Homework 1

姓名: 方嘉聪 学号: 2200017849

Problem 1. 对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 从概率的公理化定义和条件概率的定义出发证明下述结论:

(1) 一般加法公式:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{P}(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_n).$$

(2) 一般 Union Bound:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

(3) 一般乘法公式: 若 $\mathbb{P}(A_1, A_2, \cdots, A_n) > 0$, 有:

$$\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

◀

Solution. (1) 首先从概率的公理化定义出发证明 $\mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)$. 注意到我们有 $A = AB + A\bar{B}$, 且 $AB \cap A\bar{B} = \emptyset$, 那么 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(A\bar{B})$, 进而有

$$\mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A\bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)$$

下面证明 $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$. 注意到 $A\cup B = A\cup(B-AB)$ 且 $A\cap(B-AB) = \emptyset$, 故

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B-AB) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

下面用数学归纳法来证明一般的加法公式. 假设当 $n = k$ 时, 原命题成立, 即

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k} (-1)^{j-1}\mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_j})$$

当 $n = k+1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cup A_{k+1}\right] = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{k+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_iA_{k+1})\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k} (-1)^{j-1}\mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_j}) + \mathbb{P}(A_{k+1}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k} (-1)^{j-1}\mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_j}A_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\mathbb{P}(A_i) + (-1)^k\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_{k+1}) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{k}\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k} (-1)^{j-1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_j}) + \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{j-1}\le k} (-1)^{j-1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_{j-1}}A_{k+1})\right)
\end{aligned}$$

注意到,

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k}(-1)^{j-1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_j})+\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{j-1}\le k}(-1)^{j-1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_{j-1}}A_{k+1})$$
$$=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k+1}(-1)^{j-1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_j})$$

那么

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i\right)=\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k+1}(-1)^{j-1}\mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_j})$$

故由数学归纳法知一般加法公式成立.

(2) 在 (1) 中我们已经证明了

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(AB)\le\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$$

当 $AB=\emptyset$ 时等号成立. 下面我们用数学归纳法证明一般的 Union Bound. 假设当 $n=k$ 时, 原命题成立, 即

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(A_i)$$

当 $\forall i\ne j, A_iA_j=\emptyset$ 时, 等号成立.

考虑 $n=k+1$ 时, 我们有

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i\right)=\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cup A_{k+1}\right]=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)+\mathbb{P}(A_{k+1})-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_iA_{k+1})\right)$$
$$\le\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(A_i)+\mathbb{P}(A_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}\mathbb{P}(A_i)$$

当 $\forall i\ne j, A_iA_j=\emptyset$ 时, 等号成立. 故由数学归纳法知一般 Union Bound 成立.

(3) 由条件概率的定义可知

$$\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A|B)$$

假设当 $n=k$ 时一般乘法公式成立, 即

$$\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_k)=\mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\cdots\mathbb{P}(A_k|A_1\cdots A_{k-1})$$

考虑 $n=k+1$ 的情况有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_kA_{k+1})&=\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_k)\cdot\mathbb{P}(A_{k+1}|A_1A_2\cdots A_k)\\&=\mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdots\mathbb{P}(A_k|A_1\cdots A_{k-1})\mathbb{P}(A_{k+1}|A_1\cdots A_k)\end{aligned}$$

由数学归纳法知一般乘法公式成立.

◁

Problem 2. 对于三个事件 A,B,C, 若 $\mathbb{P}(C)>0$, 我们称事件 A,B 在事件 C 发生时是条件独立的, 当且仅当

$$\mathbb{P}(AB|C)=\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C).$$

对于下述命题, 从概率公理化定义和条件概率的定义出发给出证明, 或给出反例.

(1) 事件 A 和 B 在事件 C 发生时是条件独立的, 且有 $0 < \mathbb{P}(C) < 1$, 则事件 A 和 B 在事件 $\bar{C}$ 发生时条件独立. 这里, 事件 $\bar{C}$ 是事件 C 的对立事件.

(2) 事件 A 和 B 相互独立, 则对于任意事件 C, 若 $\mathbb{P}(C) > 0$, 事件 A 和 B 在事件 C 发生时是条件独立的.

(3) 事件 A 和 B 相互独立, 则事件 A 和事件 $\bar{B}$ 相互独立. 这里, 事件 $\bar{B}$ 是事件 B 的对立事件.

