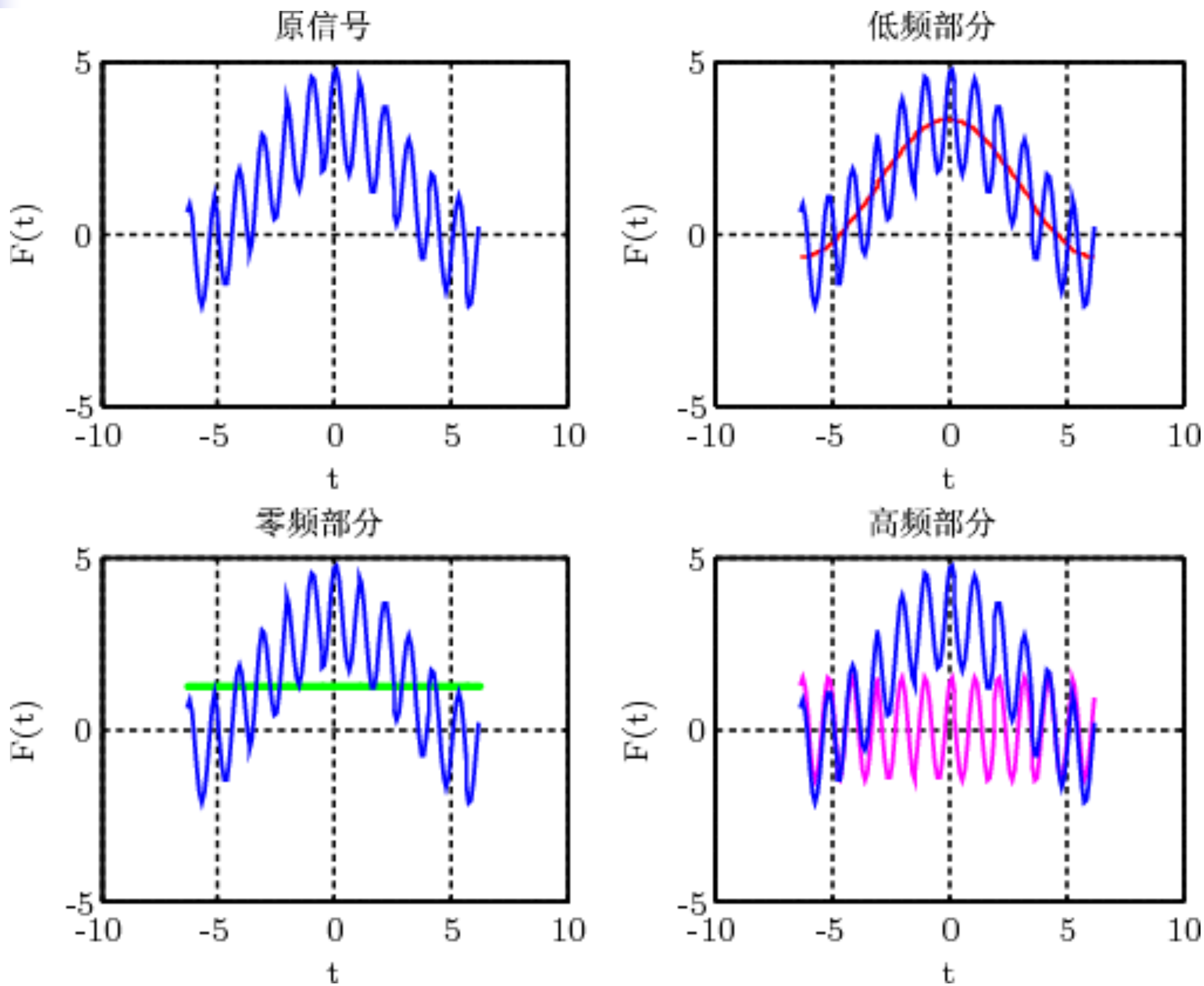
信号与系统

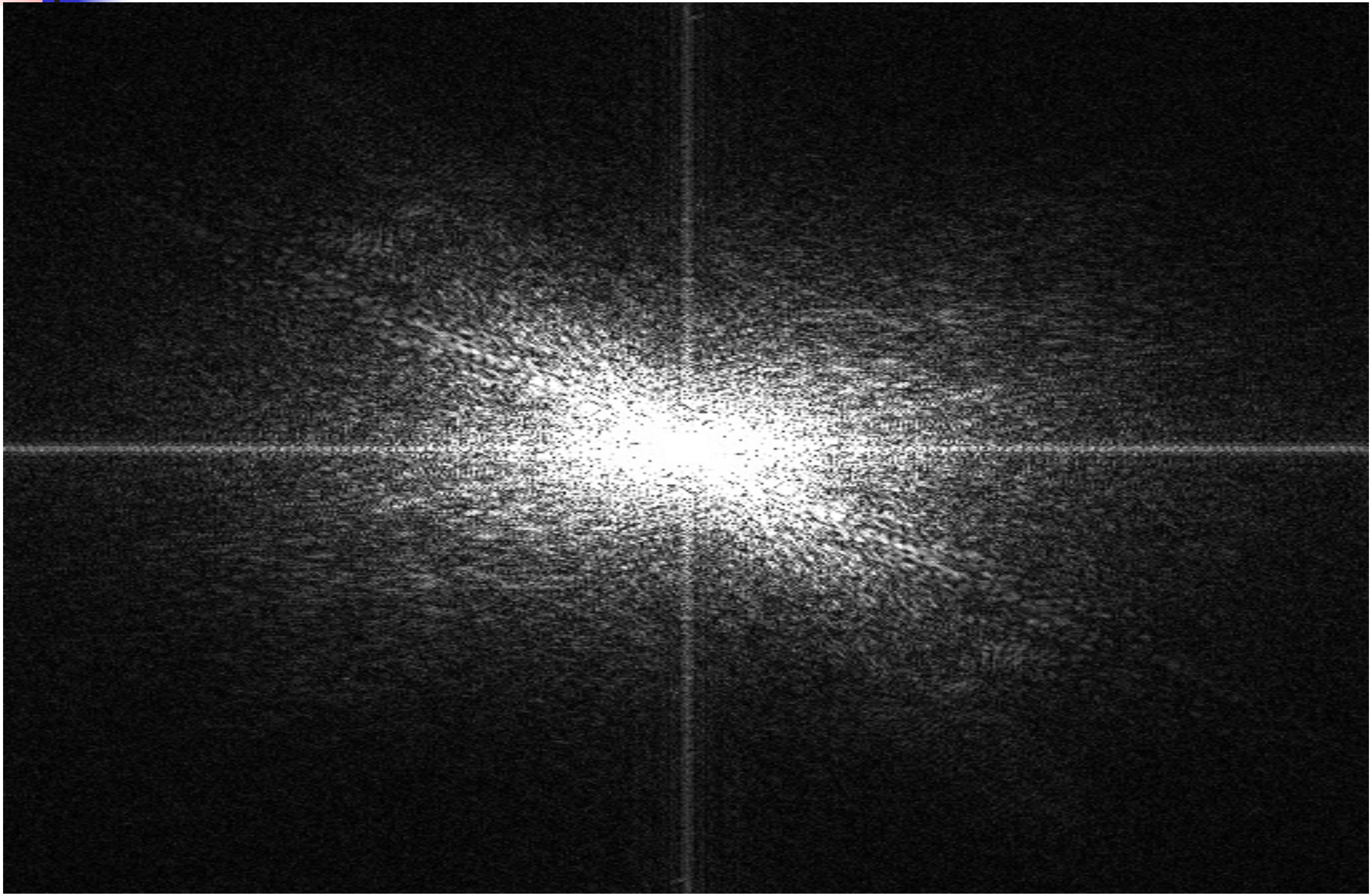
第四章:连续时间系统的频域分析

关于频谱



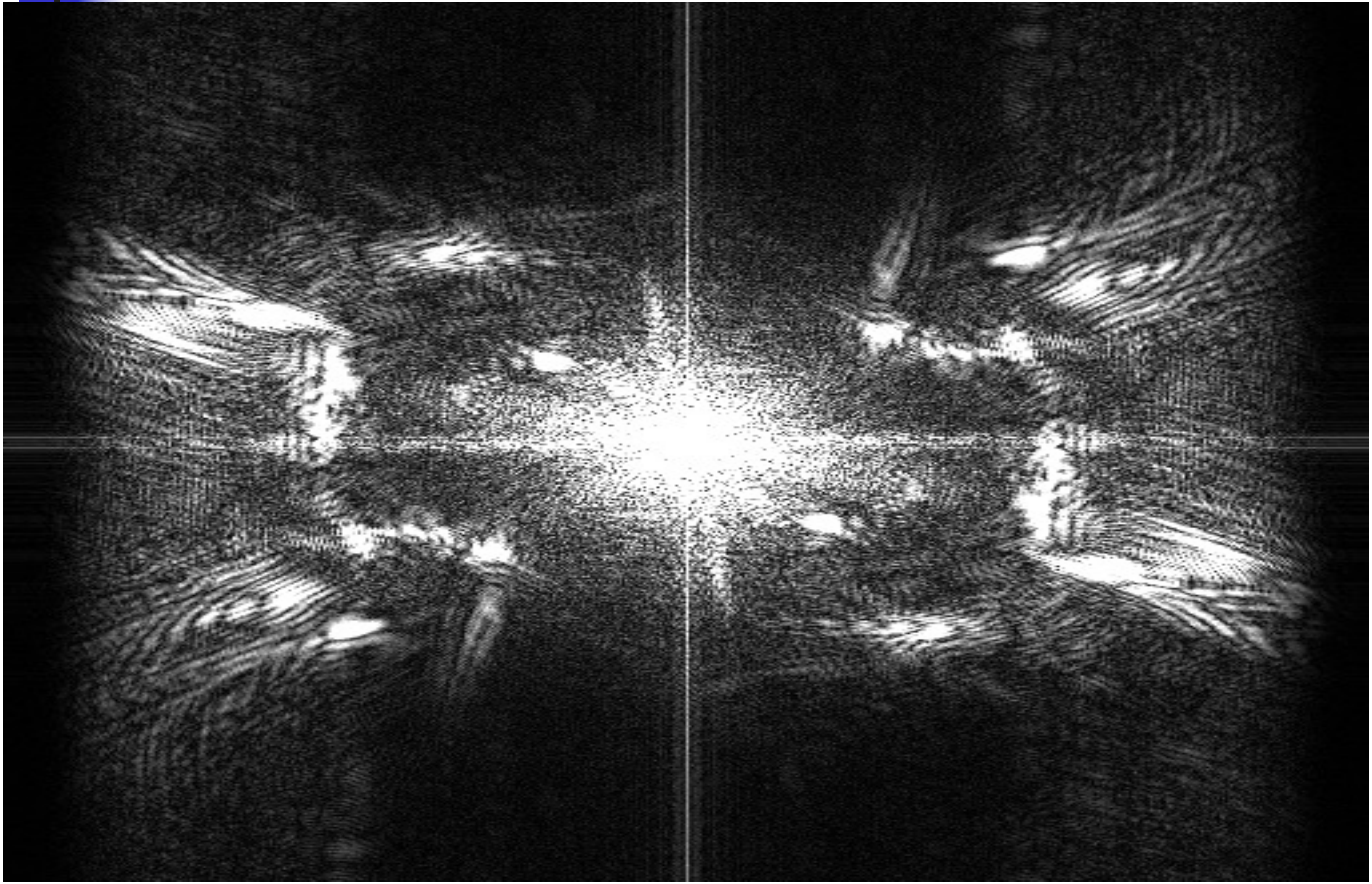
Lena灰度图像

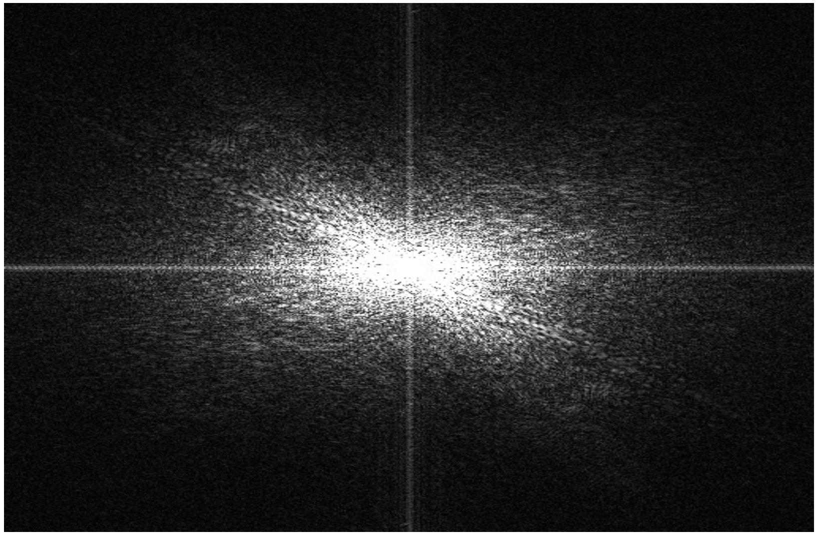
Lena灰度图像的频谱图

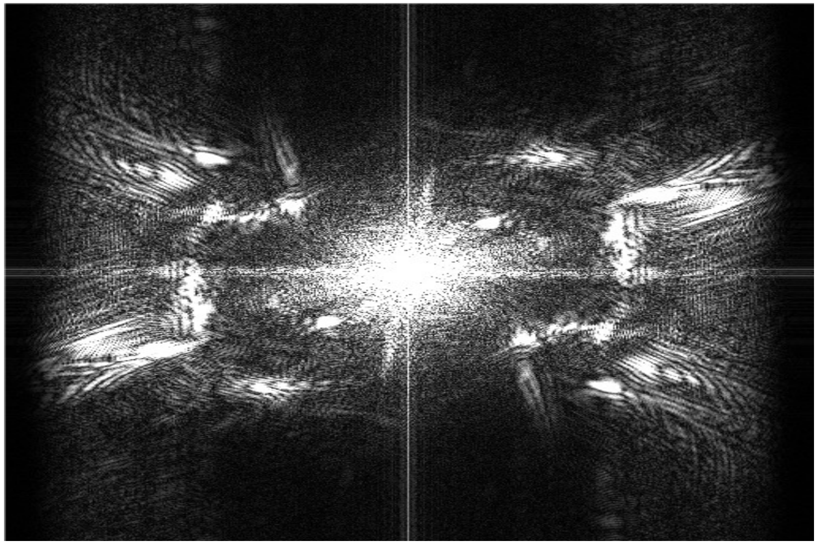


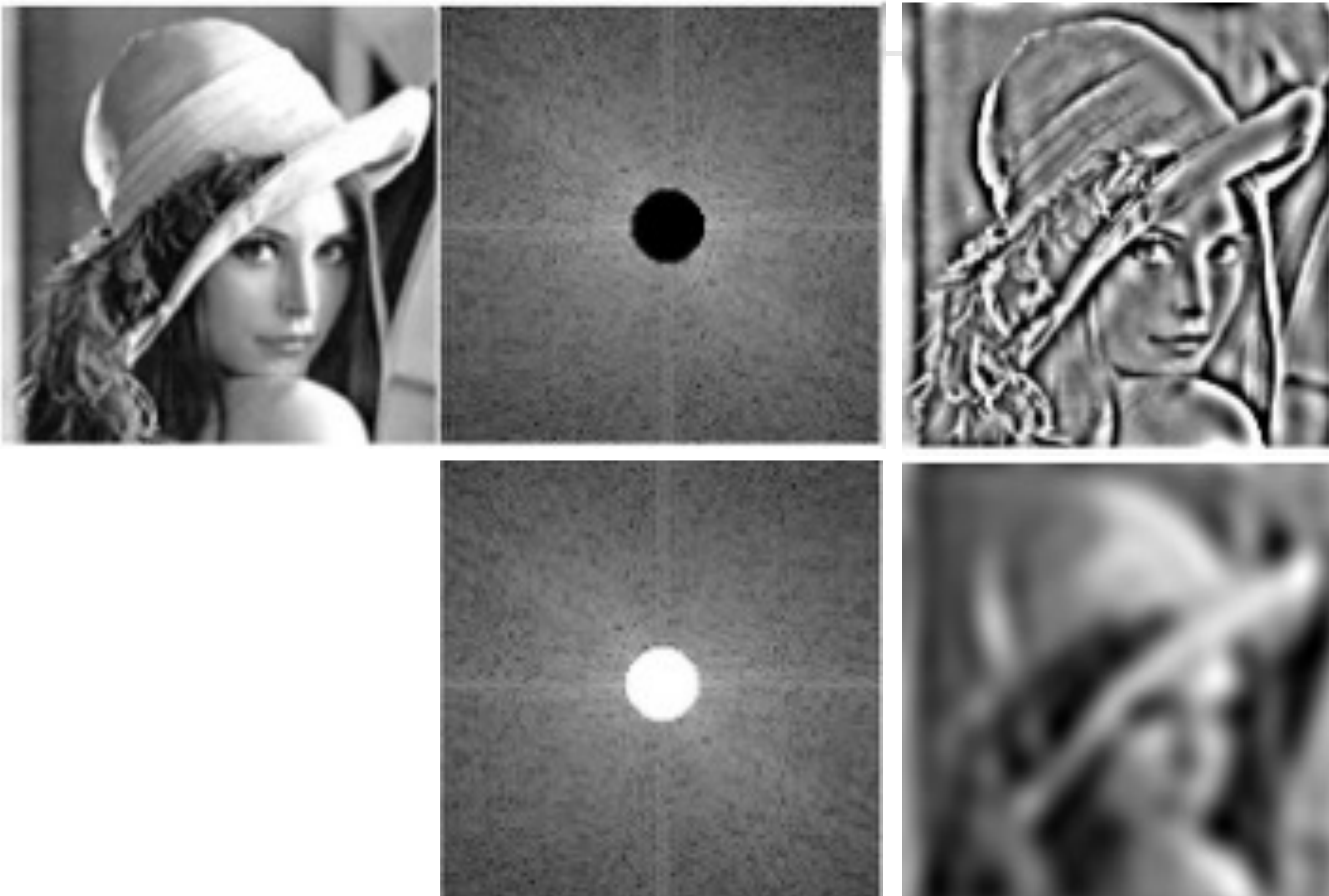
Barbara灰度图像

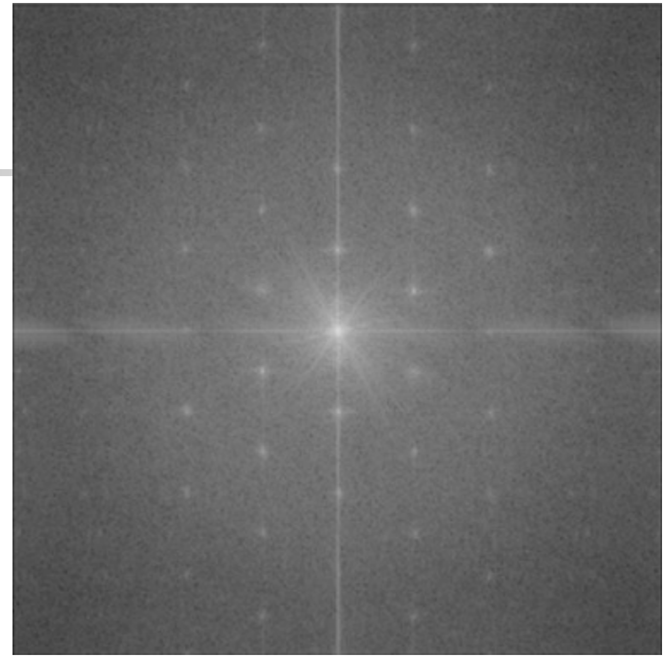
Barbara灰度图像的频谱图

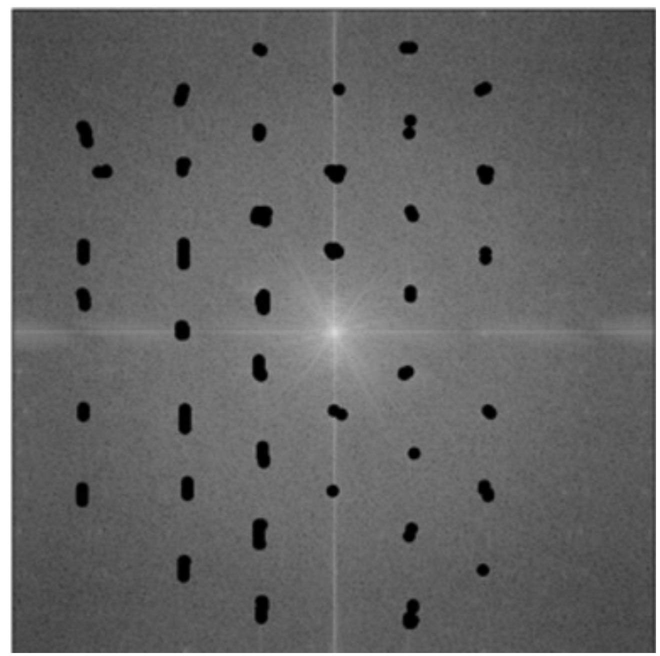










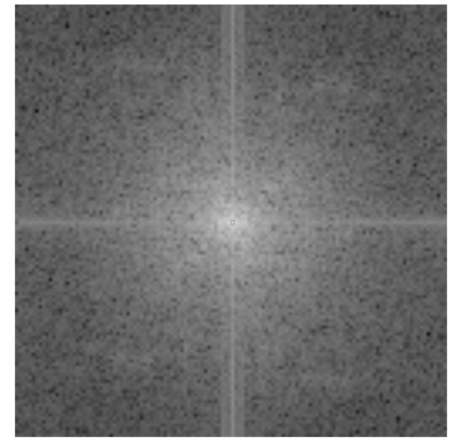
Amplitude and Phase

$$|F(x)| = \{|F_R(x)|^2 + |F_I(x)|^2\}^{1/2}$$

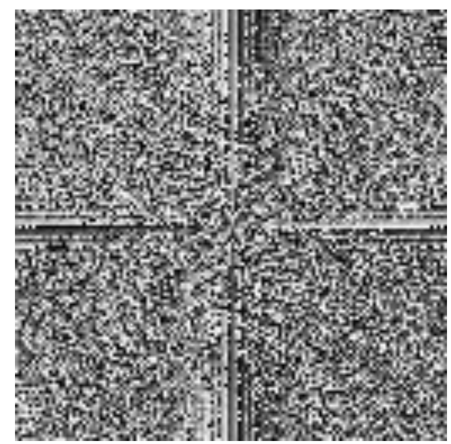
original

$|F(x)|$

amplitude



phase

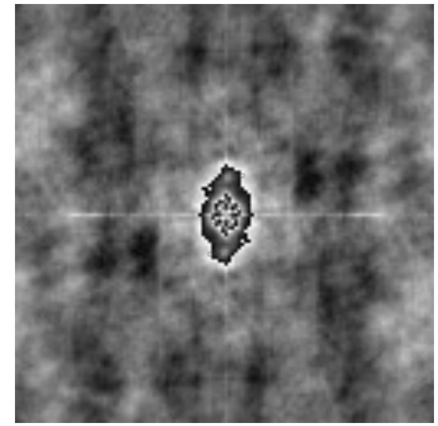


$\angle F(x)$

$$\arctan\left(\frac{F_I(x)}{F_R(x)}\right)$$

original

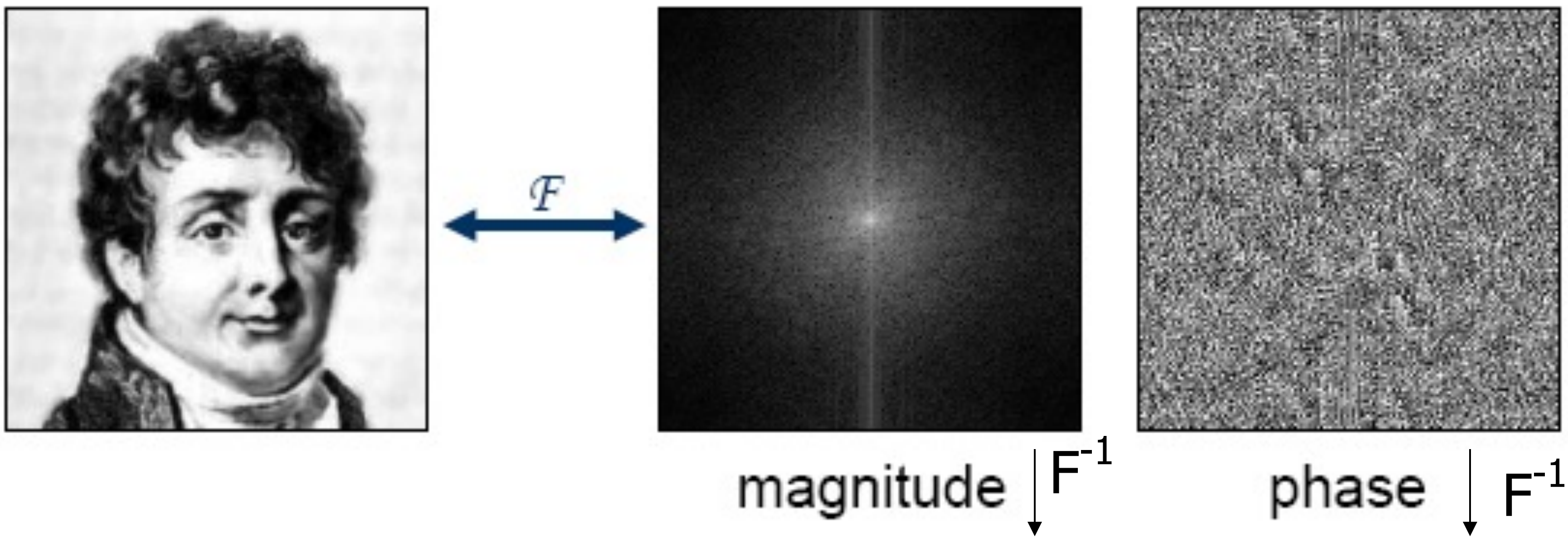
$$FT^{-1}(|F(x)|)$$



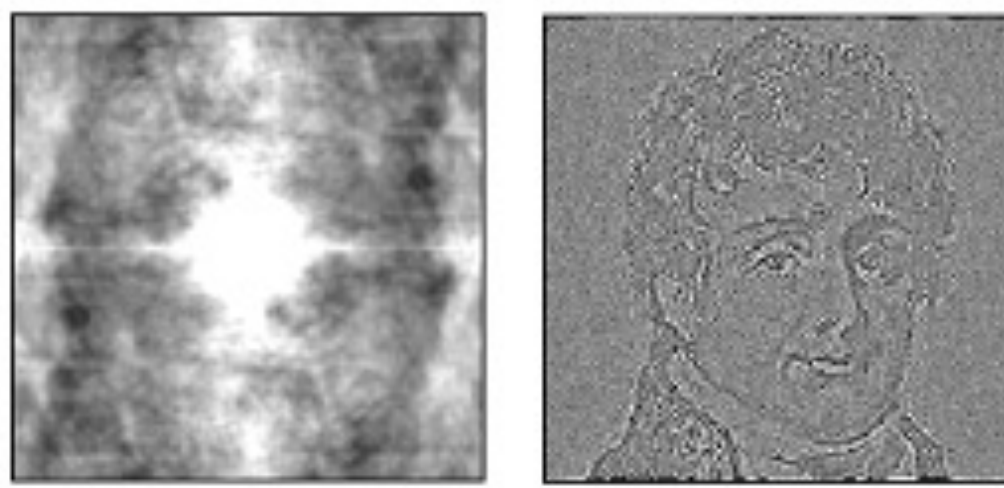
amplitude

phase

$$FT^{-1}(F(x)/|F(x)|)$$



Phase contains more important information than magnitude



基本要求：

- **掌握系统频率响应函数的概念、线性时不变系统零状态响应的频域分析方法；** (1)
- **掌握理想低通滤波器的频响特性；** (1)
- **了解无失真传输的条件；** (1)
