信号与线性系统

总复习

▪ 总

1.两大类　连续信号与系统

离散信号与系统

因果信号/因果系统

线性时不变系统

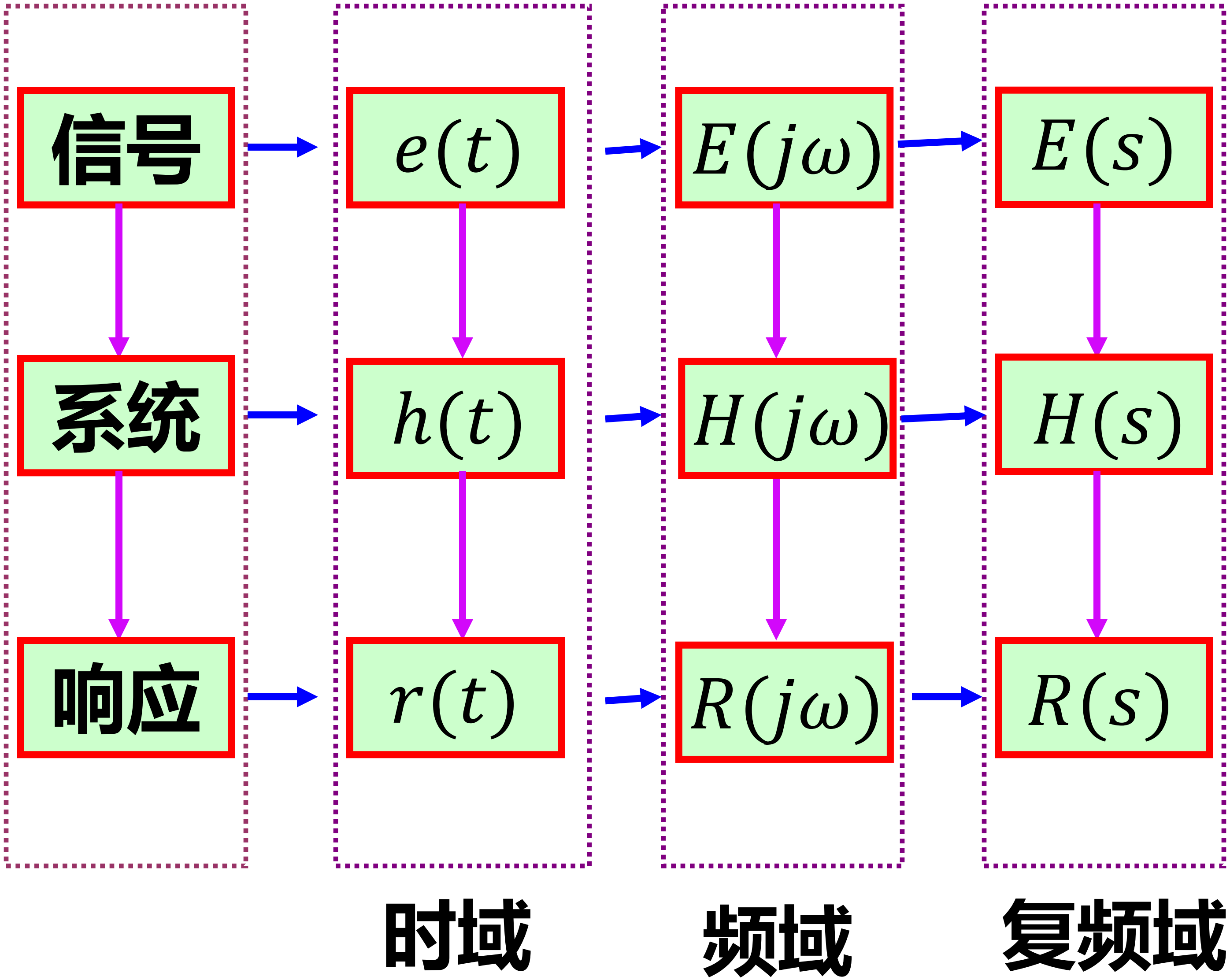
2.分析手段　时域分析

变换域分析

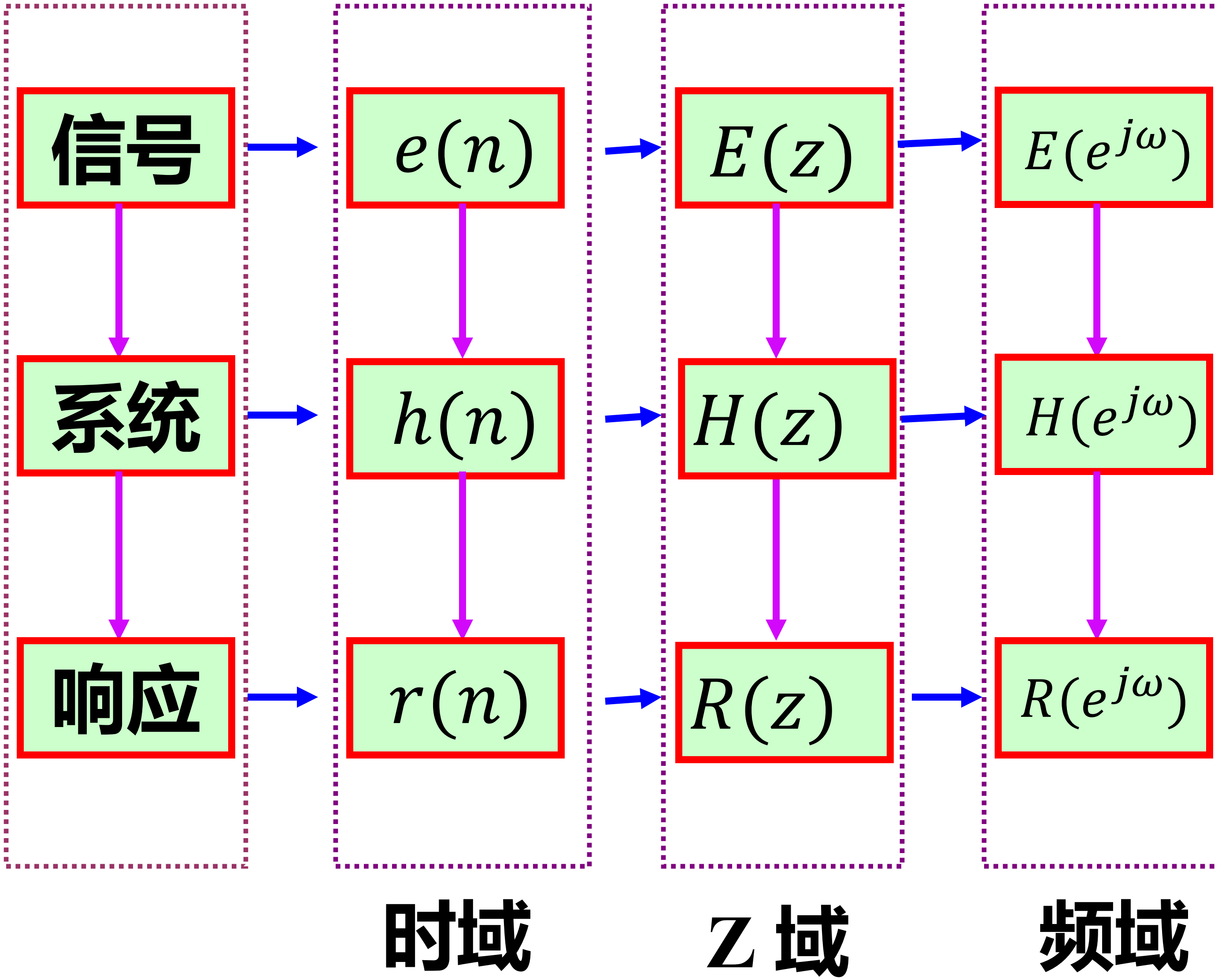
连续：频域，复频域

离散：频域，z域

连续时间系统分析主线



离散时间系统分析主线



信号的分类与常用信号

- 信号的分类
  - 连续时间信号，离散时间信号
  - 因果信号
  - 右边序列（因果序列），左边序列，双边序列
- 连续时间信号
  - 单位冲激信号，单位阶跃信号
  - 矩形脉冲
- 离散时间序列
  - 单位函数，单位阶跃函数
  - 矩形序列