◀

Solution. (1) 该命题错误. 考虑如下反例, 有一个袋子里中质地大小相同的 4 个黑球与 1 个白球, 不放回的抽取 3 次. 考虑如下事件

$$C = \{\text{第 1 次摸出白球}\}, \quad A = \{\text{第 2 次摸出黑球}\}, \quad B = \{\text{第 3 次摸出黑球}\}$$

那么有

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(AB|C) = \mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(B|C) = 1 \implies \mathbb{P}(AB|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)$$

即事件 A, B 在事件 C 发生时是条件独立, 且有 $0 < \mathbb{P}(C) < 1$. 但是我们有

$$\mathbb{P}(A|\bar{C}) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(B|\bar{C}) = \mathbb{P}(A|\bar{C})\mathbb{P}(B|A\bar{C}) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B|\bar{A}\bar{C}) = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(AB|\bar{C}) = \frac{\mathbb{P}(AB\bar{C})}{\mathbb{P}(\bar{C})} = \frac{\frac{4\times3\times2}{5\times4\times3}}{4/5} = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(A|\bar{C})\mathbb{P}(B|\bar{C})$$

即事件 A, B 在事件 $\bar{C}$ 发生时不是条件独立的.

(2) 该命题错误. 有如下简单反例, 投掷一个质地均匀的骰子, 考虑事件

$$A = \{1,2 \text{ 正面朝上}\}, \quad B = \{2,3,6 \text{ 正面朝上}\}, \quad C = \{1,6 \text{ 正面朝上}\}$$

那么有 $\mathbb{P}(A) = 1/3, \mathbb{P}(B) = 1/2, \mathbb{P}(AB) = 1/6 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. 但是

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B|C) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(AB|C) = \mathbb{P}(\{2\}|C) = 0 \neq \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)$$

故事件 A, B 在事件 C 发生时不是条件独立的.

(3) 命题成立. 证明如下, 由于事件 A, B 相互独立, 我们有

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \implies \mathbb{P}(A\bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B})$$

故 A 和 $\bar{B}$ 相互独立.

◁

Problem 3. 在课上, 我们考虑了如下球与桶模型: 有 $n \geq 1$ 个球, 每个球都等可能被放到 $m \geq 1$ 个桶中的任一个. 用 $P_{n,m}$ 表示每个桶中至多有一个球的概率. 在课上, 我们已经证明了,

$$P_{n,m} \leq \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2m}\right).$$

现在, 请证明

$$P_{n,m} \geq \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2m}\right) \cdot \left(1 - \frac{8n^3}{m^2}\right).$$

提示: 证明对于任意 $0 \leq x \leq 1/2$, $\ln(1-x) \geq -x - x^2$. ◀

Solution. 我们先来证明 $\forall 0 \le x \le 1/2, \ln(1-x) \ge -x-x^2$. 设 $f(x)=\ln(1-x)+x+x^2$, 那么

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 + 2x = \frac{x(1-2x)}{1-x}$$

故当 $x\in[0,1/2]$ 时, $f(x)$ 单调递增, 那么 $f(x)\ge f(0)=0$, 即 $\ln(1-x)\ge -x-x^2$. 下面来估计 $P_{n,m}$ 的下界, 当 $0<m\le 2n$ 时, $1-8n^3/m^2 \le 1-2n<0$, 原式显然成立. 下面考虑 $m>2n$ 的情况, 有

$$\begin{aligned}
P_{n,m} &= \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{m}\right) \\
\implies \ln P_{n,m} &= \sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{i}{m}\right) \ge \sum_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{i}{m}-\frac{i^2}{m^2}\right) \\
&= -\frac{n(n-1)}{2m} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6m^2}. \\
\implies P_{n,m} &\ge \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2m}\right)\cdot\exp\left(-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6m^2}\right) \\
(e^x \ge 1+x, \forall x\ge 0) \qquad &\ge \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2m}\right)\cdot\left(1-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6m^2}\right) \\
&\ge \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2m}\right)\cdot\left(1-\frac{8n^3}{m^2}\right).
\end{aligned}$$

综上证毕. $\triangleleft$

Problem 4. 将一枚骰子投掷 $n\ge 1$ 次, 求在 n 次投掷中, 六个数字均出现过至少一次的概率. $\blacktriangleleft$

Solution. 记事件 $B=\{$六个数字均出现过至少一次$\}$, $A_i=\{$数字 i 未出现$\},\forall i\in\{1,2,3,4,5,6\}$. 那么 $\bar{B}=\bigcup_i A_i$. 又我们有 $(i\neq j\neq k\ldots)$

$$\mathbb{P}(A_i)=\left(\frac{5}{6}\right)^n, \quad \mathbb{P}(A_iA_j)=\left(\frac{4}{6}\right)^n, \quad \mathbb{P}(A_iA_jA_k)=\left(\frac{3}{6}\right)^n, \cdots \mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_6)=\left(\frac{0}{6}\right)^n=0$$

那么由一般加法公式

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right) &= \sum_{j=1}^{6}\mathbb{P}(A_j) - \sum_{1\le i<j\le 6}\mathbb{P}(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le 6}\mathbb{P}(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^5\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_6) \\
&= \binom{6}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \binom{6}{2}\left(\frac{4}{6}\right)^n + \binom{6}{3}\left(\frac{3}{6}\right)^n - \binom{6}{4}\left(\frac{2}{6}\right)^n + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n := p
\end{aligned}$$