- **了解调制解调、频分复用的原理和过程；**

重点与难点：

- **系统的频率响应函数**

本讲内容

- **信号通过系统的频域分析方法**
  - **在频域求解零状态响应**
  - **系统的频域表征-频率响应**
- **理想低通滤波器的频响特性**

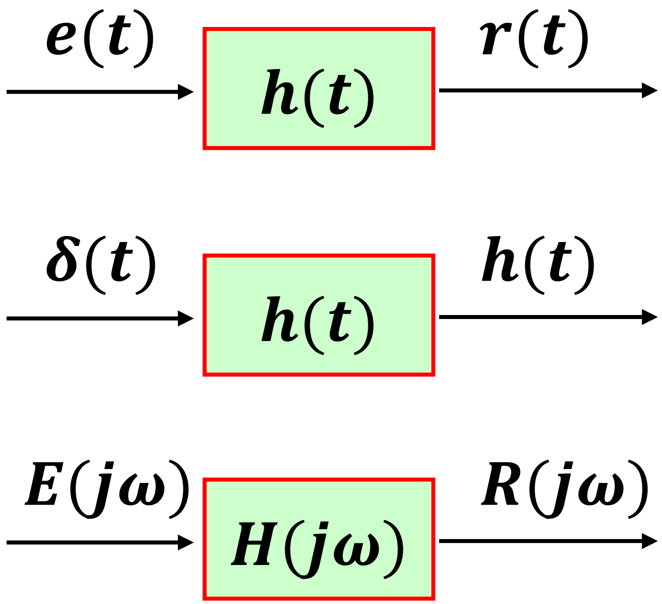
频域分析是如何简化连续时间系统分析的?

- 从系统方程的角度来看，利用**傅里叶变换的微分特性**，可以将一个微分方程转换成代数方程，从而简化了方程的求解。
- 从卷积积分的角度来看，利用**卷积定理**，将复杂的卷积积分转换成乘法运算，从而简化了系统的分析。
- 从物理的角度来看，由于频域具有明确的物理的意义，并且是可以进行测量的，因此，对于很多只能进行黑箱分析的系统，我们可以通过频域的测量，来进行系统分析。

频域分析的缺点

- 需要付出正、逆两次傅里叶变换的代价
- 并不是所有的信号都具有傅里叶变换的，应符合绝对可积的条件
- 因此，常常采用频域分析的推广-拉普拉斯变换来进行复频域分析

系统函数



$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$e(t) * h(t) \leftrightarrow E(j\omega)H(j\omega)$$

- 定义$\boldsymbol{H(j\omega)}$为系统函数，其实就是系统冲激响应的傅里叶变换
- 系统函数又称为“系统的频率响应函数”，简称“频响”。

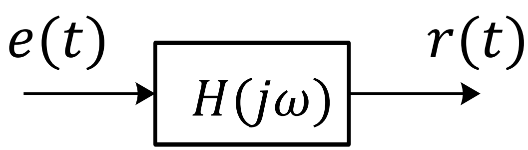
频域分析法的步骤

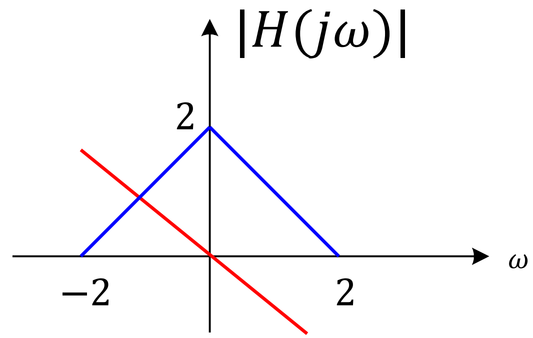
- 求激励信号的傅里叶变换
- 找出联系响应与激励的系统函数
  - 通过微分方程求系统函数
  - 通过幅频——相频曲线求系统函数
  - 通过单位冲激响应求系统函数
- 求取每一频率分量的响应
- 从响应的频谱函数求傅里叶反变换，从而得到系统响应

例1（P160 例题4-1）一线性系统的频响曲线如右图所示。设激励信号为

$$e(t) = 2 + 2\cos t + 2\cos(2t)$$

求零状态响应。





$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}\omega$$

