信号与系统

离散时间系统的时域分析

信号的分类

时间：连续、离散

幅度：连续、量化

模拟信号：时间、幅度均连续
量化信号：时间连续、幅度量化
} 连续时间信号

抽样信号：时间离散、幅度连续
数字信号：时间离散、幅度量化
} 离散时间信号

连续时间信号是连续变量t的函数。

离散时间信号是离散变量n的函数（或称序列）。

系统的分类

连续时间系统：系统的输入与输出**都是**连续时间信号。

离散时间系统：系统的输入与输出**都是**离散时间信号。

线性 —— 非线性

时变 —— 非时变

因果 —— 非因果

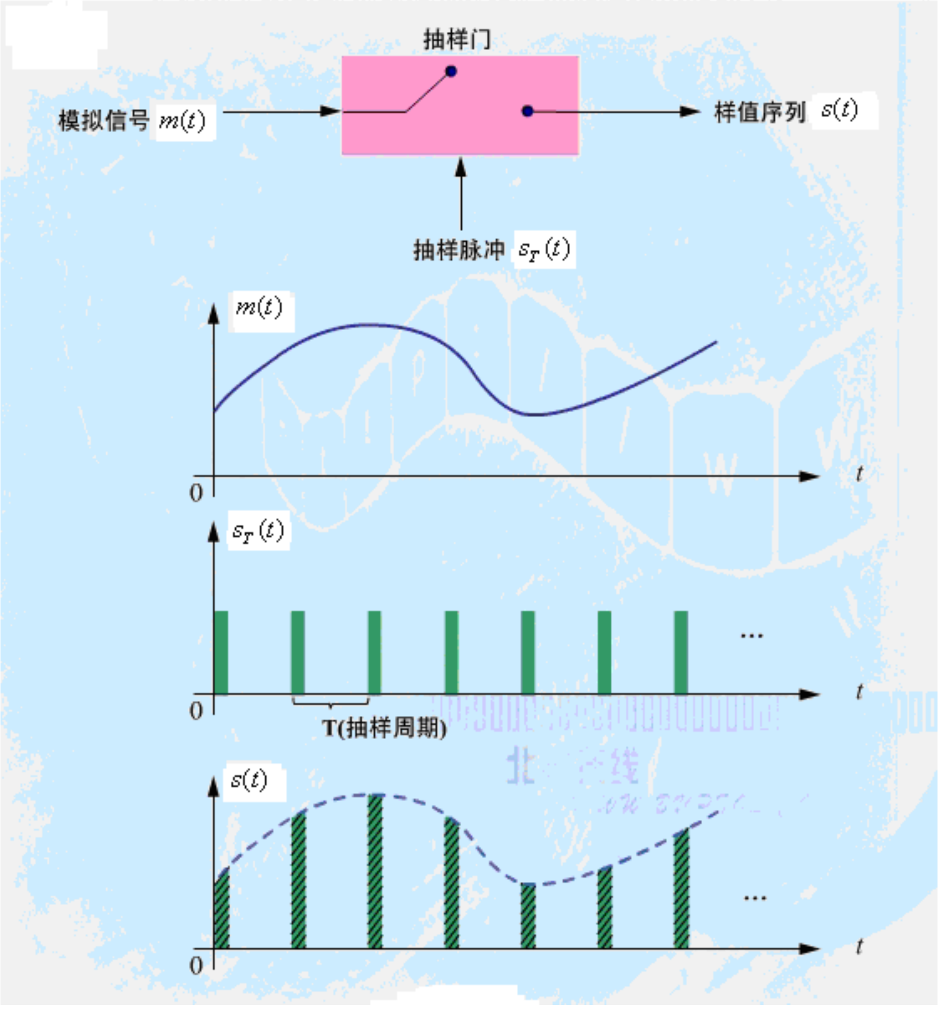
稳定 —— 非稳定

连续时间系统与离散时间系统的分析方法比较

连续时间系统	离散时间系统
单位冲激函数 单位阶跃信号 门函数 信号的基本运算 奇偶对称、周期性	单位函数 单位阶跃序列 矩形序列 序列的基本运算 奇偶对称、周期性
傅立叶变换 拉普拉斯变换	离散序列傅立叶变换 z变换
线性时不变连续系统 微分方程/模拟框图 零输入/零状态响应 单位冲激响应	线性移不变离散系统 差分方程/模拟框图 零输入/零状态响应 单位函数响应
频域分析法 复频域分析法 卷积定理 系统函数	频域分析法 z域分析法 卷积定理 系统函数

抽样（取样、Sampling）

- 抽样就是每隔一定的时间间隔T，抽取模拟信号的一个瞬时幅度值(样值)

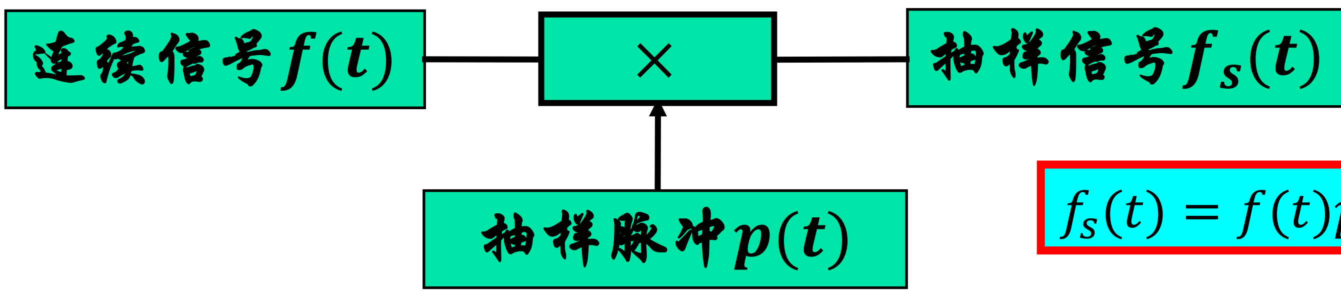


抽样需要解决的问题

- 如何从抽样信号中，恢复出原始的连续信号？
- 恢复过程中引入的误差是多少？
- 一个恢复连续信号的简单思路是：函数拟合。

自然抽样

抽样过程可以看成由原信号$f(t)$和一个开关函数$p(t)$的乘积。



$f_s(t) = f(t)p(t)$

矩形脉冲的抽样(自然抽样)

此时的抽样脉冲$p(t)$是矩形。由于$f_s(t) = f(t)p(t)$

抽样信号在抽样期间脉冲顶部随$f(t)$变化，故这种采样称为“自然抽样”。

从自然抽样到理想抽样

若$\tau \to 0$时 $\to$ 矩形脉冲 $\to$ 冲激信号

如果抽样脉冲宽度与系统中各时间常数相比十分小的时候，这个冲激函数的假定将是一个很好的近似，它将使分析简化。

理想抽样的频谱分析

若抽样脉冲是冲激序列，此时称为“冲激抽样”或“理想抽样”。设T_s为抽样间隔，则抽样脉冲为

$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

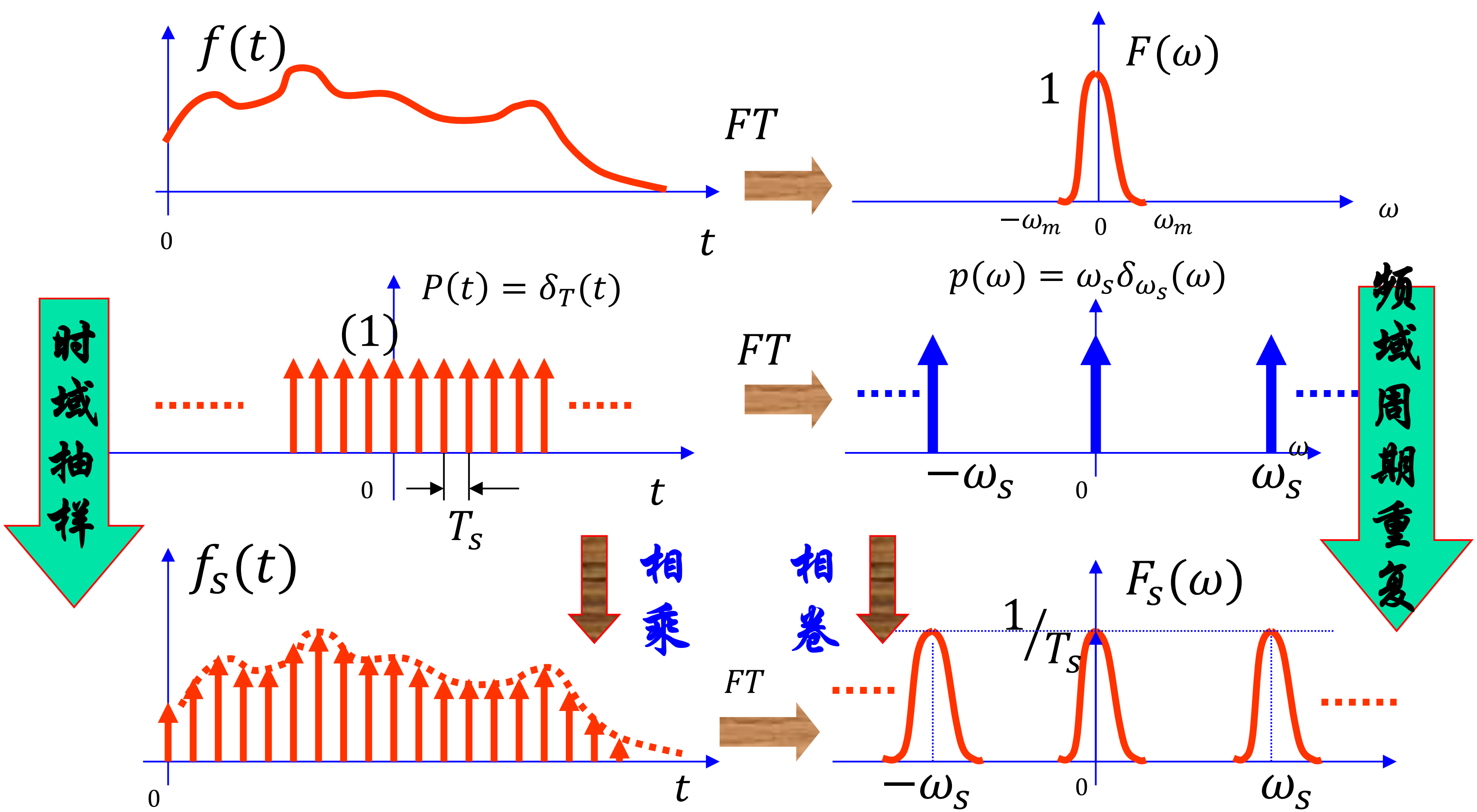
由于$\delta_T(t)$的傅里叶系数为:

$$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta_T(t)e^{-jn\omega_s t}dt = \frac{1}{T_s}$$