则 $\mathbb{P}(B)=1-p$. $\triangleleft$

Problem 5. 某路由器有 A 和 B 两种运行模式. 路由器每天有等概率以 A 模式或者 B 模式运行, 且每天的运行模式均独立. 当以 A 模式运行时, 有 90% 的概率网络堵塞, 有 10% 的概率网络正常. 当以 B 模式运行时, 有 10% 的概率网络堵塞, 有 90% 的概率网络正常. 若某两天观测到网络堵塞, 求这两天路由器均以 A 模式运行的概率. $\blacktriangleleft$

Solution. 记事件 $A=\{$第一天网络堵塞$\},B=\{$第二天网络堵塞$\},C=\{$第一天以 A 模式运行$\},D=\{$第二天以 A 模式运行$\}$. 那么我们有

$$\mathbb{P}(CD|AB)=\frac{\mathbb{P}(AB|CD)\mathbb{P}(CD)}{\mathbb{P}(AB)}$$

由于每一天的运行模式均独立, 那么有 $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A|C)+\mathbb{P}(\bar{C})\mathbb{P}(A|\bar{C})=1/2$. 进而有

$$\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)=1/4$$

又 $\mathbb{P}(CD)=1/4$, $\mathbb{P}(AB|CD)=(9/10)^2=0.81$. 故

$$\mathbb{P}(CD|AB)=\frac{0.81\times 1/4}{1/4}=0.81$$

即这两天路由器均以 A 模式运行的概率为 0.81. ◁

Problem 6. 对于自然数 n,m,k, 满足 $m\geq 2k$. 有 $2n$ 个 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的子集 $A_1,B_1,\cdots,A_n,B_n\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$, 满足

- $\forall 1\leq i\leq n$, 有 $|A_i|=|B_i|=k$;
- $\forall 1\leq i\leq n$, 有 $A_i\cap B_i=\emptyset$;
- $\forall 1\leq i,j\leq n$, 若 $i\neq j$, 有 $A_i\cap B_j\neq\emptyset$.

(1) 考虑一个 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的随机排列, 每一种排列均等概率出现. 对于任意 $1\leq i\leq n$, 事件 U_i 表示在随机排列中, 集合 A_i 中的元素均排在 B_i 前面. 证明

$$\mathbb{P}(U_i)=\frac{1}{\binom{2k}{k}}.$$

(2) 证明: $n\leq\binom{2k}{k}$. 提示: 考虑事件 $\bigcup_{i=1}^n U_i$ 的概率.

(3) 对于 $n=\binom{2k}{k}$, 构造满足条件的 $A_1,B_1,A_2,B_2,\cdots,A_n,B_n\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$. 这里 m 可取任意自然数.

◀

Solution. (1) 所有的排列总数为 $m!$. 满足 A_i 中的元素均排在 B_i 前面的排列数为

$$\binom{m}{2k}k!\cdot k!\cdot(2m-k)!$$

这是由于我们先从 m 个位置中选择 $2k$ 个位置放置 A_i 与 B_i 中的元素, 前 k 个位置放置 A_i 中的元素, 后 k 个位置放置 B_i 中的元素, 剩下的 $2m-k$ 个位置放置剩下的元素. 那么

$$\mathbb{P}(U_i)=\frac{\binom{m}{2k}k!\cdot k!\cdot(2m-k)!}{m!}=\frac{1}{\binom{2k}{k}}.$$

(2) 考虑事件 $U_iU_j(i\neq j)$, 我们来证明 $U_iU_j=\emptyset$. 由于 $\forall 1\leq i,j\leq n$, 若 $i\neq j$, 有 $A_i\cap B_j\neq\emptyset$, 设

$$a\in A_i\cap B_j,\quad b\in A_j\cap B_i\implies a\neq b$$

假设存在某个排列满足 U_iU_j, 那么 a 必然在 b 前面, 且 b 在 a 前面, 矛盾. 故 $U_iU_j=\emptyset$. 类似的, 对 $\forall t\in\{1,2,\cdots,n\},i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_t$, 有 $U_{i_1}U_{i_2}\cdots U_{i_t}=\emptyset$. 那么由一般加法公式有

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right)=\sum_{i=1}^n\mathbb{P}(U_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{P}(U_iU_j)+\cdots+(-1)^{n-1}\mathbb{P}(U_1U_2\cdots U_n)=\frac{n}{\binom{2k}{k}}\leq 1$$

故 $n\leq\binom{2k}{k}$. 证毕.

(3) 令 $S=\{1,2,\cdots,2k\}\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$. 那么 S 的所有 k 元子集有 $\binom{2k}{k}$ 个. 对于每一个 k 元子集 T, 令 $A_i=T,B_i=S-T$, 那么满足题设条件. 证毕.

◁