信号与系统

连续时间系统的系统函数

主要内容

- 系统函数与时域特性
  - 系统函数的极零图
  - 系统函数的零极点分布与系统时域响应的关系
- 系统函数与频域特性
  - 复数的向量表示
  - 由系统函数的零极点分布勾画频响特性曲线
- 系统的稳定性

系统函数的表示法

- 系统函数$H(s)$是一个自变量s为复数，函数值也为复数的函数，因此无法在一张图中反映所有的变化情况，通常我们用投影法作图，常用的图示法有：
  - 频率特性：幅频、相频图（$s = j\omega$）
  - 极零点图：在s平面上做幅频图，并做投影
- 幅频、相频图在傅里叶变换中已经进行了讨论
- 集中讨论极零点分布与系统稳定性、系统时域特性之间的关系

H(s)的零点和极点

系统增益

$$H(s)=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$ ，其中 $H_0=\frac{a_m}{b_n}$

a.零点(zero):使$H(s)=0$的s值,令$N(s)=0$求得。

b.极点(pole):使$H(s)=\infty$的s值,令$D(s)=0$求得。

c.当n>m时，无穷大处有一个(n-m)阶零点：

$$\lim_{s\to\infty}H(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{a_m s^m}{b_n s^n}=0$$

当n<m时，无穷大处有一个(m-n)阶极点：

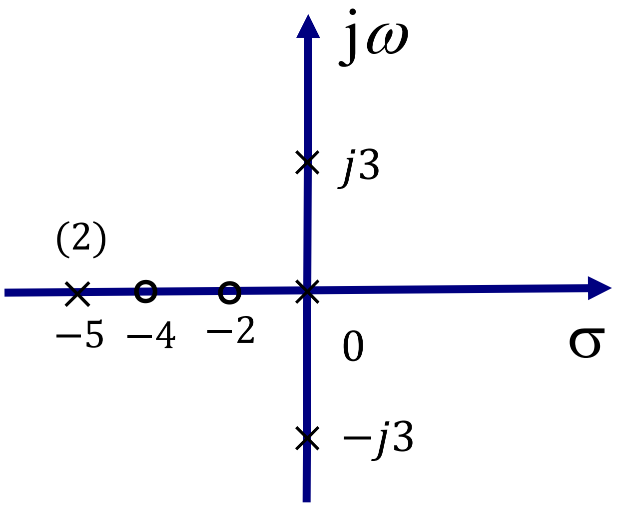
$$\lim_{s\to\infty}H(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{a_m s^m}{b_n s^n}=\infty$$