所以冲激抽样信号的频谱为: **(参看p122例3-6)**

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

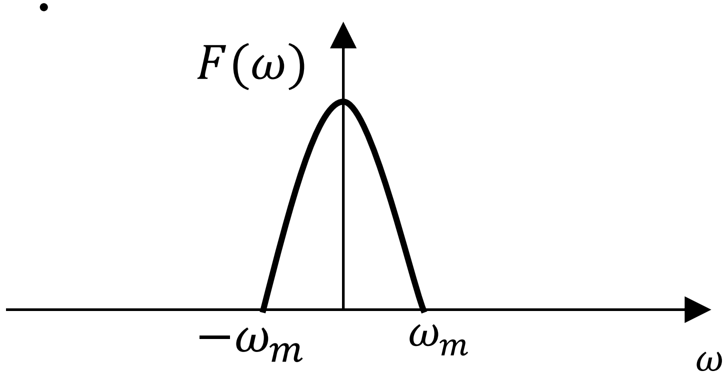
理想抽样的频谱



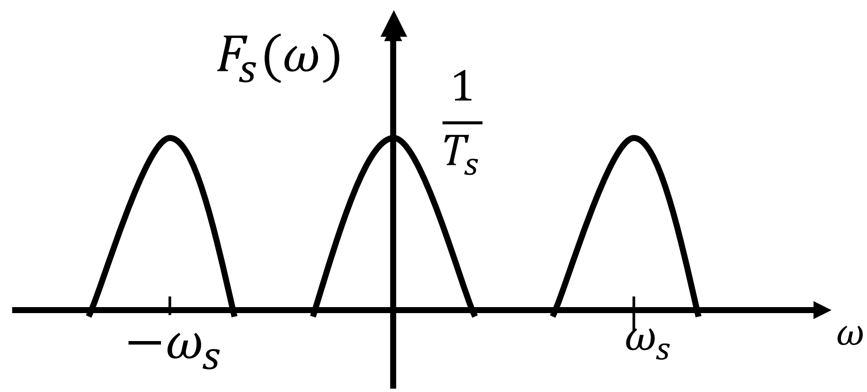
$f(t)$
0
t
FT
$F(\omega)$
1
$-\omega_m$
0
ω_m
ω
$P(t) = \delta_T(t)$
(1)
0
T_s
t
FT
$p(\omega) = \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)$
$-\omega_s$
0
ω_s
ω
时域抽样
频域周期重复
相乘
相卷
$f_s(t)$
0
t
FT
$F_s(\omega)$
$1/T_s$
$-\omega_s$
0
ω_s

理想抽样频谱的特点

上式表明： 由于冲激序列的傅里叶系数为常数，所以$F(\omega)$是以ω_s为周期等幅地重复，如下图所示：



抽样前信号频谱



抽样后信号频谱

从取样信号恢复原始信号

恢复原始信号$f(t)$。设$f(t) \leftrightarrow F(\omega), f_s(t) \leftrightarrow F_s(\omega)$，

则当$F_s(\omega)$通过截止频率为ω_c的理想低通滤波器时，

滤波器的响应频谱为$F(\omega)$，显然滤波器的作用等效于

一个开关函数$H(\omega) = G_{2\omega_c}$同$F_s(\omega)$的相乘。

$$H(\omega) = \begin{cases} \mathrm{T_s} & for \quad |\omega| \le \omega_c \\ 0 & for \quad |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$F(\omega) = F_s(\omega)H(\omega)$$

由时域卷积定理知：$f(t) = f_s(t) * h(t)$

从取样信号恢复原始信号（续一）

由傅里叶变换的对称性可知：

$$H(\omega) \leftrightarrow h(t) = \frac{\mathrm{T_s}\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t)$$

而

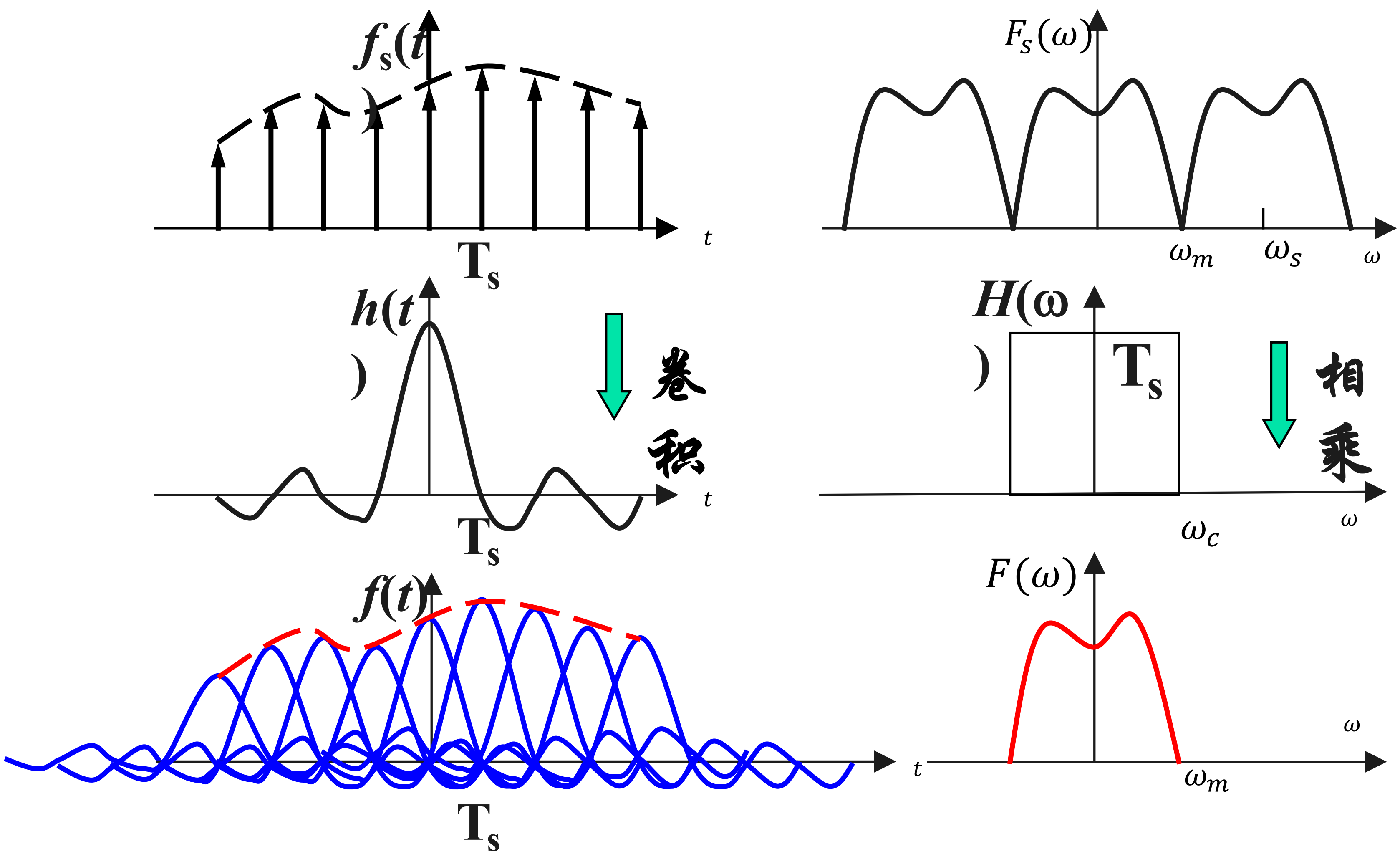
$$\boxed{f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)}$$

（内插公式）

$$f(t) = f_s(t) * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{T_s}\omega_c}{\pi} f(nT_s) Sa[\omega_c(t - nT_s)]$$

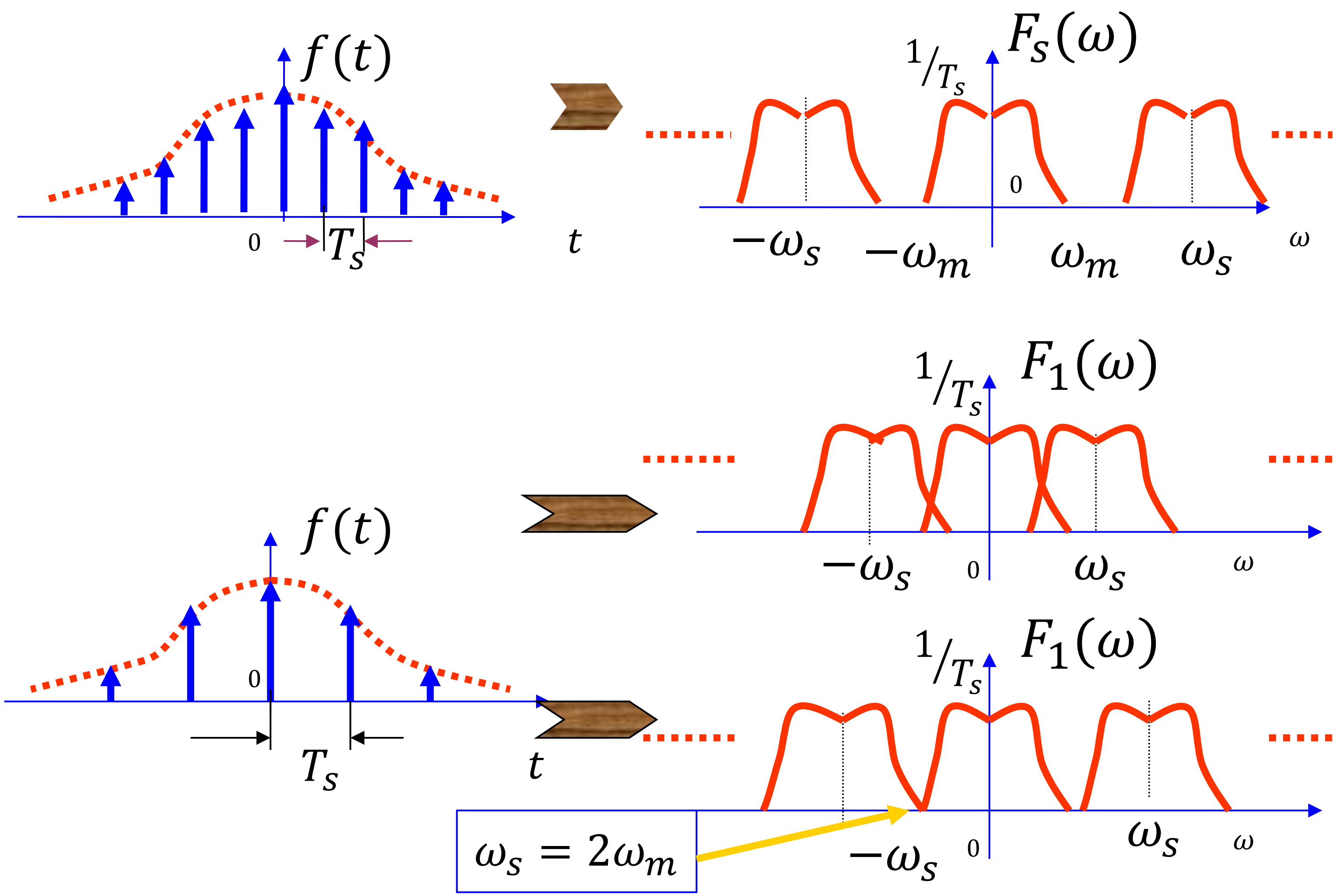
从取样信号恢复原始信号（续二）



从取样信号恢复原始信号（续三）

上式表明$f(t)$可以展开为正交的抽样函数的无穷级数。且级数的系数等于抽样值$f(nT_s)$。这样，若在抽样信号$f_s(t)$的每个抽样值上画一个峰值为$f(nT_s)$的Sa函数的波形，合成的波形就是$f(t)$。另外，我们知道：Sa函数的波形就是理想低通滤波器的冲激响应$h(t)$，这样，若$f_s(t)$通过理想低通滤波器，那么每一个抽样值产生一个冲激响应$h(t)$，这些响应进行叠加便得到$f(t)$，从而达到恢复信号的目的。