解 :(1)求输入信号的频谱。

$$e(t) = 2 + 2\cos t + 2\cos(2t)$$

$$E(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)]$$
$$+2\pi[\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)]$$

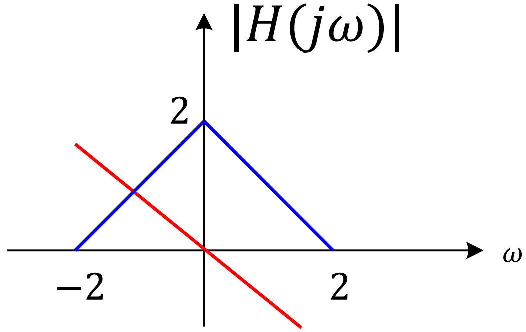
(2)求频响函数。 由给出的频响曲线，可知

$$|H(j\omega)| = (2 - |\omega|)[u(\omega + 2) - u(\omega - 2)]$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}\omega$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$= \begin{cases} (2 - |\omega|)e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}, & |\omega| < 2 \\ 0, & |\omega| \geq 2 \end{cases}$$



$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}\omega$$

(3)求响应的频谱。

$$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$$

$$=8\pi\delta(\omega)+2\pi e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega+1)+2\pi e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega-1)$$

(4)求响应的时域表达式。

$$r(t)=4+e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-jt}+e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jt}$$