例如： $F(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{s(s^2+9)(s+5)^2}$

$s=-2, s=-4,$
$s=0, \pm j3, s=-5$

2.极-零图

系统函数一般为s的实有理函数，其极点和零点的分布关于实轴对称。



极零图

系统函数与时域特性

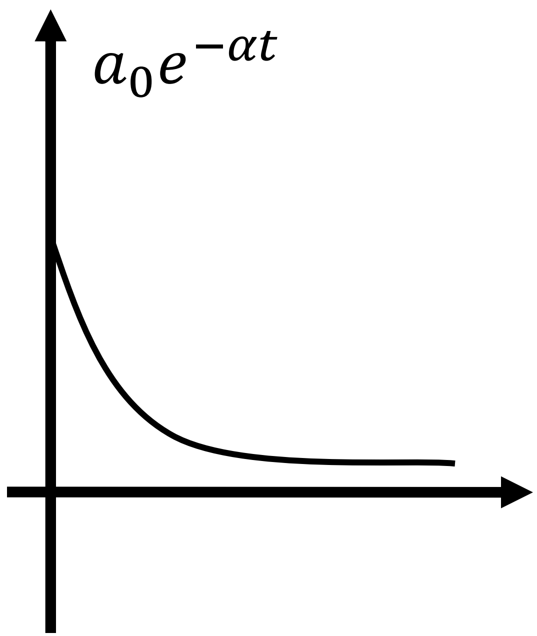
1.H(s)极点与单位冲激响应模式的关系

2.H(s)、E(s)极点分布与响应的关系

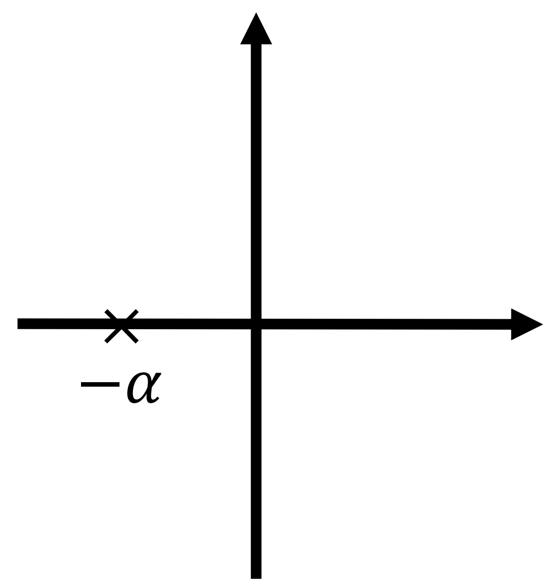
3.H(s)零点对系统时域特性的影响

零极点与$h(t)$时域波形的对应关系

① 左半开平面的极点：在负实轴上

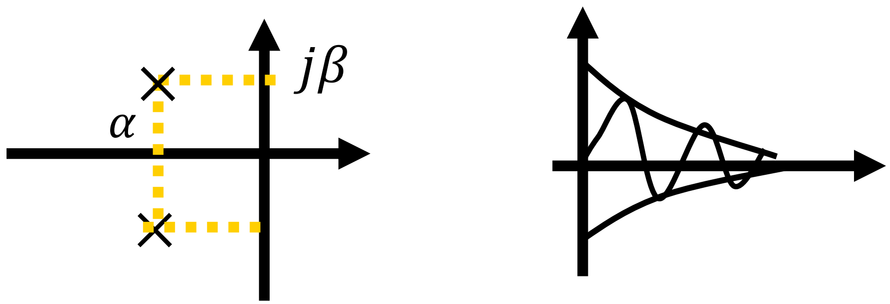


$$\frac{a_0}{s+\alpha}$$



零极点与$h(t)$时域波形的对应关系（续一）

② 左半开平面的**共轭极点**



$$F(s)=\frac{s+b}{(s+\alpha)^2+(j\beta)^2}=\frac{s+b}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$$

$$f(t)=\frac{\sqrt{((b-\alpha)^2+\beta^2)}}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi)$$

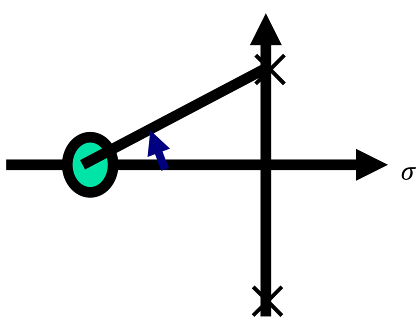
$t\to\infty, f(t)\to 0$

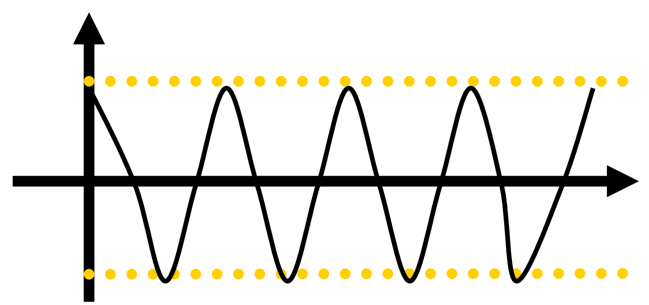
零极点与$h(t)$时域波形的对应关系（续二）

③ 虚轴上的单极点

$$\frac{s+b}{s^2+\beta^2} \leftrightarrow \frac{\sqrt{(\beta^2+b^2)}}{\beta}\sin(\beta t+\phi)$$