混叠现象

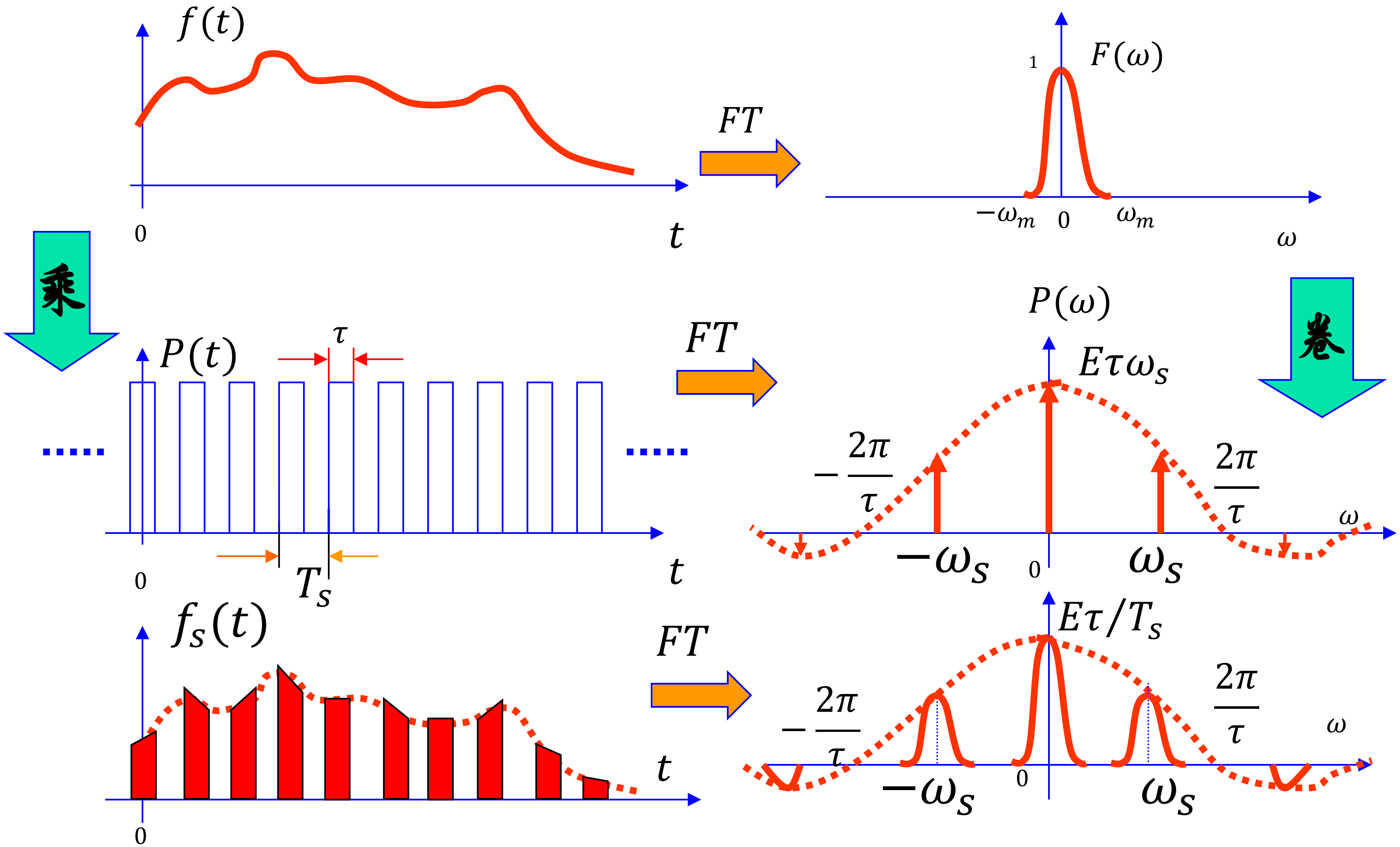


$f(t)$
0
T_s
t
$^1/_{T_s}$
$F_s(\omega)$
0
$-\omega_s$
$-\omega_m$
ω_m
ω_s
ω
$^1/_{T_s}$
$F_1(\omega)$
$-\omega_s$
0
ω_s
ω
$f(t)$
0
T_s
t
$^1/_{T_s}$
$F_1(\omega)$
$\omega_s = 2\omega_m$
$-\omega_s$
0
ω_s
ω

抽样定理

香农取样定理（奈奎斯特取样定理）：一个在频谱中不包含有大于频率f_m的分量的有限频带的信号，由对该信号以不大于$1/2f_m$的时间间隔进行取样的取样值唯一地确定。当这样的取样信号通过其截止频率ω_c满足条件$\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$的理想低通滤波器后，可以将原始信号完全重建。

自然抽样与抽样定理



$f(t)$
0
t
FT
$F(\omega)$
1
$-\omega_m$ 0 ω_m
ω
乘
卷
$P(t)$
τ
T_s
0
t
FT
$P(\omega)$
$E\tau\omega_s$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$-\omega_s$ 0 ω_s
ω
$f_s(t)$
0
t
FT
$E\tau/T_s$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$-\omega_s$ 0 ω_s
ω

自然抽样信号频谱的特点

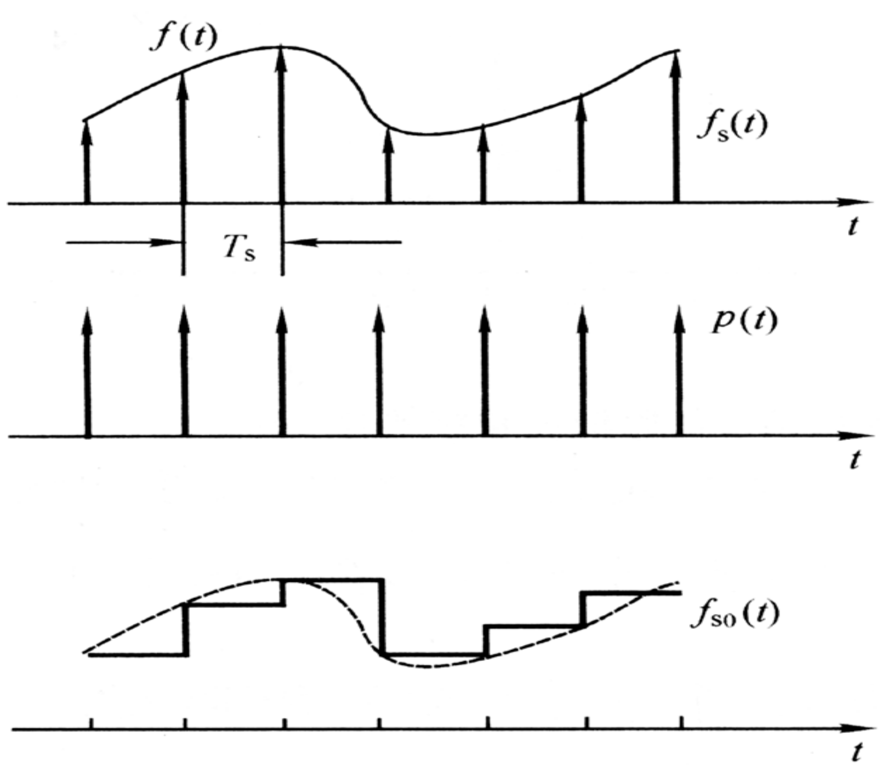
- 抽样后的信号频谱包括有原信号的频谱以及无限个经过平移的原信号的频谱，平移的频率为抽样频率及其各次谐波频率。
- 平移后的频谱幅值随频率而呈Sa函数分布。
- 因矩形脉冲占空系数很小，所以其频谱所占的频带几乎是无限宽。

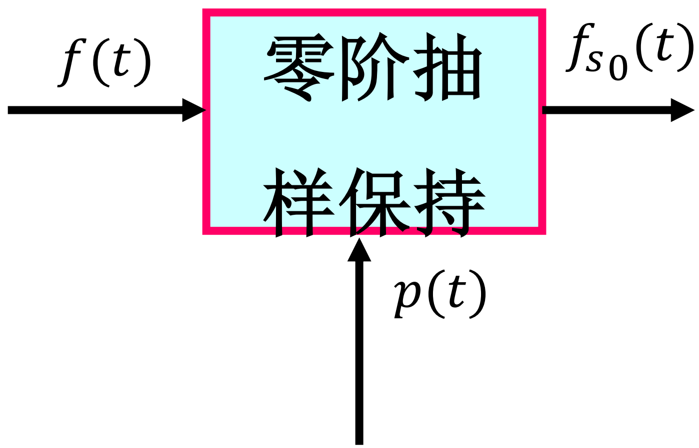
工程实践中的考虑

为了避免产生混叠噪声，对频带为0~f_M的模拟信号，其抽样频率f_s必须满足：$f_s > 2f_M$。这是因为：理想低通滤波器是无法物理实现的，真实的低通滤波器都有一定的“过渡带”，因此取样时需保留一定的“防卫带宽”。

