Homework 3

姓名: 方嘉聪 学号: 2200017849

Problem 1. (1) X 为离散随机变量, 且 X 仅取非负整数值. 证明: $\mathbb{E}(X)=\sum_{x=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>x)$.

(2) X 为连续随机变量, 且 X 仅取非负实数值. 证明: $\mathbb{E}(X)=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X>x)\mathrm{d}x$.

◀

Solution. (1) 注意到, 对于 $\forall k\in\mathbb{N}_{\geq 0}$, 有

$$\mathbb{P}(X\geq k)=\sum_{x=k}^{+\infty}\mathbb{P}(X=x)$$

那么有:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=\sum_{x=0}^{+\infty}x\mathbb{P}(X=x)=\sum_{x=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{x}\mathbb{P}(X=x)\\ \text{(交换求和次序)}\quad&=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{x=k}^{+\infty}\mathbb{P}(X=x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\geq k)\\ &=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k).\end{aligned}$$

由于期望的定义保证了上述求和是绝对收敛的, 进而上述求和次序是可交换. 证毕.

(2) 类似于离散情形, 用交换求和次序的方法证明.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X>x)\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\int_0^{t}f(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{+\infty}[xf(t)]\Big|_0^t\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t=\mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

由于期望的定义保证了上述积分中的被积函数是绝对收敛的, 积分次序交换的正确性由下述引理保证. 证毕.

Lemma 1. 对多重黎曼积分，如果被积函数是绝对值可积的，那么积分结果与积分变量的次序无关.

该引理在数学分析课上中给出过证明, 这里略去.

◁

Problem 2. 在 Unix 操作系统中, 用随机变量 X 表示一个随机的任务所需的内存. 历史数据表明, 对于任意实数 $x\geq 1$, $\mathbb{P}(X>x)=1/x^{\alpha}$. 这里面 $\alpha\in(0,2)$ 为固定常数.

(1) 计算随机变量 X 的概率分布函数和概率密度函数.

(2) 计算 $\mathbb{E}(X),\mathbb{E}(X^2)$.

◀

最后编译时间: 2024 年 11 月 1 日

Solution. (1) 概率分布函数为

$$F(x)=\mathbb{P}(X\le x)=\begin{cases}1-1/x^{\alpha}, & \text{if } x\ge 1\\ 0, & \text{Otherwise}\end{cases}$$

概率密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha/x^{\alpha+1}, & \text{if } x\ge 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

容易验证上述概率密度函数满足正则性.

(2) 计算如下 (注意需要讨论一下期望是否收敛)

$$\mathbb{E}(X)=\int_1^{+\infty}x\cdot\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\alpha}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\alpha}{\alpha-1}. & \text{if } \alpha\in(1,2)\\ \alpha\ln x\Big|_1^{+\infty}\ \text{不收敛}. & \text{if } \alpha=1.\\ \frac{\alpha}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty}\ \text{不收敛}. & \text{if } \alpha\in(0,1).\end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X^2)=\int_1^{+\infty}x^2\cdot\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2-\alpha}x^{2-\alpha}\Big|_1^{+\infty}\ \text{不收敛}.$$

综上所述, 当 $\alpha\in(1,2)$ 时, 期望 $\mathbb{E}(X)$ 存在且为 $\alpha/(\alpha-1)$. 其余情况期望不收敛. $\mathbb{E}(X^2)$ 在所有情况下均不收敛.

◁

Problem 3. (1) 对于任意实数 $x>0$, 证明

$$\int_x^{+\infty}\frac{t}{x}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$

(2) 令 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 证明对于任意实数 $x>0$, 有

$$\mathbb{P}(X\ge x)\le\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}.$$

(3) 令 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 证明对于任意实数 $k>0$,

$$\mathbb{P}(|Y-\mu|\le k\sigma)\ge 1-\frac{e^{-k^2/2}}{k}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

◀

Solution. (1) 对任意实数 $x>0$, 有

$$\int_x^{+\infty}\frac{t}{x}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_x^{+\infty}e^{-t^2/2}\mathrm{d}\left(\frac{t^2}{2}\right)=-\frac{1}{x}e^{-t^2/2}\Big|_x^{+\infty}=\frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$

(2) 对任意实数 $x>0$, 有

$$\mathbb{P}(X\ge x)=\int_x^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t\le\int_x^{+\infty}\frac{t}{x\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}.$$

证毕.

(3) $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \implies X := (Y-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$. 那么我们有

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y-\mu}{\sigma}\right| > k\right) = 2\mathbb{P}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > k\right) = 2\mathbb{P}(X > k) \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-k^2/2}}{k}$$

$$\implies \mathbb{P}(|Y-\mu| \le k\sigma) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y-\mu}{\sigma}\right| \le k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y-\mu}{\sigma}\right| > k\right) \ge 1 - \frac{e^{-k^2/2}}{k} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

证毕.