$$\varphi = arctg\frac{\beta}{b}$$





零极点与$h(t)$时域波形的对应关系（续三）

④ 右半开平面的极点

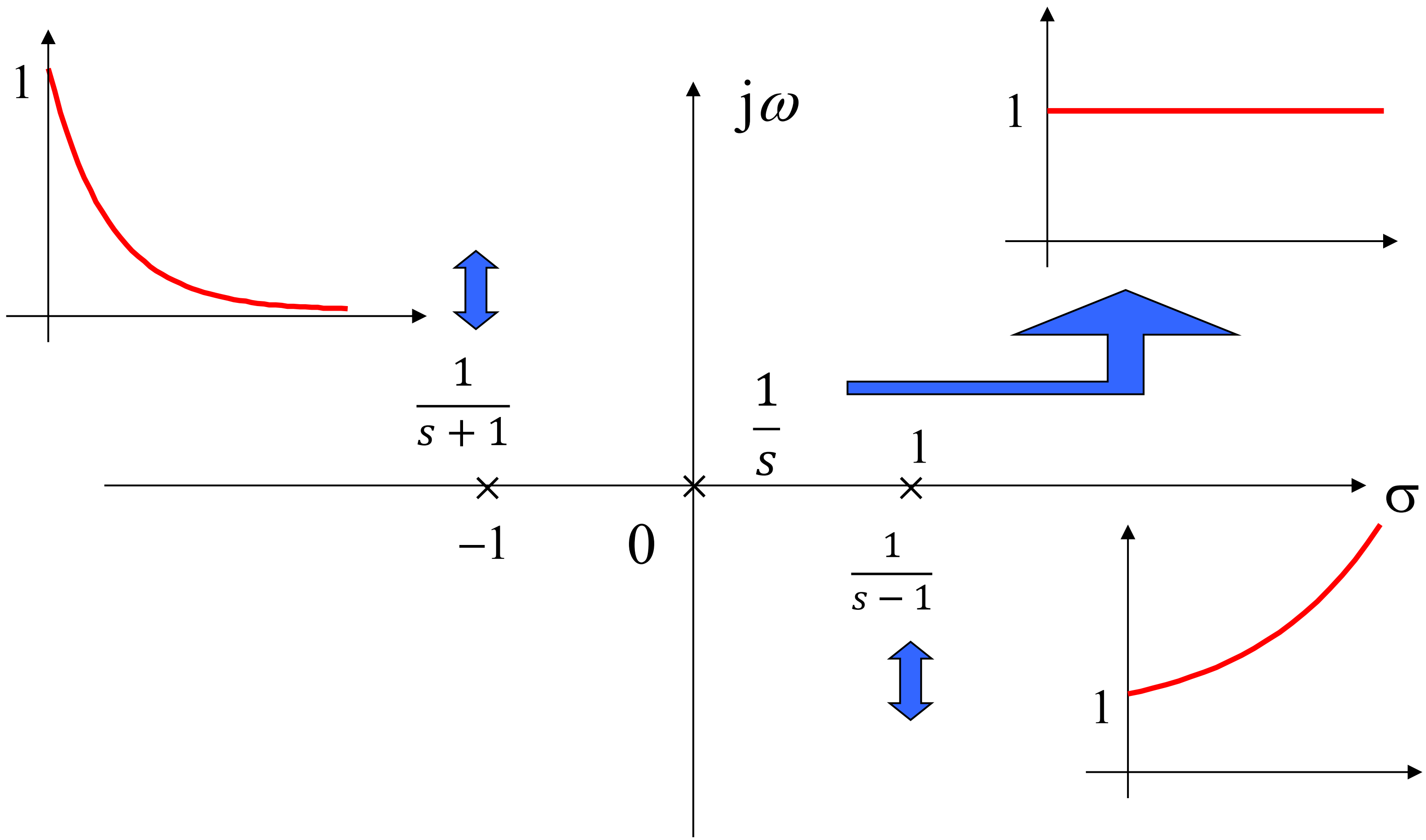
实轴上的极点： $\frac{1}{(s-\alpha)} \leftrightarrow e^{\alpha t}u(t)$

共轭极点： $e^{\alpha t}\sin(\beta t+\varphi)u(t) \leftrightarrow \frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]}$

$t \to \infty, f(t) \to \infty$

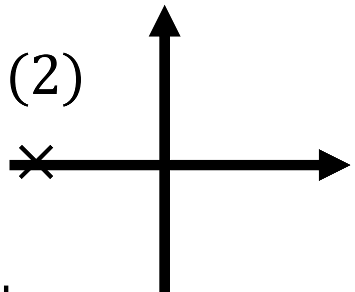
零极点与$h(t)$时域波形的对应关系（续四）

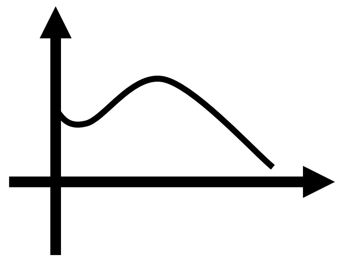
位于σ 轴的单极点的几种响应形式



零极点与$h(t)$时域波形的对应关系（续五）

负实轴上的重极点的响应





$$\frac{a_1 s + a_0}{(s+\alpha)^2} \leftrightarrow [(a_0 - a_1\alpha)t + a_1]e^{-\alpha t} \ldots\ldots t > 0$$

$$\frac{1}{(s+\alpha)^m} \leftrightarrow \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha t} \ldots . t > 0, k = 1,2,3\ldots m$$