抽样保持

冲激抽样的困难：时宽窄，幅度大，只是一种理想的波形，硬件电路无法实现。因此实际上常采用零阶保持抽样。

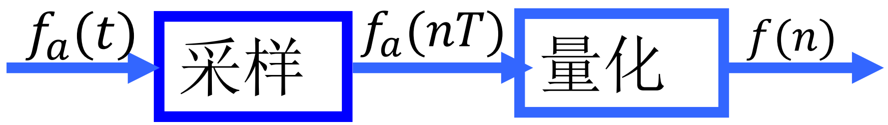


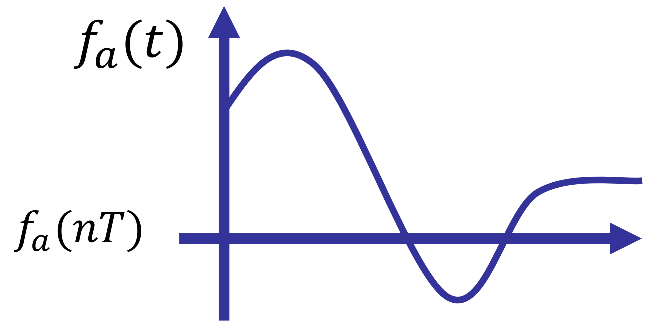


定义：用这个内插器时，每个样本值将在采样周期中保持到收到下一个样本值为止. 用阶梯信号近似表示连续函数。

离散时间信号的表示

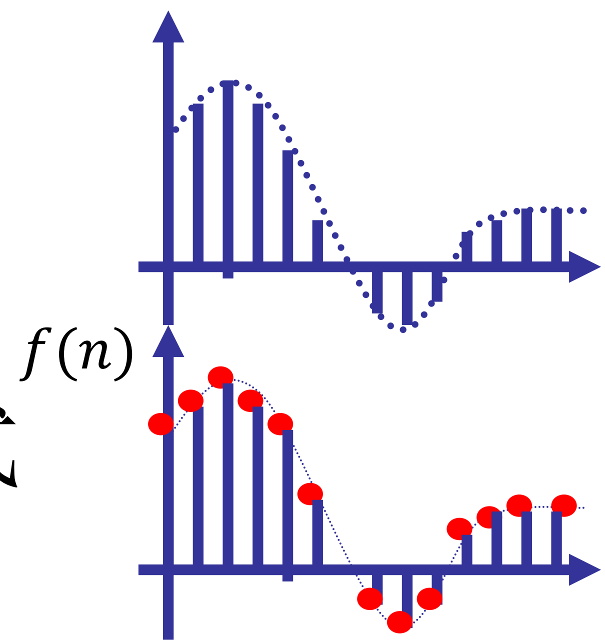
1.由 $f(t)$ 到 $f(n)$





2.表示方法 $\{f(n)\}$

- 序列形式
- 闭合形式
- 表格形式及图形形式
- 单位序列组合形式

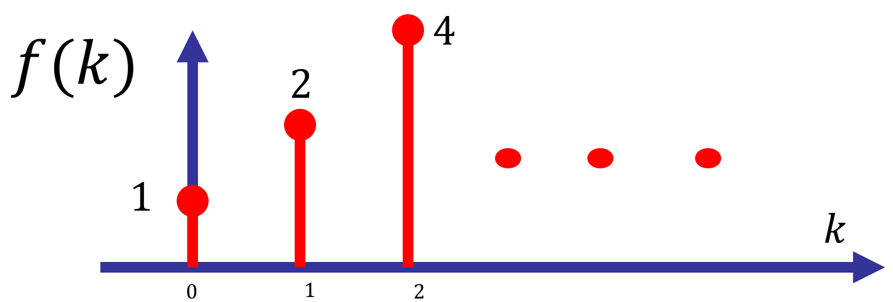


例1

已知序列$f(k)=\{1,2,4,8,...\}$，试用上述几种方法表示之。

解: 1. 闭合形式：$f(k)=2^k u(k)$

2.图形形式



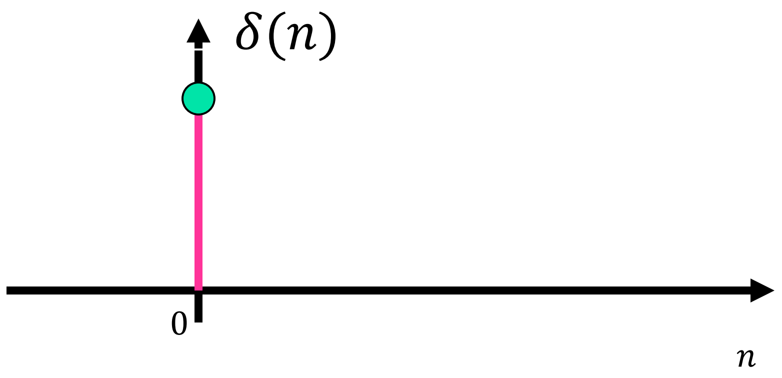
3.表格形式

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**. .**
***f*(*k*)**	**1**	**2**	**4**	**8**	

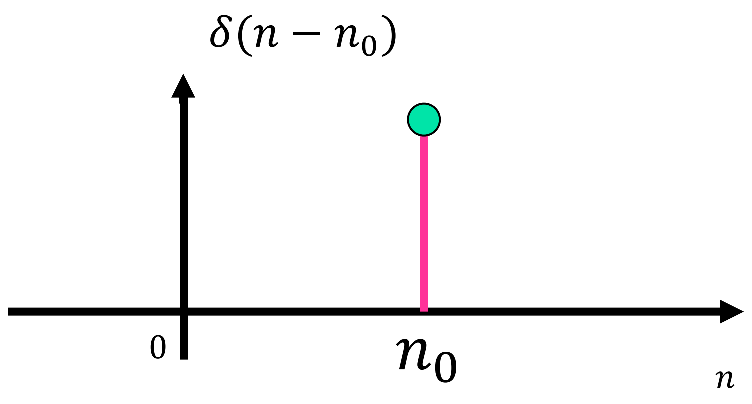
几种常用的离散信号

▪ 单位函数

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}$$



$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & (n=n_0)\\ 0 & (n\neq n_0)\end{cases}$$



冲激信号的性质

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

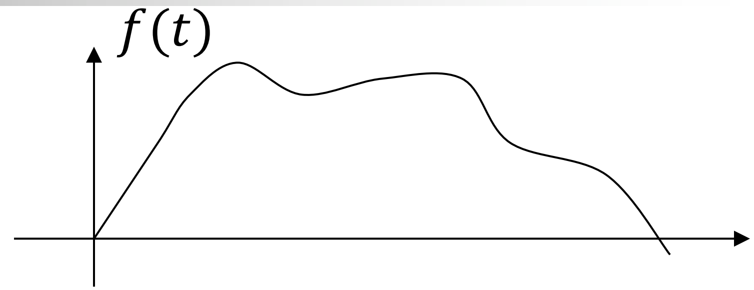
$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

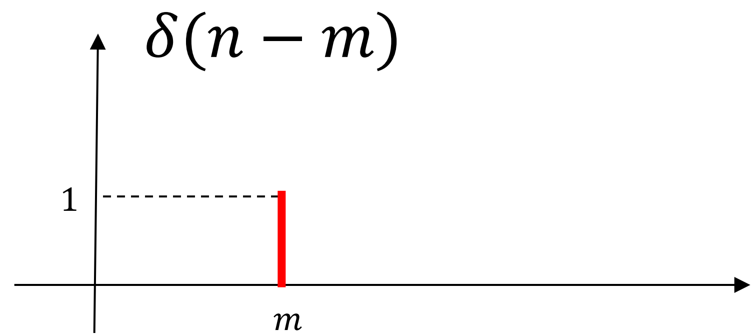
$$f(n)\delta(n) = f(0)\delta(n)$$

$$f(n)\delta(n-n_0) = f(n_0)\delta(n-n_0)$$

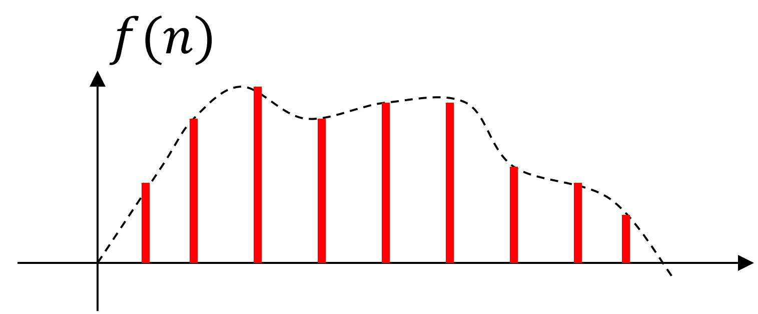
信号的分解

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$



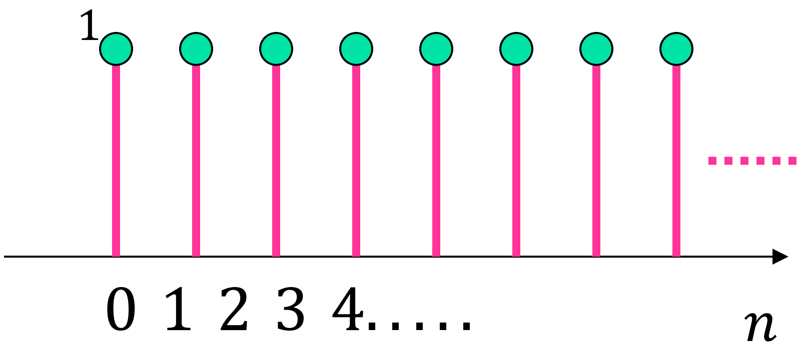


$$f(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m)$$



▪ 单位阶跃序列

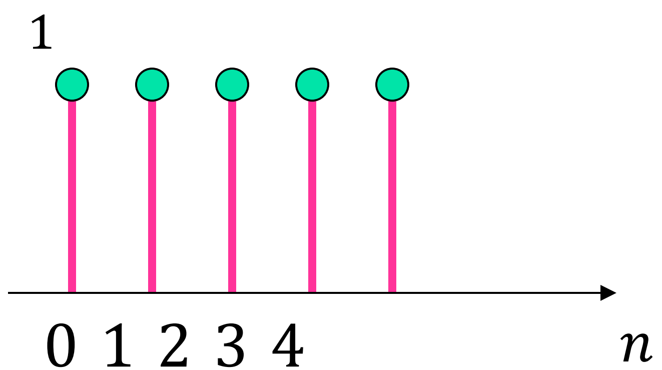
$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$



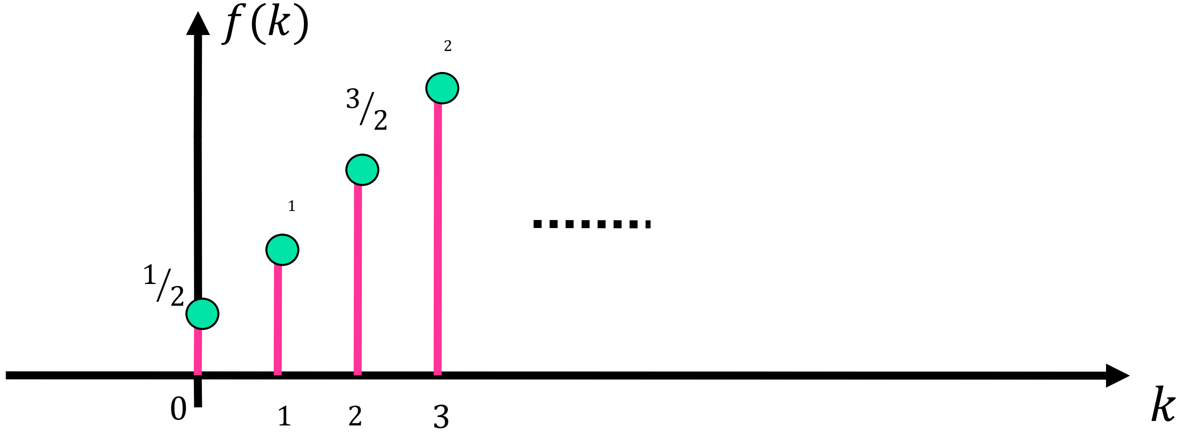
▪ 矩形序列

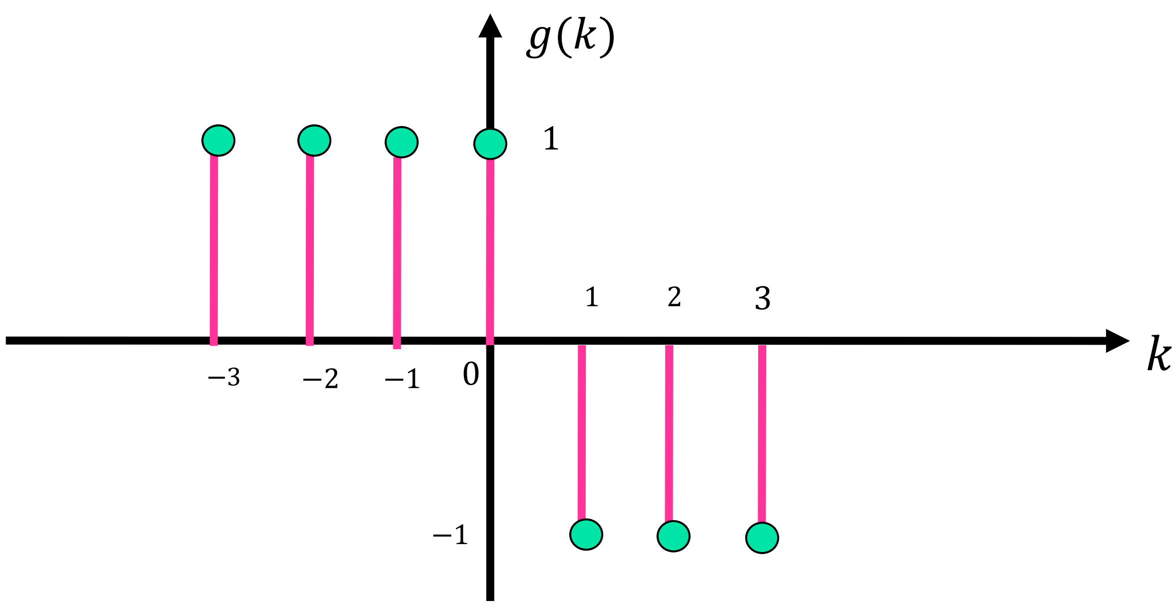
$$G_N(n)=\begin{cases}1 & (0\leq n\leq N-1)\\ 0 & (n<0\ \text{或} n\geq N)\end{cases}$$