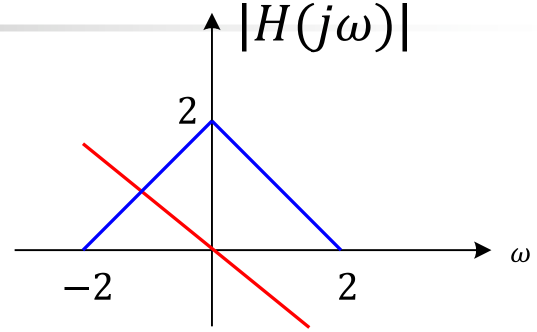
$$=4+e^{-j(t-\frac{\pi}{2})}+e^{j(t-\frac{\pi}{2})}$$

$$=4+2\cos(t-\frac{\pi}{2})=4+2\sin t$$

分析：

$$e(t) = 2 + 2\cos t + 2\cos(2t)$$

$$r(t) = 4 + 2\cos(t - \frac{\pi}{2})$$

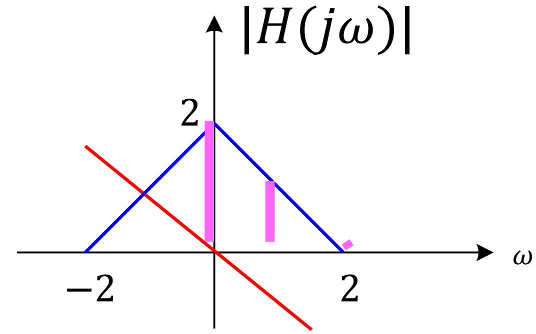


$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}\omega$$

可见，经过系统后，二次谐波被滤除，直流分量放大2倍，基波产生了相移。

问题：

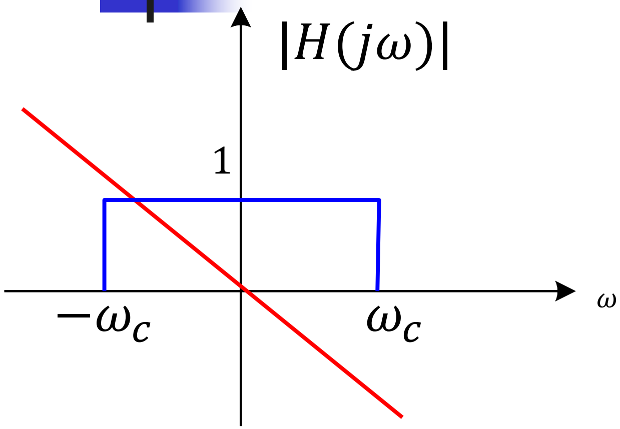
此题还有没有其他求解方法？



理想低通滤波器

- 滤波器是一种选频装置，可以使信号中特定频率成分通过，而极大地衰减其他频率成分。
- 所谓理想滤波器，是指能使通带内信号的幅值和相位都不失真，阻带内的频率成分都衰减为零的滤波器。
- 理想滤波器是不存在的，实际滤波器幅频特性中通带和阻带间没有严格界限，存在过渡带。

一.理想低通滤波器的频响



$\phi(\omega) = -\omega t_0$

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c$$ （截止频率）

或

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}[u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)]$$

更一般地：

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c$$

特性：

1、对于激励信号中低于截止频率 ω_c 的各分量，一致均匀地通过，在时间上延迟同一段时间 t_0。

2、对于高于截止频率 ω_c 的各分量，则一律不能通过。

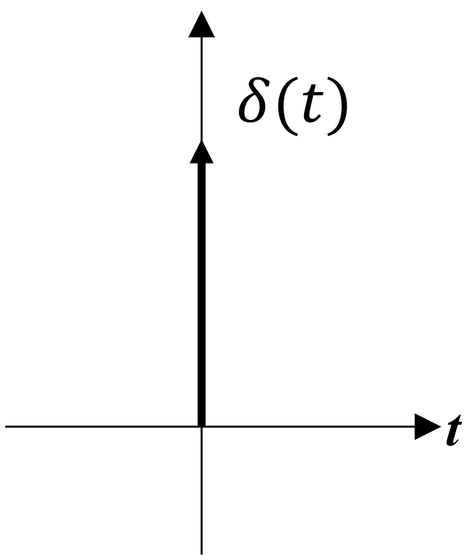
思考：

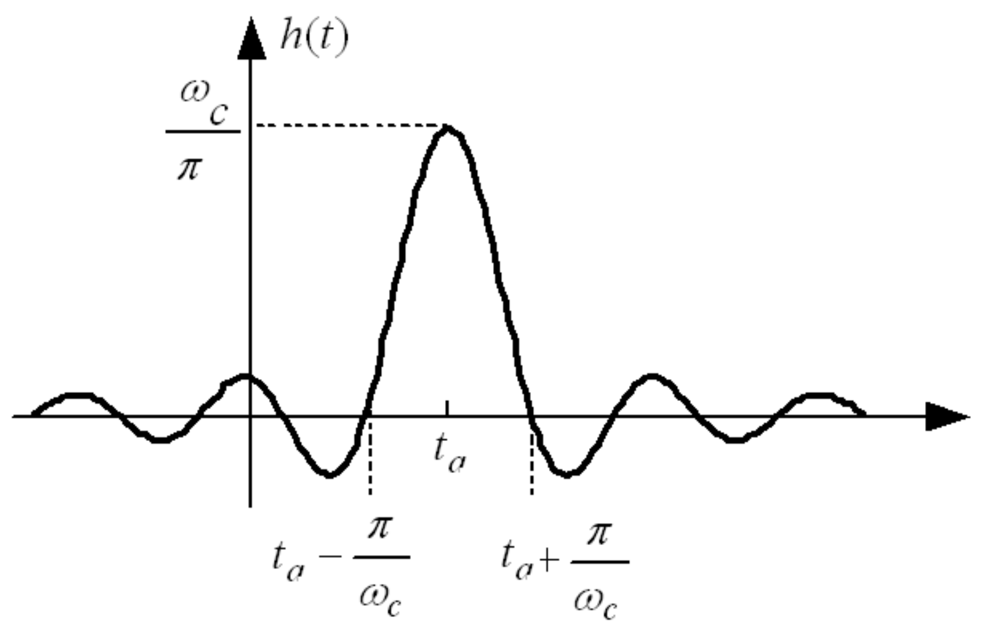
参照理想低通滤波器的频响曲线，请画出理想高通、理想带通、理想全通滤波器的频响曲线，写出频响函数表达式。

二.理想低通滤波器的单位冲激响应

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega t_0}\,e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_0)]$$



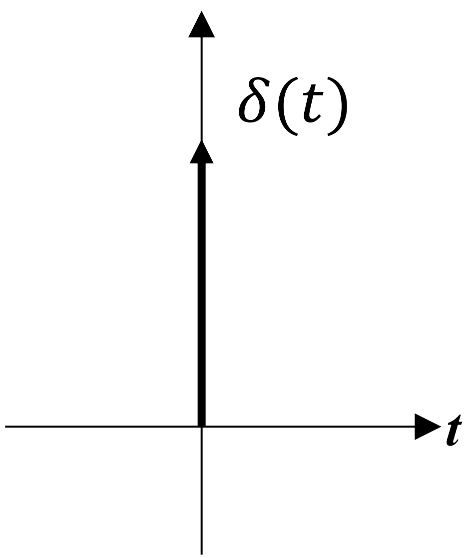


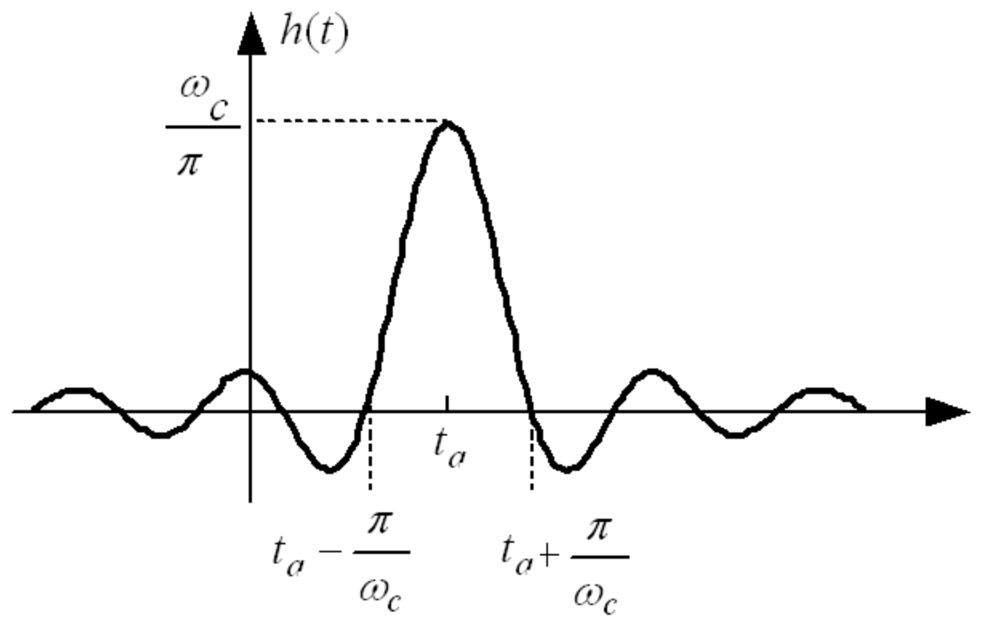
a.波形发生了失真。

$$\lim_{\omega_c \to \infty} h(t) = \lim_{\omega_c \to \infty} \frac{\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t-t_0)] = \delta(t-t_0)$$

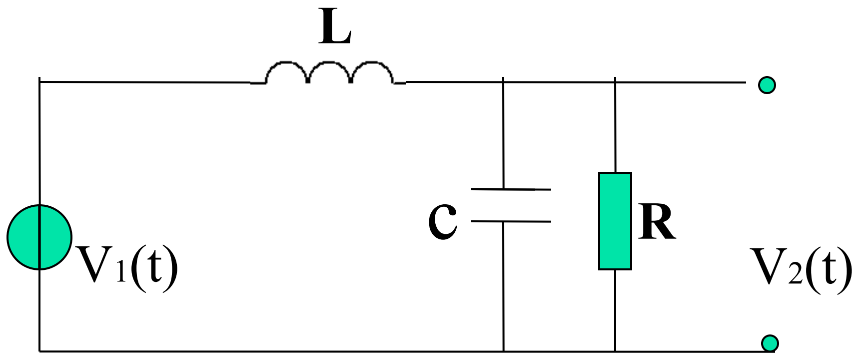
b.$h(t)$的主峰发生在 $t=t_0$ 处。

c.系统违背了因果律，因此在物理上是无法实现的。



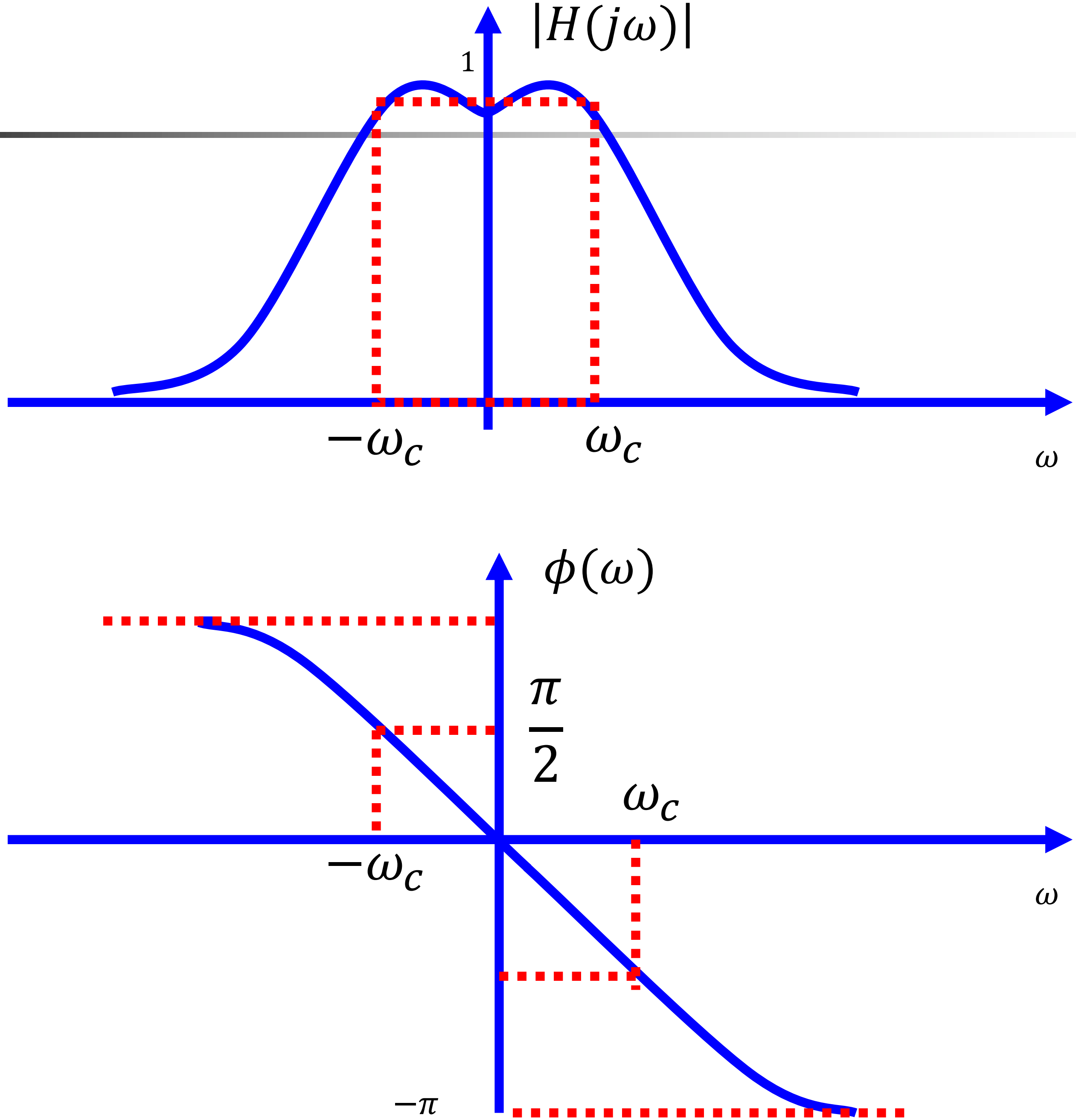


理想低通滤波器在物理上是无法实现的，但是，传输特性接近理想特性的网络却不难构成。如：



$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\{[1-(\frac{\omega}{\omega c})^2]^2+(\frac{\omega}{\omega c})^2\}^{1/2}}$$