$t \to \infty, f(t) \to 0$

H(s)极点与单位冲激响应模式的关系

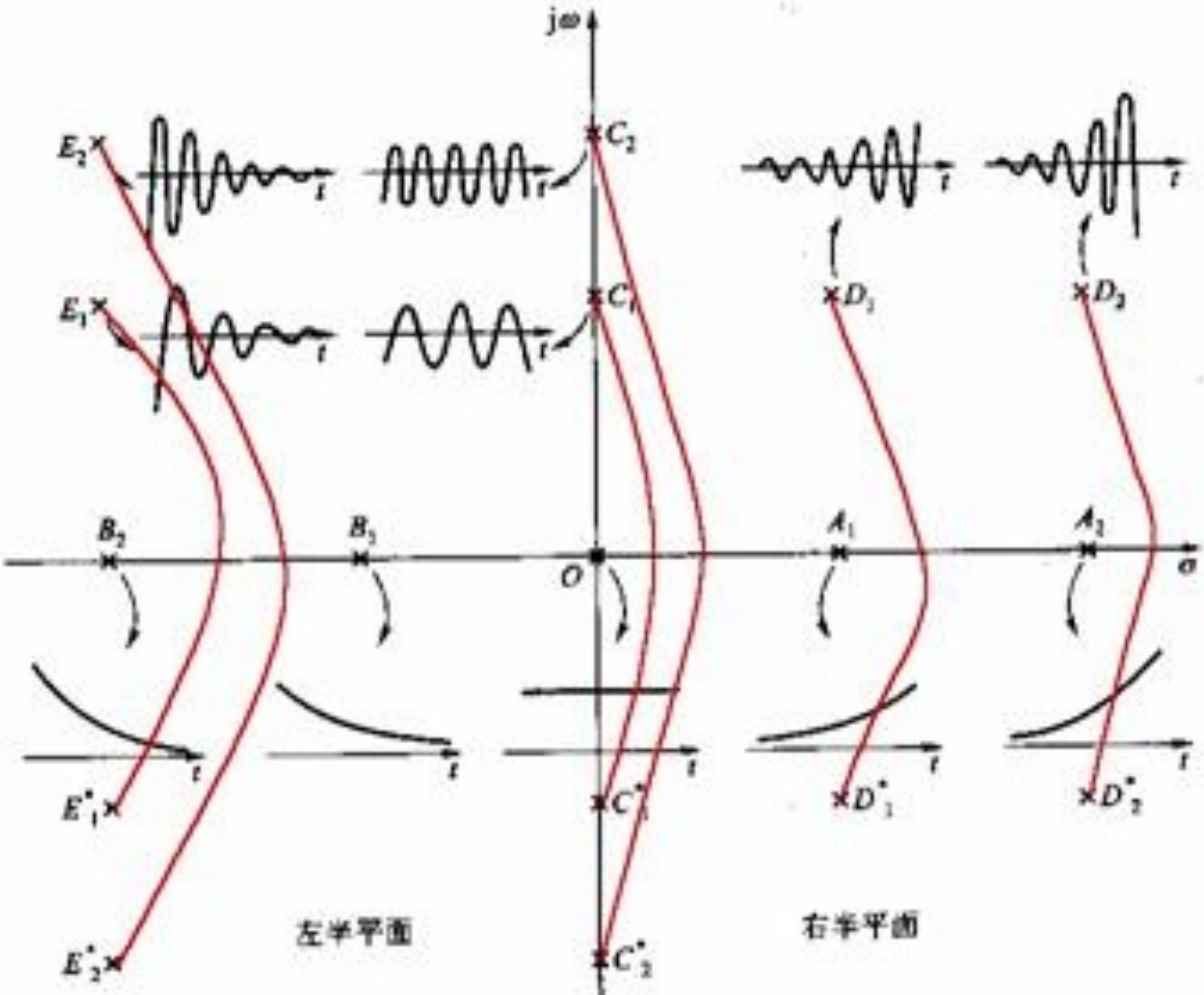
虚轴	一阶	$\frac{1}{s}$	$\rightarrow u(t)$	稳态
虚轴	一阶	$\frac{1}{s^2+1}$	$\rightarrow \sin(t)u(t)$	稳态
虚轴	二阶	$\frac{1}{s^2}$	$\rightarrow tu(t)$	增长
虚轴	二阶	$\frac{1}{(s^2+1)^2}$	$\rightarrow t\sin(t)u(t)$	增长