$$=u(n)-u(n-N)$$



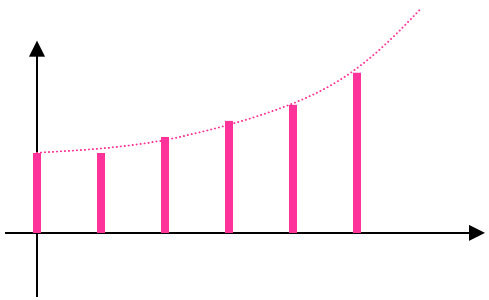
练习：写出图示序列的函数表达式。



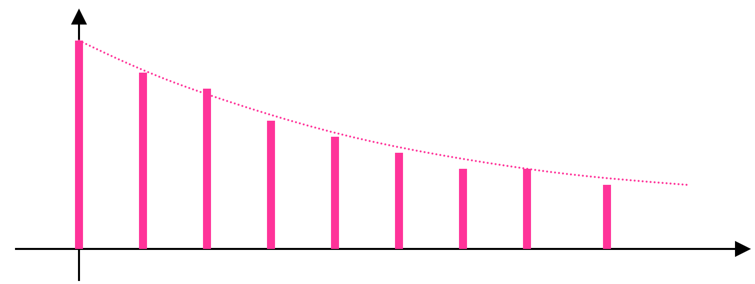


▪ 指数序列 $f(n) = a^n u(n)$

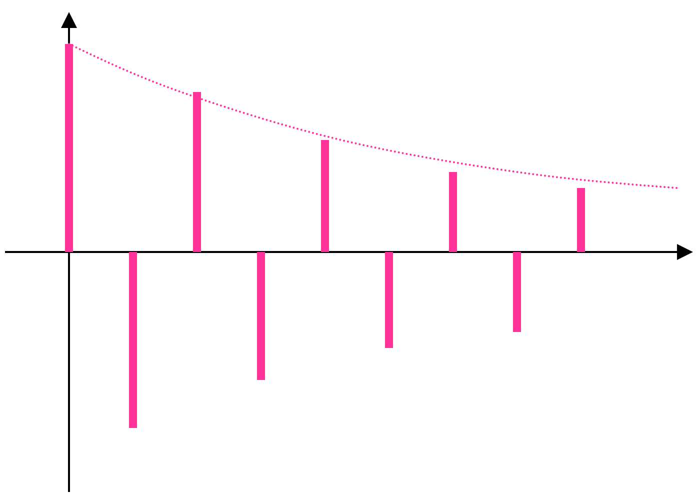
$a > 1$



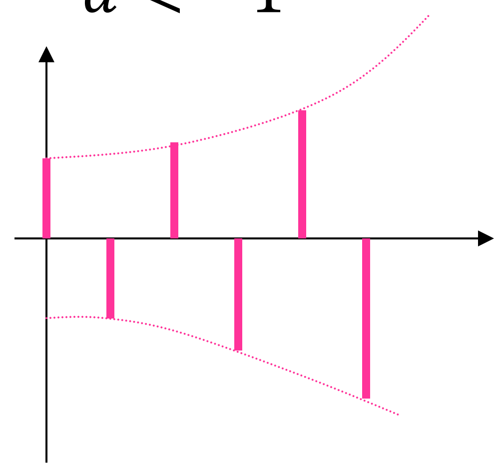
$0 < a < 1$



$-1 < a < 0$



$a < -1$

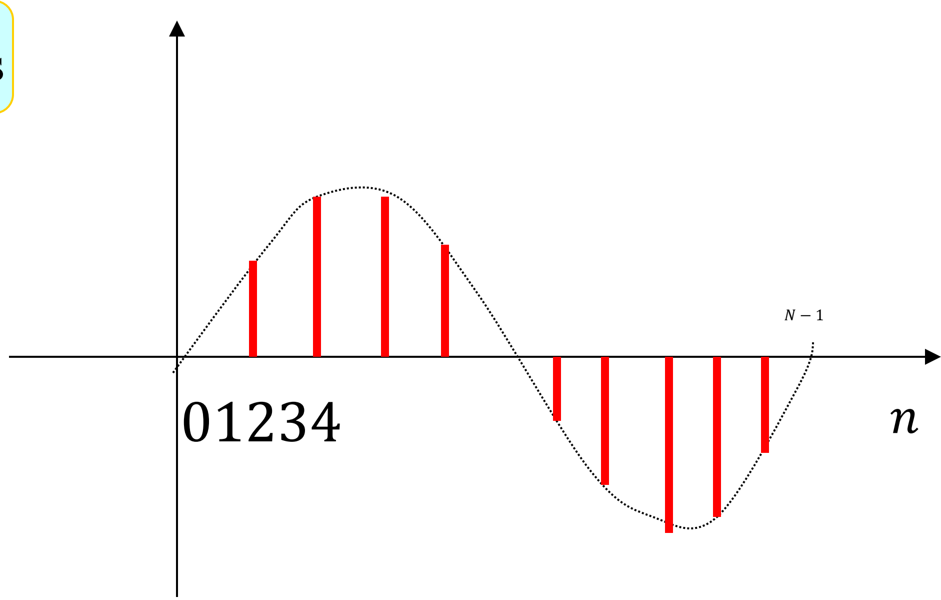


▪ 正弦序列

$$f(t) = A\sin\Omega_0 t$$

t = nTs

$$f(n) = A\sin(\Omega_0 n T_s) \\ = A\sin(n\omega_0)$$



▪ 复指数序列

$$f(n) = e^{jn\omega_0} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0)$$

2.序列的分类

(1)双边无限序列：$f(n)$对所有的n取值。

若$f(n)=f(-n)$——偶对称

$f(n)=-f(-n)$——奇对称

$f(n)=f(n+N)$——周期序列　N为某整数

(2)有限序列：$f(n)$只在 $n_1<n<n_2$ 时有值。

(3)单边序列：右边序列、左边序列

(4)有始序列(因果序列，右边序列)：若当$n<0$时，$f(n)=0$

例1 判断下列序列是否为周期序列。

$$1. x(n) = A\cos(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8})$$

$$2. x(n) = e^{j(\frac{n}{8}-\pi)}$$

$$解: 1. \because x(n+N) = A\cos[\frac{3\pi}{7}(n+N) - \frac{\pi}{8}]$$

$$= A\cos(\frac{3\pi}{7}n + \frac{3\pi}{7}N - \frac{\pi}{8})$$

若 $\frac{3\pi}{7}N$ 是 2π 的整数倍，$x(n+N) = x(n)$, 则满足此条件的最小的$N = 14$.

$x(n) = A\sin(n\omega_0 + N\omega_0 + \phi)$, 周期为$N = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$a.$ 当$N = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$为整数时, 如$N = 10$, 该序列是周期为$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$的周期序列。

$b.$ 若$N = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \neq$ 整数 $=$ 有理数, 如$N = 7.5$

$N' = N \times 2 = 15$, 则正弦序列仍是周期序列,

但周期大于$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

$c.$ 若$N =$ 无理数, 如$N = 6\sqrt{2}$, 此时为非周期序列.

$$2.\ x(n+N)=e^{j\left(\frac{n}{8}+\frac{N}{8}-\pi\right)}=e^{j\left(\frac{n}{8}-\pi\right)}e^{j\frac{N}{8}}=x(n)e^{j\frac{N}{8}}$$

若$x(n+N)=x(n)$，则$e^{j\frac{N}{8}}=1, \frac{N}{8}=2k\pi$

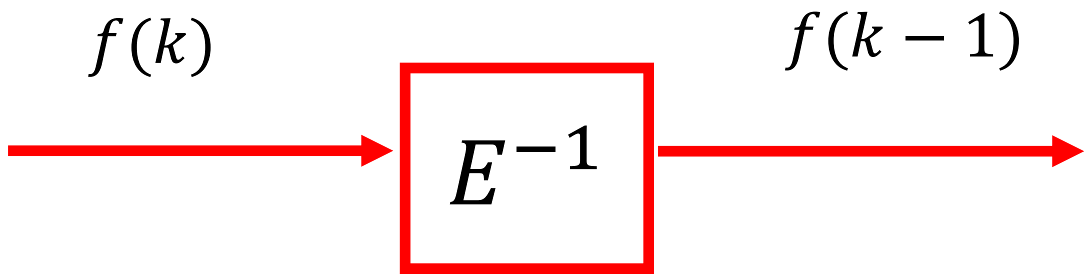
不是周期序列。

离散信号的变换和运算

变换和运算	表达式
信号左移	$y(k) = f(k+n)$
信号右移	$y(k) = f(k-n)$
信号反转	$y(k) = y(-k)$
信号相加	$y(k) = f_1(k) + f_2(k)$
信号相乘	$y(k) = f_1(k) f_2(k)$

移序算子

左移：$Ef(k)=f(k+1)\therefore f(k+m)=E^{m}f(k)$
右移：$E^{-1}f(k)=f(k-1)\therefore f(k-m)=E^{-m}f(k)$



E算子:超前算子;$\dfrac{1}{E}$算子:滞后算子

信号累加 $y(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)$

向前差分 $y(k)=\Delta f(k)=f(k+1)-f(k)$

向后差分 $y(k)=\nabla f(k)=f(k)-f(k-1)$

信号卷积 $y(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)f_2(k-i)$

差分算子

序列$x(n)$的后向差分

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$\nabla^2 x(n) = \nabla x(n) - \nabla x(n-1)$$

$$= x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)$$

$$\nabla^3 x(n) = \nabla^2 x(n) - \nabla^2 x(n-1)$$

$$= x(n) - 3x(n-1) - 3x(n-2) - x(n-3)$$

典型序列的差分

$$\nabla u(n) = u(n) - u(n-1) = \delta(n) \rightarrow \frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$\nabla n = n - (n-1) = 1 \rightarrow \frac{dt}{dt} = 1$$

$$\nabla n^2 = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1 \rightarrow \frac{dt^2}{dt} = 2t$$

$$\nabla \sin n\pi = \sin n\pi - \sin(n-1)\pi = 2\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

在连续和离散之间做某种近似

- 在连续和离散之间作某种近似

$$y(t) \Leftrightarrow y(n)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{T_s}[y(n+1) - y(n)]$$