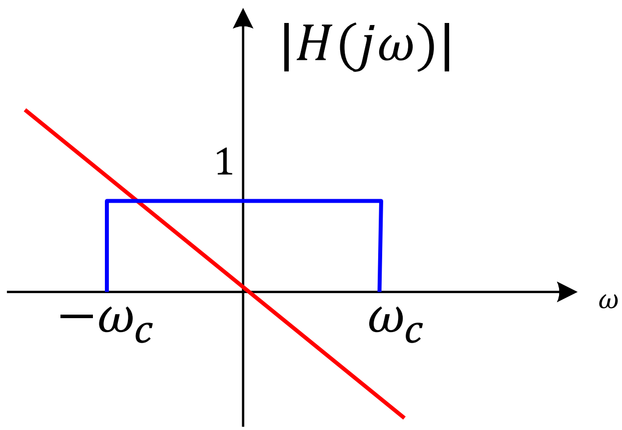
$$\phi(\omega) = -\arctan[\frac{\frac{\omega}{\omega c}}{1-(\frac{\omega}{\omega c})^2}]$$



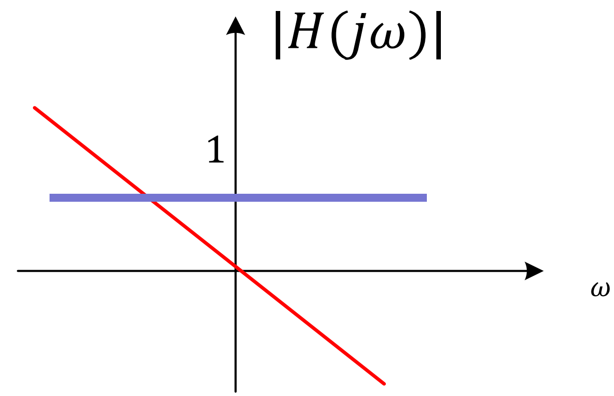
$|H(j\omega)|$
1
$-\omega_c$
ω_c
ω
$\phi(\omega)$
$\frac{\pi}{2}$
ω_c
$-\omega_c$
ω
$-\pi$

思考： §4.8

- **信号通过系统不产生失真的条件是什么？**



$$\phi(\omega) = -\omega t_0$$



$$\phi(\omega) = -\omega t_0$$

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c$$

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

单位阶跃响应

$$r_u(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{\sin\omega_c(\tau-t_0)}{\pi(\tau-t_0)}d\tau$$

令：$x=\omega_c(\tau-t_0), dx=\omega_c d\tau, d\tau=\dfrac{dx}{\omega_c}$

$$r_u(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{0}^{\omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx]$$

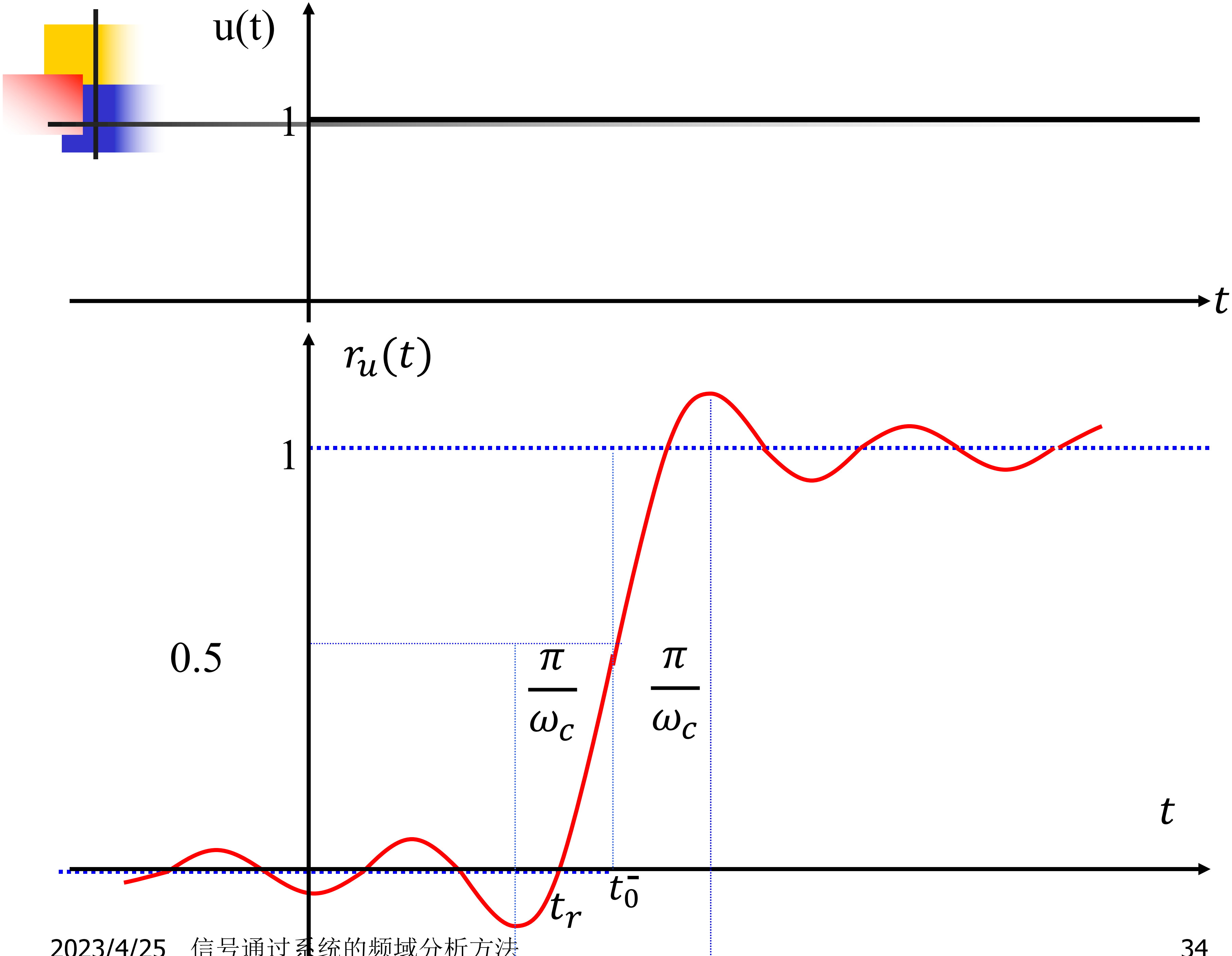
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ldots (1)$$

定义如下的正弦积分函数：

$$\mathrm{Si}(y) = \int_{0}^{y} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{0}^{y} Sa(x) dx \ldots (2)$$

将(1)(2)代入，得到

$$r_u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \mathrm{Si}[\omega_c(t - t_0)]$$


u(t)
1
t
$r_u(t)$
1
0.5
$\frac{\pi}{\omega_c}$
$\frac{\pi}{\omega_c}$
t
t_r
t_0

说明：

a.波形产生了失真;

$$\omega_c \to \infty, r_u(t) \to u(t-t_0)$$

b.响应出现的时间比激励滞后t_0;

c.输出电压的前沿是倾斜的，说明电压的建立需要一段时间。此时间与通带成反比： $tr = \dfrac{2\pi}{\omega_c}$

d.系统违背了因果律，因此在物理上是无法实现的。

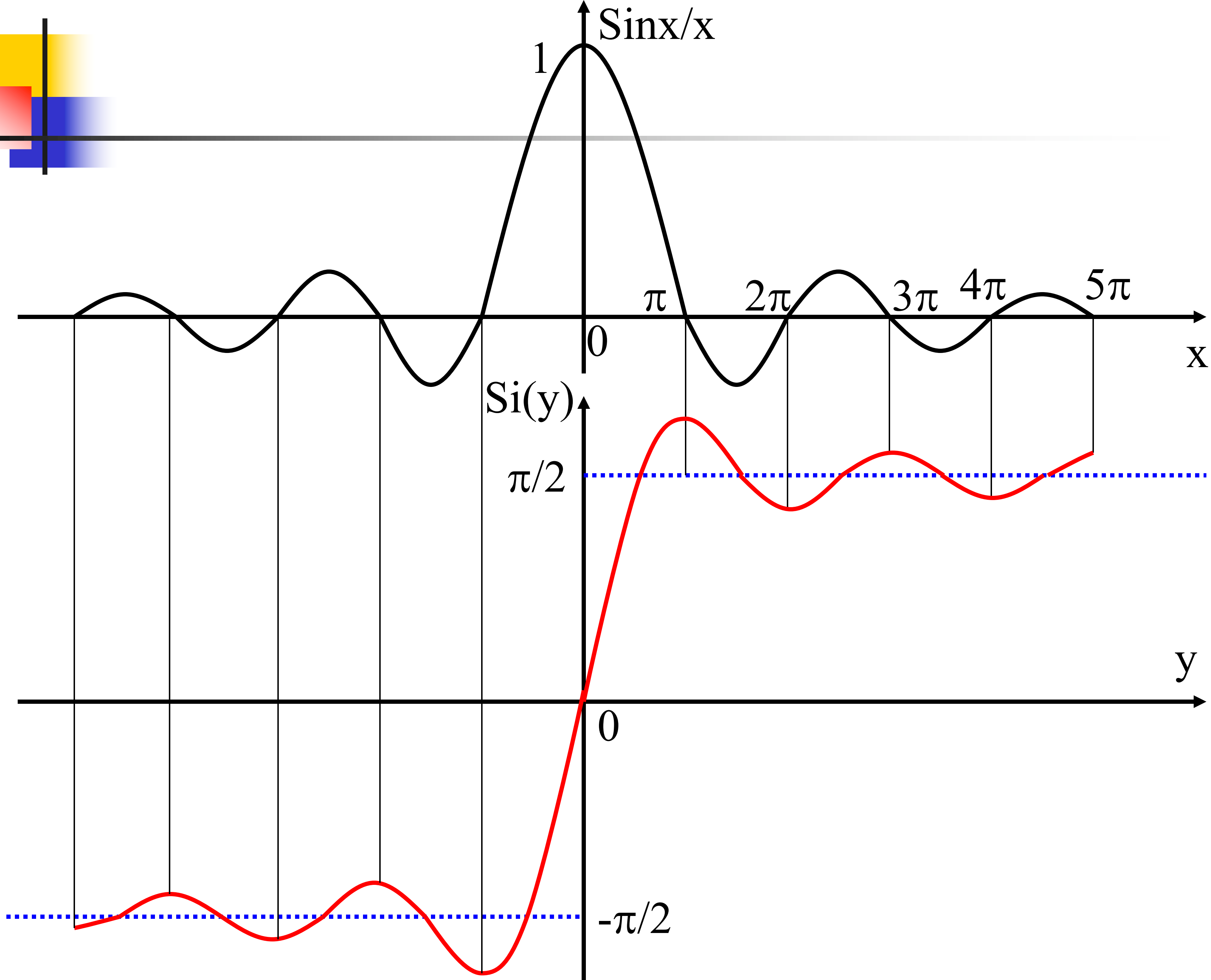
正弦积分

1. $Sa(x)$ 在 $\pm n\pi$ 为零，$Si(y)$ 在 $\pm n\pi$ 取极值。

2. $Si(y)$为奇函数，即 $Si(y) = -Si(-y)$

3. $Si(0) = 0, Si(\infty) = \dfrac{\pi}{2}, Si(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$