左半开平面　一阶　$\frac{1}{s+1} \to e^{-t}u(t)$　衰减

左半开平面　一阶　$\frac{1}{(s+1)^2+1} \to e^{-t}\sin(t)u(t)$　衰减

左半开平面　二阶　$\frac{1}{(s+1)^2} \to te^{-t}u(t)$　衰减

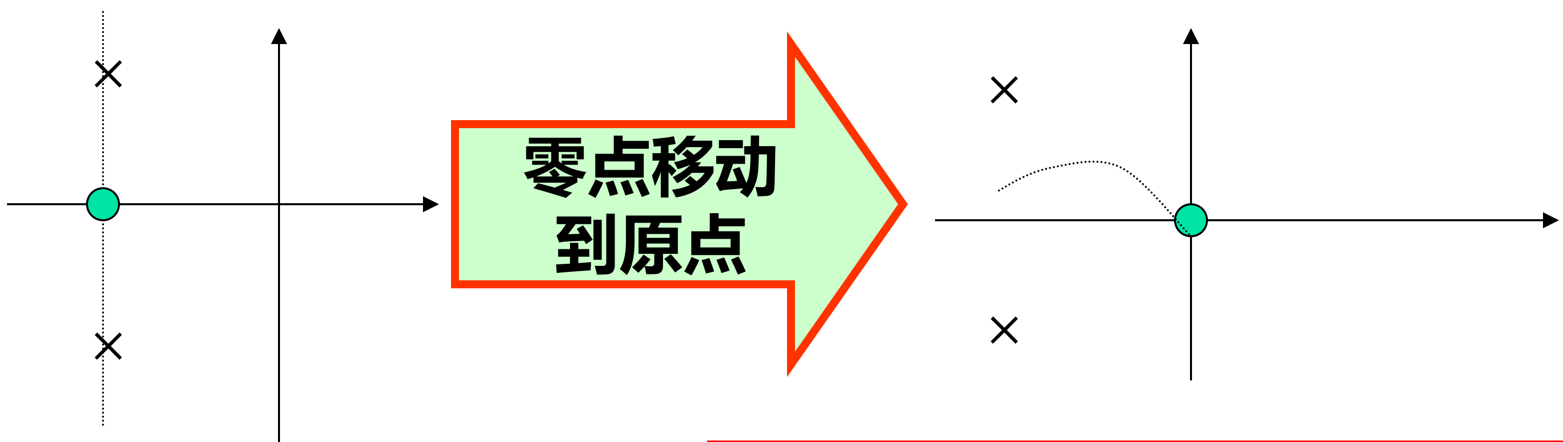
右半开平面极点　增长


jω
σ
O
左半平面
右半平面

3. H(s)零点对系统时域特性的影响

$$H_1(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$H_2(s)=\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$$



$$h(t)=e^{-at}\cos\omega t$$

$$h(t)=e^{-at}\sqrt{1+\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}\cos(\omega t-\phi)$$

$$\phi=tg^{-1}(-\frac{a}{\omega})$$

结论：**零点的分布只影响时域函数的幅度和相移，不影响振荡频率**

$$h(t) = e^{-at}\cos\omega t$$

幅度

$$h(t) = e^{-at}\sqrt{1+\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}\cos(\omega t-\phi)$$

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{a}{\omega}\right)$$

相移

零极点与时域波形对应关系小结

① $H(s)$在左半平面的极点给出$h(t)$的暂态分量

② $H(s)$在虚轴上的单极点给出$h(t)$的稳态分量

③ $H(s)$在虚轴上二阶或更高阶极点及右半平面的极点给出的$h(t)$将随时间的增长而增长

④ 极点的分布只能说明$h(t)$所具有的函数的模式，而不能说明$h(t)$的大小及相位，大小及相位与零点有关

H(s)、E(s)极点分布与响应的关系

(1) 由经典的微分方程可知：

完全解=齐次解 + 特解

↓ ↓

自由响应 受迫响应

(2) 由工作状态决定：

完全解=暂态响应 + 稳态响应

(3) 由因果关系决定：

完全解=零输入响应 + 零状态响应

自由响应与受迫响应

$$R(s)=H(s)E(s)=\frac{\prod_{l=1}^{m}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{u}(s-x_j)}{\prod_{i=1}^{v}(s-q_i)}$$

来自H(s)的极点

$$R(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}+\sum_{j=1}^{v}\frac{k_j}{s-q_j}$$

来自E(s)的极点

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{p_i t}+\sum_{j=1}^{v}k_j\, e^{q_j t}$$

自由响应

受迫响应

小结：

- H(s)的极点决定了自由响应时间函数的模式。
- E(s)的极点决定了强迫响应时间函数的模式。
- 自由响应与强迫响应的幅度和相位与H(s)和E(s)均有关。

系统函数的z-p点分布与频响特性

频响特性是指系统在正弦信号激励之下稳态响应随信号频率的变化情况。根据H(s)在s平面的零、极点分布情况可以绘制出频响特性曲线.