信号的运算（时域）

- 基本运算
  - 信号间的相互表示
  - 平移、反折、尺度变换、线性、微积分等
  - 波形的变化
- 卷积积分/卷积和
  - 定义
  - 求解
  - 性质
  - 应用

信号的变换（变换域）

- 傅里叶级数/傅里叶变换
  - 常用函数的傅里叶级数/变换，频谱特点
  - 线性、缩放、对称性、时移频移、微积分、卷积定理等
- 拉普拉斯变换
  - 常用函数的拉普拉斯变换，收敛区
  - 线性、缩放、时移频移、微积分、卷积定理、初值终值定理等
  - 反变换的求取 - 部分分式分解，利用性质
- z变换
  - 常用函数的z变换，收敛区
  - 线性、缩放、时移频移、卷积定理、初值终值定理等
  - 反变换的求取 - 部分分式分解法，注意与收敛区的关系
- DTFT
  - 定义
  - 周期性、线性、时移频移、频域微分、卷积定理等

系统

- **系统的性质**
  - **线性，时不变性，因果性，稳定性**

- **系统的表示**
  - **电路或实际问题 需要通过建模的过程得到方程**
  - **微分方程/差分方程**
  - **方程、直接（I）型模拟框图之间的转换**
  - **系统函数**

- **系统的响应**
  - **零输入响应和零状态响应**
  - **单位冲激响应/单位函数响应**
  - **系统响应的时域求解，变换域求解**

系统（续）

- 系统函数
  - 系统函数H(s)/H(z)
  - 系统函数的极点分布对系统稳定性的影响
  - 系统函数零极点分布对频响特性的影响
- 频响函数
  - 频响函数$H(j\omega)/H(e^{j\omega})$
  - 频响特性曲线
  - 滤波特性
- 应用
  - 理想低通滤波器，信号通过系统不失真传输的条件，
  - 调制解调
  - 理想抽样，抽样定理

冲激函数的性质

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$$

卷积积分/卷积和

两个连续时间信号$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积积分定义如下：

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

两个序列$f_1(k)$和$f_2(k)$的卷积和定义如下：

$$f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)$$

练习：计算下列卷积

$(1)\ \varepsilon(t) * \varepsilon(t)$

(2) 两个矩形脉冲函数的卷积

$(3)\ e^{-3t}\varepsilon(t) * \varepsilon(t)$

$(4)\ e^{-3t}\varepsilon(t) * e^{-2t}\varepsilon(t)$

解：$(1)\ t\varepsilon(t)$

(2) 梯形脉冲

$(3)\ \dfrac{1}{3}(1-e^{-3t})\varepsilon(t)$

$(4)\ (e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$

$(1)\ \varepsilon(k) * \varepsilon(k)$

$(2)\ \varepsilon(k-1) * \varepsilon(k-2)$

$(3)\ 0.3^k\varepsilon(k) * \delta(k)$

$(4)\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k) * \varepsilon(k)$

$(5)\ 2^k\varepsilon(k) * 2^k\varepsilon(k)$

解：$(1)\ (k+1)\varepsilon(k)$

$(4)\ \left(2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\right)\varepsilon(k)$

$(5)\ (k+1)2^k\varepsilon(k)$

傅里叶级数/傅里叶变换/序列傅里叶变换

- 傅里叶级数公式
- 基波、谐波
- 周期信号频谱的特点
- 常用信号的傅里叶级数
- 画信号的频谱

- 傅里叶变换公式
- 非周期信号频谱的特点
- 性质
- 常用信号的傅里叶变换
- 画信号的频谱

- 序列傅里叶变换公式
- 离散信号频谱的特点
- 性质
- 常用序列的傅里叶变换
- 画信号的频谱

常用傅里叶变换对

编　号	$f(t)$	$F(j\omega)$
1	$g_\tau(t)$	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
2	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right)$	$2\pi g_\tau(\omega)$
3	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$，$\alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$
4	$te^{-\alpha t}\varepsilon(t)$，$\alpha>0$	$\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$
5	$e^{-\alpha\|t\|}$，$\alpha>0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
6	$\delta(t)$	1
7	1	$2\pi\delta(\omega)$
8	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
9	$\cos\omega_0 t$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
10	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

