信号与系统

第五章:连续时间系统的复频域分析

傅里叶变换法的缺陷

- 一般只能处理符合狄利克雷条件的信号，而有许多信号往往是不符合绝对可积条件的
- 在求取时域中的响应时，利用傅里叶反变换要进行对频率自负无穷大到正无穷大的无穷积分，通常这个积分的求解是比较困难的。

拉普拉斯变换对傅里叶变换的改进

有几种情况不满足狄利克雷条件： ■ $u(t)$ ■ 增长信号$e^{at}(a > 0)$ ■ 周期信号$cos(\omega_1 t)$	若乘一衰减因子 $e^{-\sigma t}$，其中σ为任意实数，使$f(t) \cdot e^{-\sigma t}$收敛，则可以满足狄里赫利条件： $u(t)e^{-\sigma t}$ $e^{at} \cdot e^{-\sigma t} \quad (\sigma > a)$ $e^{-\sigma t}\cos(\omega_1 t)$

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$FT[e^{-\sigma t}f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt$$

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt\ldots\ldots(1)$$

$$e^{-\sigma t}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

双边拉普拉斯变换（广义傅里叶变换）

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)}\,d\omega\ldots\ldots.(2)$$

$$if.s=\sigma+j\omega,then,d\omega=\frac{ds}{j}$$

双边
$$\begin{cases}\therefore F(s)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}\,dt\\[2ex] f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}\,ds\end{cases}$$

简记为：$f(t)\leftrightarrow F(s)$

一个简单函数的双边拉普拉斯变换

例题(p.206)：求单边指数函数的拉普拉斯变换。

$$f(t)=e^{\alpha t}\varepsilon(t)\ (\text{其中}\alpha\text{为常数})$$

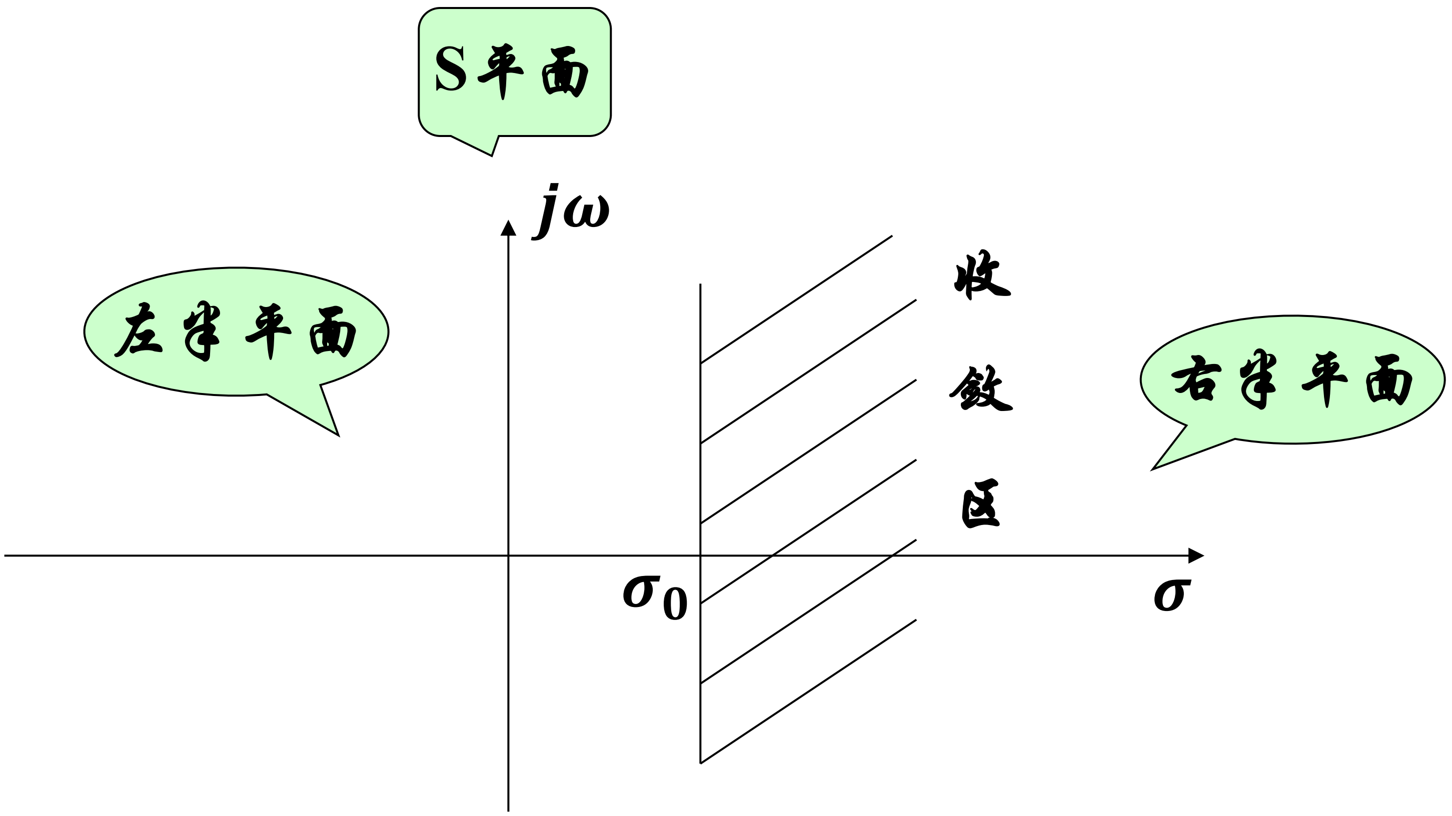
解：

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha t}\varepsilon(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(s-\alpha)t}dt=\frac{1}{s-\alpha}$$

以上的拉普拉斯变换始终存在吗？

显然，当$e^{-(s-\alpha)t}\big|_{t\to\infty}\to\infty$时，上述积分不收敛，不存在拉普拉斯变换。

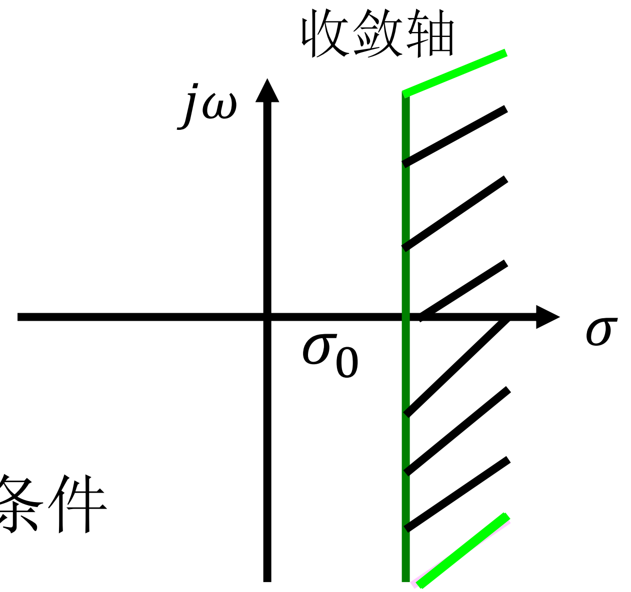
拉普拉斯变换的收敛域



$\sigma > \sigma_0$称收敛条件，σ_0称绝对收敛坐标

双边拉普拉斯变换的收敛域

给定信号$f(t)$,对应的拉氏变换为$F(s)$在S平面上，凡是能使$F(s)$存在的σ区域（或者说所有σ的集合），称为$F(s)$的收敛域。



收敛轴

σ_0 收敛坐标

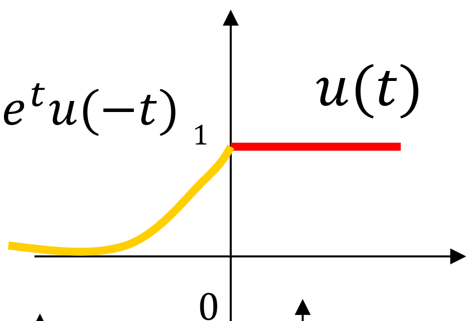
$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$ 收敛条件

双边拉普拉斯变换收敛域例题1

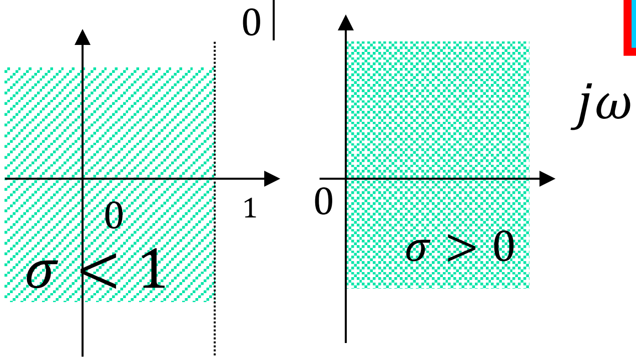
$$f(t) = u(t) + e^{t}u(-t)$$

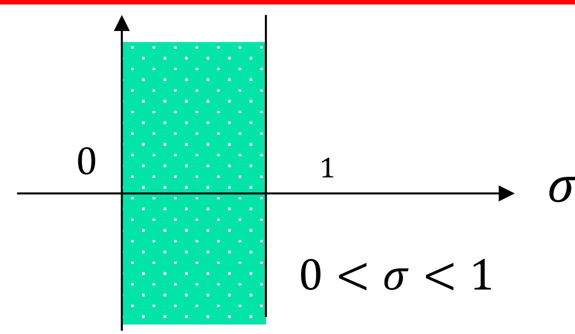
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}\,dt = \int_{0}^{\infty} u(t)e^{-\sigma t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} u(-t)e^{(1-\sigma)t}dt$$

$\sigma > 0$ $\qquad$ $\sigma < 1$



$$f(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$





双边拉普拉斯变换收敛域例题2

$$f(t) = e^{at}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(b-\sigma)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{(a-\sigma)t}dt$$

