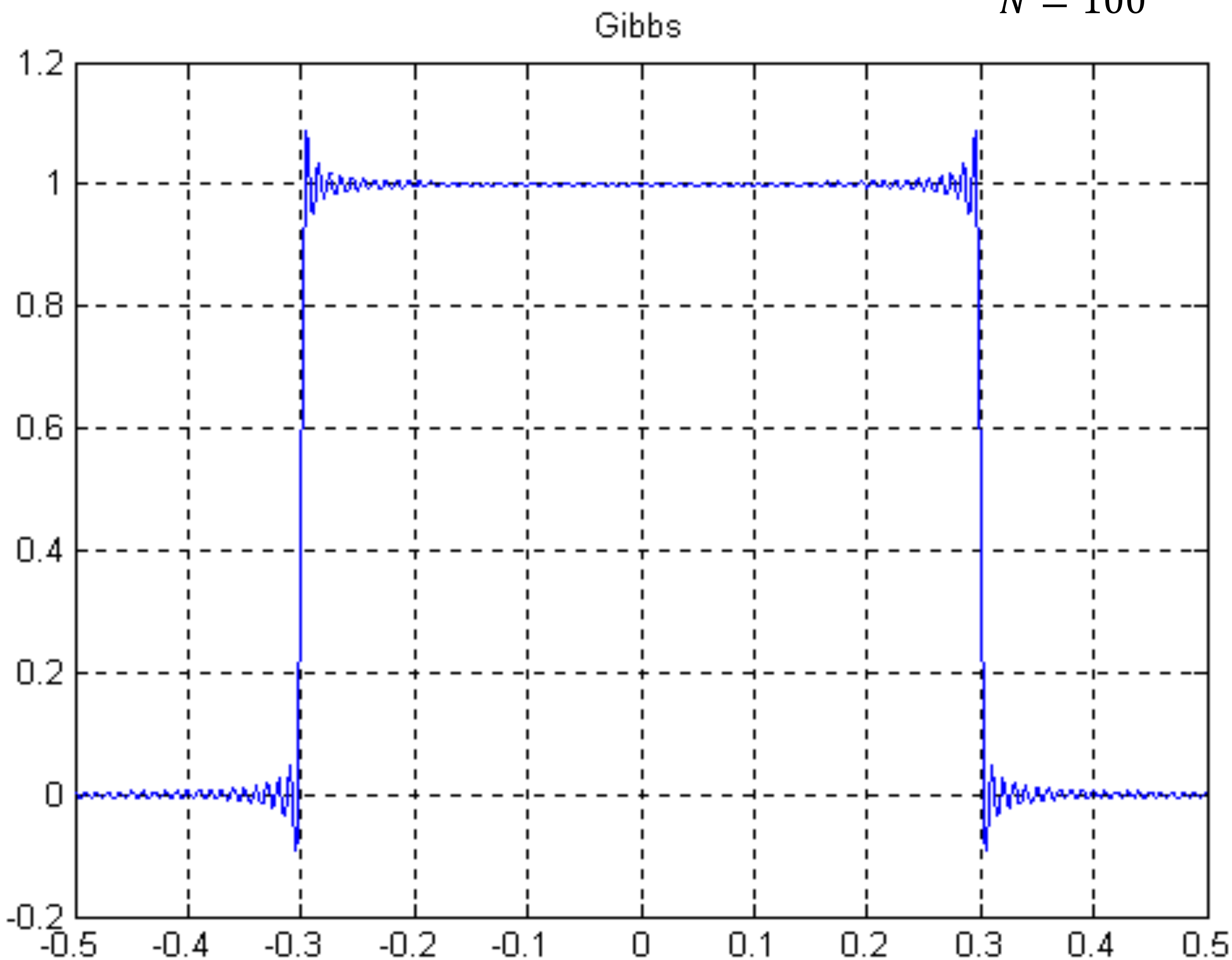
$N = 7$





$N = 19$

$N = 100$



分析：

- N越大，越接近方波，$\lim_{n\to\infty} S_N = f(t)$
- 快变信号，高频分量，主要影响跳变沿；
- 慢变信号，低频分量，主要影响顶部；
- 任一分量的幅度或相位发生相对变化时，波形将会失真；
- 有吉布斯(Gibbs)现象发生。

傅里叶级数：

从分析角度看，它是用简单函数去逼近（或代替）复杂函数；

从几何观点看，它是以一族正交函数为基向量，将函数空间进行正交分解，相应的系数即为坐标；

从物理意义上看，它将信号分解为一系列简谐波的复合，从而建立了频谱理论。

小结

- **信号的正交分解 —— 秉承的是西方哲学的思想**
- **对于连续的周期信号，可以用离散的级数表示 —— 傅里叶级数**

  比公式更重要的是。。。

课外作业

阅读: 3.1 - 3.3 预习: 3.4,3.5

作业: 3.1，3.8(1)(5)

周期信号的周期与谱线的关系

- 相邻谱线的间隔为：$\Delta\Omega=\frac{2\pi}{T}$，谱线间的间隔随周期增大相应地成反比减小，即谱线逐渐密集。
- 频率分量为：$\dot{A}_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)e^{-jn\Omega t}\,dt$，随着周期的增大，同频率分量的振幅也相应地反比减小。
- 当周期T无限增大时，谱线就无限密集，离散频谱就变成了连续频谱。
- 当周期T无限增大时，频谱的振幅无限趋小。

傅里叶积分的推导

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n e^{jn\Omega t}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\Omega t}dt\right]e^{jn\Omega t}$$

当周期T无限趋大时：$\Omega\to d\omega$，$n\Omega\to\omega$，$T=\frac{2\pi}{\Omega}\to\frac{2\pi}{d\omega}$

在这种情况下，求和变积分：$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$

令$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=F(j\omega)$，则$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

- 傅立叶变换式 $$\left.\begin{aligned}F(j\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\\ f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\end{aligned}\right\}$$
- 简记为：$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$

从频谱振幅到频谱密度

- 从物理的角度来分析$F(j\omega)$的意义：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{T\dot{A}_n}{2}=\lim_{T\to\infty}\pi\frac{\dot{A}_n}{\Omega}=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

当$T\to\infty$时，$\Omega\to d\omega$，$n\Omega\to\omega$

- $F(j\omega)$具有单位频带的振幅的量纲，成为频谱密度函数，简称频谱函数。

傅里叶积分的三角表示

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|e^{j(\omega t+\phi)}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|\cos(\omega t+\phi)d\omega + j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|\sin(\omega t+\phi)d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(j\omega)|\cos(\omega t+\phi)d\omega
\end{aligned}
$$

由于，当$f(t)$为实函数时，第一项为偶函数，第二项为奇函数。

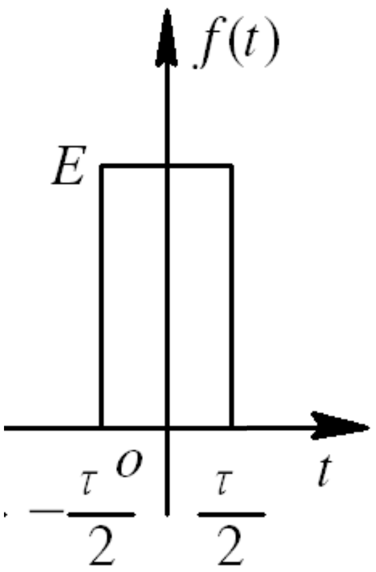
求单个矩形脉冲信号的频谱

$$f(t)=\begin{cases}E & 当|t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & 其他\end{cases}$$