从连续系统到离散系统的建模

连续时间系统的数学模型：

$$C_0\frac{d^n r(t)}{dt^n}+C_1\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\ldots C_{n-1}\frac{dr(t)}{dt}+C_n r(t)$$
$$=E_0\frac{d^m e(t)}{dt^m}+E_1\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\ldots E_{m-1}\frac{de(t)}{dt}+E_m e(t)$$

基本运算：各阶导数，系数乘，相加

离散系统的数学模型

- 输入是离散序列及其时移函数

  $x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots.$

- 输出是离散序列及其时移函数

  $y(n), y(n-1), y(n-2), \ldots.$

- 系统模型是输入输出的线性组合

  系数乘、相加和延时单元

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \, y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

离散时间系统的数学描述—差分方程

离散时间系统用差分方程来描述。

差分方程表示了离散序列中相邻几个数据点之间的数学关系。

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

差分方程的阶:为响应的自变量的序号最高值与最低值之差。

差分方程中序列的自变量n不一定表示时间。

线性移不变离散时间系统

1.线性: 若$T[x_1(n)]=y_1(n)$， $T[x_2(n)]=y_2(n)$

则$T[ax_1(n)+bx_2(n)]$

$$=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$

当初始条件不为零时，如果满足(1)分解性；(2)零输入线性,零状态线性。则也称此系统是线性的。

2.移不变（时不变）:

若$T[x(n)]=y(n)$，则$T[x(n-k)]=y(n-k)$

例2 判断下列系统是否为线性，移不变。

$$1.\ y(n) = 2x(n) + 3$$

$$2.\ y(n) = x(n)\sin\left(\frac{2\pi}{7}n + \frac{\pi}{6}\right)$$

答案：

1.非线性，移不变

2.线性，移变

例3 判断下列系统是否为线性，移不变的。

$1.\ y(n) = 0.5x(n) + 0.25nx(n-1)$

$2.\ y(n) = 0.5x(n) + 0.25x(n-1)$

$3.\ y(n) = 0.5x^2(n) + 0.25nx(n-1)$

$4.\ y(n) = 0.5x^2(n) + 0.25x(n-1)$

在描述实际的连续时间系统的微分方程中，激励函数导数的阶数m一般常小于响应函数导数的阶数n。

在描述实际的离散时间系统的差分方程中，一般不出现m>n的情况。例如若有

$$i(k) = e(k+1) + e(k)$$

则说明现在的响应决定于未来的激励。

在描述因果离散时间系统的差分方程中，激励函数的最高序号不能大于响应函数的最高序号。

例4 如果在第n个月初向银行存款$x(n)$元，月息为a，每月利息不取出，试用差分方程写出第n月初的本利和$y(n)$。

解:设第n个月初的本利$y(n)$包括下列三个方面:

(1)第$(n-1)$月的本金：$y(n-1)$

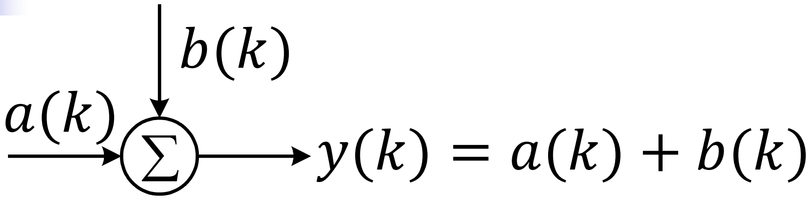
(2)第$(n-1)$月的利息：$ay(n-1)$

(3)第(n)个月的新增存款：$x(n)$

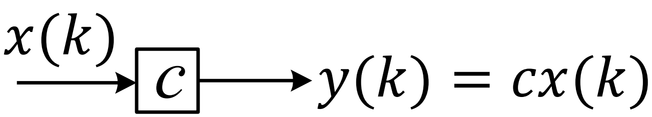
故 $y(n)=(1+a)y(n-1)+x(n)$

即 $y(n)-(1+a)y(n-1)=x(n)$

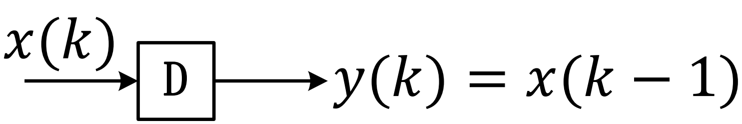
离散时间系统的模拟



加法器

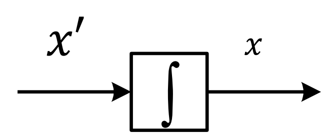


乘法器



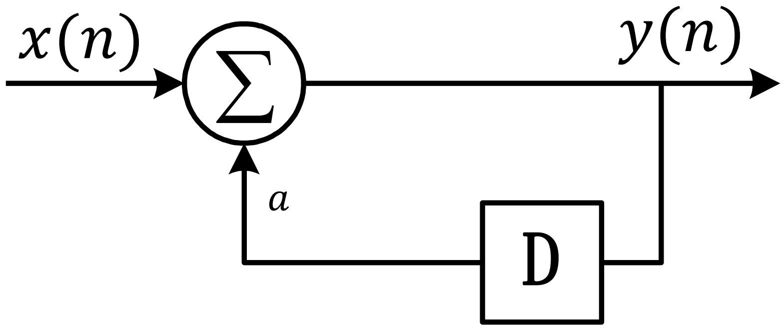
延时器

连续时间系统：

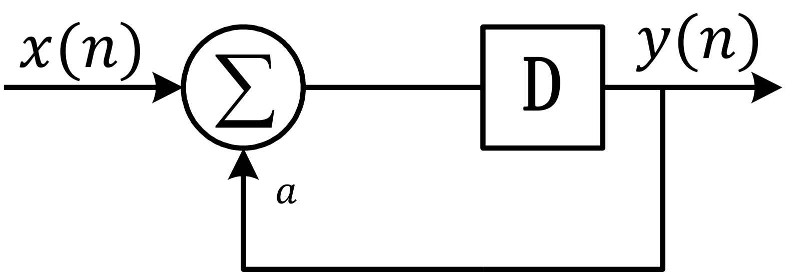


积分器

一阶离散时间系统的模拟框图

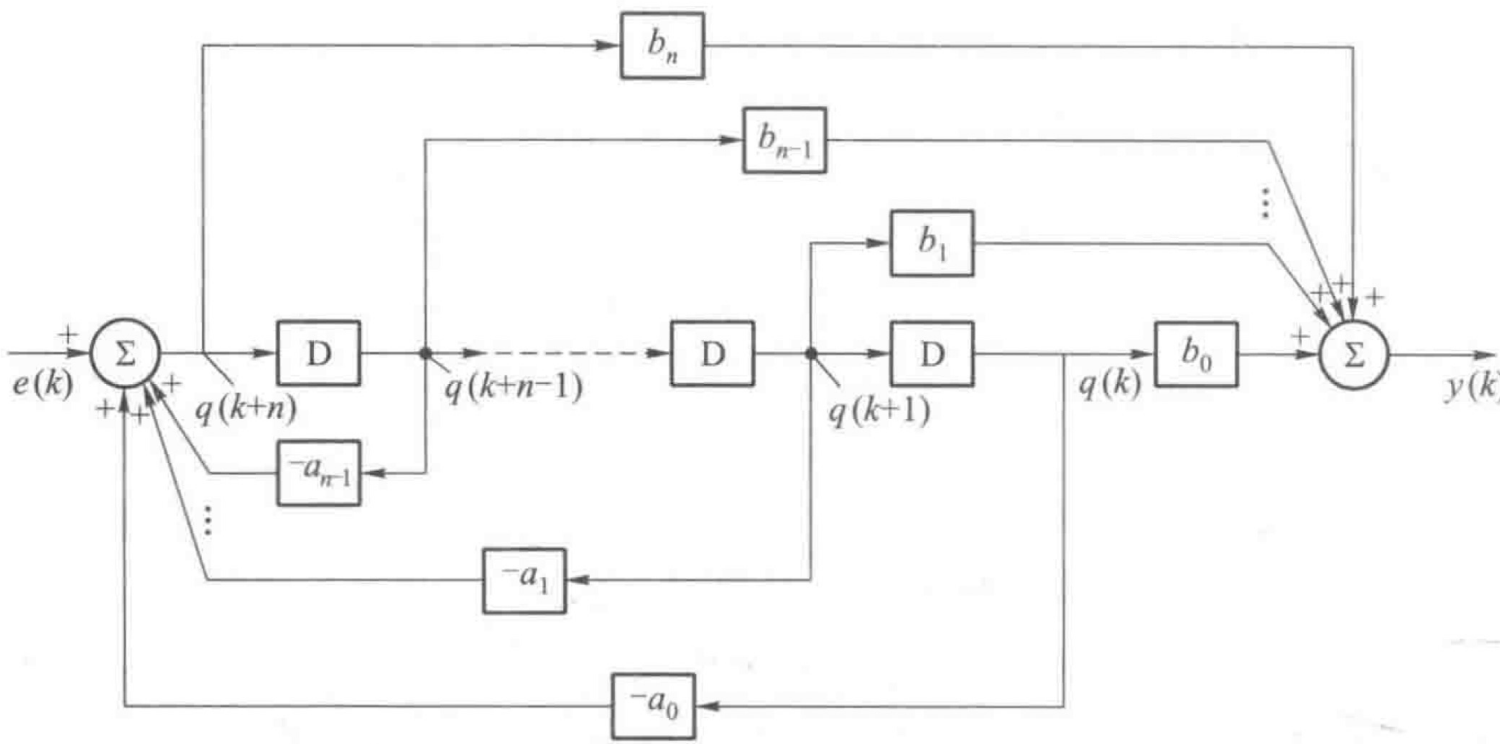


$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$



$$y(n+1) - ay(n) = x(n)$$

n阶离散时间系统的模拟框图



小结

- 典型离散时间序列
- 线性移不变离散时间系统
- 差分方程
- 离散时间系统的模拟框图

课外作业

阅读：7.1,7.3节；预习：7.2节

作业： 7.13　7.15

常系数差分方程的求解

- 迭代法
- 时域经典解法
- 离散卷积法：利用齐次解得零输入解，再利用卷积和求零状态解
- 变换域法（Z变换法）
- 状态变量分析法

求解差分方程的迭代法

- 当差分方程阶次较低时，常用此法

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \qquad x(n) = \delta(n)$$

$$n = 0 \quad y(0) = ay(-1) + x(0) = 0 + \delta(n) = 1$$

$$n = 1 \quad y(1) = ay(0) + x(1) = a + 0 = a$$

$$n = 2 \quad y(2) = ay(1) + x(2) = a.a + 0 = a^2$$

$$\vdots$$

$$n = k \quad y(k) = ay(k-1) + x(k) = a^k$$

$$\therefore \quad y(n) = a^n u(n)$$

求解差分方程的时域经典解法

差分方程的一般形式：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

差分方程的特征方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^{N-k} = 0$$

有N个特征根α_j：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha_j^{N-k} = 0$$

齐次解的形式

(1)特征根是不等的实根：α_1，α_2， $\cdots$，α_N

$$y_h[n] = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + \cdots + C_N\alpha_N^n$$