续表

编　号	$f(t)$	$F(\mathrm{j}\omega)$
11	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$
12	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$, $F(0)=0$
13	$\dfrac{1}{\pi t}$	$-\mathrm{j}\ \mathrm{Sgn}(\omega)$
14	$\delta_T(t)$	$\Omega\delta_\Omega(\omega)$
15	$\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$	$2\pi\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega-n\Omega)$
16	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$, $a>0$	$\dfrac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^n}$

性质名称	时　域	频　域
线性	$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\mathrm{j}\omega)+a_2 F_2(\mathrm{j}\omega)$
时移	$f(t-t_0)$	$F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
频移	$f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))$
调制	$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))+F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
	$f(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))-F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$
对称性	$F(\mathrm{j}t)$	$2\pi f(-\omega)$
卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)$
相乘	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$
时域微分	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$	$\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$
频域微分	$(-\mathrm{j}t)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\mathrm{j}\eta)\,\mathrm{d}\eta$
帕塞瓦尔等式	$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|F(\mathrm{j}\omega)\|^2\,\mathrm{d}\omega$

拉普拉斯变换

- 定义
- 性质
- 常用信号的拉普拉斯变换

$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{s+\alpha}$
$tu(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$
$te^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{(s+\alpha)^2}$
$\delta(t)$	1

z变换

- 定义、收敛区
- 性质
- 常用信号的z变换

$$(1)\ \mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$$

$$(2)\ \mathcal{Z}\{\varepsilon(k)\} = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

$$(3)\ \mathcal{Z}\{-\varepsilon(-k-1)\} = \frac{z}{z-1} \qquad |z| < 1$$

$$(4)\ \mathcal{Z}\{\alpha^k\varepsilon(k)\} = \frac{z}{z-\alpha} \qquad |z| > |\alpha|$$

$$(5)\ \mathcal{Z}\{-\alpha^k\varepsilon(-k-1)\} = \frac{z}{z-\alpha} \qquad |z| < |\alpha|$$

$$(6)\ \mathcal{Z}\{k\varepsilon(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad |z| > 1$$

Z变换的基本性质

序号	性质	信号	Z 变换	收敛域
0	定义	$x(n)$	$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$	R
1	线性	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	至少 $R_1 \cap R_1$
2	移序	$x(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$	R，但在原点或无穷远点可能加上或删除
3	频移	$e^{j\omega n}x(n)$	$X(e^{j\omega}z)$	R
4	尺度变换	$z_0^n x(n)$	$X(z_0^{-1}z)$	$\lvert z_0 \rvert R$
5	z 域微分	$nx(n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	R
6	卷积	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	至少 $R_1 \cap R_1$
7	时间反转	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	R 的倒置
8	求和	$\sum_{n=-\infty}^{n} x(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R \cap (\lvert z \rvert > 1)$
9	初值定理	$x(0)=\lim_{z\to\infty} X(z)$		
10	终值定理	$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$		

系统的因果性与稳定性

<table>
<tr><td rowspan="3">因果</td><td colspan="3">响应不先于激励</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$h(t) = 0, t < 0$</td><td>$h(n) = 0, n < 0$</td></tr>
<tr><td>激励最高序号不大于响应最高序号</td></tr>
<tr><td rowspan="3">稳定</td><td colspan="2">$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$</td><td>$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">因果系统</td><td>$\int_{0}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$</td><td>$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$</td></tr>
<tr><td>系统函数H(s)的所有极点全部位于s平面的左半开平面</td><td>系统函数H(z)的所有极点全部位于z平面的单位圆内</td></tr>
</table>