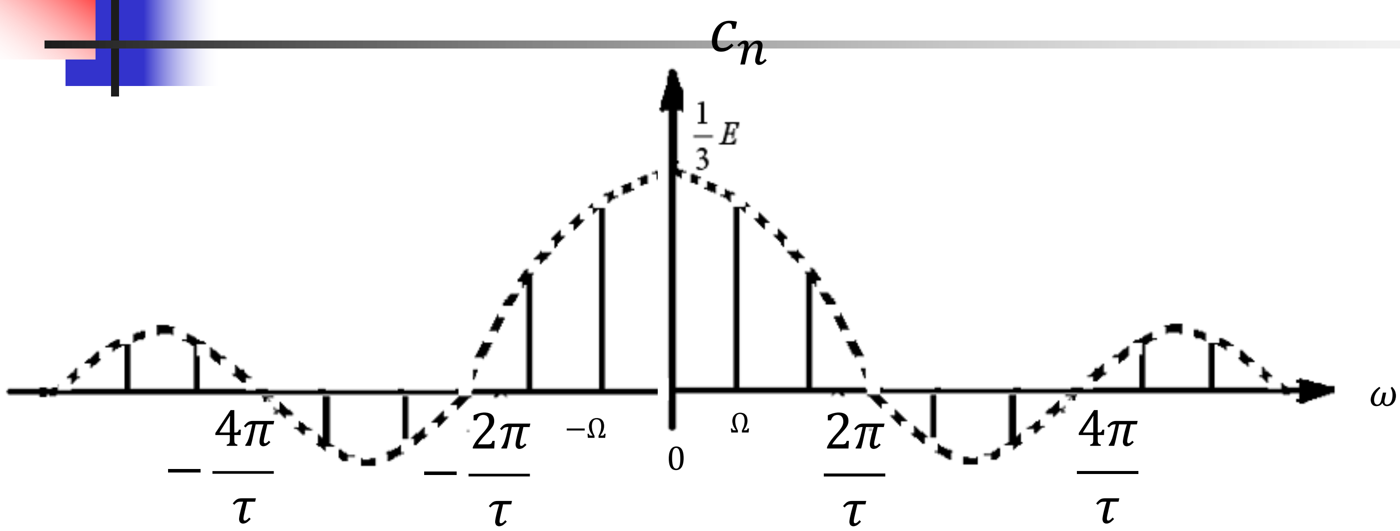
解： $F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt=E\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega t}\,dt$

$$=\frac{E}{j\omega}\left(e^{j\frac{\omega\tau}{2}}-e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\right)=\frac{2E}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$=E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

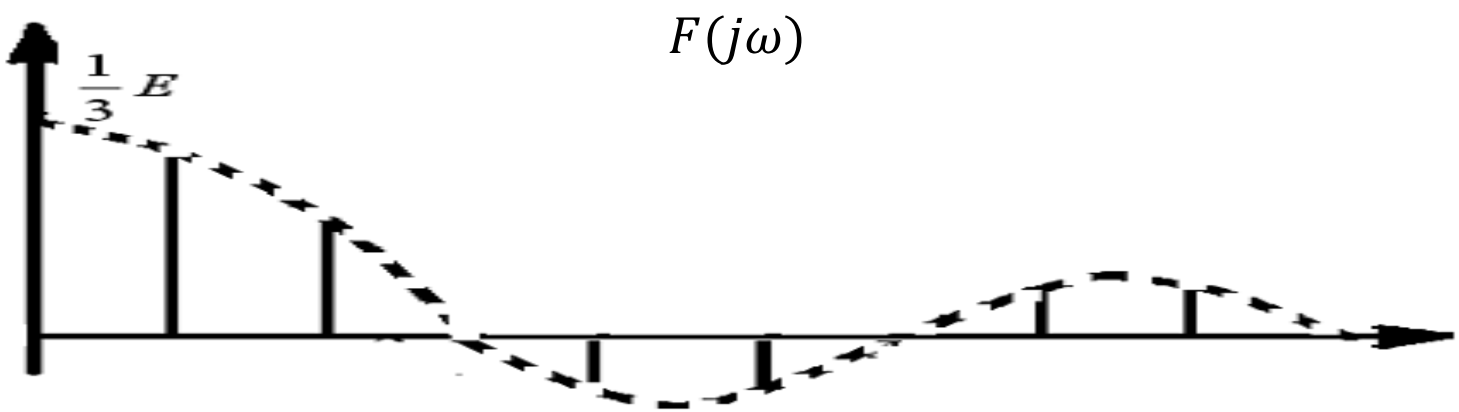


连续性
收敛性



周期信号

离散性
谐波性
收敛性



非周期信号

连续性
收敛性

周期与非周期矩形脉冲信号频谱比较

$$\dot{A}_n=\frac{2A\tau}{T}\left[\frac{\sin(n\pi\tau)/T}{(n\pi\tau)/T}\right]$$
$$=\frac{A\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

$$F(j\omega)=A\tau\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}\right]$$
$$=A\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

- 它们都具有抽样函数$Sa(x)$的形式
- $\dot{A}_n$较$F(j\omega)$多乘了一个$\frac{1}{T}$，这是由两者的定义规定的。
- $\dot{A}_n$中的不连续量$n\Omega$，在中变成了连续量ω

周期信号与非周期信号频谱比较

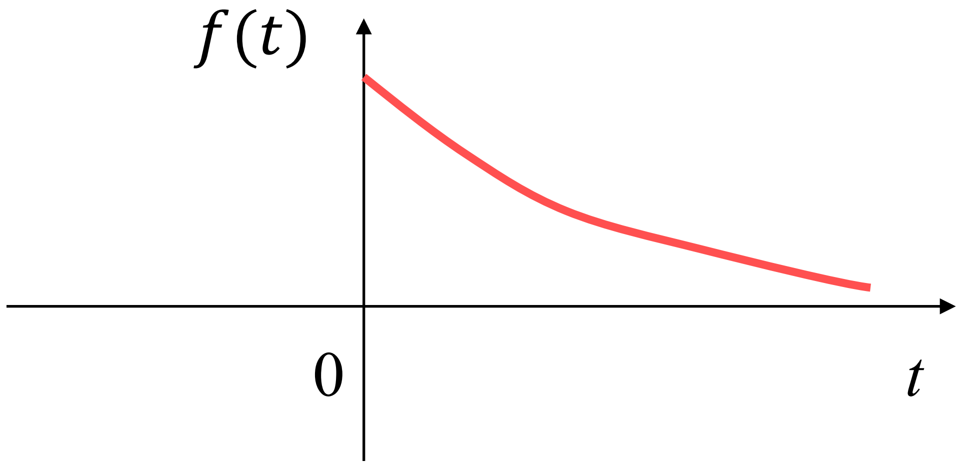
非周期信号：$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|F(j\omega)|\cos(\omega t+\phi(\omega)]d\omega$