(2)特征根是等实根$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_K = \alpha$

$$y_h[n] = C_1\alpha^n + C_2 n\alpha^n + \cdots + C_k n^{K-1}\alpha^n$$

(3)特征根是成对共轭复根$\alpha_{1,2} = a \pm jb = \rho e^{\pm j\Omega_0}$

$$y_h[n] = C_1\rho^n \cos n\,\Omega_0 + C_2\rho^n \sin n\,\Omega_0$$

特解的形式

(1)强迫项为n^K的多项式

则特解为：$D_1 n^K + D_2 n^{K-1} + \cdots + D_{K+1}$

(2)强迫项含有α^n，且α不是齐次特征根

则特解为：$D\alpha^n$

(3)强迫项含有α^n，且α是单次齐次特征根

则特解为：$D_1 n\alpha^n + D_2\alpha^n$

(4)强迫项含有α^n，且α是K次齐次特征根

则特解为：$(D_1 n^K + D_2 n^{K-1} + \cdots + D_{K+1})\alpha^n$

完全解的求取

- 完全解=齐次解+特解
- 代入边界条件求出待定系数，得到完全解的闭式

例6

已知某二阶线性时不变离散时间系统的动态方程为：

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=f(n)$$

初始条件$y(0)=0$，$y(1)=-1$，输入信号$f(n)=2^n u(n)$，求系统的完全响应。

解：（1）求齐次解$y_h(n)$，差分方程的特征方程为：

$$r^2-5r+6=0$$

特征根为：$r_1=2$，$r_2=3$

齐次解为：$y_h(n)=C_1 2^n+C_2 3^n$

（2）由输入信号的形式，设方程的特解为：$y_p(n)=An2^n$

代入原方程，可得：$A=-2$

（3）方程的全解为：$y(n)=-2n2^n+C_1 2^n+C_2 3^n$

代入初始条件，可得：$C_1=-3$，$C_2=3$

所以，方程的解为：$y(n)=-n2^{n+1}-3\cdot 2^n+3^{n+1}$

经典法的不足之处

- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解
- 若差分方程的激励信号较复杂，则难以处理
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念

和连续时间系统类似，可以将系统的全响应分解为零状态和零输入响应两个部分的叠加进行求解

离散系统的零输入响应

$\because x(k) = 0$

$\therefore a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_N y(k-N) = 0$

应用移序算子

（$a_0 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_N E^{-N})y(k) = 0$

例7

已知某线性时不变系统的动态方程为：

$$y(k)-0.5y(k-1)+y(k-2)-0.5y(k-3)=f(k)$$

系统的初始状态为：$y(-1)=3$，$y(-2)=-1$，$y(-3)=8$

，求系统的零输入响应

解：系统的特征方程为：$r^3-0.5r^2+r-0.5=0$

系统的特征根为：$r_1=0.5$，$r_{2,3}=\pm j=e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

$$\therefore y_{z.i.r}(k)=c_1(\frac{1}{2})^k+c_2\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)+c_3\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

代入初始条件，可得：$c_1=1$，$c_2=0$，$c_3=5$

离散时间系统的单位样值响应

求系统单位样值响应的方法

- 一般时域经典方法求$h(n)$
- 将$\delta(n)$转化为起始条件，于是齐次解，即零输入解就是单位样值响应$h(n)$
- 在$n=0$时，接入的激励转化为起始条件
- 在$n\neq 0$时，接入的激励用线性时不变性来进行计算

例8

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

$$\alpha=1$$

三重根

$$y(n)=(C_1n^2+C_2n+C_3)(+1)^n$$

齐次解

$$x(0)=1,\quad x(-1)=0,\quad x(-2)=0,\cdots$$

确定初始条件

$$h(0)=1,\quad h(-1)=0,\quad h(-2)=0,\cdots$$

$$C_1=\frac{1}{2}\quad C_2=\frac{3}{2}\quad C_3=1$$

$$h(n)=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)u(n)$$

例9

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

只考虑$x(n)$激励

$\alpha_1=2 \quad \alpha_2=3$

$$h_1(n)=C_1 2^n+C_2 3^n$$

$h(0)=1, \quad h(-1)=0,\cdots$

$C_1=-2, \quad C_2=3$

$$h_1(n)=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)$$

只考虑$-3x(n-2)$激励

$$\begin{aligned}h_2(n)&=-3h_1(n-2)\\&=-3[3^{n-1}-2^{n-1}]u(n-2)\end{aligned}$$

利用LTI

$$\begin{aligned}h(n)&=h_1(n)+h_2(n)\\&=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)-3(3^{n-1}-2^{n-1})u(n-2)\end{aligned}$$

例10

已知因果系统是一个二阶常系数差分方程，并已知当 $x(n)=u(n)$时的响应为：

$$g(n)=(2^n+3\cdot 5^n+10)u(n)$$

(1)求系统的单位样值响应

(2)若系统为零状态，求此二阶差分方程

解：设此二阶系统的差分方程的一般表达式为：

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)=\sum_{r=0}^{2}b_rx(n-r)$$

例10（续）

特征方程：$r^2+a_1r+a_2=0$

$$\because \delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$\therefore h(n)=g(n)-g(n-1)$$

$$h(n)=14\delta(n)+\left(\frac{1}{2}2^n+\frac{12}{5}5^n\right)u(n-1)$$

特征根为：$r_1=2$，$r_2=5$

$$r^2+a_1r+a_2=(r-2)(r-5)=r^2-7r+10$$

$h(0)=14$，$h(1)=13$，$h(2)=62$

代入方程：

$$h(n)-7h(n-1)+10h(n-2)=b_0\delta(n)+b_1\delta(n-1)+b_2\delta(n-2)$$

可得：$b_0=14$，$b_1=-85$，$b_2=111$

$$\therefore y(n)-7y(n-1)+10y(n-2)$$

$$=14x(n)-85x(n-1)+111x(n-2)$$

系统的因果性

- 因果性：输入变化不领先于输出变化必要条件

$$n < 0 \quad h(n) = 0$$

例7：已知某系统的 $h(n) = a^n u(n)$

问：它是否是因果系统?

$$n < 0 \quad u(n) = 0$$
$$\because h(n) = a^n u(n) = 0$$

是因果系统

卷积和

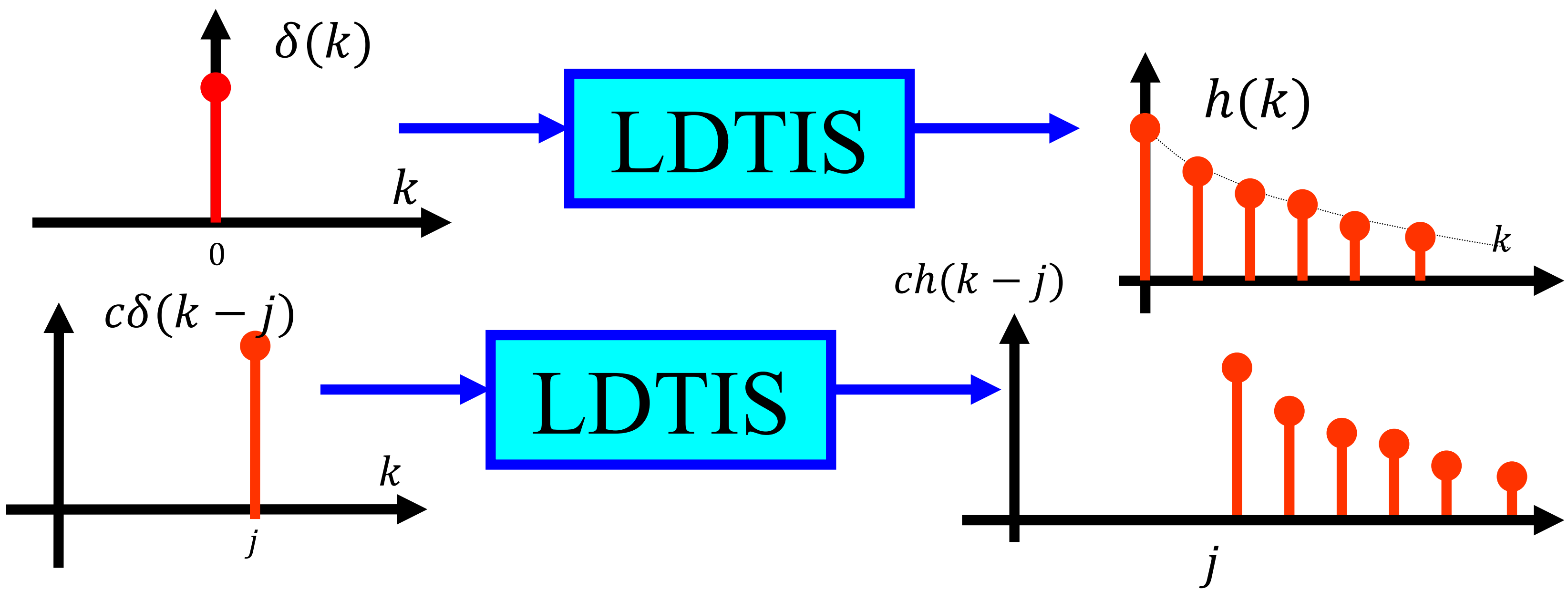
$$LTIS: y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$LDTIS: y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k)h(n-k)$$

∵ 任意序列都可以表示为加权、移位的单位取样序列之和：

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

卷积和（续）



$$\delta(k) \rightarrow h(k)$$
$$c\delta(k) \rightarrow ch(k)$$
$$c\delta(k-j) \rightarrow ch(k-j)$$

离散系统的零状态响应

$$\therefore y_{zsr}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j)h(k-j)$$

通常将上式记为：

$$y_{zsr}(k) = x(k) * h(k)$$

卷积和

离散系统的全响应为：

$$y(k) = y_{zir}(k) + y_{zsr}(k)$$

卷积和的性质

1. 交换律：$e(k) * h(k) = h(k) * e(k)$

2. 分配律:

$$[e_1(k) + e_2(k)] * h(k) = e_1(k) * h(k) + e_2(k) * h(k)$$

3. 结合律：

$$[e(k) * h_1(k)] * h_2(k) = e(k) * [h_1(k) * h_2(k)]$$

4. 卷积和的差分

$$\Delta y(k) = \Delta e(k) * h(k) = e(k) * \Delta h(k)$$

$$\nabla y(k) = \nabla e(k) * h(k) = e(k) * \nabla h(k)$$

卷积和的性质（续一）

4. 卷积和的求和

$$\sum_{j=0}^{k} y(j) = [\sum_{j=-\infty}^{\infty} e(j)] * h(k) = e(k) * [\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)]$$

5. 与单位序列的卷积：

$$e(k) * \delta(k) = e(k)$$

$$e(k) * \delta(k-j) = e(k-j)$$

$$e(k) * \delta(k+j) = e(k+j)$$

$$e(k-j_1) * \delta(k-j_2) = e(k-j_1-j_2)$$

卷积和的性质（续二）

6. 位移序列的卷积：

$$
\begin{aligned}
y(k-j) &= e(k) * h(k-j) \\
&= e(k-j) * h(k) \\
&= e(k-j_1) * h(k-j+j_1)
\end{aligned}
$$