系统的响应

零输入响应

单位冲激响应/单位函数（样值）响应

零状态响应

系统响应的时域求解、变换域求解

自然响应/强迫响应

暂（瞬）态响应/稳态响应

系统函数

1. $H(s)/H(z)$与$h(t)/h(k)$之间的关系。

2. $H(s)/H(z)$可由微分/差分方程直接得到。

3.系统函数与转移算子之间的关系。

4.系统函数的极点分布对系统稳定性的影响。

5.由系统函数零极点分布粗略画出频响曲线。

6.混合系统的单位冲激响应，系统函数。

频响函数

1.定义及物理意义 $H(j\omega)/H(e^{j\omega})$

2.几组关系

$$h(t) \to H(j\omega) \to H(s)$$

$$h(k) \to H(z) \to H(e^{j\omega})$$

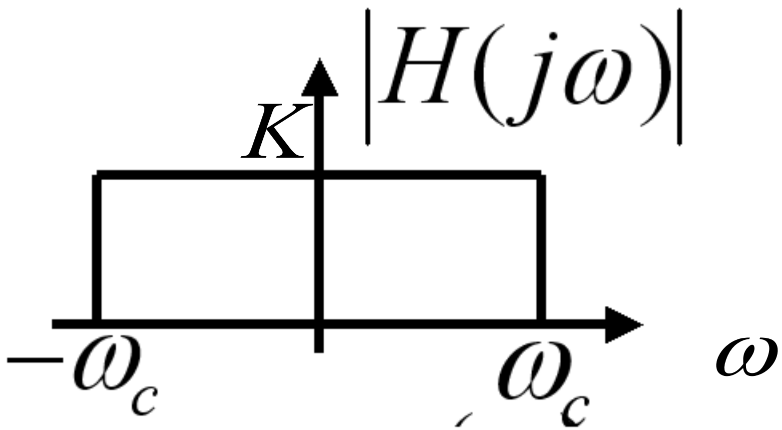
3.画频响特性曲线

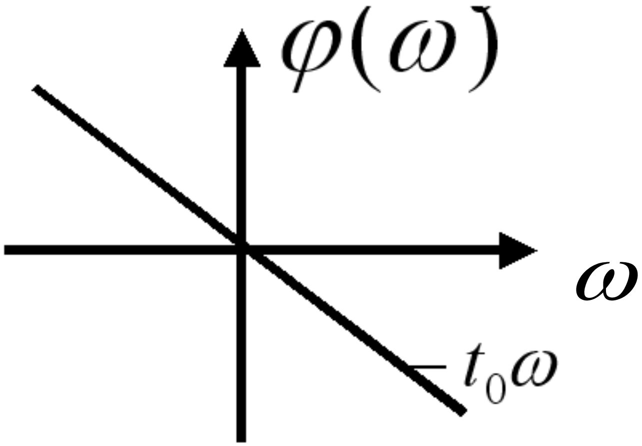
4.滤波特性：低通，高通，带通，带阻，全通

5.混合系统的频响函数

应用：理想低通滤波器

理想低通滤波器的频响



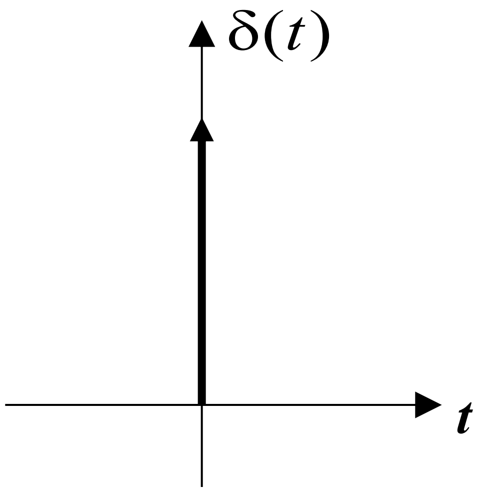


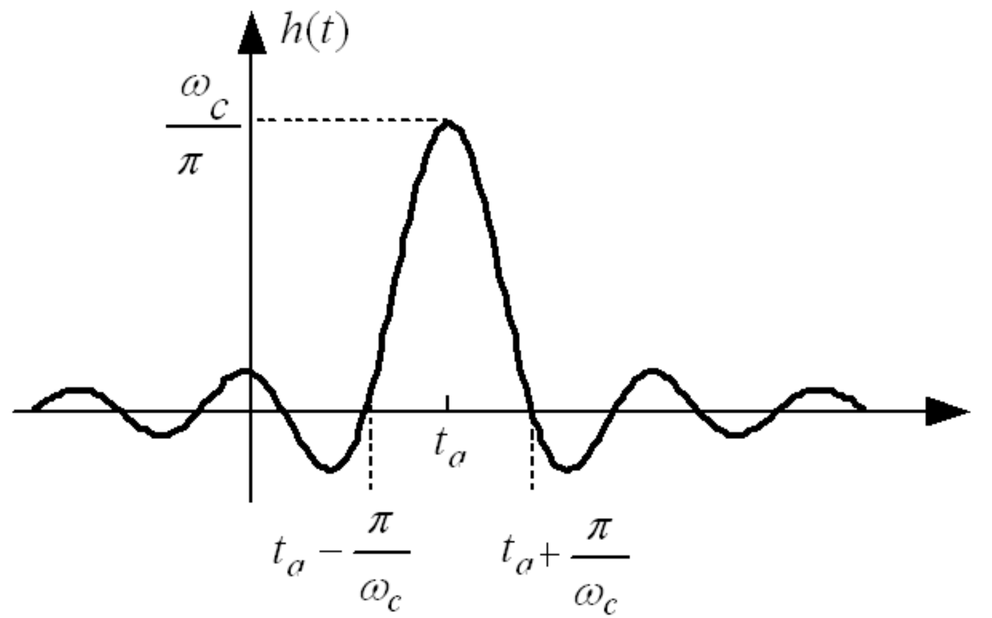
$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0} \qquad |\omega| < \omega_c$$