4. 在 $y = 0$ 附近，$Si(y)$ 近似于直线。


Sinx/x
1
π
2π
3π
4π
5π
0
x
Si(y)
π/2
y
0
-π/2

§4.4 系统的物理可实现性/佩利-维纳准则

时域：因果性

$$\boxed{t < 0, \quad h(t) = 0}$$

频域：佩利 - 维纳准则

(1)能量可积：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \, d\omega < \infty}$$

(2)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty}$$

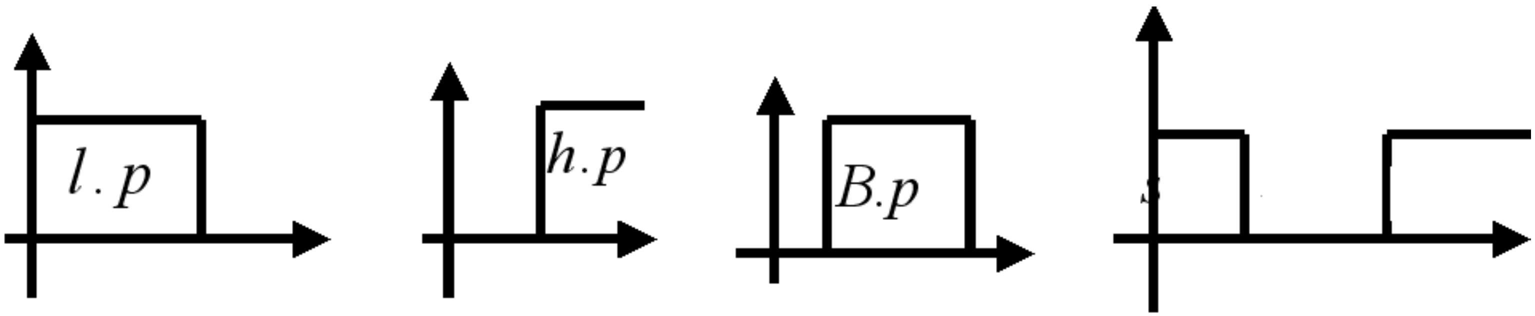
(1)佩利-维纳准则只是物理可实现系统的必要条件，而不是充分条件。

(2)由佩利-维纳准则可以推出以下结论：对物理可实现的系统来说，

a.幅度函数 $|H(j\omega)|$ 在某些离散频率处可以是零，但在一有限频带内不能为零。

b.频响的衰减速率有限制，应不大于指数衰减速度。

以下系统在物理上都是不能实现的：



理想滤波器具有非因果无穷的冲击响应和不连续的频率特性，要用稳定的LTI系统来实现这样的特性是不可能的。

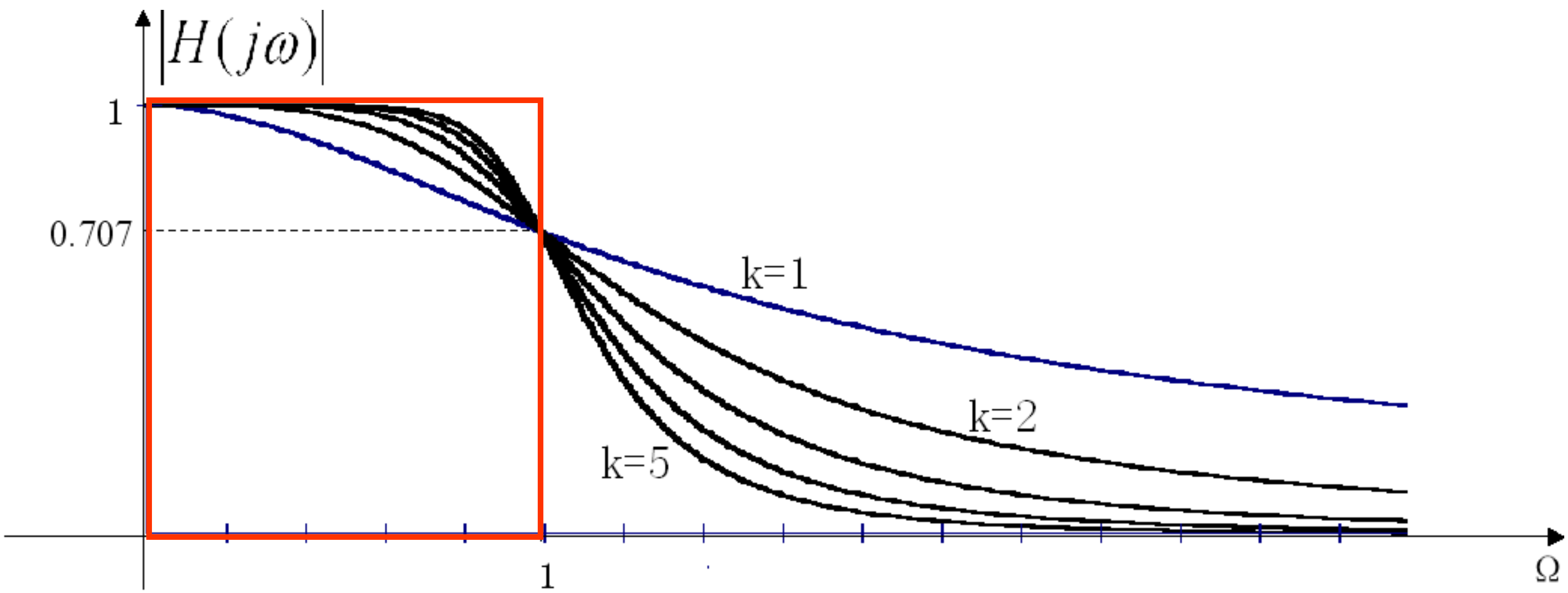
工程上是用有限冲激响应的因果LTI系统或具有连续频率特性的LTI系统来逼近理想特性。在满足一定的误差要求的情况下用可实现函数来逼近理想滤波特性。

巴特沃斯（Butterworth)滤波器：

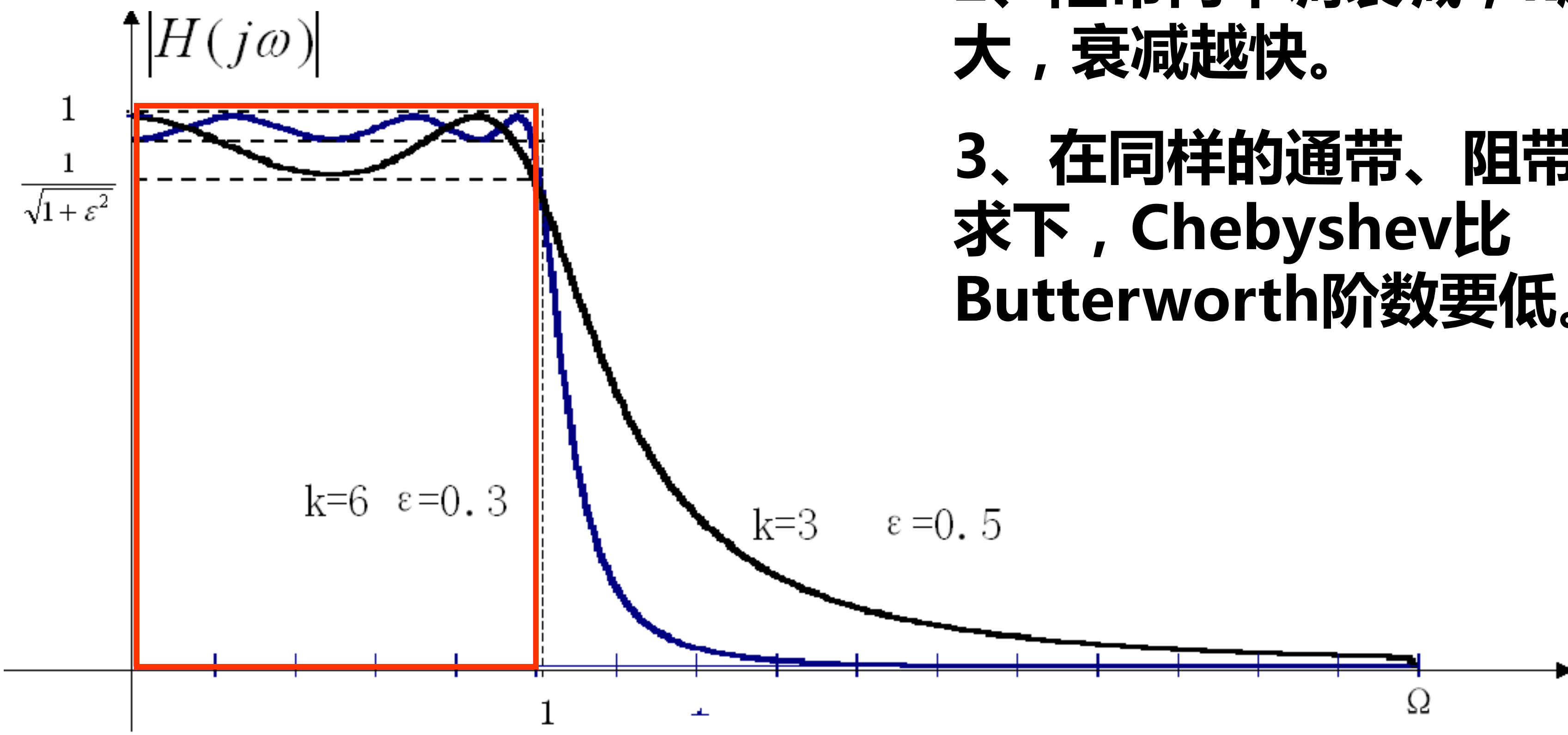
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+B_k\Omega^{2k}}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$$