周期信号：$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_1 t+\phi_n)$

- 周期信号与非周期信号都可以分解为许多不同频率的正弦分量。
- 对周期信号，谱是用实际振幅a_n作出的。对非周期信号，是用密度函数$F(j\omega)$作出的。
- 周期信号与非周期信号频谱都具有收敛性。

单边指数信号的傅里叶变换

$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & (t\geq 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

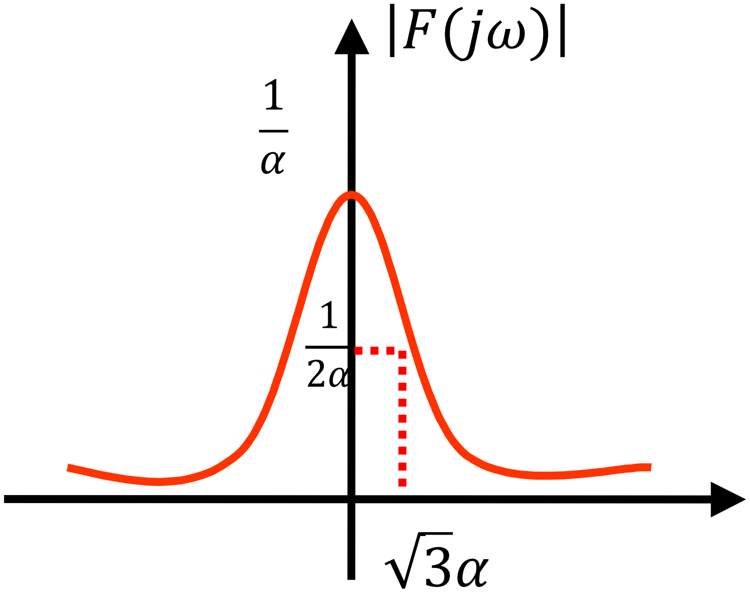


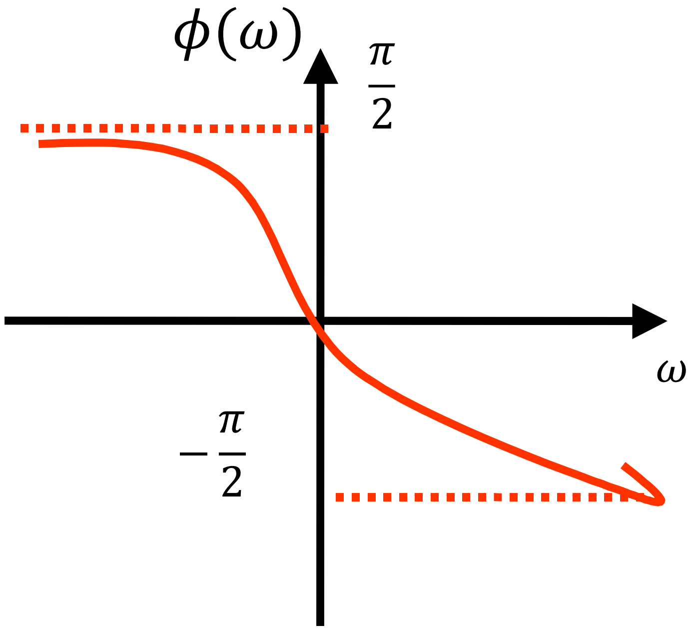
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\alpha+j\omega} \qquad (\alpha>0)$$

单边指数信号频谱的幅频、相频特性

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = -arctg(\frac{\omega}{\alpha})$$

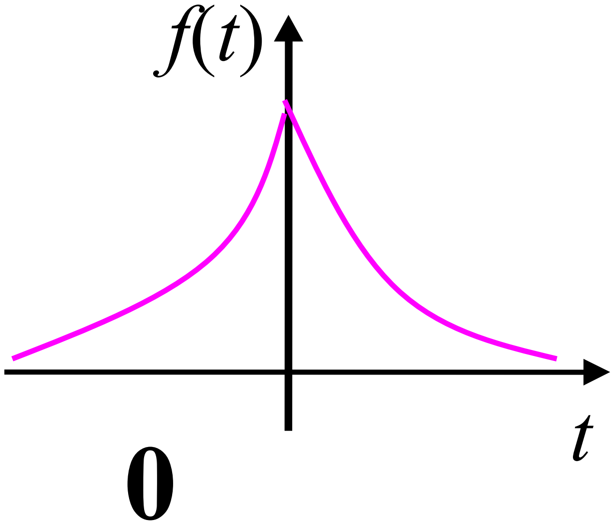


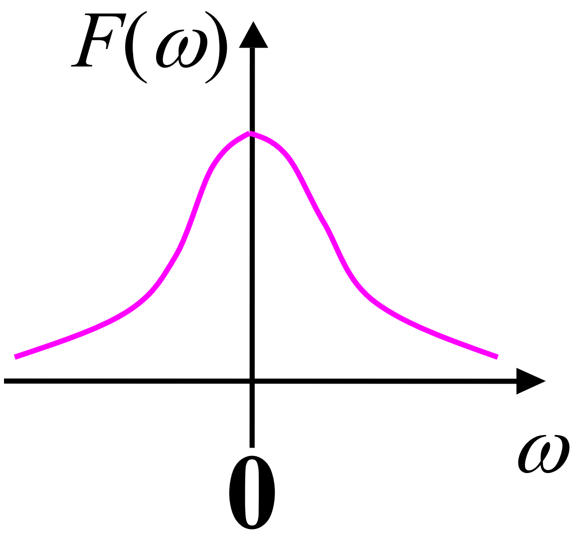


双边指数信号的傅里叶变换及幅频、相频特性

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

$$F(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \qquad \phi(\omega) = 0$$





单位冲激信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega \cdot 0} = 1$$

即：$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$\mathcal{F}^{-1}(1) = \delta(t)$

上式是$\delta(t)$的另一种定义！

周期信号与傅里叶变换

对于周期信号$f(t)$，其傅里叶变换为：

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{A}_n}{2} e^{jn\Omega t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{A}_n}{2} \mathcal{F}\left\{e^{jn\Omega t}\right\}$$

利用单位冲激函数傅里叶变化式：$\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$，

可知：$\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_c t}\right\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_c)$

因此，

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \delta(\omega - \omega_c)$$

- 从频谱密度函数的定义来考察周期信号的傅里叶变换：周期信号的频谱是一个离散频谱，每一个有限大小的谐波分量占据的频率为无穷小，从频谱密度来看就具有冲激的性质。

小结

- **周期信号频谱的特点**
- **傅里叶变换**
- **非周期信号频谱的特点**

课外作业

阅读:3.4,3.5　自学:3.6,3.7

预习:3.8,3.9

傅里叶变换的线性特性

若

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(j\omega)，\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(j\omega)$$

