Homework 2

姓名: 方嘉聪 学号: 2200017849

Problem 1. 对于任意 $a \geq 1$, 构造 非负 离散随机变量 X, 使得 $\mathbb{P}(X \geq a \cdot \mathbb{E}(X)) = 1/a$. ◀

Solution. 考虑离散随机变量 X 的分布列为:

$$\mathbb{P}(X=0) = 1 - \frac{1}{a}, \quad \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{a} \implies \mathbb{E}(X) = \frac{1}{a}.$$

那么有 $\mathbb{P}(X \geq a \cdot \mathbb{E}(X)) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1/a$. 证毕. ◁

Problem 2. 在课上我们介绍了 n 重 Bernoulli 试验. 如果某个随机试验只有两个可能的结果 A 和 $\bar{A}$, 且 $\mathbb{P}(A) = p$, 将试验独立地重复 n 次, 令 X 表示结果 A 的发生次数. 在课上我们利用二项式系数的性质证明了 $\mathbb{E}(X) = np$. 在本题中, 我们将利用另一种方法计算 $\mathbb{E}(X)$ 和 $\mathbb{E}(X^2)$.

(1) 对于任意 $t \in \mathbb{R}$, 计算 $\mathbb{E}\left(e^{Xt}\right)$.

(2) 对于任意 $t \in \mathbb{R}$, 证明

$$\mathbb{E}(e^{Xt}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \cdot \mathbb{E}(X^i)$$

提示: 对于固定的 $0 \leq k \leq n$, 考虑对 e^{kt} 应用泰勒公式.

(3) 利用上一问中的结论, 计算 $\mathbb{E}(X)$ 和 $\mathbb{E}(X^2)$.

提示: 令 $f(t) = \mathbb{E}(e^{Xt})$. 如何利用上一问中的结论, 通过 $f(t)$ 求得 $\mathbb{E}(X)$ 和 $\mathbb{E}(X^2)$?

◀

Solution. (1) 由期望的定义, 有

$$\mathbb{E}\left(e^{Xt}\right) = \sum_{k=0}^{n} e^{kt} \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + 1 - p)^n.$$

(2) 对于给定的 $k \in [0, n]$, 由 Taylor 公式, 有

$$e^{kt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i}{i!} t^i.$$

注意到

$$\mathbb{E}(X^i) = \sum_{k=0}^{n} k^i \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

那么有:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{Xt}\right) &= \sum_{k=0}^{n} e^{kt} \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i}{i!} t^i \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \left(\sum_{k=0}^{n} k^i \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \mathbb{E}(X^i).\end{aligned}$$

证毕.

(3) 令 $f(t)=\mathbb{E}(e^{Xt})$, 则有

$$f'(t)=np\cdot e^t(pe^t+1-p)^{n-1}=\mathbb{E}(X)+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\mathbb{E}(X^{i-1}).$$

$$\begin{aligned}f''(t)&=np\left[e^t(pe^t+1-p)^{n-1}+(n-1)p\cdot e^{2t}(pe^t+1-p)^{n-2}\right]\\&=\mathbb{E}(X^2)+\sum_{i=3}^{\infty}\frac{t^{i-2}}{(i-2)!}\mathbb{E}(X^i).\end{aligned}$$

令 $t=0$, 则有 $f'(0)=\mathbb{E}(X)=np, f''(0)=\mathbb{E}(X^2)=np[(n-1)p+1]$.

◁

Problem 3. 在课上, 我们考虑了如下球与桶模型: 有 n 个球, 每个球都等可能被放到 m 个桶中的任一个. 在本题中, 我们考虑 $m=n$ 的情况, 并假设 $n=m\geq 2$.

(1) 随机变量 X_i 表示第 i 个桶中的球的数量. 对于任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 证明 $\mathbb{E}(X_i)=1$.

(2) 对于任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 和任意 $1\leq k\leq n$, 证明 $\mathbb{P}(X_i=k)\leq 1/k!$.

(3) 定义随机变量 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$, 证明

$$\mathbb{P}(Y\geq 4\log_2 n)\leq\frac{1}{n}$$

提示: 考虑使用 Union Bound.

(4) 证明 $\mathbb{E}(Y)\leq 5\log_2 n$.