B_k**由通带边界衰减量的要求确定，一般取3dB。**

k称为滤波器的阶数，k越大越接近于理想情况，但所用元件越多，结构越复杂。



切比雪夫（Chebyshev）滤波器：



1、通带内等波纹起伏，k越大，起伏越多。

2、阻带内单调衰减，k越大，衰减越快。

3、在同样的通带、阻带要求下，Chebyshev比Butterworth阶数要低。

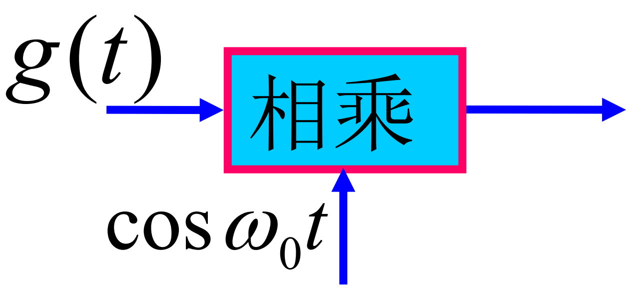
电磁波、天线、麦克斯韦尔方程

- 时变电流或加速运动的电荷向空间辐射电磁波
- 电磁波是一种能量的存在形式，可以作为信息的载体，也可以作为探测未知物质世界的手段
- 能向空间辐射和接收电磁波的装置称为天线，是无线电设备的一个重要部件。天线通过其上随时间变化的电流在空间激发的变化的电磁场，从而辐射电磁波。天线的尺寸可以与波长想比拟时，才会有足够的电磁能量辐射到空间去。
- 电磁波的理论基础是“麦克斯韦尔方程”，属于《电磁场与电磁波理论》这门课程
- 为了将低频电信号辐射出去，需要进行调制。调制信号的接收过程称为解调。
- 通过调制，还可以实现信道的复用，调高系统的抗干扰性

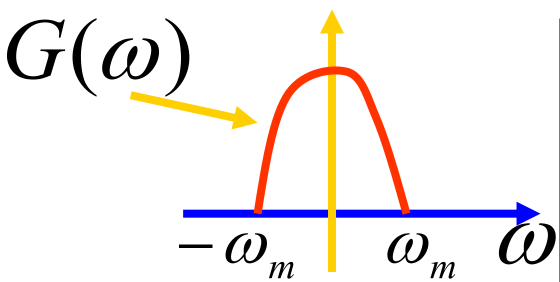
调制的分类

- 一个未经调制的正弦波有三个可变的参数：幅度、频率与相位
- 调制就是用待传输的低频电信号，去控制另一个高频振荡信号的三个参数之一。根据所控的参数，分别称为：调幅、调频和调相
- 调频和调相都表现为总相角发生调变，所以统称“调角”
- 脉冲调制
- 调频、调角、脉冲调制的讨论是属于《通信原理》这门课程的内容

抑制载频调幅（AM-SC）

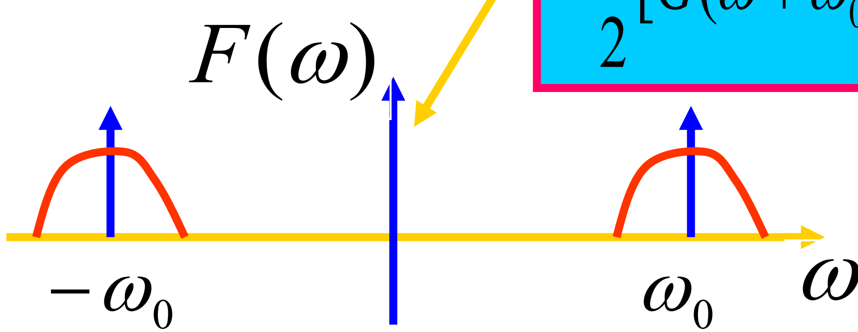


$$f(t)=g(t)\cos\omega_0 t$$

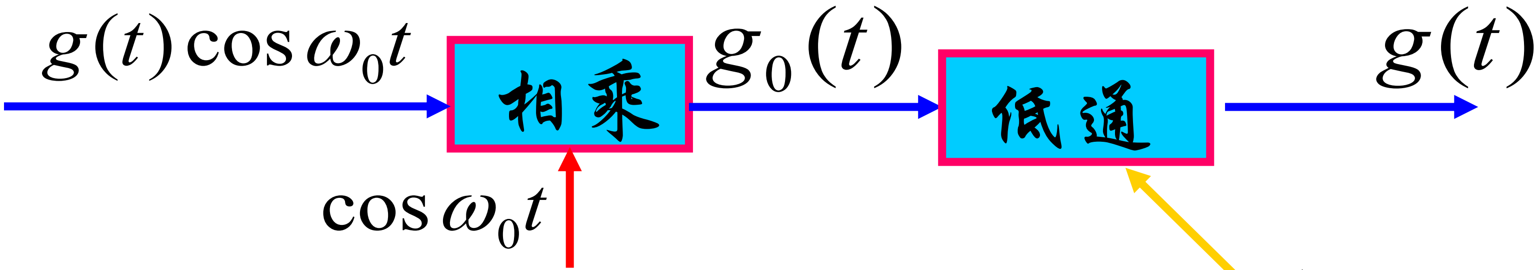


$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*[\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)]$$

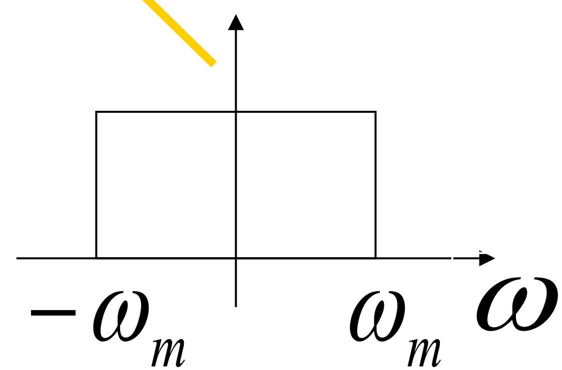
$$=\frac{1}{2}[G(\omega+\omega_0)+G(\omega-\omega_0)]$$



同步解调

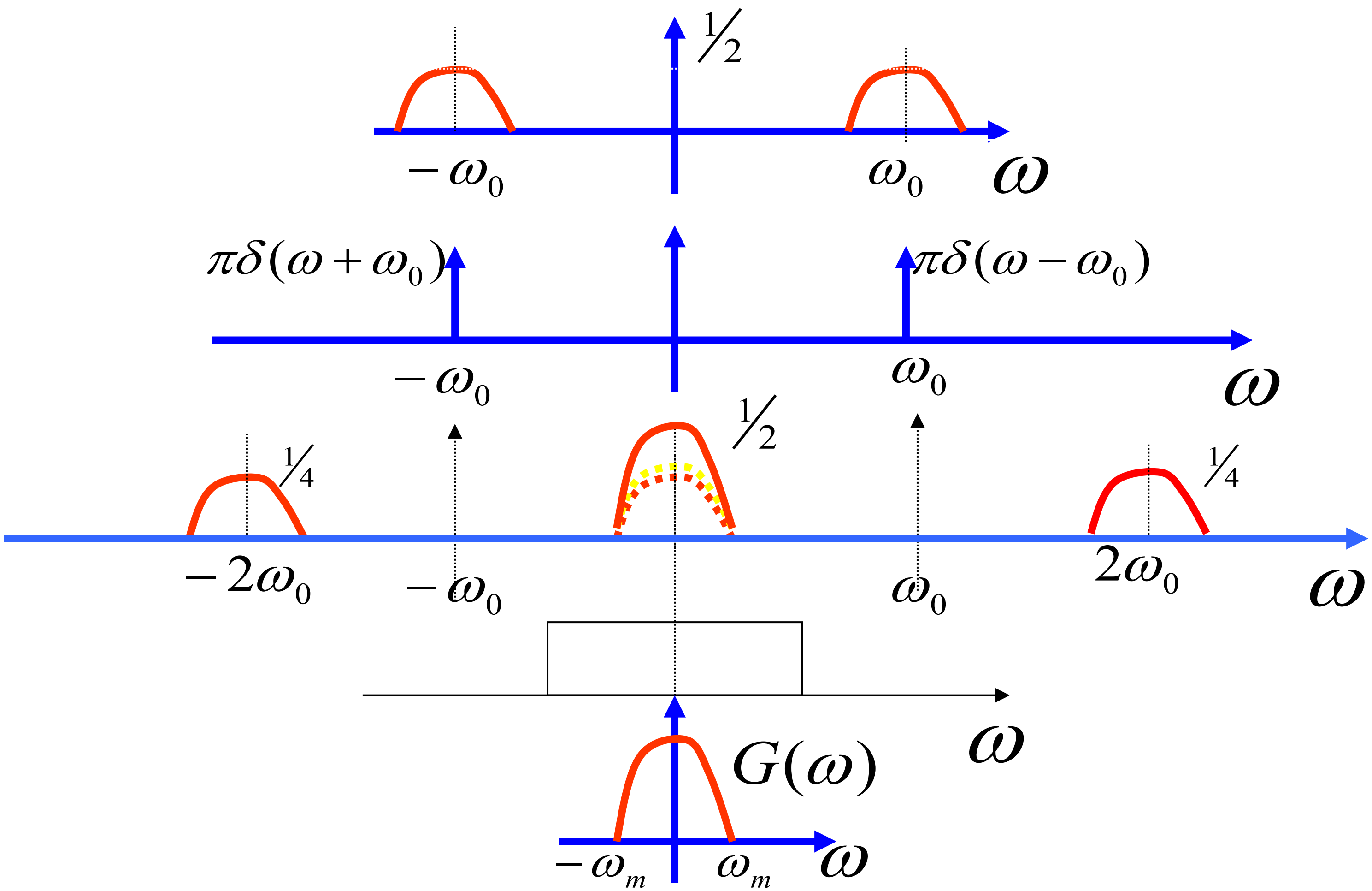


$$g_0(t) = [g(t)\cos\omega_0 t]\cos\omega_0 t$$
$$= \frac{1}{2}g(t)(1+\cos 2\omega_0 t)$$
$$= \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2}g(t)\cos 2\omega_0 t$$



$$\boxed{G_0(\omega) = \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{4}[G(\omega+2\omega_0) + G(\omega-2\omega_0)]}$$

同步解调频谱分析



½
$-\omega_0$
ω_0
ω
$\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$-\omega_0$
ω_0
ω
¼
½
¼
$-2\omega_0$
$-\omega_0$
ω_0
$2\omega_0$
ω
ω
$G(\omega)$
$-\omega_m$
ω_m
ω