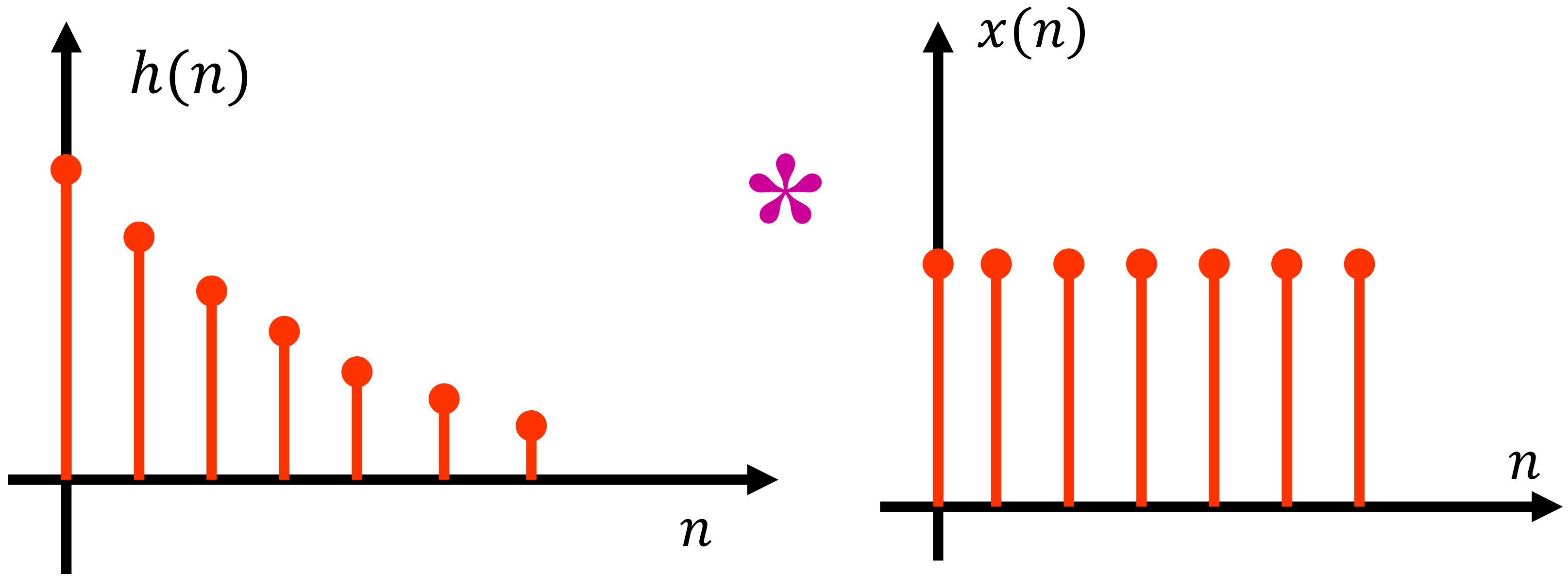
$$
\begin{aligned}
y(k+j) &= e(k) * h(k+j) \\
&= e(k+j) * h(k) \\
&= e(k+j_1) * h(k+j-j_1)
\end{aligned}
$$

卷积和的计算方法

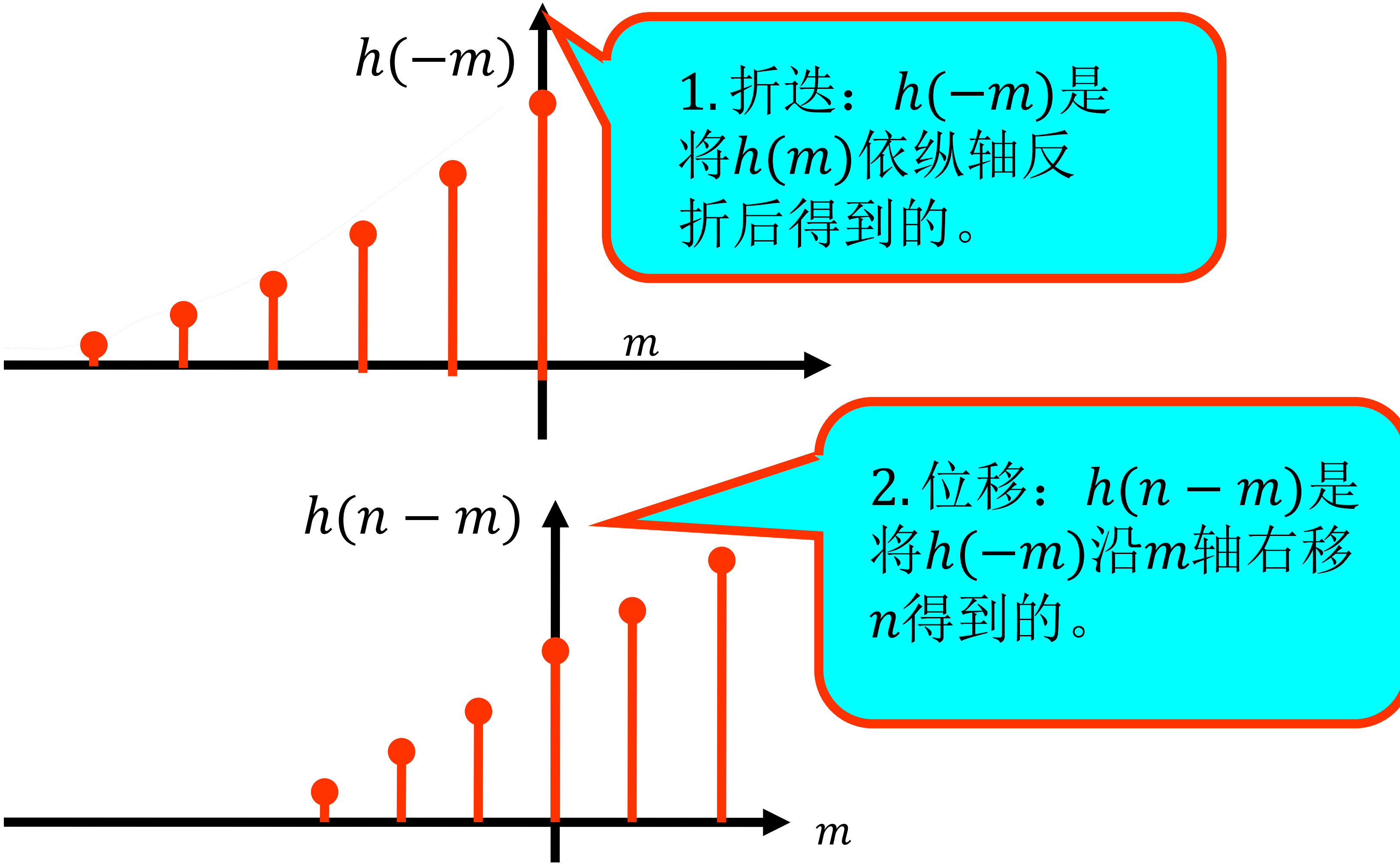
- 图解法
- 按公式计算
- 序列阵表格法
- 利用单位样值序列信号求卷积
- 利用卷积的性质求卷积
- 查表法

例12：图解法计算卷积和

某系统的单位样值响应是
$h(n) = a^n u(n)$, 其中$0 < a < 1$, 若激励信号为
$G_N(n)$即$x(n) = u(n) - u(n-N)$, 求响应$y(n)$?



例12（续一）



例12（续二）

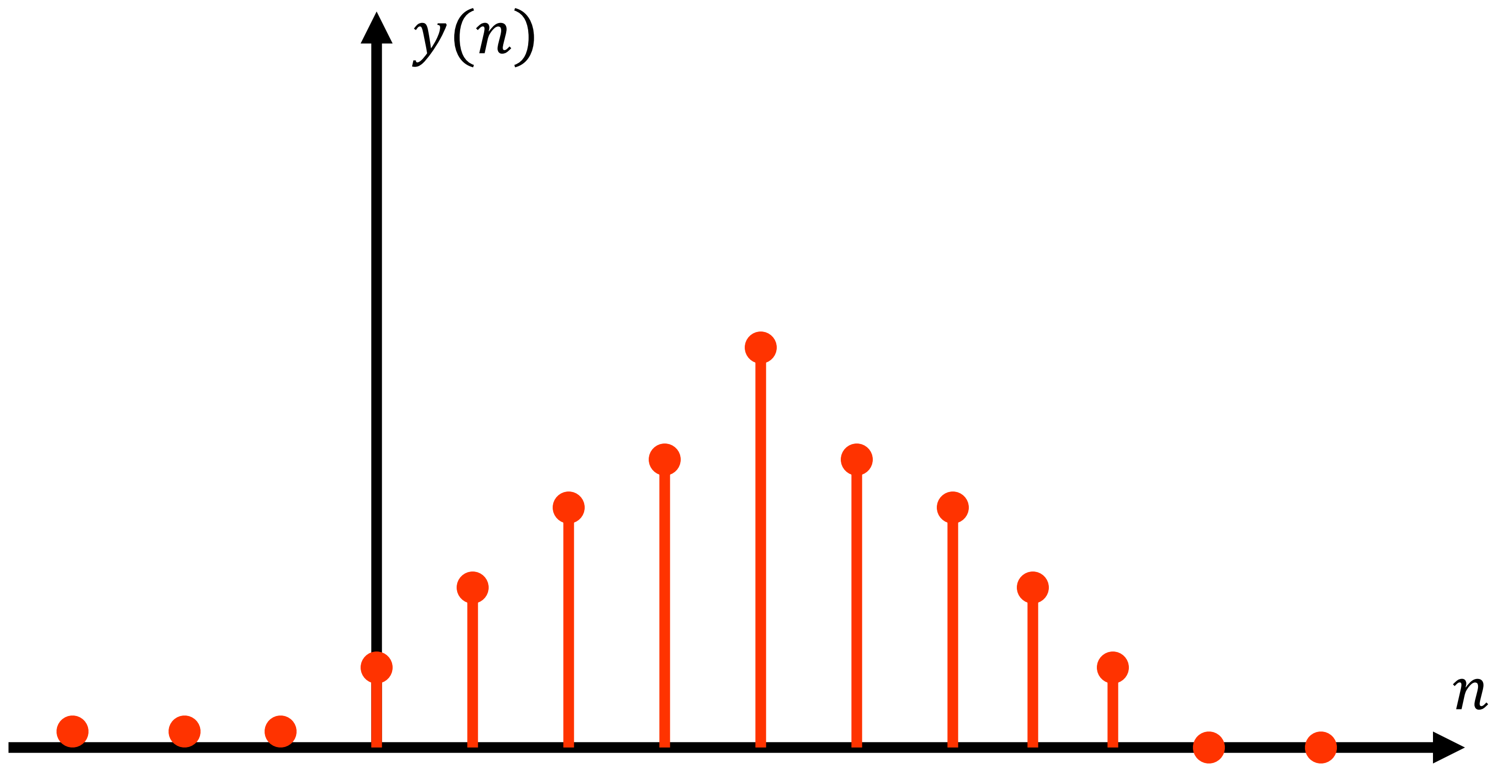
3. 相乘：如$n = 4$时$h(4-m)$

$$y(4) = x(0)h(4) + x(1)h(3) + x(2)h(2) + x(3)h(1) + x(4)h(0) = \sum_{m=0}^{4} x(m)h(4-m)$$

4. 求和式

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \sum_{m=0}^{n} a^{n-m} = a^n \cdot \dfrac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} & 0 \le n < N-1 \\ \sum_{m=0}^{N-1} a^{n-m} = a^n \cdot \dfrac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} & n \ge N-1 \end{cases}$$

例12（续三）



小结

- 线性差分方程的解法
- 零输入响应
- 单位函数响应
- 卷积和
- 零状态响应

课外作业

阅读：7.4-7.6；预习：8.1-8.3

作业: 7.27, 7.29