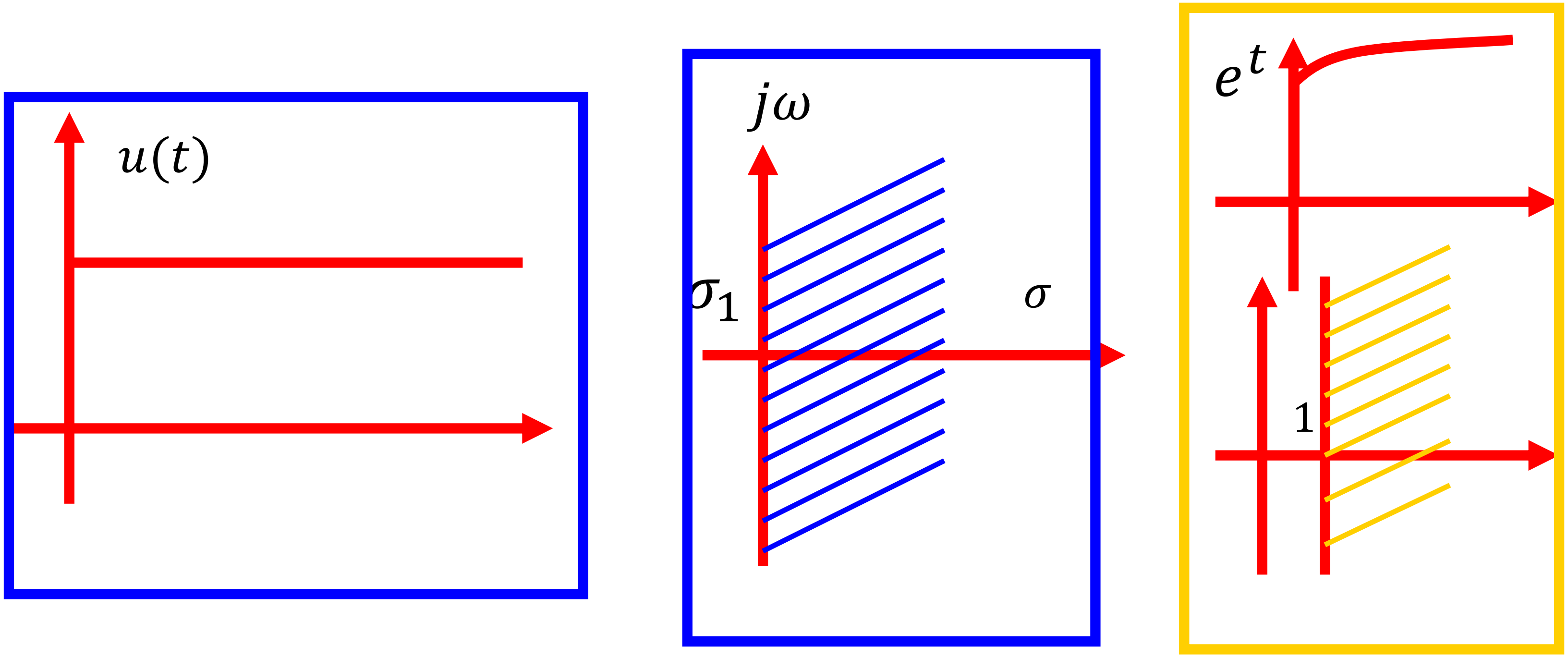
$\sigma < b$　　$a < \sigma$

$b > a,\qquad a < \sigma < b$　收敛，存在双边拉氏变换

$b < a$　没有收敛域。不存在双边拉氏变换

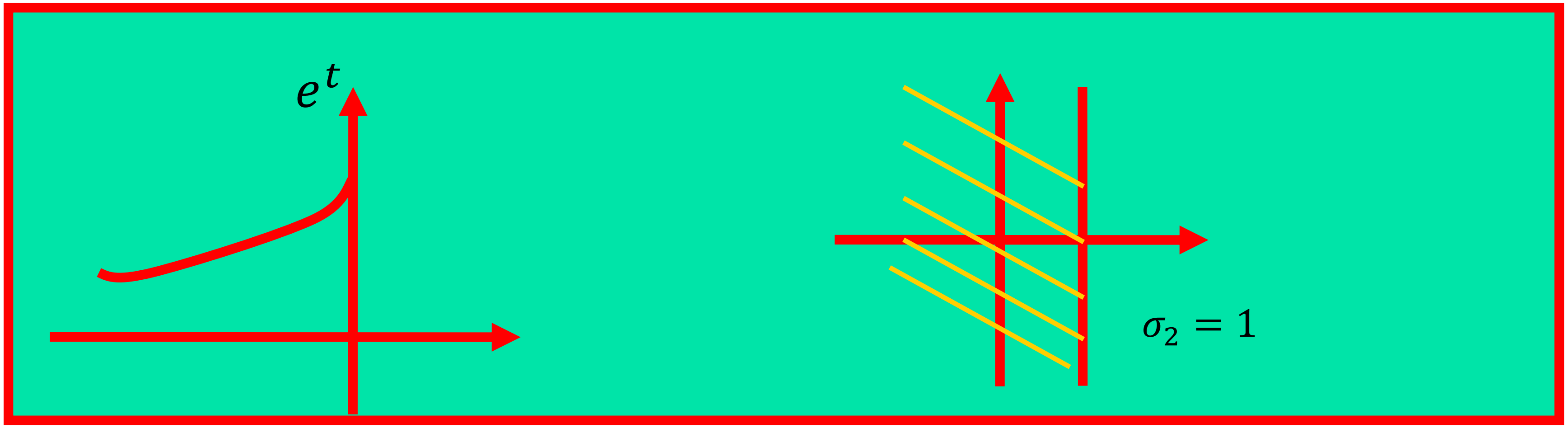
几种信号的收敛情况

a.对于$t<0$为零的右边信号,其收敛域在收敛轴的右边.



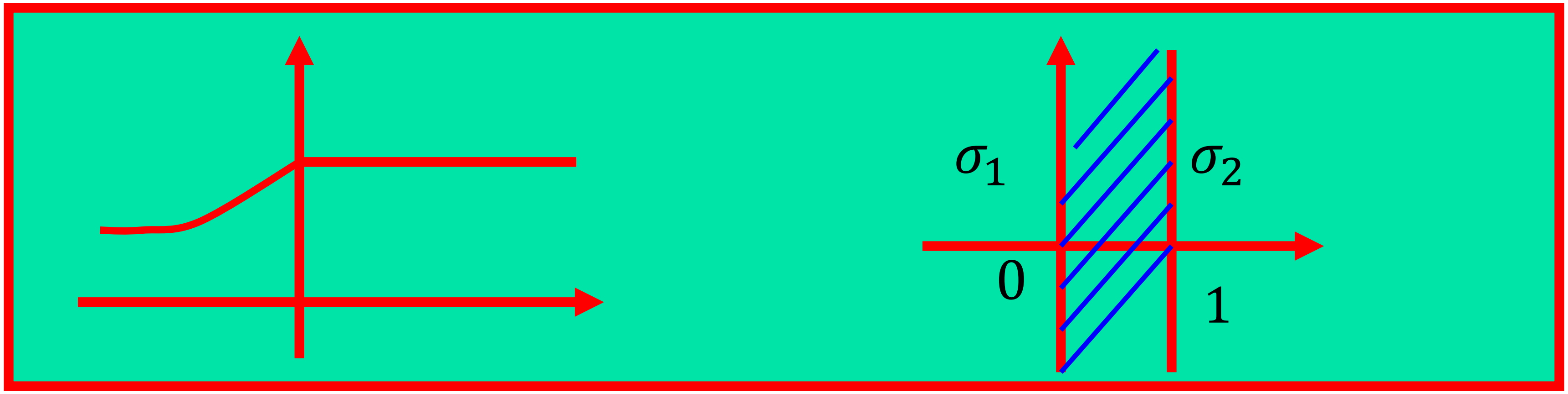
几种信号的收敛情况（续一）

b.对于$t > 0$为零的左边信号,收敛域在收敛轴的左边。



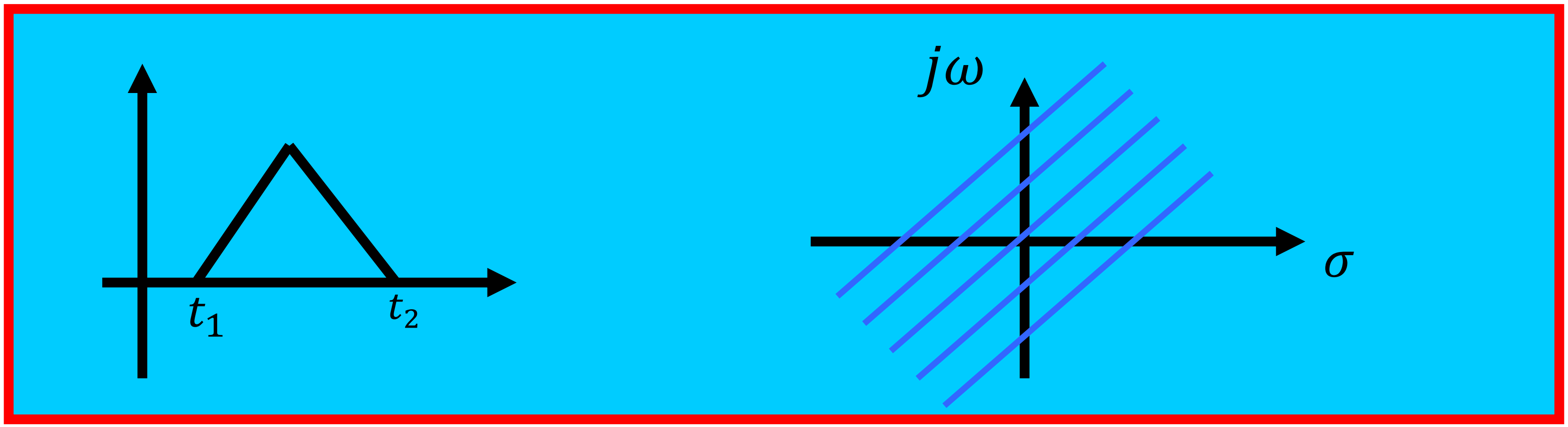
几种信号的收敛情况（续二）

c.对于双边信号,其收敛域在$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$内



几种信号的收敛情况（续三）

d.凡是有始有终能量信号,对于整个s平面都收敛。



拉普拉斯变换收敛域的重要性

$$f_2(t) = u(t) - e^t u(t) \quad \sigma > 1$$

$$f_2(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

$$f_3(t) = -u(-t) + e^t u(-t) \quad \sigma < 0$$

$$f_3(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

不同原函数，收敛域不同，也可得到相同的象函数。

单边拉普拉斯变换

$$f_1(t) = f(t)e^{-\sigma t}$$

因果

$$F_1(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

象函数 正LT

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

拉普拉斯变换指的是单边变换！

规定单边拉氏变换下限从0^-开始

原函数 逆LT

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

常用信号的拉普拉斯变换

$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}

拉普拉斯变换计算例题1：正弦/余弦信号的拉普拉斯变换

$\cos\omega_0 t$

$$f(t)=u(t)\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$F(S)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S+j\omega_0}+\frac{1}{S-j\omega_0}\right)$$

