Homework 2

Name: 方嘉聪 ID: 2200017849

Problem 1. 已知 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$, 其中 $x_i \in \mathbb{R}^m$, $y_i \in \{\pm 1\}$. 证明以下两个优化问题的等价性。

$$\begin{aligned} &\max\ t \\ &\text{ s.t. } y_i(w^\top x_i + b) \geq t, \forall i \in [n], \\ &\qquad ||w||_2 = 1. \end{aligned} \qquad \text{与} \qquad \begin{aligned} &\min\ ||w||_2^2 \\ &\text{ s.t. } y_i(w^\top x_i + b) \geq 1, \forall i \in [n]. \end{aligned}$$

即说明两个问题的解的关系，以及两个问题求出的最优解 (w, b) 之间的关系。 ◀

Solution. 我们从左侧问题出发逐步转化到右侧问题。首先，左侧问题的约束条件可以等价地写为

$$y_i(w^\top x_i + b) \geq t \wedge ||w||_2 = 1 \iff y_i\left(\frac{w^\top}{||w||_2} \cdot x_i + b\right) \geq t \iff y_i\left(w^\top x_i + b'\right) \geq t \cdot ||w||_2.$$

其中 $w^\top \in \mathbb{R}^n, b, b' \in \mathbb{R}$. 注意到上述不等式两边齐次, 那么我们可以令 $t \cdot ||w||_2 := 1$. 那么有

$$\max t \iff \max \frac{1}{||w||_2} \iff \min ||w||_2 \iff \min ||w||_2^2.$$

类似的, 从右侧的优化问题出发转化到左侧问题. 因此, 左侧问题的求解等价于求解右侧问题. 设左侧问题的最优解为 (w_1, b_1), 右侧问题的最优解为 (w_2, b_2), 由上述推导过程有:

$$w_1 = \frac{w_2}{||w_2||_2}, \quad b_1 = \frac{b_2}{||w_2||_2}, \quad t = \frac{1}{||w_2||_2}.$$

证毕. ◁