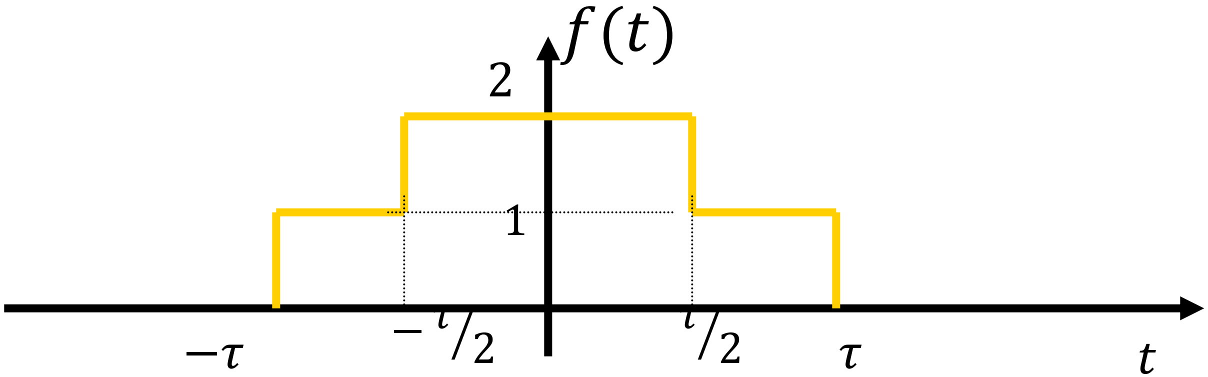
则

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$$

证明见p.124

例题1

求$f(t)$的傅立叶变换。



$$f(t)=[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]+[u(t+\tau)-u(t-\tau)]$$

$$F(\omega)=\tau[Sa(\omega\tau/2)+2Sa(\omega\tau)]$$

傅里叶变换的延时特性

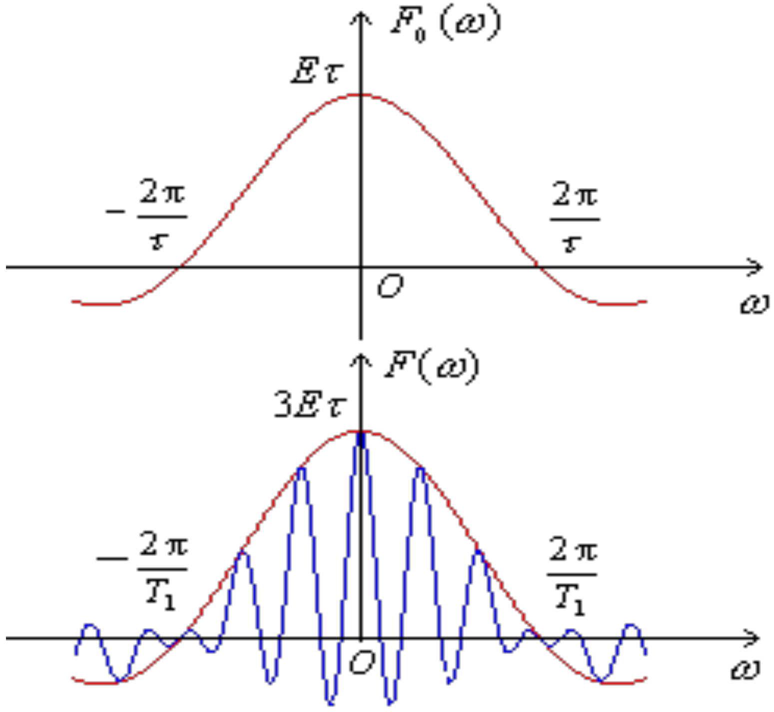
若$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则$f(t-t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

- 证明见p.124
- 例如，利用已知门函数的傅里叶变换是取样函数的结果，很容易求得任意矩形脉冲的傅里叶变换

例题2

已知门函数$f_0(t)$的频谱为$F(\omega)=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$，求三脉冲信号$f(t)=f_0(t)+f_0(t+T)+f_0(t-T)$的频谱

$$\begin{aligned}F(\omega)&=F_0(\omega)(1+e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})\\&=F_0(\omega)(1+2\cos\omega T)\\&=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})(1+2\cos\omega T)\end{aligned}$$

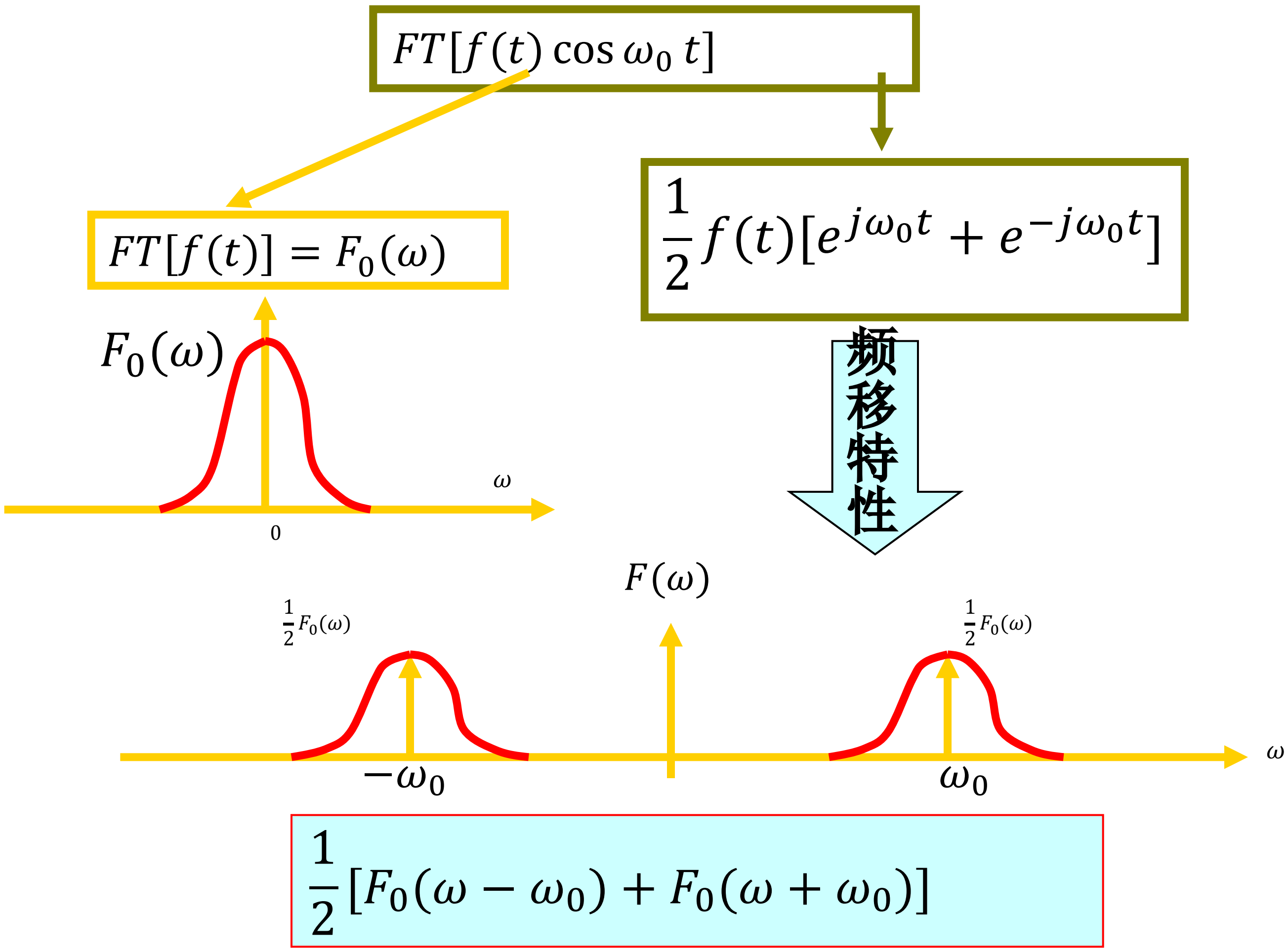


傅里叶变换的移频特性

若$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则$f(t)e^{j\omega_c t} \leftrightarrow F(j\omega - j\omega_c)$