◀

Solution. (1) 注意到 $X_i\sim B(n,1/m)$, 那么 $\mathbb{E}(X_i)=np=1$.

(2) 注意到, 对任意 $n\geq k>0$, 有

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\leq\frac{n^k}{k!}$$

那么有:

$$\mathbb{P}(X_i=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}\leq\frac{n^k}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}.$$

证毕.

(3) 我们先来证明对于任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有

$$\mathbb{P}(X_i\geq 4\log_2 n)\leq\frac{1}{n^2}. \tag{1}$$

注意到, 对任意 $k\in\mathbb{N}^+$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{t=k}^{\infty}\frac{1}{t!}&=\frac{1}{k!}\left(1+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots\right)\\&\leq\frac{1}{k!}\left(1+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^t}\right)\leq\frac{1}{k!}\left(1+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{2^t}\right)\\&\leq\frac{2}{k!}.\end{aligned}$$

那么有:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i \geq 4\log_2 n) &= \sum_{k=\lceil 4\log_2 n\rceil}^{n} \mathbb{P}(X_i = k) \leq \sum_{k=\lceil 4\log_2 n\rceil}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leq \frac{2}{\lceil 4\log_2 n\rceil !} \leq \frac{2}{(4\log_2 n)!} \\ &\leq \frac{2}{2^{4\log n - 1}} = \frac{4}{n^4} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{for } n \geq 2.\end{aligned}$$

那么由 Union Bound, 有

$$\mathbb{P}(Y \geq 4\log_2 n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i \geq 4\log_2 n\}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \geq 4\log_2 n) \leq \frac{1}{n}.$$

证毕.

Note: 事实上, 对于式 (1) 的证明, 我们可以利用 Chernoff Bound 得到一个更紧的界, 即

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i \geq 4\log_2 n) = \mathbb{P}\left[X_i \geq n\left(\frac{4\log_2 n - 1}{n} + p\right)\right] \\ (\text{Let } \epsilon := \frac{4\log_2 n - 1}{n}) \leq \exp\left(-2n\frac{4\log_2 n - 1}{n}\right) = \frac{e^2}{n^{8/\ln 2}}\end{aligned}$$

(4) 当 $n = 2$ 时, 有 $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\max\{X_1, X_2\}) \leq 2 \leq 5\log_2 2 = 5$ 显然成立.
当 $n = 3$ 时, 有 $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\max\{X_1, X_2, X_3\}) \leq 3 < 5\log_2 3$ 成立.
当 $n \geq 4$ 时, 考虑离散随机变量 $X = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 期望的另一形式 $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X > k)$. 那么有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y > k) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y \geq k) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor 4\log_2 n\rfloor}\mathbb{P}(Y \geq k) + \sum_{k=\lfloor 4\log_2 n\rfloor + 1}^{\infty}\mathbb{P}(Y \geq k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\lfloor 4\log_2 n\rfloor} 1 + n \cdot \frac{1}{n} \leq 4\log_2 n + 2 \leq 5\log_2 n.\end{aligned}$$

综上所述, $\mathbb{E}(Y) \leq 5\log_2 n$. 证毕.

◁

Problem 4. 给定离散随机变量 X, 证明对于任意实数 c, $\mathbb{E}[(X-c)^2] \geq \mathrm{Var}(X)$. ◀

Solution. 注意到对于任意 $c \in \mathbb{R}$, 有:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-c)^2] - \mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2 - 2cX + c^2] - \mathbb{E}[X^2] + E[X]^2 \\ &= -2c\mathbb{E}(X) + c^2 + \mathbb{E}(X)^2 = (c - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0.\end{aligned}$$

故有 $\mathbb{E}[(X-c)^2] \geq \mathrm{Var}(X)$. 证毕. ◁

Problem 5. 给定离散随机变量 X, 假设其期望 $\mathbb{E}(X)$ 和标准差 $\sigma(X)$ 均存在. 对于任意实数 m, 若满足 $\mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2$ 且 $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2$, 证明:$|\mathbb{E}(X) - m| \leq \sqrt{2}\sigma$. ◀

Solution. 考虑用反证法.