系统稳定时，令H(s)中$s=j\omega$，则得系统频响特性

$$H(j\omega)=H(s)|s=j\omega$$

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

幅频特性

相频特性

系统频响函数的向量表示

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m}(j\omega - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(j\omega - p_i)}$$

令 $\mathrm{j}\omega - z_i = B_i e^{j\beta_i},\qquad \mathrm{j}\omega - p_i = A_i e^{j\alpha_i}$

得 $$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m} B_i e^{j\beta_i}}{\prod_{i=1}^{n} A_i e^{j\alpha_i}} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m} B_i}{\prod_{i=1}^{n} A_i} e^{j(\sum_i \beta_i - \sum_l \alpha_l)}$$

$$= |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m} B_i}{\prod_{i=1}^{n} A_i}$$

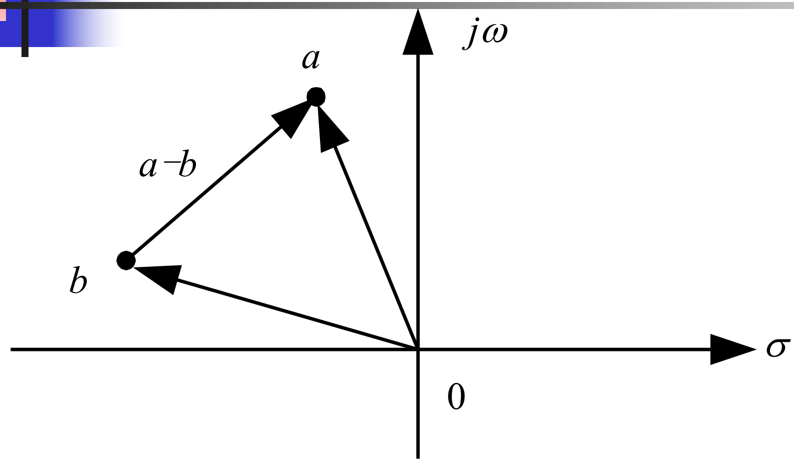
幅频特性等于零点矢量模的乘积除以极点矢量模的乘积

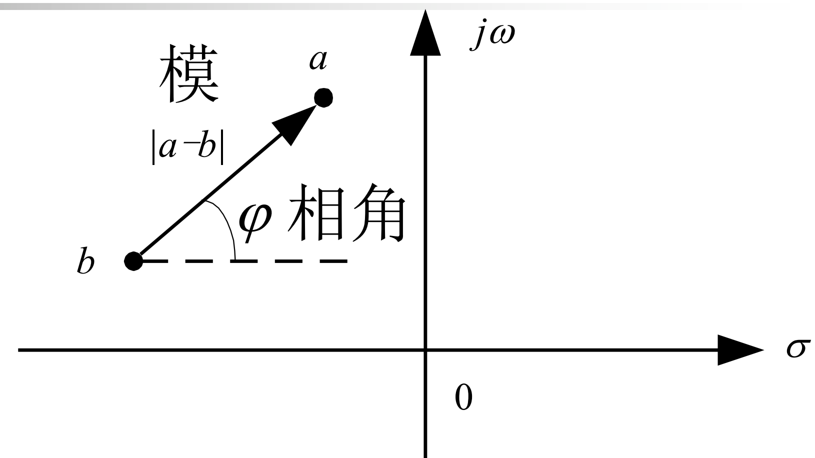
$$\phi(\omega) = \sum_i \beta_i - \sum_l \alpha_l$$