$$=\frac{S}{S^2+{\omega_0}^2}$$

$\sin\omega_0 t$

$$f(t)=u(t)\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

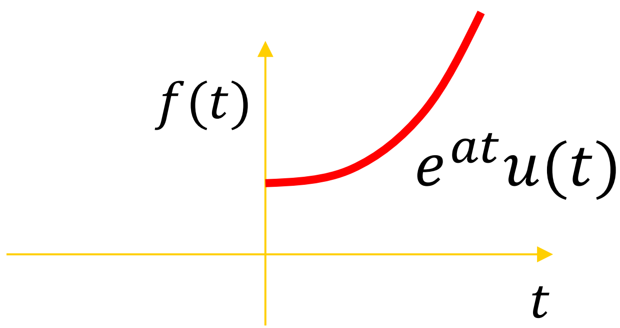
$F(S)$

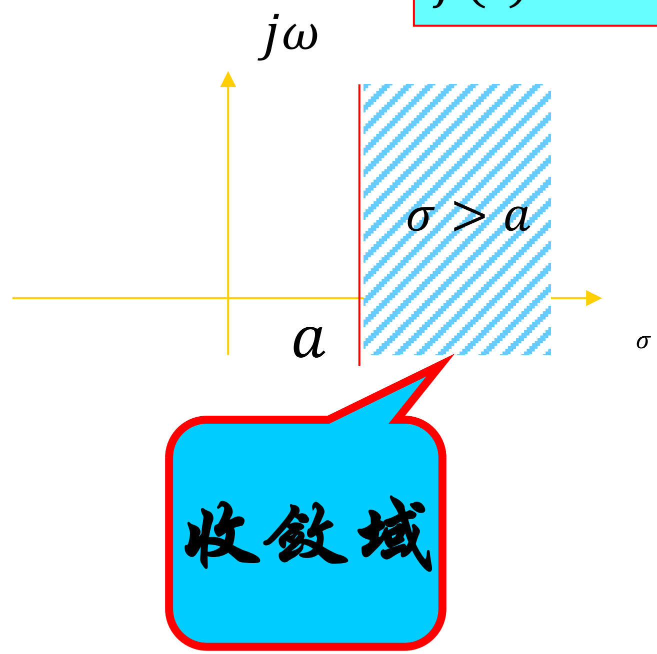
$$=\left(\frac{-1}{S+j\omega_0}+\frac{1}{S-j\omega_0}\right)\frac{1}{2j}$$

$$=\frac{\omega_0}{S^2+{\omega_0}^2}$$

单边拉普拉斯变换与傅里叶变换

(1) $\sigma_0 > 0$





$t < 0$
$f(t) = 0$

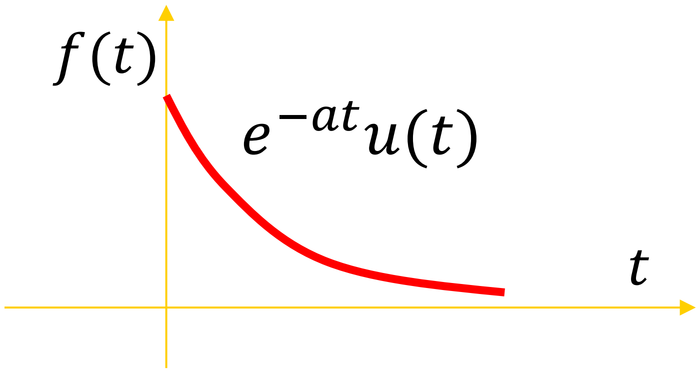
$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

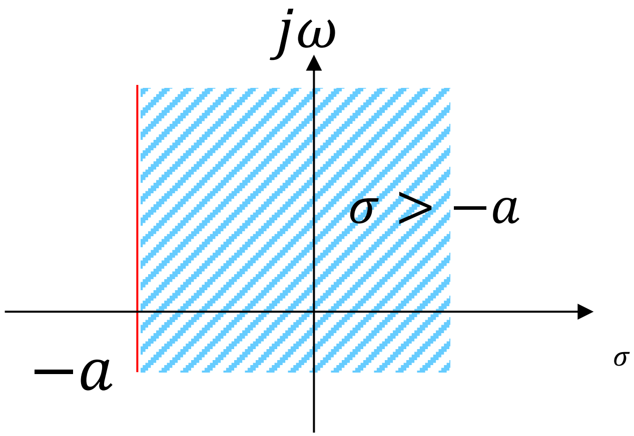
傅氏变换不存在，拉氏变换存在

单边拉普拉斯变换与傅里叶变换（续一）

(2) $\sigma_0 < 0$

$t < 0$
$f(t) = 0$





$$F(s) = \frac{1}{s+a}$$

$s = j\omega$

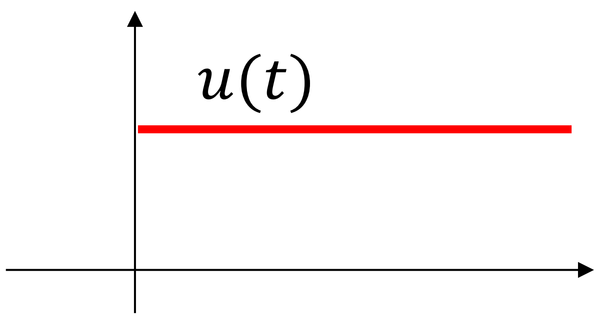
$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

单边拉普拉斯变换与傅里叶变换（续二）

(3)　$\sigma_0 = 0$

存在傅氏变换，但以虚轴为收敛边界，不能简单用$s = j\omega$，要包含奇异函数项。

$t < 0$
$f(t) = 0$



$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s}}$$

$$\boxed{F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \underline{\pi\delta(\omega)}}$$

拉普拉斯逆变换

- 查表法
- 部分分式分解法
- 围线积分法——留数法
- 利用拉氏变换的性质求反变换
- 借助数字计算机求反变换

部分分式法要点

设$F(s)$为有理函数，它可由两个s的多项式的比来表示：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

当$m\geq n$时，可将$F(s)$分解为多项式和真分式之和。

其中，多项式的拉普拉斯反变换为冲激函数$\delta(t)$及其各阶导数

当$m<n$时，$F(s)$是真分式，此时又分两种情况讨论：

1. 方程$D(s)=0$无重根

$$K_k=\left[(s-s_k)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=s_k}=\lim_{s\to s_k}\left[\frac{(s-s_k)N(s)}{D(s)}\right]=\lim_{s\to s_k}\left[\frac{N(s)}{D'(s)}\right],$$

$$LT^{-1}\{F(s)\}=\sum_{k=1}^{n}K_k e^{s_k t}\varepsilon(t)$$

2. 方程$D(s)=0$有p次重根s_1

$$K_{1k}=\frac{1}{(p-k)!}\frac{d^{p-k}}{ds^{p-k}}\left[(s-s_1)^p\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=s_1}$$

$$LT^{-1}\{F(s)\}=\left[\frac{K_{1p}}{(p-1)!}t^{p-1}+\frac{K_{1(p-1)}}{(p-2)!}t^{p-2}+\cdots+K_{12}t+K_{11}\right]e^{s_1 t}\varepsilon(t)+\sum_{q=p+1}^{n}K_p e^{s_q t}\varepsilon(t)$$

围线积分法（留数法）要点

当$F(s)$为有理函数时，若s_k为一阶极点，则其留数为：

$$\operatorname{Re} s_k = [(s-s_k)F(s)e^{st}]_{s=s_k}$$

若s_k为p阶极点，则其留数为

$$\operatorname{Re} s_k = \frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}(s-s_k)^p F(s)e^{st}\right]_{s=s_k}$$

运用留数法求原函数时应注意到，因为冲激函数及其导数不符合约当引理，因此当原函数$f(t)$中包含有冲激函数及其导数时，需先将$F(s)$分解为多项式与真分式之和。

拉普拉斯逆变换例题1

求$L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+5)}]$　　**象函数为有理真分式，无重极点**