- 证明见p.125
- 移频过程，在电子技术中，就是调幅的过程，反映在时域中是用一高频正弦函数去乘调制信号，反映在频域中则是把调制信号的频谱搬移了一个频率，在搬移的过程中，信号频谱结构保持不变。

傅里叶变换的移频特性与调制

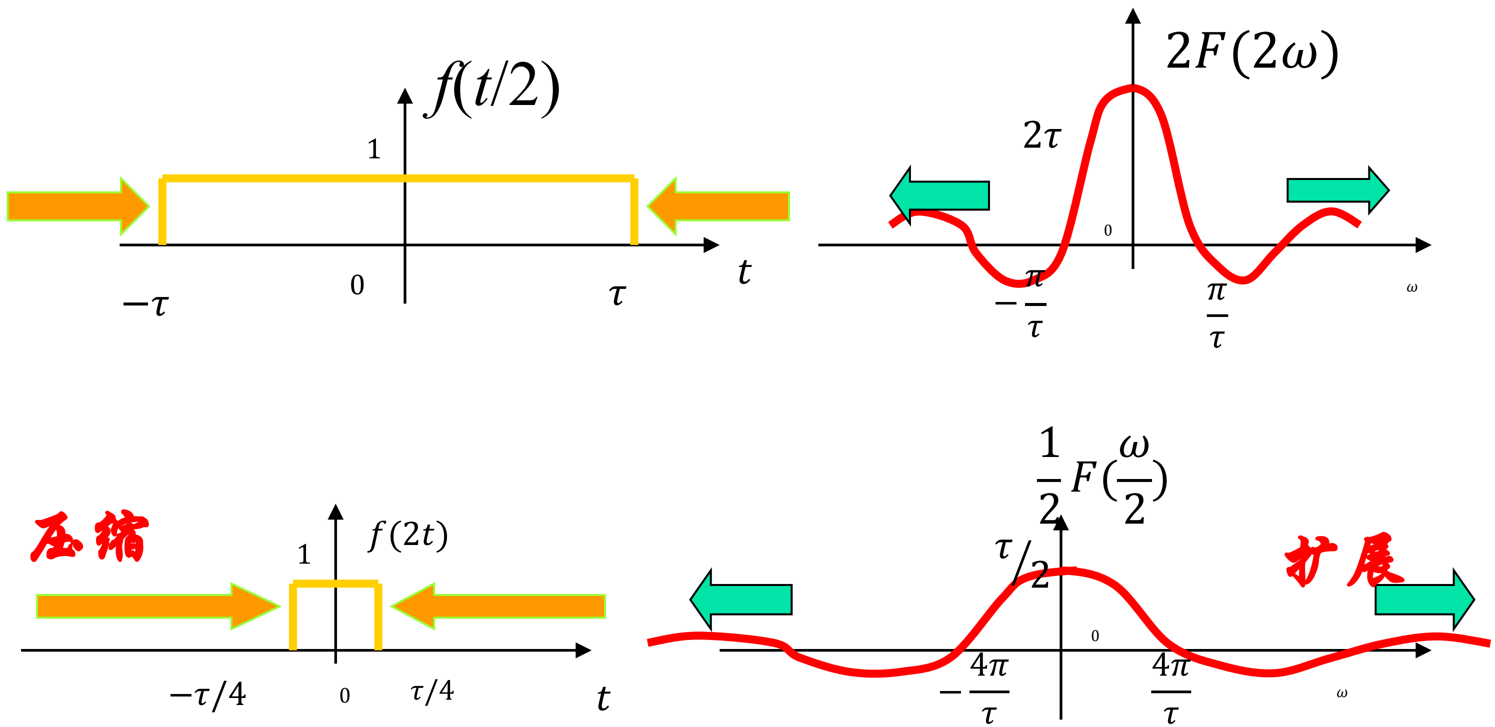


傅里叶变换的尺度变换特性

若$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则$f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}F(\dfrac{j\omega}{a})$

- 证明见p.127
- 时域的压缩等于频域的扩展，时域的扩展等于频域的压缩
- 脉宽和频宽的乘积是一个常数
- 这个常数的大小取决于信号的类型
- 例如，利用这一特性很容易求得符号函数的傅里叶变换

时域与频域的压缩、扩展关系

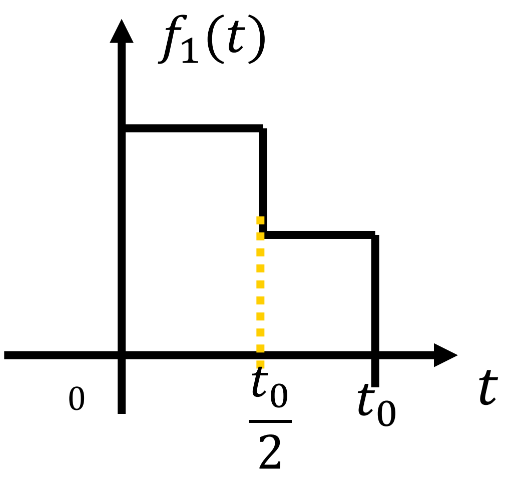


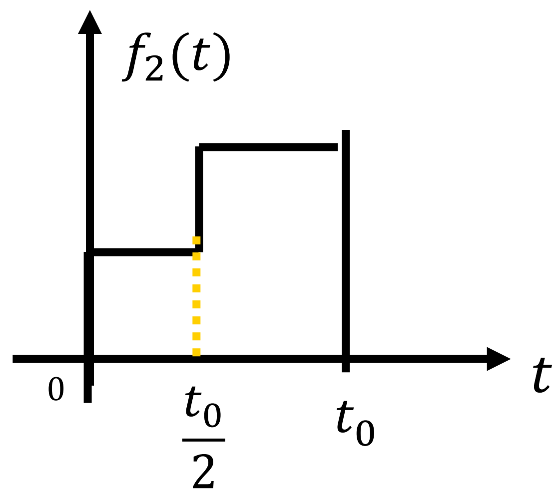
时域中的压缩（扩展）对应频域中的扩展（压缩）

例题3

已知$f_1(t) = F_1(\omega)$,利用傅里叶变换的性质,

求$f_1(t)$以$\dfrac{t_0}{2}$为轴反褶后得$f_2(t)$的傅里叶变换。





$\because f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$, $f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$

$\therefore f_1[-(t-t_0)] \leftrightarrow F(-\omega)e^{-j\omega t_0}$

傅里叶变换的奇偶特性

- 若$f(t)$是一个实偶函数，对应的频谱是$F(\omega)$也是一个实偶函数
- 若$f(t)$是一个实奇函数，对应的频谱是$F(\omega)$是一个虚奇函数
- 该特性与周期信号的奇偶性与其包含的谐波分量间的关系是对应的。