相频特性等于零点矢量相角和减去极点矢量相角和

给定一系列频率ω的值，由这两个式子就可以算出一系列的模量和相位的值，可以粗略画出幅频和相频曲线。

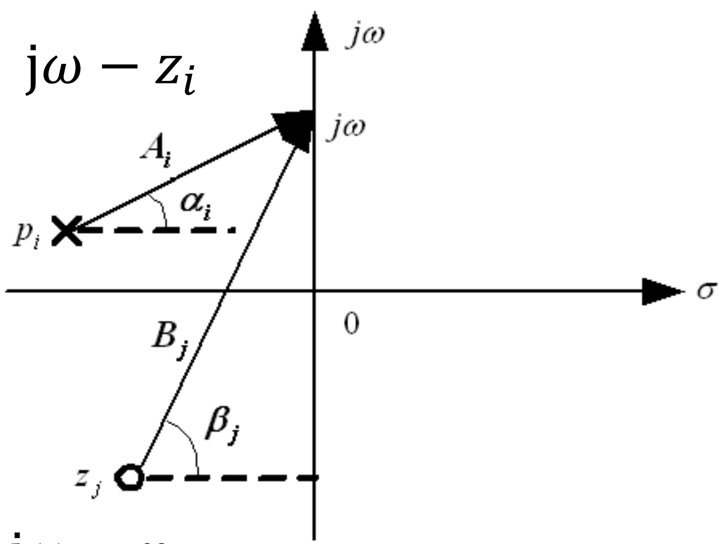
复数a和b及a-b的向量表示





$$a-b=|a-b|e^{j\phi}$$

$j\omega-z_i$



$j\omega-p_i$

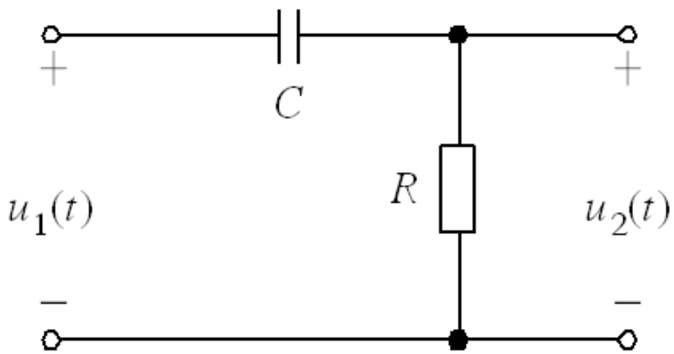
$$j\omega-z_i=B_ie^{j\beta_i}$$

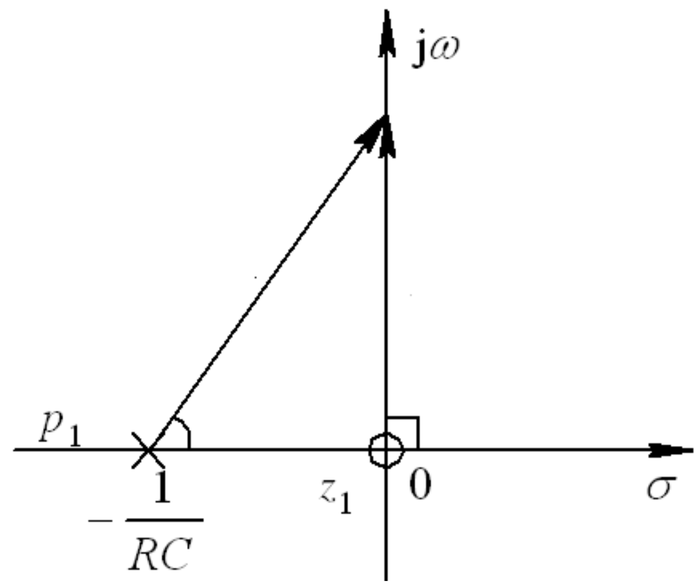
— 零点矢量

$$j\omega-p_i=A_ie^{j\alpha_i}$$

— 极点矢量

例 一个由RC组成的滤波器如图所示,试分析其频响特性。





解: 系统函数为

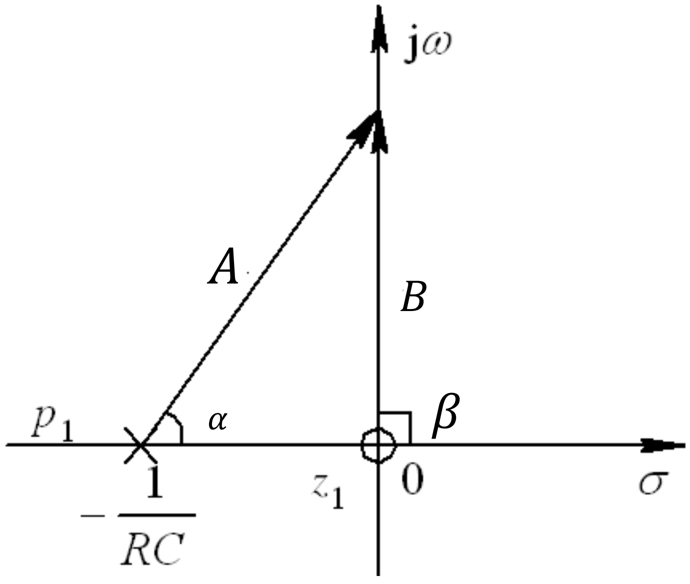
$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$