解：$\because \frac{1}{s(s^2+5)}=\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{s^2+5}$，$a=s\frac{1}{s(s^2+5)}\Big|_{s=0}=\frac{1}{5}$

$$\therefore \frac{1}{s(s^2+5)}=\frac{\frac{1}{5}}{s}+\frac{bs+c}{s^2+5}=\frac{\frac{1}{5}s^2+1+bs^2+cs}{s(s^2+5)}$$

$$=\frac{(b+\frac{1}{5})s^2+cs+1}{s(s^2+5)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b+\frac{1}{5}=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+5)}=L^{-1}(\frac{1}{5}/s+(-\frac{1}{5}s/(s^2+5))$$

$$=\frac{1}{5}(1-\cos\sqrt{5}\,t)u(t)$$

拉普拉斯逆变换例题2

试用留数定理求$F(S)=\dfrac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}$的原函数。

象函数为有理，真分式，有多重极点

解: $F(s)$有两个单极点: $s_1=0; s_2=-3;$
有一个二重极点$s_3=-1$

它们的留数分别为:

$$Res[0]=[(s-s_1)F(s)e^{st}]\Big|_{s=s_1=0}=\frac{s+2}{(s+3)(s+1)^2}e^{st}\Big|_{s=0}=\frac{2}{3}$$

拉普拉斯逆变换例题2（续）

$$Res[-3] = [(s-s_2)F(s)e^{st}]\Big|_{s=s_2=-3} = \frac{s+2}{s(s+1)^2}e^{st}\Big|_{s=-3} = \frac{1}{12}e^{-3t}$$

$$Res[-1] = \frac{d}{ds}[(s+1)^2\frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}e^{st}]\Big|_{s=s_3=-1}$$

$$= -\frac{t}{2}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-t} = -(\frac{t}{2}+\frac{3}{4})e^{-t}$$

$$\therefore f(t) = [\frac{2}{3}+\frac{1}{12}e^{-3t} - (\frac{t}{2}+\frac{3}{4})e^{-t}]u(t)$$

拉普拉斯逆变换例题3

求$L^{-1}[\frac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}]$

象函数为有理，但非真分式

方法一：直接用留数法求解

$$\therefore f(t)=(3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}t})u(t)$$

拉普拉斯逆变换例题3（续）

求$L^{-1}[\frac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}]$

$$\frac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}=2+\frac{s+4}{2s^2+5s+3}$$

$$=2+\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+\frac{3}{2}}$$

象函数为有理，但非真分式

方法二：部分分式展开法

$$\therefore f(t)=2\delta(t)+(3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}t})u(t)$$

为什么两种方法的结果不一样？参见教材**218**页的说明

留数法与部分分式分解法比较：

1）部分分式分解法只能解决有理函数，而留数法不受有理函数的限制；

2）留数法不能解决$m \geq n$的情况，部分分式分解法可以；

3） 留数法在数学上比部分分式分解法严密；

4） 部分分式分解法涉及的基础知识比留数法简单。

小结

- **拉普拉斯变换是信号与系统分析的新工具。**

  （1）定义

  （2）与傅里叶变换的关系

  （3）收敛域

  （4）常见信号的拉普拉斯变换

  （5）拉普拉斯反变换的求法

课外作业

阅读：5.1-5.5　自学：5.6　预习：5.7,5.9

作业:5.3(7)(8)，5.4(3)(4)(5)

拉氏变换的基本性质

序号	性质名称	信　号	拉普拉斯变换
0	定义	$f(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,\ t\geqslant 0$	$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,\ \sigma>\sigma_0$
1	线性	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(s)+a_2F_2(s),\ \sigma>\max(\sigma_1,\sigma_2)$
2	尺度变换	$f(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \sigma>a\sigma_0$
3	时移	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0),\ t_0>0$	$\mathrm{e}^{-st_0}F(s),\ \sigma>\sigma_0$
4	复频移	$\mathrm{e}^{s_a t}f(t)$	$F(s-s_a),\ \sigma>\sigma_a+\sigma_0$
5	时域微分	$f^{(1)}(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$sF(s)-f(0^-),\ \sigma>\sigma_0$
		$f^{(n)}(t)=\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^nF(s)-\sum_{m=0}^{n-1}s^{n-1-m}f^{(m)}(0^-)$
6	时域积分	$\left(\int_{0^-}^{t}\right)^n f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s^n}F(s),\ \sigma>\max(\sigma_0,\ 0)$
		$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0^-)$
		$f^{(-n)}(t)=\left(\int_{-\infty}^{t}\right)^n f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s^n}F(s)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{s^{n-m+1}}f^{(-m)}(0^-)$
7	时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$ $f_1(t)$、$f_2(t)$为因果信号	$F_1(s)F_2(s),\ \sigma>\max(\sigma_1,\sigma_2)$
8	时域相乘	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty}F_1(\lambda)F_2(s-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ $\sigma>\sigma_1+\sigma_2,\ \sigma_1<c<\sigma-\sigma_2$
9	S 域微分	$(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s),\ \sigma>\sigma_0$
10	S 域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty}F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,\ \sigma>\sigma_0$
11	初值定理	$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$	
12	终值定理	$f(\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)$，$s=0$ 在收敛域内	

与傅里叶变换不同的性质

- 与傅里叶变换不同的性质
  - 微分与积分性质
  - 初值定理和终值定理
- 应用条件与傅里叶变换不同的性质
  - 时移性质

拉普拉斯变换是单边的，原函数是有始的。

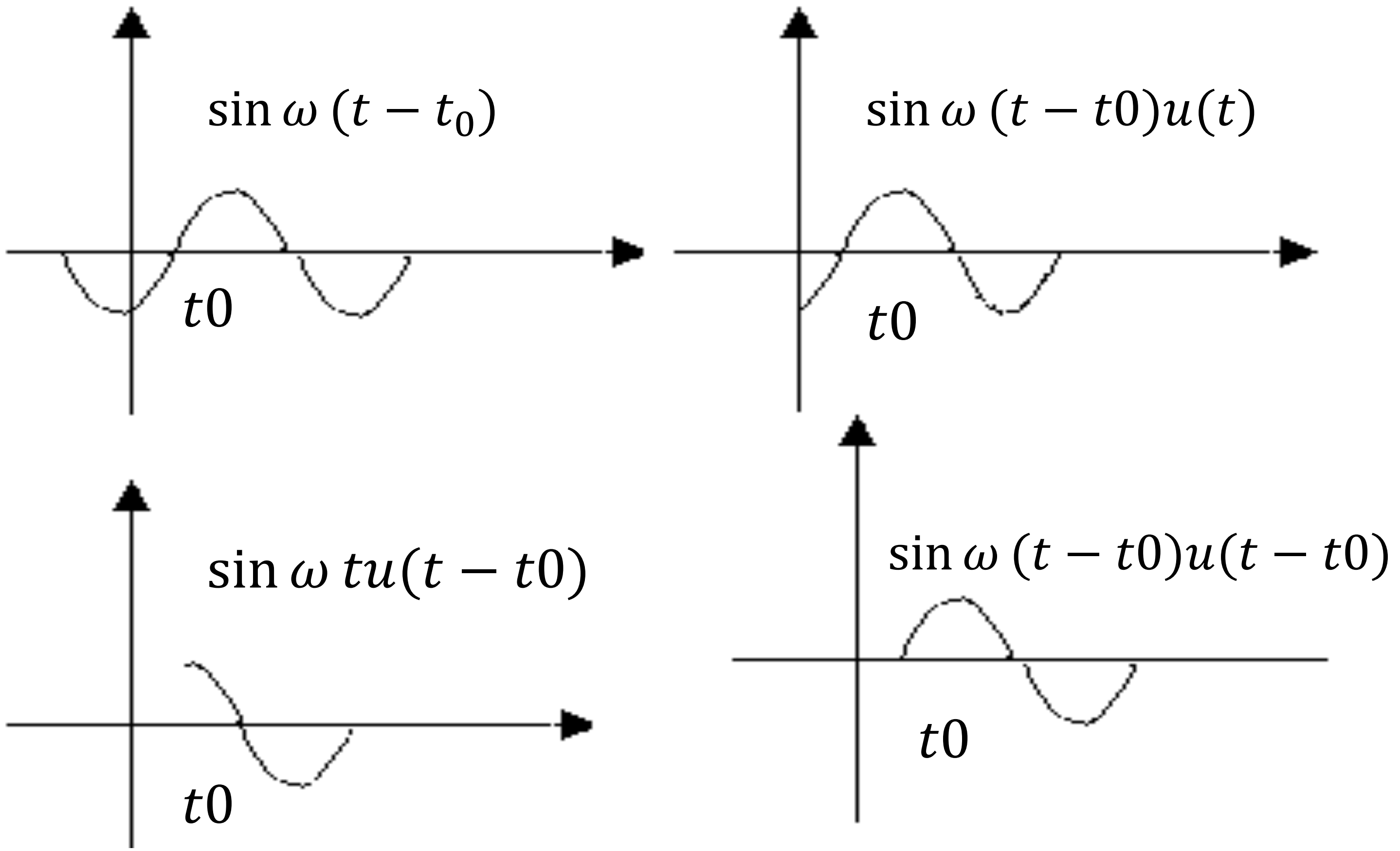
时移性质的应用条件

- 由于拉普拉斯变换是单边的，因此要注意到存在着四个类似的函数，其中只有$d.$才是可以应用时移性质的。

$$a. f(t-t0)$$
$$b. f(t-t0)u(t)$$
$$c. f(t)u(t-t0)$$
$$d. f(t-t0)u(t-t0)$$

时移性质的应用条件（续）

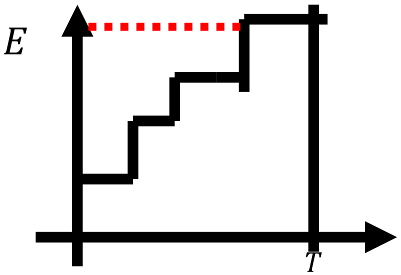
设$f(t) = \sin\omega t$



时移性质的应用例题1

台阶函数的拉氏变换

$$f(t)=\frac{E}{4}u(t)+\frac{E}{4}u(t-\frac{T}{4})+\frac{E}{4}u(t-\frac{T}{2})$$
$$+\frac{E}{4}u(t-\frac{3T}{4})-Eu(t-T)$$



$$\because \frac{E}{4}u(t)\leftrightarrow\frac{E}{4s}$$

$$\therefore f(t)\leftrightarrow\frac{E}{4s}[1+e^{-\frac{sT}{4}}+e^{-\frac{sT}{2}}+e^{-\frac{3sT}{4}}-4e^{-sT}]$$