傅里叶变换的对称特性

若$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则$F(jt) \leftrightarrow 2\pi \cdot f(-\omega)$

- 利用上述特性，可以方便的求取很多傅里叶变换，或逆变换。
- 例如，单位冲激函数与1，门函数与取样函数

例题4

求函数$\frac{sint}{t}$的傅里叶变换

解：门函数的傅里叶变换为：

$$f(t) ↔ E\tau\frac{sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

当$\tau = 2$，$E = 1/2$时，$f(t) ↔ \frac{sin\omega}{\omega}$

因为门函数是偶实函数，由傅里叶变换的对称性可知：

$$\frac{sint}{t} \leftrightarrow 2\pi f(\omega) = \begin{cases} \pi, & |\omega| < 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

傅里叶变换的微分特性

时域微分特性：若$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则$\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$

频域微分特性：若$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则$-jtf(t) \leftrightarrow \dfrac{dF(j\omega)}{d\omega}$

- 证明见p.133

傅里叶变换的积分特性

时域积分特性：若$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，

则$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$

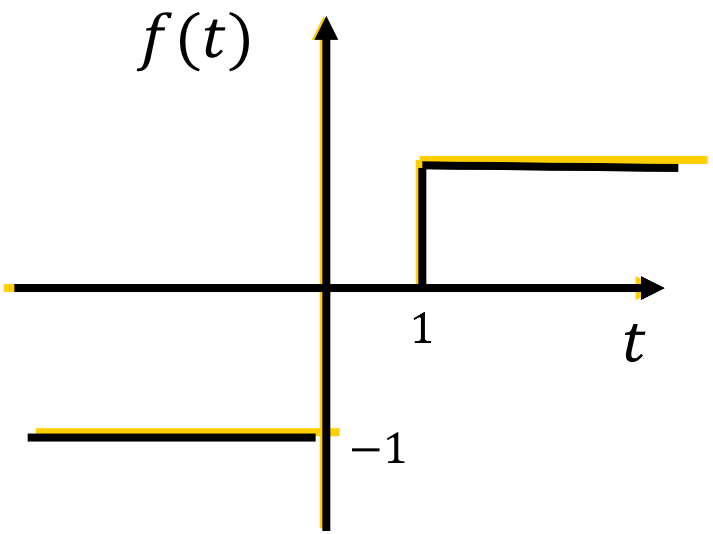
时域积分公式二：若$\frac{dg(t)}{dt} = f(t), f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$则:

$g(t) \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + [g(\infty) + g(-\infty)]\pi\delta(\omega)$

- 证明见p.133

例题5：求以下函数的傅里叶变换

$$f(t) = -u(-t) + u(t-1)$$
$$f'(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$$
$$f'(t) \leftrightarrow 1 + e^{-j\omega}$$
$$f(-\infty) = -1; f(\infty) = 1$$
$$\therefore f(t) \leftrightarrow \frac{1 + e^{-j\omega}}{j\omega}$$



例题5（续）

$$f(t) = -u(-t) + u(t-1)$$

$$F(\omega) = -[-\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)] + [\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)]e^{-j\omega}$$

$$\because f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\therefore \pi\delta(\omega)e^{-j\omega} = \pi\delta(\omega)e^{-j0} = \pi\delta(\omega)$$

$$\therefore f(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}(1 + e^{-j\omega})$$

用迭加原理将得出相同的结论。

卷积定理

若

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(j\omega)，\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(j\omega)$$

则

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

证明见p.137页，要点是：交换积分次序，运用傅里叶变换的延时特性

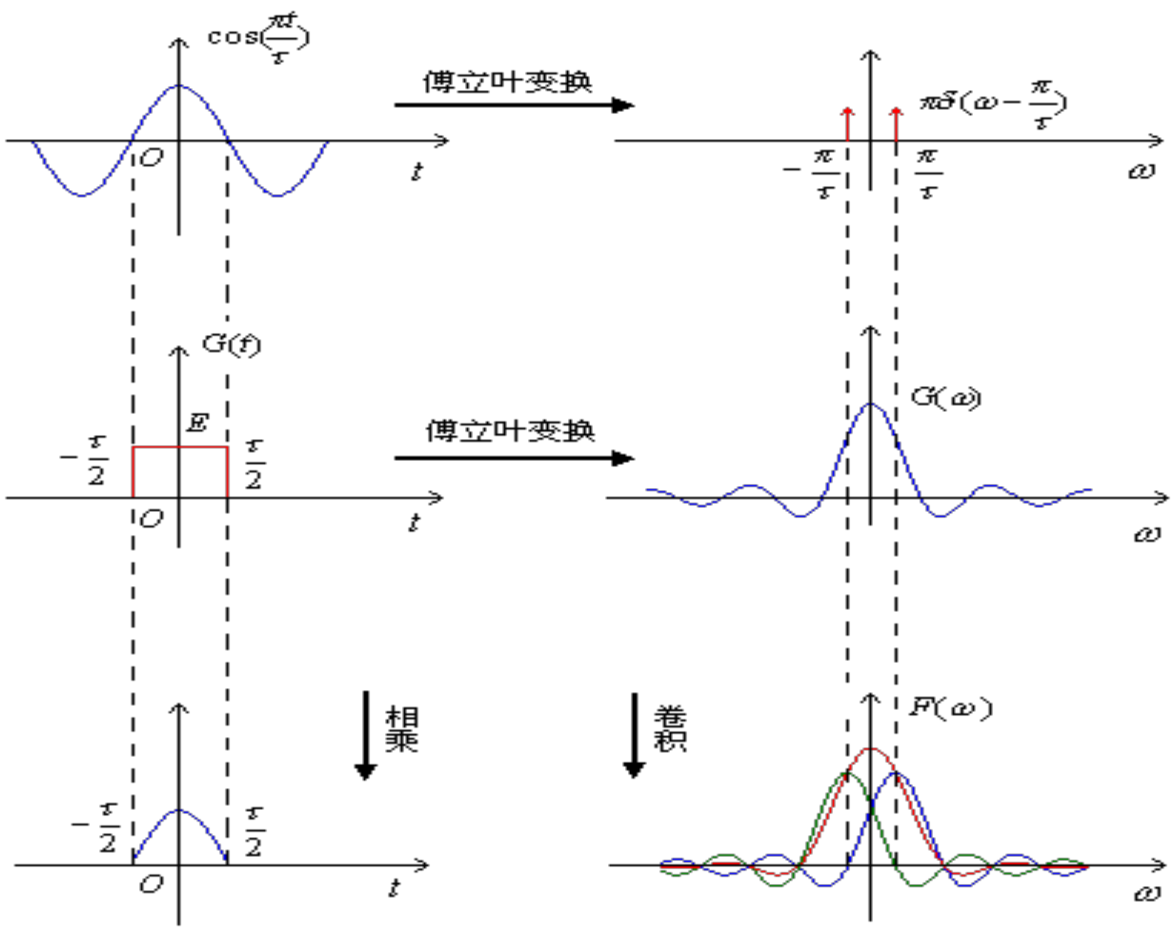
利用卷积定理证明傅里叶变换的时域积分特性

$$\because f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

$$\therefore \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau\right] = \mathcal{F}[f(t) * u(t)] = F(j\omega) \cdot \mathcal{F}[u(t)]$$

$$即\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \leftrightarrow F(j\omega)[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)]$$