（ω_c: 截止频率）

理想低通滤波器的单位冲激响应

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)]$$





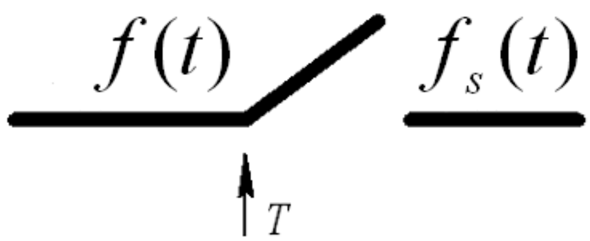
信号通过系统产生失真。

系统物理上不可实现。

可自行推导出信号通过系统不产生失真的条件。

取样定理

信号的时域取样



$$\boxed{f_s(t) = f(t)p(t)}$$

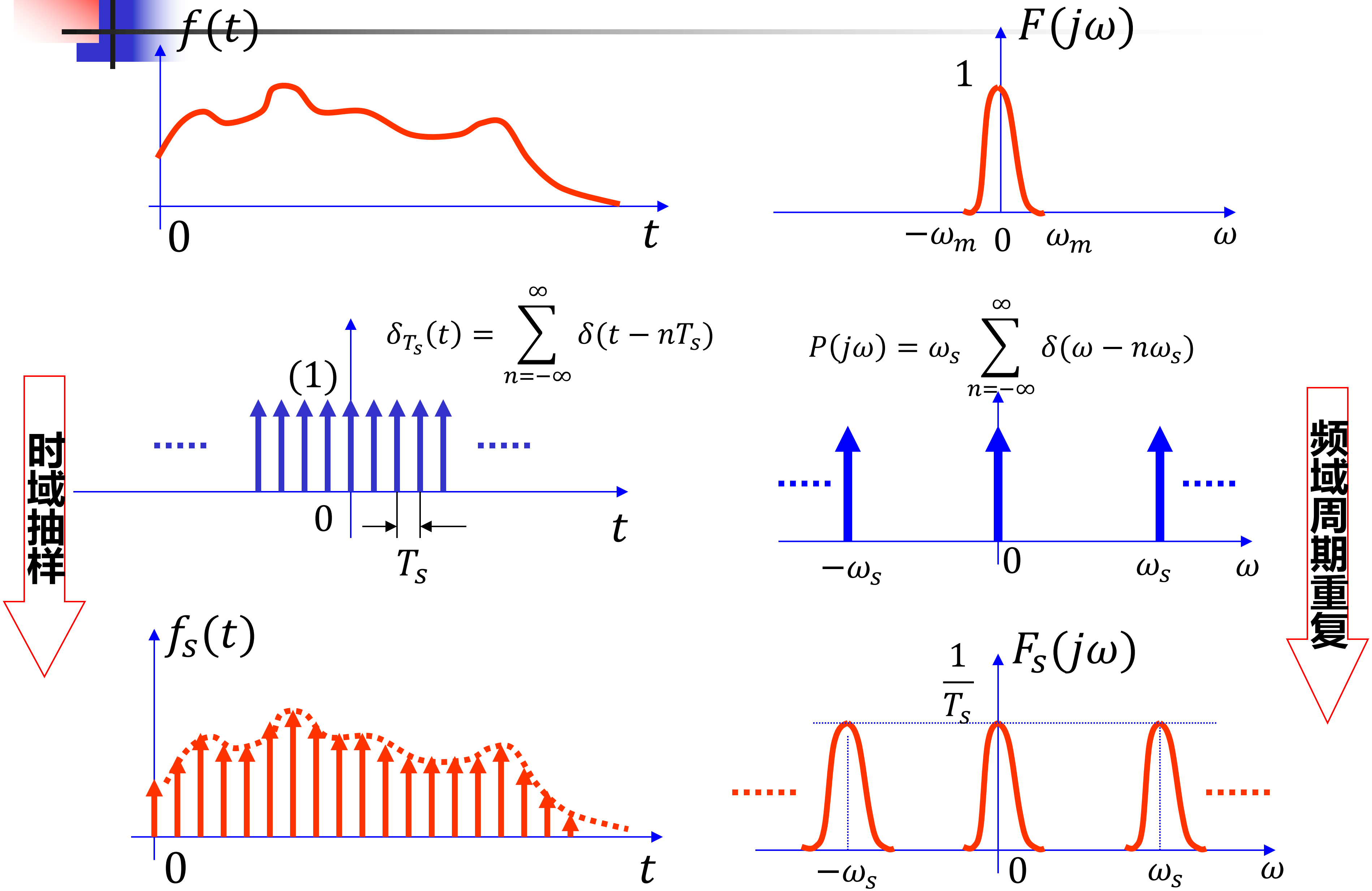
理想取样：抽样脉冲p(t)是冲激函数序列，即

$$p(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

理想抽样示意图



$f(t)$
0
t
$F(j\omega)$
1
$-\omega_m$
0
ω_m
ω
$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$
(1)
0
T_s
t
时域抽样
$P(j\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$
$-\omega_s$
0
ω_s
ω
频域周期重复
$f_s(t)$
0
t
$F_s(j\omega)$
$\frac{1}{T_s}$
$-\omega_s$
0
ω_s
ω

Shannon 取样定理：一个在频谱中不包含有大于频率f_m的分量的有限频带的信号，由对该信号以不大于$\frac{1}{2f_m}$的时间间隔进行取样的取样值唯一地确定。当这样地取样信号通过截止频率ω_c满足$\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m$的理想低通滤波器后，可以完全重建原信号。

考试

- 闭卷考试，不用带草稿纸，需要用到铅笔、直尺、橡皮等
- 遵守考试纪律，诚实作答
- 选择题，简单计算题，综合分析题
- 主要考查基础知识的理解和应用
- 考试时间：以学院通知为准

及早准备，横纵对比，全面复习

该背的要背熟

该练手的要练手：计算，画图

信号、系统要分清

连续、离散忌混淆

时域 ⟷ 变换域

变换域 ⟷ 变换域

结束语

请保持对未知的好奇心，

让自己变得更优秀。

感谢大家两个多月来的辛苦付出。

祝愿大家取得理想的成绩！