Final Review

Problem 1. 多元随机变量. $X_1, \cdots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\theta_1), \cdots, \mathrm{Exp}(\theta_n)$. 求

$$Y = \max\left\{\frac{a_1}{X_1}, \cdots, \frac{a_n}{X_n}\right\}$$

的概率密度函数. 对于多元连续随机变量关注一下 min/max 的计算等等. ◀

Solution.

$$\mathbb{P}(Y \le y) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\frac{a_i}{X_i} \le y\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \ge \frac{a_i}{y}\right)$$

◁

Problem 2. Tail inequality. 关注 Chernoff-Hoeffding 的 Chernoff Bound 形式. ◀

Problem 3. Law of Large Number. 关注一下大数定律的各个条件

- Chebyshev 大数定律.
- 辛钦大数定律. $\{X_n\}$ 独立同分布

举例的一个问题是重要性采样.

Chernoff Bound 可能要出一道压轴题, 比较看数学直觉. ◀

Problem 4. 参数估计. 点估计和极大似然估计, 要会计算, 会出一些特殊分布的参数估计计算. 下面是一些例子:

$$X = e^Y, Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \implies \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i.$$

$$(\text{反 Gamma 分布}), f(x) = \theta x^{-2} \exp(-\theta/x).$$

$$(\text{指数分布族}), f(x) = \exp(\theta h(x) - H(x)) \cdot g(x) \implies \hat{\theta}_n = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)\right).$$

矩估计. 无偏估计量, 渐进无偏估计量, 一致估计量, 均方误差. 计算的速度. ◀

Problem 5. 假设检验. 对于显著性水平 α, 建立假设, 找到一个统计量, 计算拒绝域 $c(\alpha)$. 例如分成两问, 一问先算算统计量, 后面去计算拒绝域.

从广义似然比的视角来理解, 计算似然函数 $L(\theta)$, 设 $H_0 : \theta \in \Theta_1, H_0 \in \Theta_1$, 那么拒绝域也可以写成:

$$W = \left\{\frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta; x_1, \cdots, x_n)}{\sup_{\theta\in\Theta_1} L(\theta; x_1, \cdots, x_n)} \le \lambda\right\}.$$

例如, 考虑一个均匀分布 $U(0, \theta)$, 样本 $x_1, \cdots, x_n$, 那么 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta} = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$. 之后再进行假设检验, 求拒绝域. 可以再加上与矩估计量有效性的比较 (无偏, 一致, MSE). ◀

Problem 6. **区间估计.** 大概的一个形式是, 给定显著性水平 α, 估计 θ 的区间 $[L, U]$, 使得

$$\mathbb{P}(\theta \in [L, U]) \geq 1 - \alpha.$$

需要找一下枢轴量, 由待估计量组成的函数, 且其分布不依赖于待估计量. 或是用 Chernoff Bound 来估计. ◀

Problem 7. **回归分析.** 最小二乘估计

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2.$$

$Q(\alpha, \beta)$ 可能会加上一些正则项. 解正规方程

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0.$$

除了最小二乘估计, 还可以使用极大似然估计. 例如, 存在一个未知的常数 η_i, 且有

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha + \beta \eta_i + \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(\alpha + \beta \eta_i, \sigma_\varepsilon^2). \\ x_i &= \eta_i + \xi_i \sim \mathcal{N}(\eta_i, \sigma_\xi^2). \end{aligned}$$

那么极大似然估计为

$$L(\alpha, \beta, \sigma_\varepsilon, \sigma_\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{\lambda^{n/2}}{\sigma_\xi^{2n}} \exp(\cdot)$$

先微分求一下 η_i 的极大似然估计, 带入之后, 再求 $\alpha, \beta, \sigma_\varepsilon, \sigma_\xi$ 的极大似然估计.

之后会再求一些期望, MSE, Covariance 等等. 这里可以考虑将

$$\hat{\beta} = c_1 \beta + c_2 \varepsilon + c_3 \xi$$

之后再计算可能会简单一些. ◀