例题6：求单个余弦脉冲的傅里叶变换



例题6（续）

$$f(t) = G(t).\cos\frac{\pi t}{\tau}$$

$G(t)$

乘积

$\cos\frac{\pi t}{\tau}$

周期信号的傅里叶变换

FT

$$G(\omega) = E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

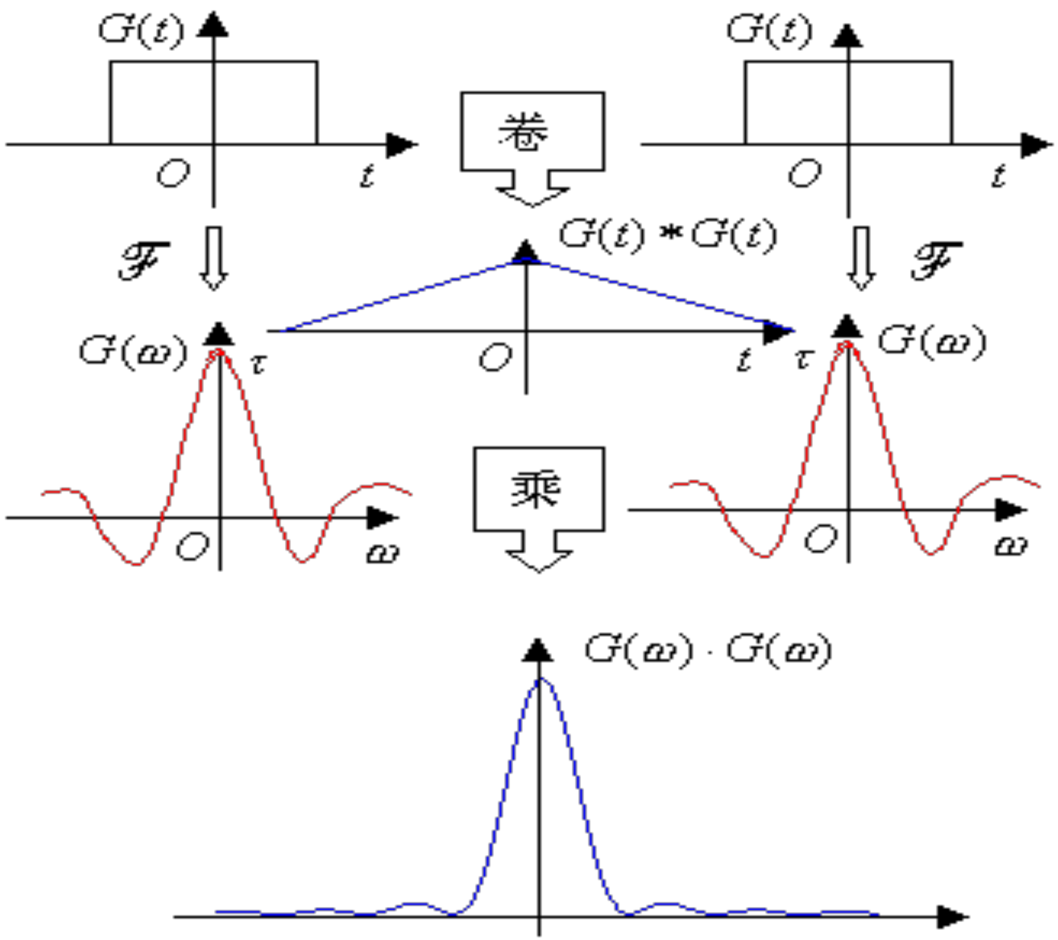
FT

$$\pi\delta(\omega + \frac{\pi}{\tau}) + \pi\delta(\omega - \frac{\pi}{\tau})$$

卷积

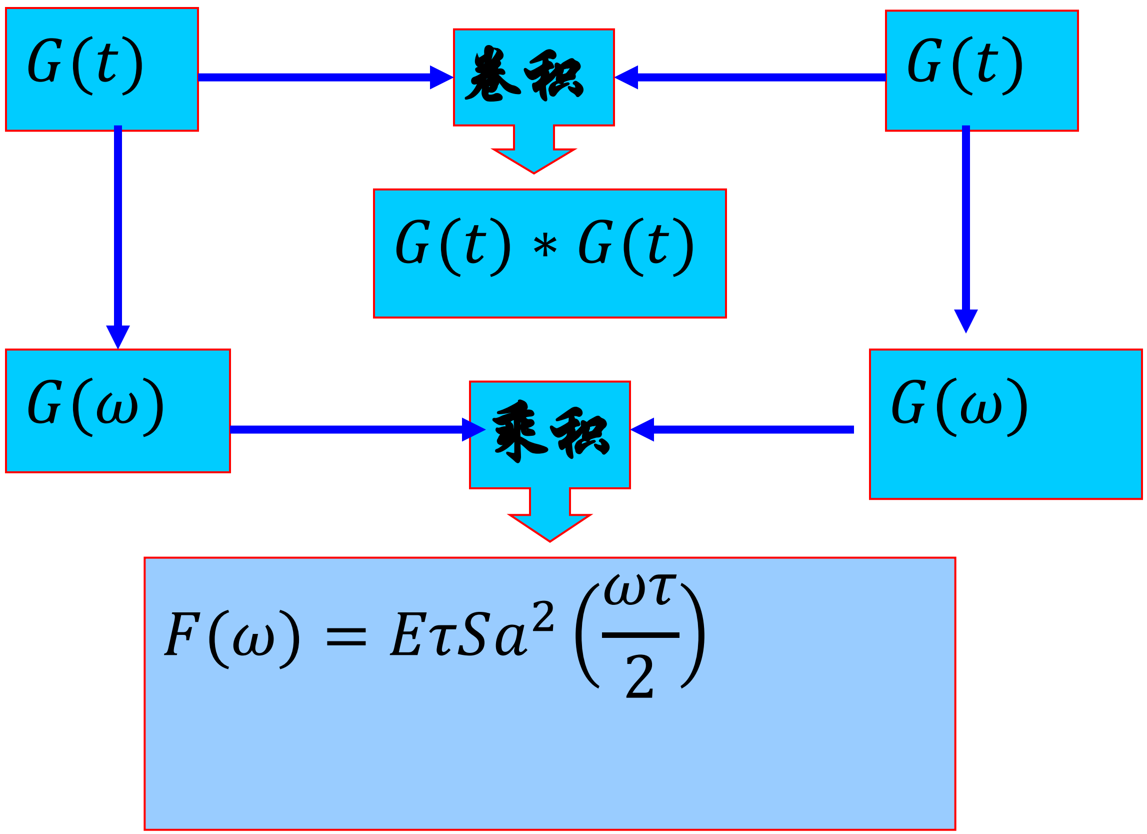
$$F(\omega) = \frac{2E\tau\cos(\frac{\omega\tau}{2})}{\pi\left[1 - (\frac{\omega\tau}{\pi})^2\right]}$$