(1) 假设 $\mathbb{E}(X)-m<-\sqrt{2}\sigma \iff m-\mathbb{E}(X)>\sqrt{2}\sigma$. 那么有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geq m)&=\mathbb{P}\Big[X-\mathbb{E}(X)\geq m-\mathbb{E}(X)\Big]\leq\mathbb{P}\Big[X-\mathbb{E}(X)>\sqrt{2}\sigma\Big]\\&\leq\mathbb{P}\Big[|X-\mathbb{E}(X)|>\sqrt{2}\sigma\Big]\leq\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

若上述不等式严格成立, 那么有 $\mathbb{P}(X\geq m)<1/2$, 矛盾. 若上述不等式中等号均成立, 那么有

$$\mathbb{P}(X\geq m)=1/2,\quad \mathbb{P}(\mathbb{E}(X)+\sqrt{2}\sigma<X<m)=0.$$

那么存在一个足够小的 $\epsilon>0$ 使得 $\mathbb{E}(X)+(\sqrt{2}+\epsilon)\sigma<m$, 那么由 Chebyshev 不等式, 有

$$\mathbb{P}(X\geq m)=\mathbb{P}\Big[X\geq\mathbb{E}(X)+(\sqrt{2}+\epsilon)\sigma\Big]\leq\mathbb{P}\Big[|X-\mathbb{E}(X)|\geq(\sqrt{2}+\epsilon)\sigma\Big]\leq\frac{1}{(\sqrt{2}+\epsilon)^2}<\frac{1}{2}.$$

与 $\mathbb{P}(X\geq m)=1/2$ 矛盾. 故假设不成立, 即有 $\mathbb{E}(X)-m\leq-\sqrt{2}\sigma$.

(2) 类似地, 假设 $\mathbb{E}(X)-m>\sqrt{2}\sigma \iff m-\mathbb{E}(X)<-\sqrt{2}\sigma$. 那么有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\leq m)&=\mathbb{P}\Big[X-\mathbb{E}(X)\leq m-\mathbb{E}(X)\Big]\leq\mathbb{P}\Big[X-\mathbb{E}(X)<-\sqrt{2}\sigma\Big]\\&\leq\mathbb{P}\Big[|X-\mathbb{E}(X)|>\sqrt{2}\sigma\Big]\leq\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

若上述不等式严格成立, 那么有 $\mathbb{P}(X\leq m)<1/2$, 矛盾. 若上述不等式中等号均成立, 那么有

$$\mathbb{P}(X\leq m)=1/2,\quad \mathbb{P}(m<X<\mathbb{E}(X)-\sqrt{2}\sigma)=0.$$

那么存在一个足够小的 $\epsilon>0$ 使得 $m<\mathbb{E}(X)-(\sqrt{2}+\epsilon)\sigma$, 那么由 Chebyshev 不等式, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\leq m)&=\mathbb{P}\Big[X\leq\mathbb{E}(X)-(\sqrt{2}+\epsilon)\sigma\Big]=\mathbb{P}\Big[\mathbb{E}(X)-X\geq(\sqrt{2}+\epsilon)\sigma\Big]\\&\leq\mathbb{P}\Big[|X-\mathbb{E}(X)|\geq(\sqrt{2}+\epsilon)\sigma\Big]\leq\frac{1}{(\sqrt{2}+\epsilon)^2}<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

与 $\mathbb{P}(X\leq m)=1/2$ 矛盾. 故假设不成立, 即有 $\mathbb{E}(X)-m\geq-\sqrt{2}\sigma$.

综上所述, $|\mathbb{E}(X)-m|\leq\sqrt{2}\sigma$. 证毕. ◁

Problem 6. 令 $X\sim\pi(\lambda)$, 即随机变量 X 服从参数为 $\lambda>0$ 的泊松分布.

(1) 对于任意实数 t, 计算 $\mathbb{E}(e^{tX})$.