利用时移性质计算有始周期函数的拉普拉斯变换

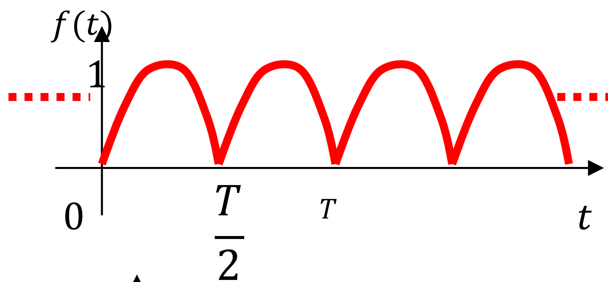
单边周期函数的拉氏变换定理：若有始的周期函数$\boldsymbol{f(t)}$的第一个周期的拉氏变换为$\boldsymbol{F_1(s)}$则函数$\boldsymbol{f(t)}$的拉氏变换为：

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

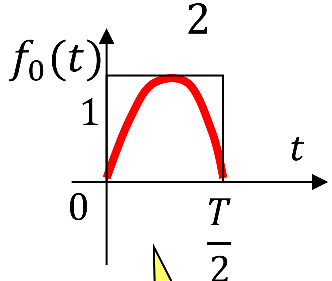
推导见P.240-P.241

时移性质的应用例题2、3

- 例题2：p.241，例题5-7，求有始半波正弦函数的拉普拉斯变换。
- 例题3：求全波整流周期信号的拉普拉斯变换



$$\frac{\omega(1+e^{-\frac{T}{2}s})}{S^2+\omega^2}\,\frac{1}{1-e^{-s\frac{T}{2}}}$$



$$\sin(\frac{\pi}{T}t)u(t)+\sin[\frac{\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)]u(t-\frac{T}{2})$$

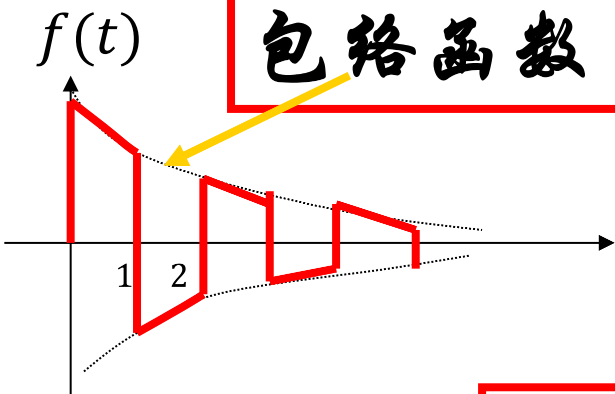
LT

$$\frac{\omega(1+e^{-\frac{T}{2}s})}{S^2+\omega^2}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

信号加窗
第一周期

综合例题4



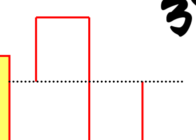
包络函数 e^{-t}

频移特性

乘衰减指数

周期对称方波

单对称方波



$u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$

$$\frac{1}{s}\left(1-2e^{-s}+e^{-2s}\right)$$

$$\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)^2\frac{1}{1-e^{-2s}}$$

分式化简

$$\frac{1}{s}\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}$$

$$\frac{1}{(s+1)}\frac{\left(1-e^{-(s+1)}\right)}{\left(1+e^{-(s+1)}\right)}$$

拉普拉斯的时域微分性质

根据拉普拉斯变换的定义，有

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_{0}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

运用分部积分法$\int f'(t)g(t)dt = f(t)g(t) - \int f(t)g'(t)dt$，则有

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

因为当$t \to \infty$，$f(t)e^{-st} \to 0$，故得

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = -f(0^-) + sF(s)$$

同理可推得

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$$

0^-与0^+系统

- 如果函数$f(t)$在原点不连续，则其导数在原点将有一个强度为原点跃变值的冲激。
- 在0^-系统中要考虑这个冲激，而选用0^+系统时则不考虑此冲激，此时，在0^-和0^+系统中所求得的拉普拉斯变换式不同
- 通常，多选用0^-系统，可以将冲激项所产生的响应自动计入，这是拉普拉斯分析法优于傅里叶分析法的重要原因之一

时域微分性质例题5

- p.243，例题5-8
- 注意0^-和0^+系统的区别

时域积分性质例题6

$$\begin{cases} \dfrac{df(t)}{dt} + 3f(t) + 2\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = u(t) \\ f(0^-) = 2, \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau = 0 \end{cases}$$

解：

$$sF(s) - f(0^-) + 3F(s) + 2[\frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}] = \frac{1}{s}$$

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

$$\therefore f(t) = [-e^{-t} + 3e^{-2t}]$$

初始条件自动包含在变换式中，一步求出系统的全响应。

初值定理和终值定理的要点

- 初值定理计算的是0^+时刻的值，无论使用0^+系统还是0^-系统。
- 若$F(s)$是有理代数式，则$F(s)$必须是真分式，即$F(s)$分子的阶次应低于分母的阶次。若不是真分式，则应用长除法，使$F(s)$中出现真分式$F_p(s)$。
- 物理解释：$s \to \infty$，相当于接入信号的突变高频分量，所以可以给出相应的初值。
- 运用终值定理，等价于限制$F(s)$的极点在s平面的左半平面和原点仅有单阶极点
- 物理解释：$s \to 0$，相当于直流状态得到电路稳定的终值

初值、终值定理例题7

分别求下列逆变换的初值和终值.

$$1.\ \frac{(s+6)}{(s+2)(s+5)} \quad 2.\ \frac{(s+3)}{(s+1)^2(s+2)}$$

解: $1.\ f(0^+) = \lim\limits_{s\to\infty} s\frac{(s+6)}{(s+2)(s+5)} = 1$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{(s+6)}{(s+2)(s+5)} = 0$$

$$2.\ f(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{(s+3)}{(s+1)^2(s+2)} = 0$$

初值、终值定理例题8

已知：$L[f(t)]=\frac{3}{(s+1)^3}$，利用初值定理求$f(t)$的多项式展开式：

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots$$

中前两项非零项。

解：由题意可知：$L[f(t)]=\dfrac{3}{(s+1)^3}$

$$a_0=f(0^+)=\lim_{s-\infty}sF(s)=0$$

$$L[f'(t)]=sF(s)-f(0^-)=\frac{3s}{(s+1)^3}$$

$$a_1=f'(0^+)=\lim_{s-\infty}s\frac{3s}{(s+1)^3}=0$$

$$a_2=\frac{1}{2}f''(0^+)=\frac{3}{2}$$

$$a_3=\frac{1}{6}f^{(3)}(0^+)=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore f(t)\approx\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t^3$$

综合例题9：计算三角信号的拉普拉斯变换

方法一:按定义式积分

$$F(s)=\int_{0-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{1}te^{-st}\,dt+\int_{1}^{2}(2-t)e^{-st}dt=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2$$

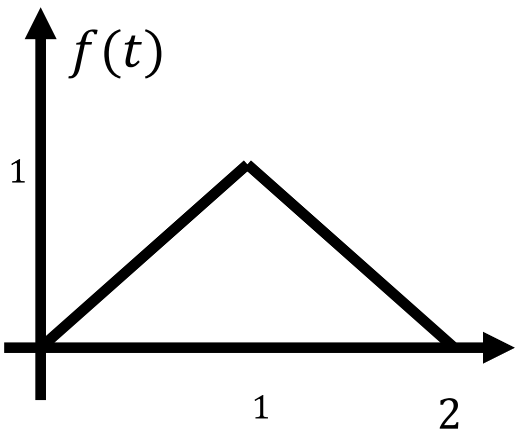
方法二:利用线性迭加和时移定理

$$f(t)=tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)$$

$$L[tu(t)]=\frac{1}{s^2}$$

$$L[f(t-t_0)]=F(s)e^{-st_0}$$

$$\therefore F(s)=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2$$



综合例题9（续一）

方法三:利用微分积分定理将$f(t)$微分二次

$$L[\frac{d^2f(t)}{dt^2}] = L[\delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)] = (1-e^{-s})^2$$

根据微分定理:

$$L[\frac{d^2f(t)}{dt^2}] = s^2F(s) - f'(0^-) - sf_1(0^-)$$

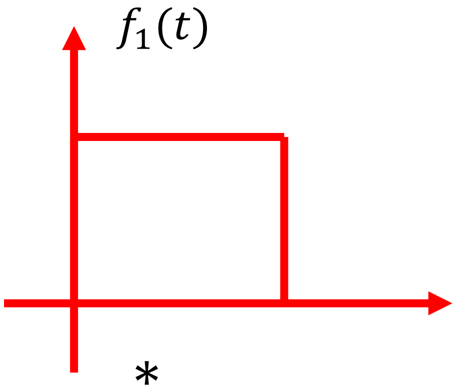
$$f(0^-) = 0, f'(0^-) = 0$$

$$\therefore s^2F(s) = (1-e^{-s})^2 \qquad F(s) = \frac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2$$

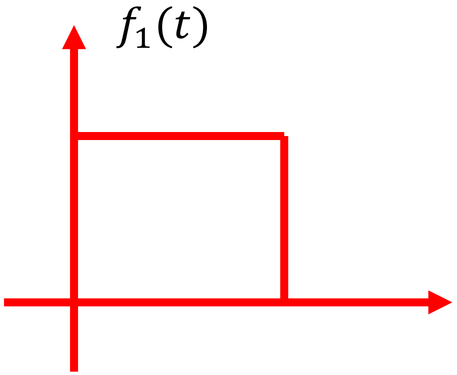
综合例题9（续二）

方法四:利用卷积定理

$$f(t) = f_1(t) * f_1(t)$$
$$F(s) = F_1(s)F_1(s)$$
$$F_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$
$$\therefore F(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s})^2$$