抑制载波调幅方案的分析

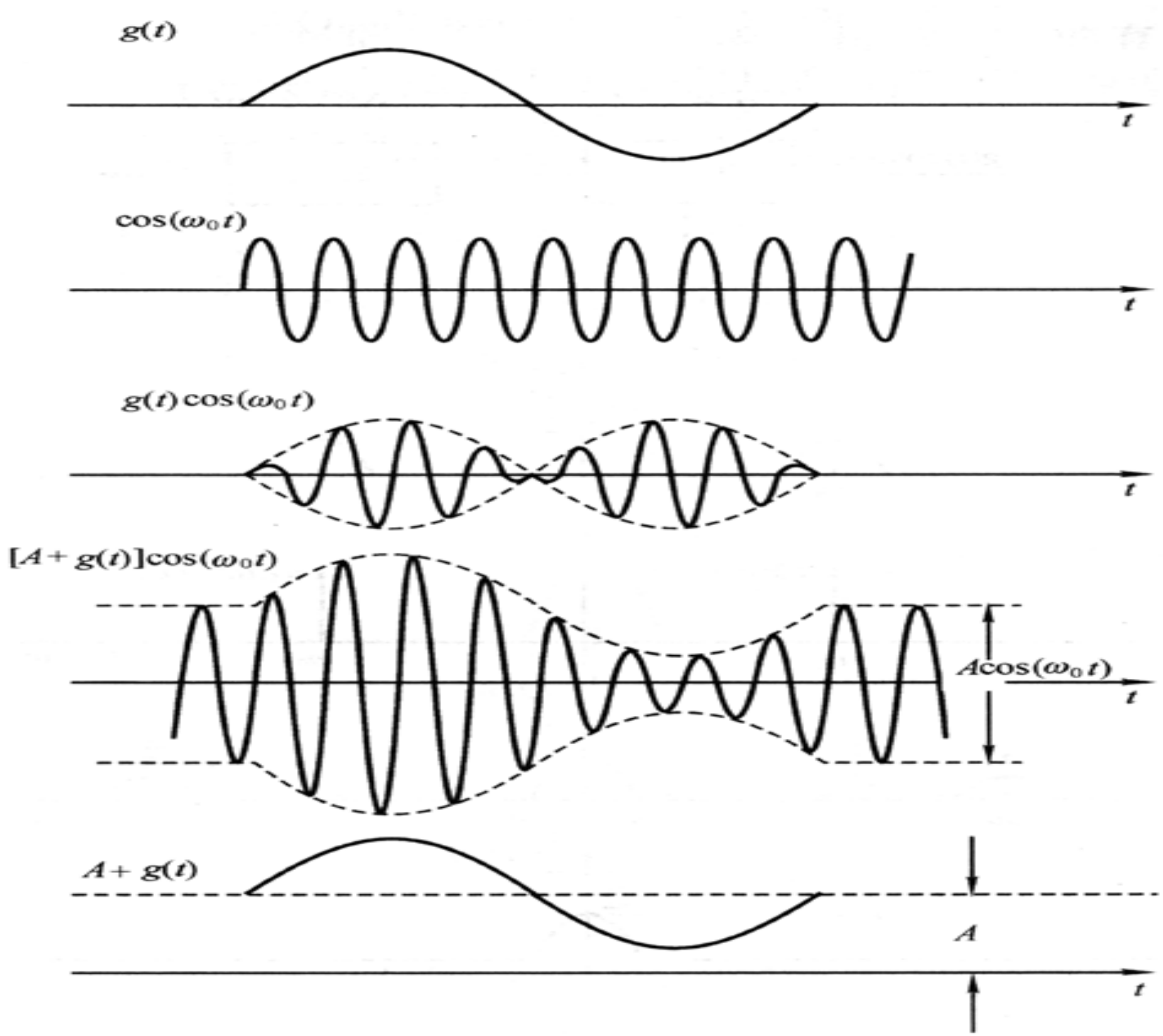
- 要求精确的同步，即要求接收端解调器所加的载频信号， 必须与发送端调制器中所使用的载频信号严格地同频同相－**锁相环**
- 否则

$$
\begin{aligned}
g_0(t) &= [g(t)\cos\omega_0 t]\cos(\omega_0 t+\theta) \\
&= \frac{1}{2}g(t)(\cos\theta+\cos(2\omega_0 t+\theta)) \\
&= \frac{1}{2}g(t)\cos\theta+\frac{1}{2}g(t)\cos(2\omega_0 t+\theta)
\end{aligned}
$$

发送载波调幅（AM）

- 优点是简化接受机的结构：只需用包络检波即可（二极管、电阻、电容组成）
- 发送端的发射信号中加入一定强度的载波信号 $Acos\omega_0 t$，即合成发射信号为 $[A+g(t)]cos\omega_0 t$。如果 A 足够大，对于全部的 t：$A+g(t)>0$，已调制信号的包络就是 $A+g(t)$。通过包络检测可以恢复出 $g(t)$
- 技术简单，价格低，常用于民用通讯设备
- 以牺牲发射功率为代价

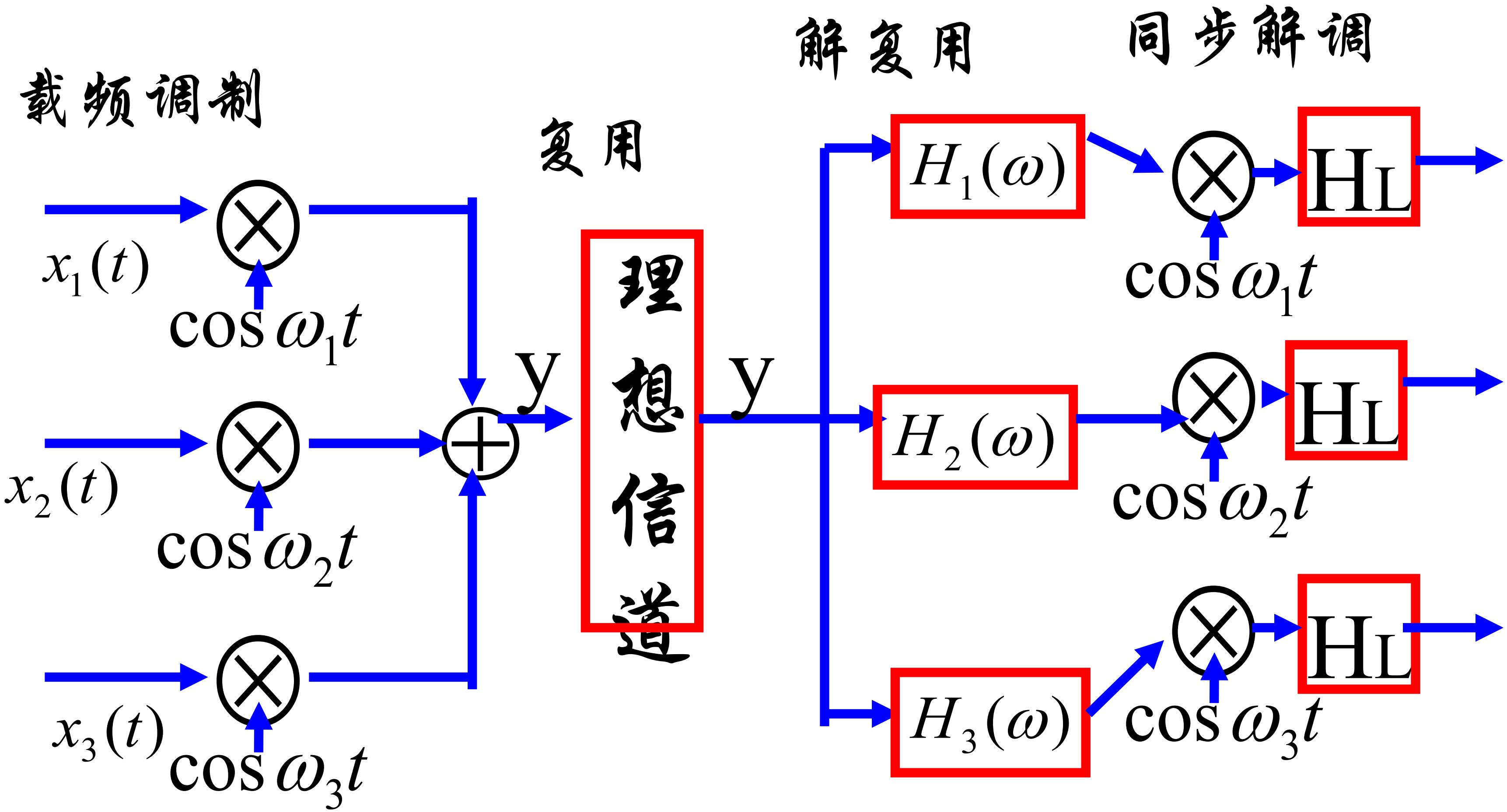
AM的调制及解调波形



复用

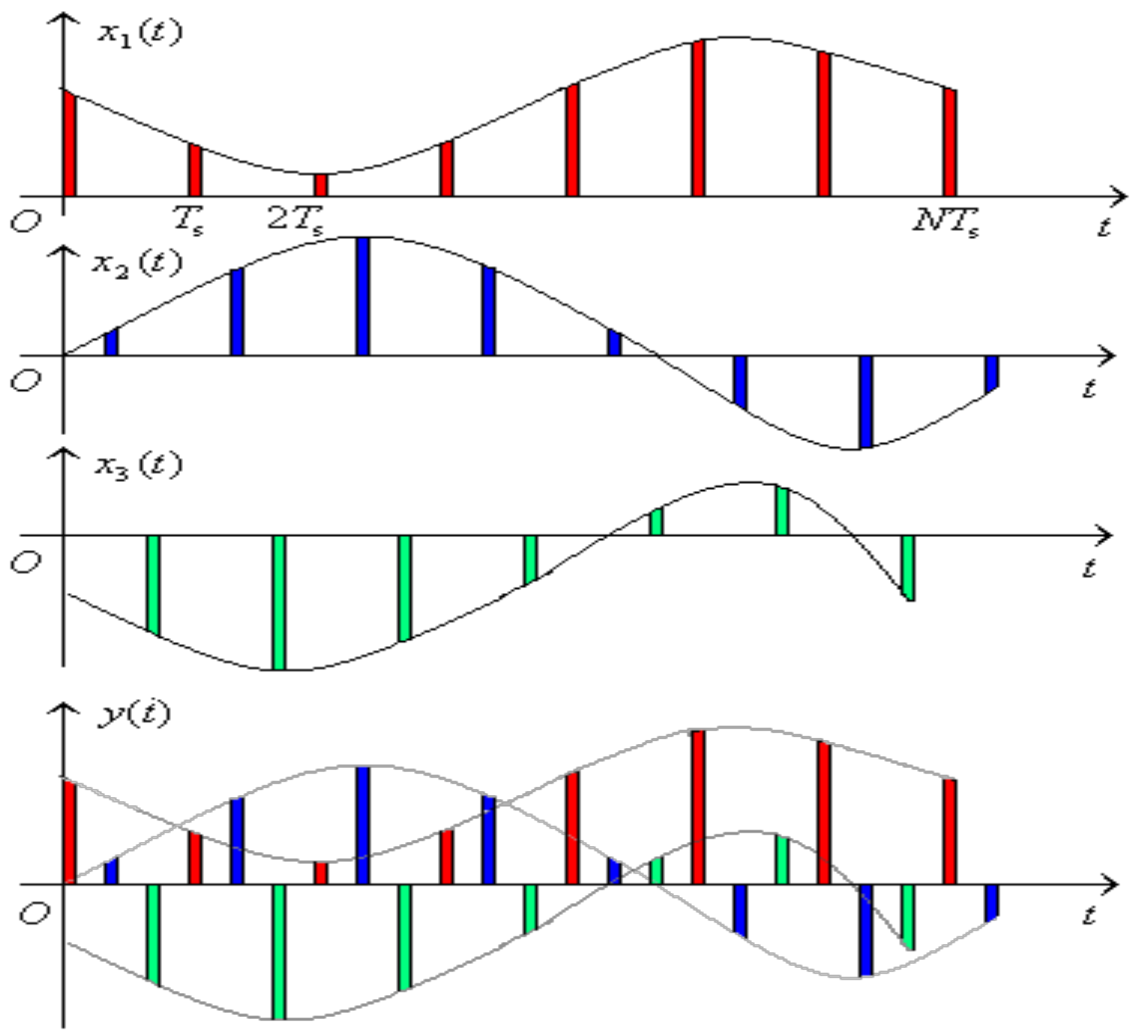
- 复用是指将若干个彼此独立的信号合并成可在同一信道上传输的复合信号方法
- 频分复用（FDM）
- 时分复用（TDM）
- 码分复用（CDM）
- 波分复用（WDM）

频分复用原理



载频调制
复用
解复用
同步解调
$x_1(t)$
$x_2(t)$
$x_3(t)$
$\cos\omega_1 t$
$\cos\omega_2 t$
$\cos\omega_3 t$
y
理想信道
y
$H_1(\omega)$
$H_2(\omega)$
$H_3(\omega)$
$\cos\omega_1 t$
$\cos\omega_2 t$
$\cos\omega_3 t$
HL
HL
HL

时分复用波形示意图



小结

- 求解系统响应的频域分析方法
- 系统的频响函数及其物理意义
- 理想低通滤波器的频响，冲激响应响应
- 调制解调，频分复用
- 信号通过系统不产生失真的条件

课外作业

阅读:4.1-4.3; 预习:5.1 - 5.5

作业:4.5,4.6