(2) 证明: 对于任意实数 $x>0$,

$$\mathbb{P}\left[\left(\frac{x}{\lambda}\right)^X\geq\left(\frac{x}{\lambda}\right)^x\right]\leq\frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}.$$

(3) 证明: 对于任意 $x>\lambda$,

$$\mathbb{P}\left(X\geq x\right)\leq\frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x},$$

且对于任意 $0<x<\lambda$,

$$\mathbb{P}\left(X\leq x\right)\leq\frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}.$$

(4) 证明:

$$\mathbb{P}\left(|X-\lambda| \geq 0.2\lambda\right) \leq 2 \cdot e^{-0.01\lambda}.$$

◀

Solution. (1) 注意到对于任意 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

(2) 我们先来计算

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{x}{\lambda}\right)^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^{-\lambda} e^x.$$

那么由 Markov 不等式, 有

$$\mathbb{P}\left[\left(\frac{x}{\lambda}\right)^X \geq \left(\frac{x}{\lambda}\right)^x\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(\frac{x}{\lambda}\right)^X\right]}{x^x/\lambda^x} = \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}.$$

证毕.

(3) 对于任意 $x > \lambda$, 有 $x/\lambda > 1$, 那么

$$\left(X \geq x \iff \left(\frac{x}{\lambda}\right)^X \geq \left(\frac{x}{\lambda}\right)^x\right) \implies \mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}\left[\left(\frac{x}{\lambda}\right)^X \geq \left(\frac{x}{\lambda}\right)^x\right] \leq \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}.$$

对于任意 $0 < x < \lambda$, 有 $x/\lambda < 1$, 那么

$$\left(X \leq x \iff \left(\frac{x}{\lambda}\right)^X \geq \left(\frac{x}{\lambda}\right)^x\right) \implies \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left[\left(\frac{x}{\lambda}\right)^X \geq \left(\frac{x}{\lambda}\right)^x\right] \leq \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}.$$

证毕.

(4) 由 (3) 中的结论, 有

$$\mathbb{P}(X-\lambda \geq 0.2\lambda) = \mathbb{P}(X \geq 1.2\lambda) \leq \frac{e^{-\lambda} e^{1.2\lambda} \lambda^{1.2\lambda}}{(1.2\lambda)^{1.2\lambda}} = \frac{e^{0.2\lambda}}{(1.2)^{1.2\lambda}}$$

注意到:

$$\frac{e^{0.2\lambda}}{(1.2)^{1.2\lambda}} \leq e^{-0.01\lambda} \iff 1.2^{1.2\lambda} \geq e^{0.21\lambda} \overset{\text{取对数}}{\iff} 1.2\ln 1.2 \geq 0.21.$$

而对于 $x \in (0,1)$, 有

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \implies \ln 1.2 \geq 0.18 \geq \frac{0.21}{1.2} = 0.175.$$

故有 $\mathbb{P}(X-\lambda \geq 0.2\lambda) \leq e^{-0.01\lambda}$.

类似的, 有

$$\mathbb{P}(X-\lambda \leq -0.2\lambda) = \mathbb{P}(X \leq 0.8\lambda) \leq \frac{e^{-\lambda} e^{0.8\lambda} \lambda^{0.8\lambda}}{(0.8\lambda)^{0.8\lambda}} = \frac{e^{-0.2\lambda}}{(0.8)^{0.8\lambda}}$$

注意到:

$$\frac{e^{-0.2\lambda}}{(0.8)^{0.8\lambda}} \le e^{-0.01\lambda} \iff 0.8^{0.8\lambda} \ge e^{-0.19\lambda} \iff 0.8\ln 0.8 \ge -0.19.$$

而对于 $x \in (0,1)$, 令

$$f(x) := (1-x)\ln(1-x) + x - \frac{x^2}{2}, \quad f'(x) = -\ln(1-x) - x \ge 0. \implies f(x) \ge f(0) = 0.$$

故有 $(1-x)\ln(1-x) \ge -x + x^2/2$. 那么有

$$0.8\ln 0.8 \ge f(0.2) \ge -0.18 \ge -0.19.$$

故有 $\mathbb{P}(X-\lambda \le -0.2\lambda) \le e^{-0.01\lambda}$.
那么有:

$$\mathbb{P}\left(|X-\lambda| \ge 0.2\lambda\right) \le \mathbb{P}(X-\lambda \ge 0.2\lambda) + \mathbb{P}(X-\lambda \le -0.2\lambda) \le 2\cdot e^{-0.01\lambda}.$$

证毕.

$\triangleleft$