例题7：求三角脉冲的傅里叶变换

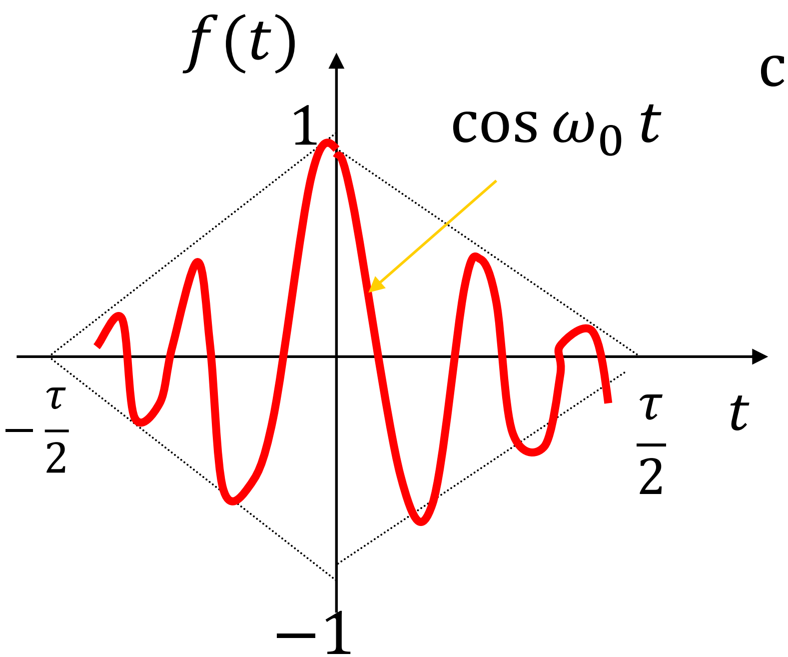


例题7（续）

三角脉冲可看成两个同样矩形脉冲的卷积



例题8：求三角调幅波的频谱



$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

三角波

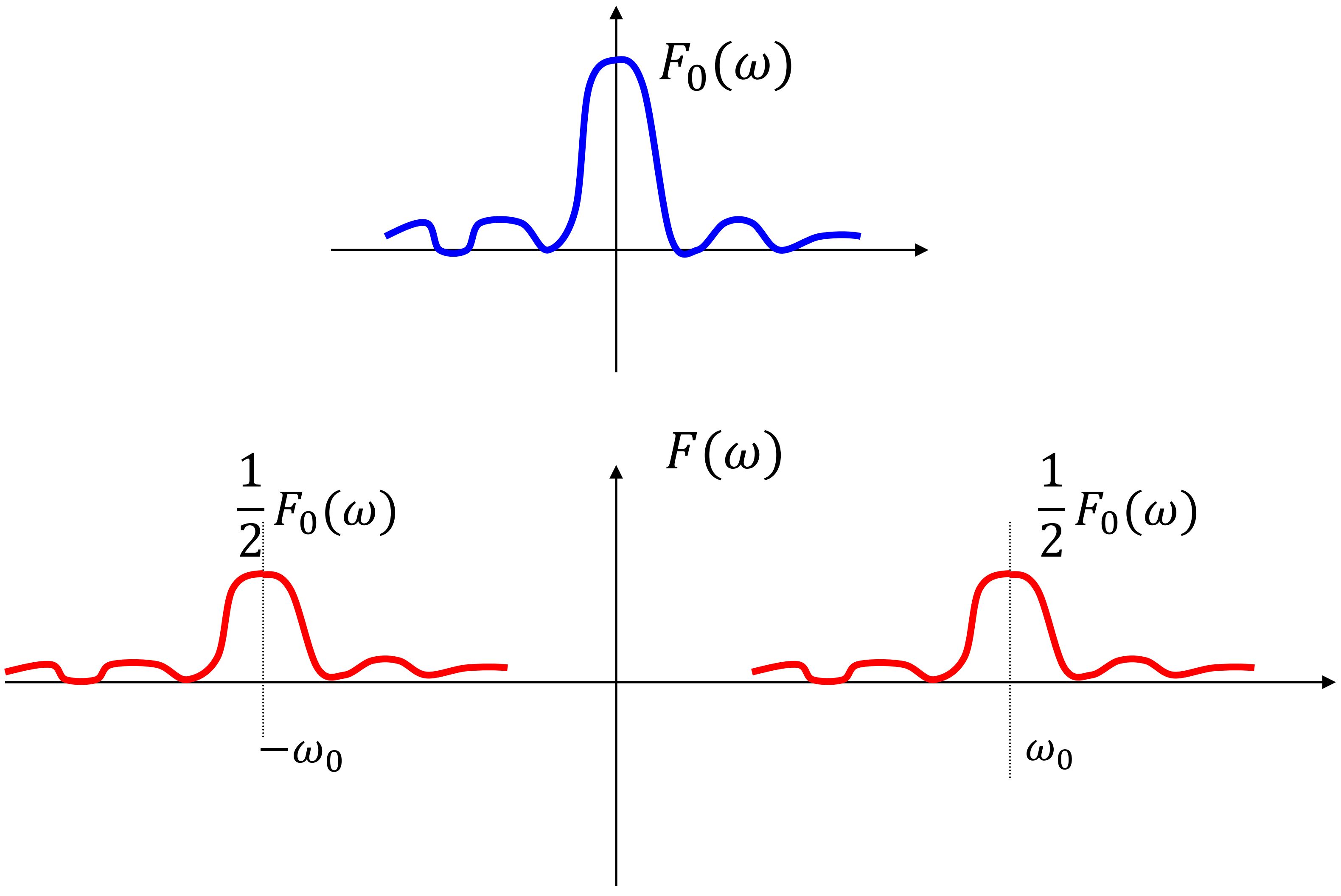
$$f_0(t) = 1 - \frac{2|t|}{\tau}$$

$$F_0(\omega) = \frac{E\tau}{2} Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$E = 1$$

$$F(\omega) = \frac{E\tau}{4}\left[Sa^2\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{4}\right) + Sa^2\left(\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{4}\right)\right]$$

例题8（续）



$F_0(\omega)$
$F(\omega)$
$\frac{1}{2}F_0(\omega)$
$\frac{1}{2}F_0(\omega)$
$-\omega_0$
ω_0

Parseval's定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

证明：由频域卷积定理知：

$$\mathcal{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

令：$f_1(t) = f^*(t)$，$f_2(t) = f(t)$，则$F_1(\omega) = F^*(\omega)$，$F_2(\omega) = F(\omega)$

代入上式，并展开：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\Omega)F(\omega-\Omega)d\Omega$$

上式在ω为任何值的时候都成立，令$\omega=0$，上式简化为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\cdot f_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\Omega)F(-\Omega)d\Omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\Omega$$

Parseval's定理的实质

- Parseval's定理的实质是能量守恒：无论从时域的角度计算能量，还是从频域的角度计算能量，必然是相等的。

小结

- 信号正交分解的一般性理论
- 傅里叶级数与傅里叶变换的关系
- 常用函数的傅里叶变换
- 傅里叶变换的性质与傅里叶变换的运算
- 卷积定理

课外作业

阅读: 3.8,3,9; 预习：4.1 - 4.3

作业: 3.14（1）；

3.15（1）（2）；

3.16（a）