*



线性系统的拉普拉斯变换分析法

傅里叶变换分析法

- 计算激励信号的频谱函数
- 计算机传递函数
  - 从系统方程推导传递函数
  - 从频谱图推导传递函数
  - 从单位冲激响应推导传递函数
- 计算响应信号的频谱函数
- 利用傅里叶逆变换计算机时域响应——Z.S.R

拉普拉斯变换分析法

- 利用拉普拉斯变换求解微分方程——全响应
- 利用拉普拉斯变换直接进行电路分析

例1.求下列系统的响应。

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=e(t)$$

$$e(t)=u(t),\, r(0)=1, r'(0)=2$$

解：设 $r(t)$ ↔️ $R(s)$，$e(t)$ ↔️ $E(s)$，两边同时作拉普拉斯变换：

$$[s^2R(s)-sr(0^-)-r'(0^-)]+3[sR(s)-r(0^-)]+2R(s)=E(s)$$

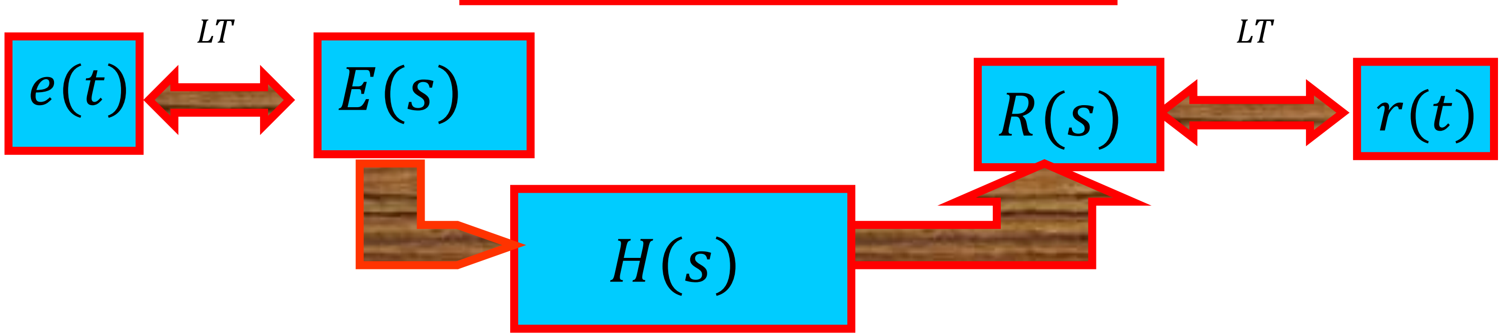
$$\Rightarrow R(s)=\frac{\frac{1}{s}+s+5}{s^2+3s+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+3\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow r(t)=\frac{1}{2}u(t)+3e^{-t}u(t)-\frac{5}{2}e^{-2t}u(t)$$

系统函数的定义

- 系统零状态下，响应的拉氏变换与激励拉氏变换之比叫作系统函数，记作$H(s)$.

$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$$



- 可以是电压传输比、电流传输比、转移阻抗、转移导纳、策动点阻抗或导纳

S域中的R.L.C.元件模型

R.L.C元件的时域关系为：

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad L = \frac{\phi}{i}$$

$$u_c(t) = \frac{1}{c}\int_0^t i_c(\tau)d\tau + u_c(0^-) \quad c = \frac{q}{u}$$

各式进行拉氏变换得：

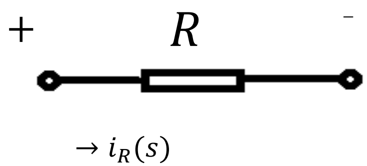
S域中的R.L.C.元件模型（续一）

$$U_R(s) = RI_R(s)$$
$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$
$$U_c(s) = \frac{1}{sc}I_c(s) + \frac{1}{s}u_c(0^-)$$

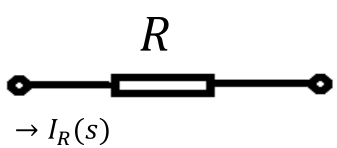
对电流解出得：

$$I_R(s) = \frac{1}{R}U_R(s)$$
$$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) + \frac{1}{s}i_L(0^-)$$
$$I_c(s) = scU_c(s) - cu_c(0^-)$$

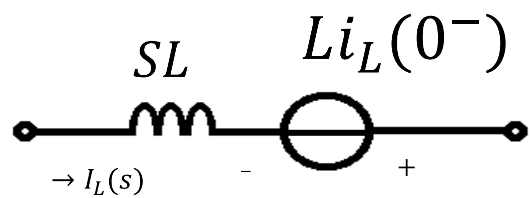
S域中的R.L.C.元件模型（续二）



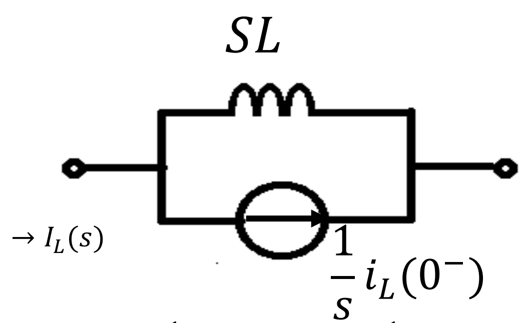
$$U_R(s) = RI_R(s)$$



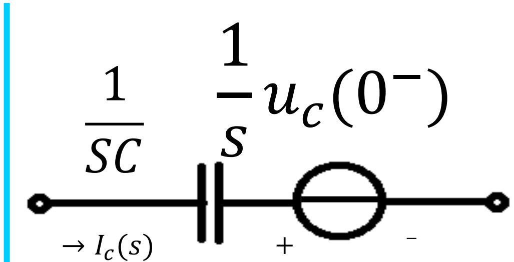
$$I_R(s) = \frac{1}{R}U_R(s)$$



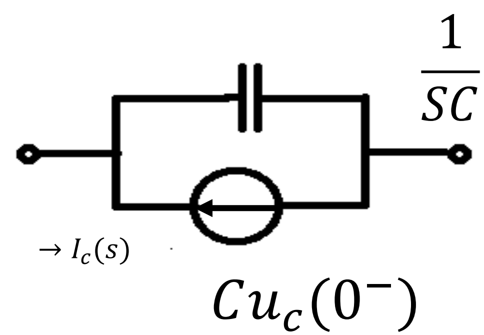
$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$



$$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) + \frac{1}{s}i_L(0^-)$$



$$U_c(s) = \frac{1}{sc}I_c(s) + \frac{1}{s}u_c(0^-)$$



$$I_c(s) = scU_c(s) - cu_c(0^-)$$

S域中的网络方程

kirchhoftis定律

K.I.L

对于任意的节点，在同一时刻流入该节点的电流代数和恒等于零即

$$\sum i(t) = 0 \rightarrow \sum I(s) = 0$$

K.V.L

沿任意闭合回路，各段电压的代数和恒等于零，即

$$\sum u(t) = 0 \rightarrow \sum V(s) = 0$$

S域中进行电路分析的步骤

①将已知的电动势、恒定电流进行拉氏变换

②根据原电路图画出运算等效电路图

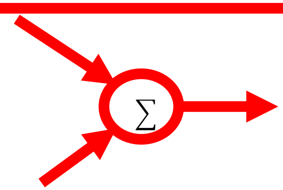
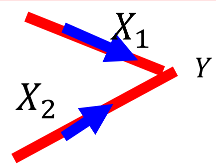
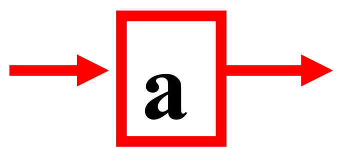
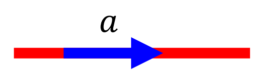
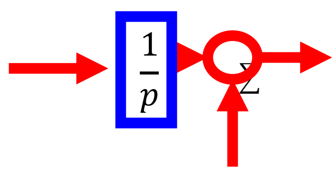
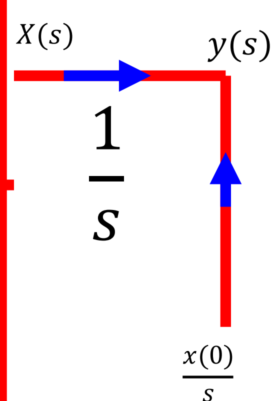
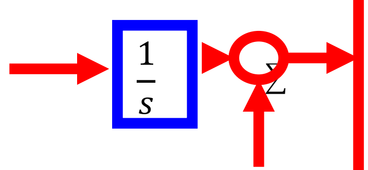
③用计算线性系统或电路稳定状态的任何方法解运算电路，求出待求量的象函数

④将求得的象函数反变换为原函数

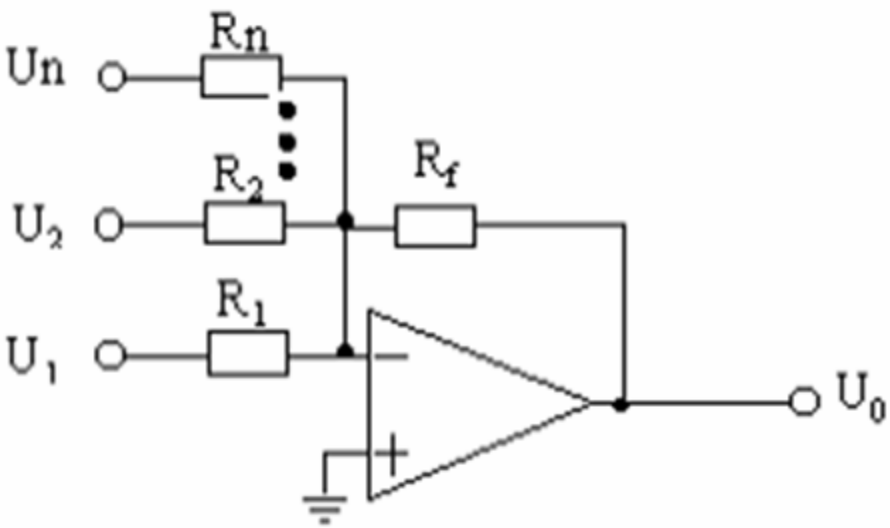
线性系统的模拟

- 系统的模拟：模拟系统和原系统在输入输出关系上满足同样的微分方程或系统函数
- 方框图：对信号进行单向运算的方框和一些连线组成.它表明了信号流动的方向及对系统变量所作的运算