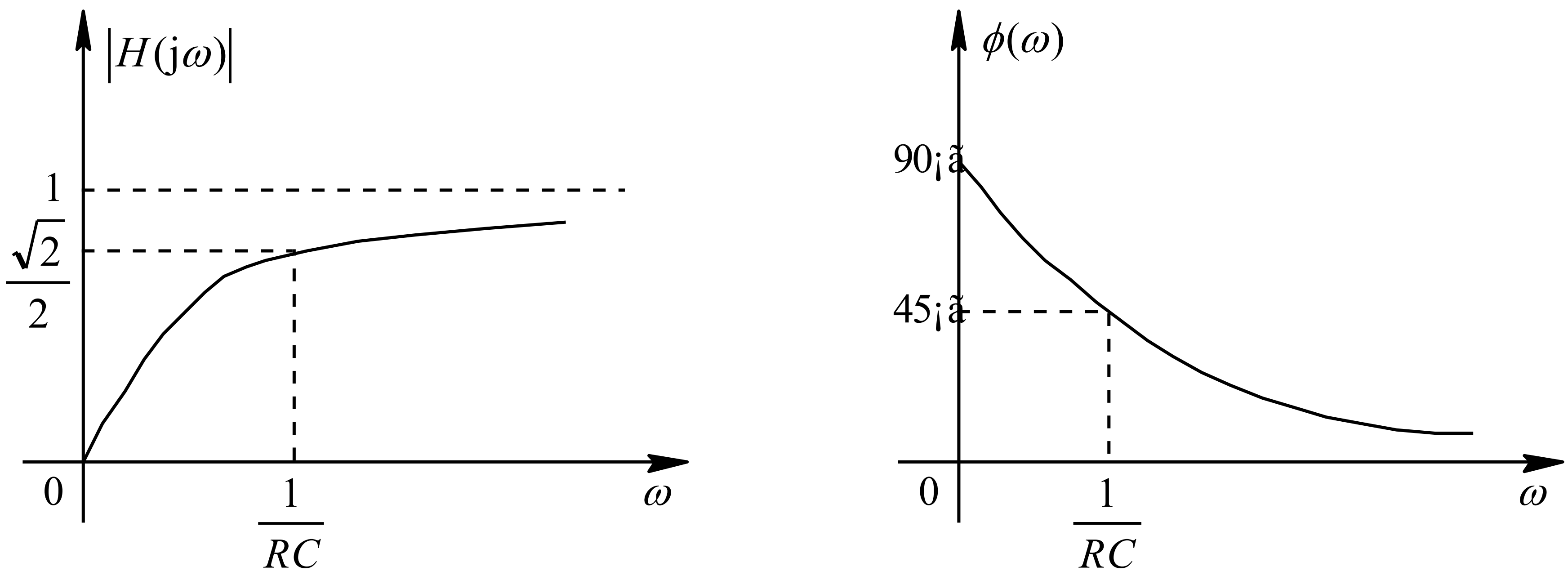
$$H(s)=\frac{s}{s+\frac{1}{RC}} \qquad H(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+\frac{1}{RC}}$$

零点矢量为$j\omega - z = Be^{j\beta}$**,极点矢量为**$j\omega - p = Ae^{j\alpha}$**,于是**

$$|H(j\omega)|=\frac{B}{A}$$

$$\phi(\omega)=\beta-\alpha$$





高通滤波器

线性系统的稳定性

稳定性的定义

如果一个系统对于任何有界的输入，其响应也是有界的。既：若$|e(t)| < M_e$，则有$|r(t)| < M_r$，其中M_e, M_r为有限的正实数，那么我们称该系统是稳定的。

稳定线性系统完全等价条件

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty}$$

线性系统稳定性等价条件证明

充分性：

$$r(t) = e(t) * h(t)$$

$$|r(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e(t-\tau)h(\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e(t-\tau)h(\tau)|d\tau$$

$$\because\ |e(t-\tau)| < M_e \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty}$$

$$\therefore\ |r(t)| \leq M_e \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = M_r$$

必要性：用一个特例,即当t趋向无穷大时,如果$h(t)$不绝对可积，则确实存在一个有界的函数在该系统所引起的响应是无界的(反证法).

线性系统稳定性等价条件证明（续）

设 $f(-t)=\dfrac{h(t)}{|h(t)|}$　显然 $|f(t)|=1$

$$\because r(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$\therefore r(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\tau)^2}{|h(\tau)|}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|\,d\tau$$

如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt\to\infty$，

则在$t=0$处响应是无界的——矛盾！

系统的稳定性与极点的关系

- 系统$H(s)$的极点一般是复数，讨论它们实部和虚部对研究系统的稳定性很重要
- 不稳定系统　$\mathrm{Re}[p_i] > 0$　增幅
- 临界稳定系统　$\mathrm{Re}[p_i] = 0$　等幅
- 稳定系统　$\mathrm{Re}[p_i] < 0$　衰减

系统的稳定性与极点的关系（续）

从z-p点在s平面的分布来考察系统的稳定性可以得到如下的结论:

① $H(s)$在右半平面内不能有极点

② $H(s)$在$j\omega$ 轴的极点必须是单阶的

③ $\mathrm{H}(s)$分子多项式的阶数m不能大于分母多项式的阶数n

连续时间系统

<table>
<tr><td rowspan="2">因果</td><td colspan="2">响应不早于激励</td></tr>
<tr><td colspan="2">$h(t) = 0, \quad t < 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">稳定</td><td colspan="2">$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">因果系统</td><td>$\int_{0}^{\infty} |h(t)| < \infty$</td></tr>
<tr><td>系统函数H(s)的所有极点全部位于s平面的左半开平面</td></tr>
</table>