模拟框图的基本元件

<table>
<tr><th>No</th><th colspan="2">名称</th><th>方框图</th><th>信号流图</th><th>数学模型</th><th>器件</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">加法器</td><td>
</td><td>
</td><td>$Y(s)=X_1+X_2$</td><td rowspan="4">运放</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">乘法器</td><td>
</td><td>
</td><td>$y(s)=aX(s)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">积分器</td><td>时</td><td>
</td><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">$y(s)=\frac{F(s)}{s}+\frac{x(0)}{s}$</td></tr>
<tr><td>频</td><td>
</td></tr>
</table>

反向加法运算电路



反向加法电路

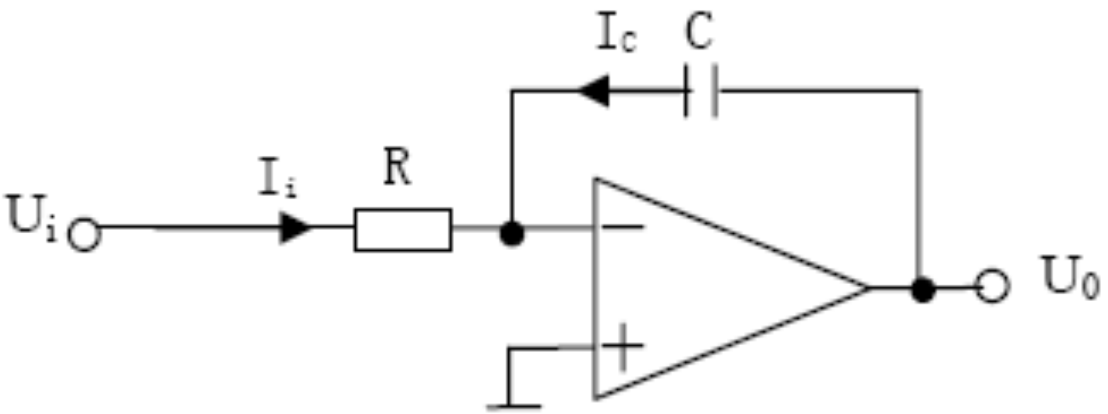
$$\frac{U_1}{R_1}+\frac{U_2}{R_2}\cdots+\frac{U_n}{R_n}+\frac{U_0}{R_f}=0$$

$$U_0=-\left(\frac{R_f}{R_1}U_1+\frac{R_f}{R_2}U_2+\cdots+\frac{R_f}{R_n}U_n\right)$$

当取$R_1=R_2=\ldots=R_n$ 时，则

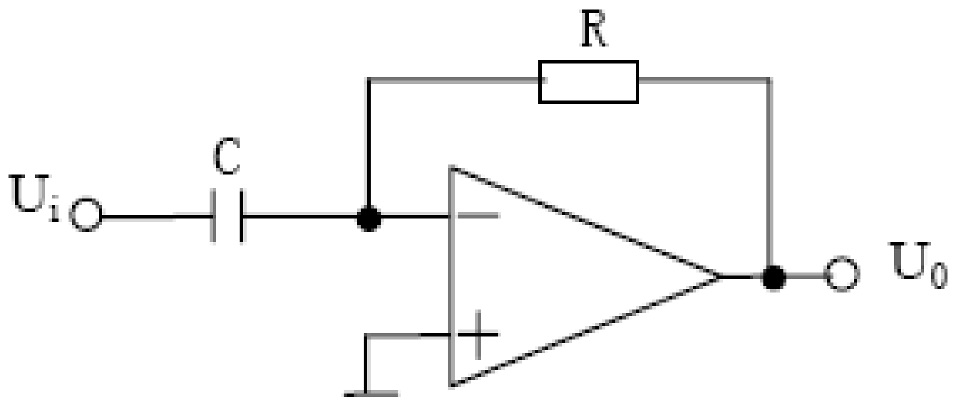
$$U_0=-\frac{R_f}{R_1}(U_1+U_2+\cdots+U_n)$$

反向积分电路



$$U_0 = -\frac{1}{RC}\int_0^t U_i(t)dt + U_{O0}$$

反向微分电路

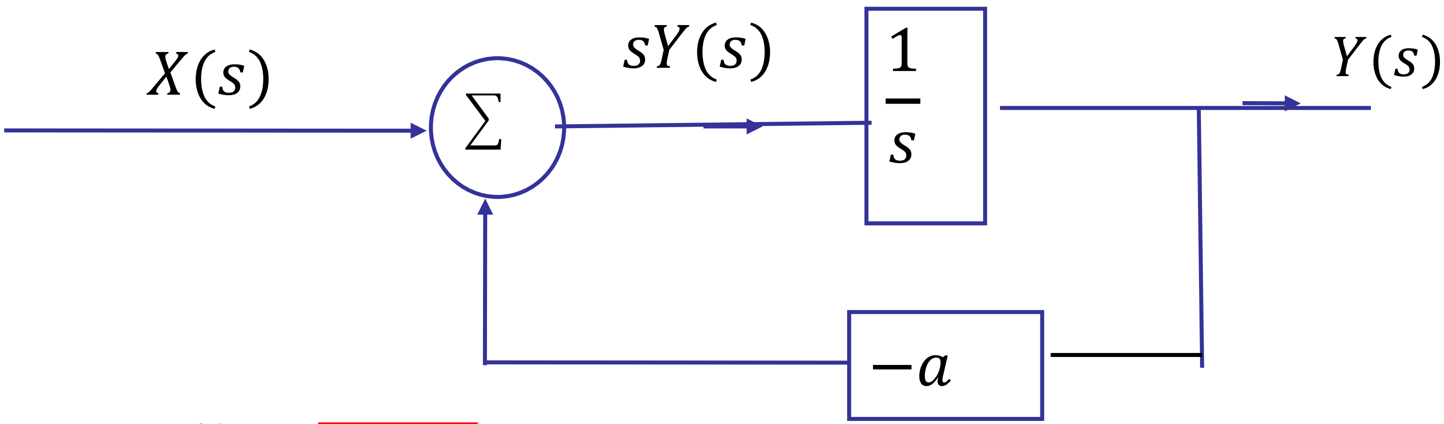


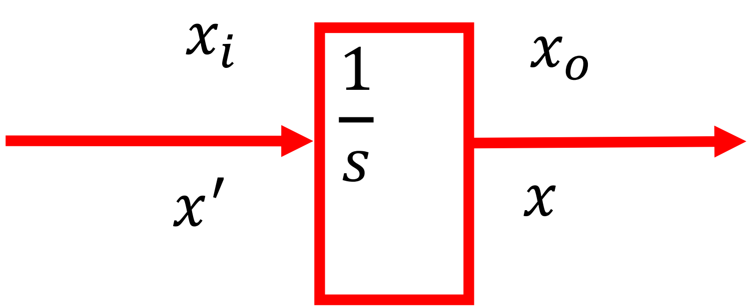
基本微分电路

$$U_O = -RC\frac{dU_i}{dt}$$

系统模拟例题1：一阶系统模拟

$$\frac{dy}{dt}+ay=x(t),H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s+a}$$





描述积分器的数学模型

$$x_o{}'=x_i$$

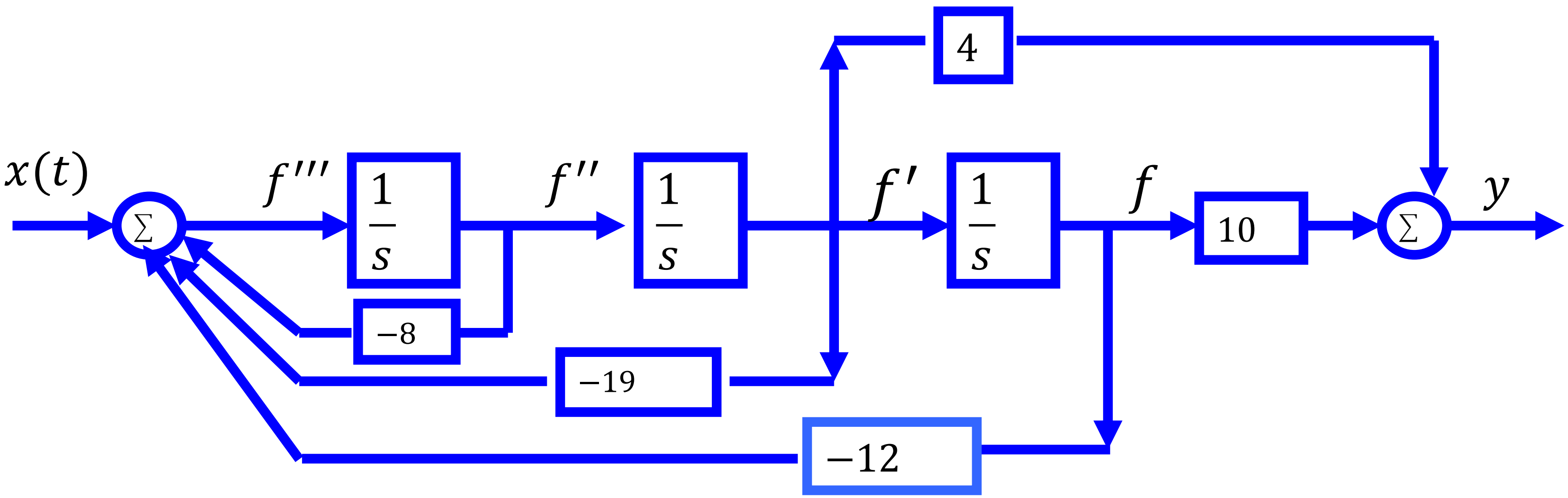
系统模拟例题2：

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}$$

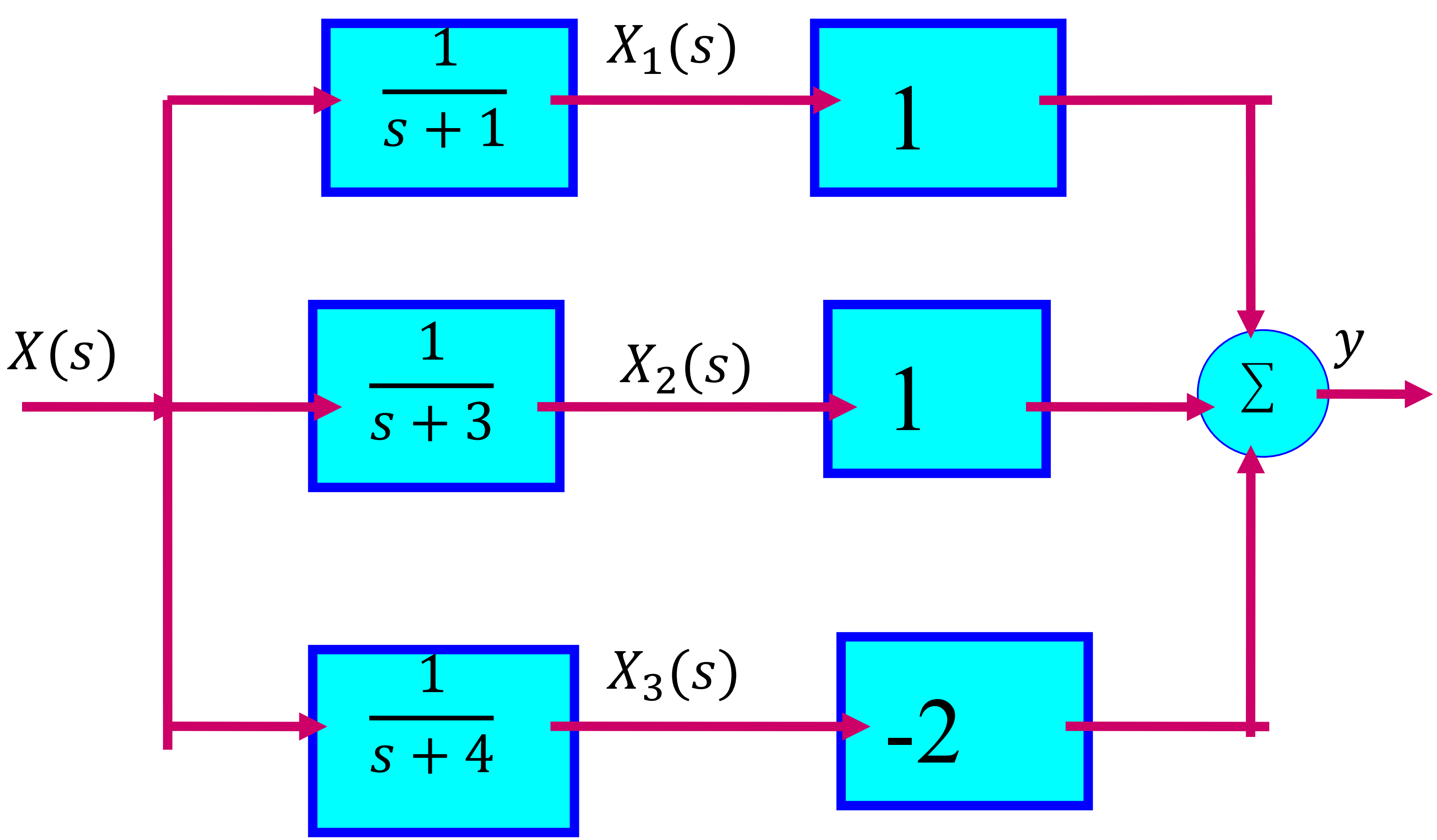
$$=\frac{4(s+5/2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}-\frac{2}{s+4}$$

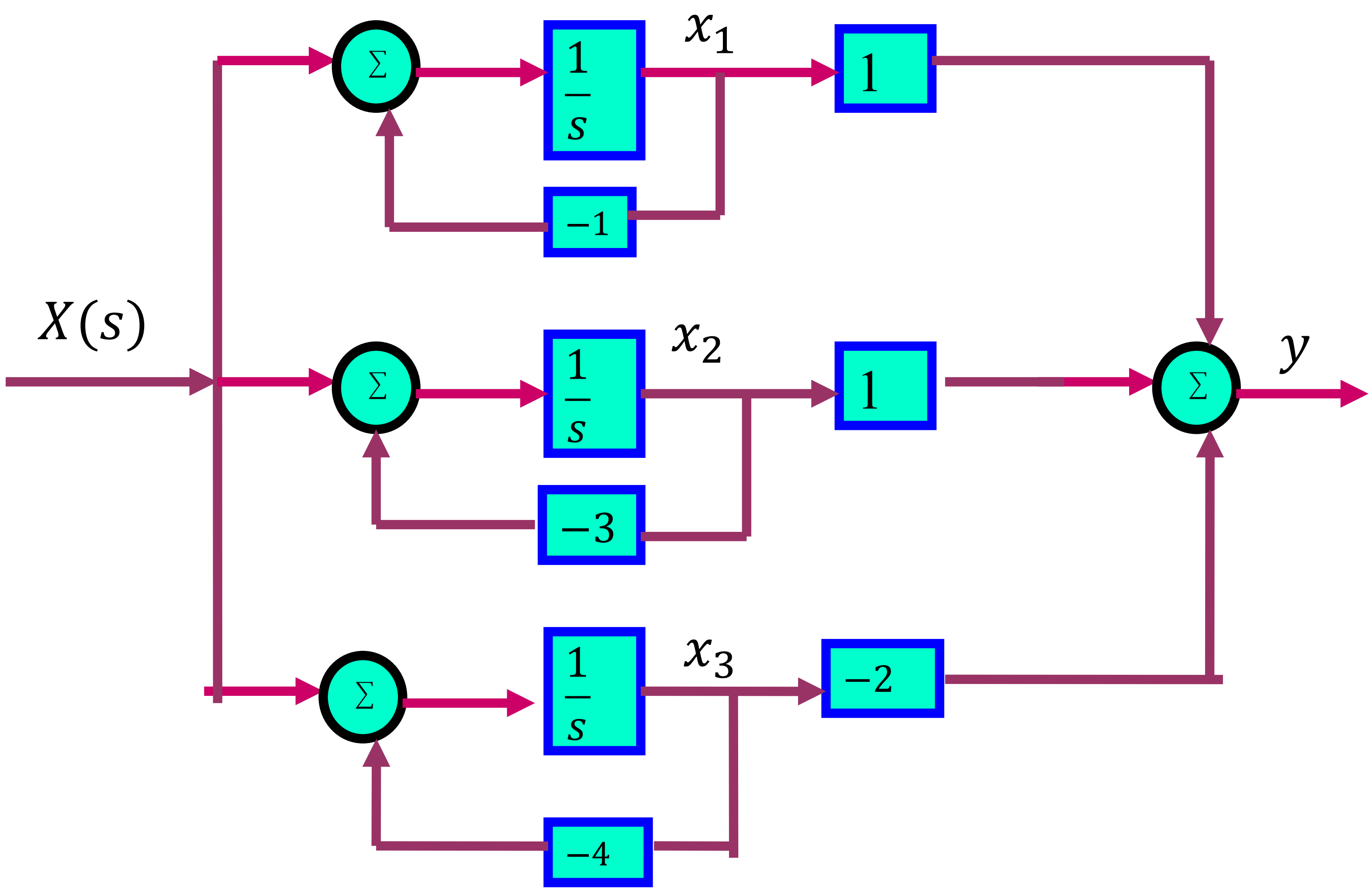
系统模拟例题2（续一）：直接模拟法



系统模拟例题2（续二）：并联模拟法



系统模拟例题2（续二）：并联模拟法

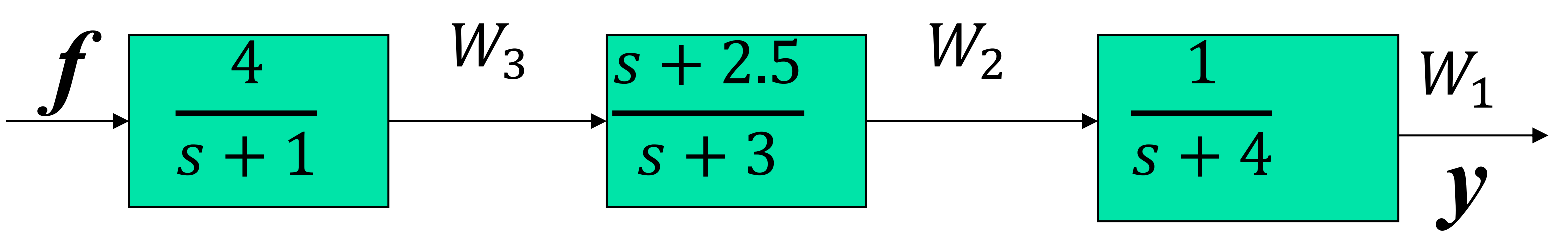


系统模拟例题2（续二）：串联模拟法

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+9s+12}$$

$$=\frac{4(s+2.5)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$=\frac{2}{s+1}\cdot\frac{s+2.5}{s+3}\cdot\frac{2}{s+4}$$



小结

- **拉普拉斯变换的性质要熟记**
- **拉普拉斯变换法可一次性地得到系统的全解。**
- **线性系统的模拟框图与微分方程的相互转换。**

课外作业

阅读:5.7，5.9; 预习:7.1，7.3

作业:5.15(1) 5.24 5.30(2)