◁

Problem 4. 随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为严格单调递增的连续函数, 其反函数存在. 证明: 随机变量 $Y = F(X)$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布 $U(0,1)$. ◀

Solution. 注意到当 $y \le 0$ 时, 有 $\mathbb{P}(Y \le y) = 0$, 当 $y \ge 1$ 时, 有 $\mathbb{P}(Y \le y) = 1$. 下面考虑 $y \in (0,1)$, 记 $F(x)$ 的反函数为 $F^{-1}(y)$. 由于 $F(x)$ 为严格单调递增的连续函数, 那么有

$$f_Y(y) = f_X(F^{-1}(y))\frac{\mathrm{d}F^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} = f_X(F^{-1}(F(x)))\frac{1}{\mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x} = \frac{f_X(x)}{f_X(x)} = 1$$

故 $Y \sim U(0,1)$, 证毕. ◁

Problem 5. 对于实数参数 μ 和 $b > 0$, 已知连续随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 满足对于任意实数 x,

$$f(x) = c \cdot e^{-|x-\mu|/b}.$$

其中 c 为某个与参数 μ, b 有关的常数.

(1) 计算常数 c 以及 X 的分布函数 $F(x)$.

(2) 计算 $\mathbb{E}(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

◀

Solution. (1) 由概率密度函数正则性有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot e^{-|x-\mu|/b}\mathrm{d}x = c \cdot \int_{-\infty}^{\mu} e^{(x-\mu)/b}\mathrm{d}x + c \cdot \int_{\mu}^{+\infty} e^{-(x-\mu)/b}\mathrm{d}x = 2bc = 1$$

故 $c = 1/2b$. 当 $x \in (-\infty, \mu]$, 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2b} e^{(t-\mu)/b}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} e^{(x-\mu)/b}.$$

当 $x \in (\mu, +\infty)$, 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \int_{\mu}^{x} \frac{1}{2b} e^{-(t-\mu)/b}\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{2} e^{-(x-\mu)/2}.$$

综上所述, 分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} \exp[(x-\mu)/b]/2, & \text{if } x \in (-\infty, \mu] \\ 1 - \exp[-(x-\mu)/b]/2, & \text{if } x \in (\mu, +\infty). \end{cases}$$

(2) 计算如下

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2b} x e^{-|x-\mu|/b} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{2b} x e^{(x-\mu)/b} \mathrm{d}x + \int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{2b} x e^{-(x-\mu)/b} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} x e^{(x-\mu)/b} \Big|_{-\infty}^{\mu} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\mu} e^{(x-\mu)/b} \mathrm{d}x - \frac{1}{2} x e^{-(x-\mu)/b} \Big|_{\mu}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{\mu}^{+\infty} e^{-(x-\mu)/b} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\mu}{2} - \frac{b}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{b}{2} = \mu.
\end{aligned}
$$

下面来计算 $\mathbb{E}(X^2)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2b} x^2 e^{-|x-\mu|/b} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{2b} x^2 e^{(x-\mu)/b} \mathrm{d}x + \int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{2b} x^2 e^{-(x-\mu)/b} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} x^2 e^{(x-\mu)/b} \Big|_{-\infty}^{\mu} - \int_{-\infty}^{\mu} x e^{(x-\mu)/b} \mathrm{d}x - \frac{1}{2} x^2 e^{-(x-\mu)/b} \Big|_{\mu}^{+\infty} + \int_{\mu}^{+\infty} x e^{-(x-\mu)/b} \mathrm{d}x \\
&= \mu^2 - 2b \left(\frac{\mu}{2} - \frac{b}{2} \right) + 2b \left(\frac{\mu}{2} + \frac{b}{2} \right) = \mu^2 + 2b^2.
\end{aligned}
$$

那么我们有 $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2b^2$.

◁

Problem 6. 回答下列问题:

(1) 若 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 对于任意实数 t, 计算 $\mathbb{E}\left(e^{tX^2}\right)$.
(2) 对于任意正整数 n, 若 $Y_n \sim \chi^2(n)$, 即 $Y_n \sim \Gamma(n/2, 1/2)$. 对于任意实数 t, 计算 $\mathbb{E}\left(e^{tY_n}\right)$.
(3) 若 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 计算 $Y = X^2$ 的概率密度函数.

◀

Solution. (1) 注意到我们有

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.
$$

那么, 当 $t < 1/2$ 时有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{tX^2}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-t)x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1/2-t}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}.
\end{aligned}
$$

当 $t \geq 1/2$ 时, $\mathbb{E}\left(e^{tX^2}\right)$ 显然不收敛.

(2) 令

$$
c := \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}
$$

那么当 $t<1/2$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{tY_n}\right) &= c\int_0^{+\infty} x^{n/2-1}\exp\left(-\frac{1}{2}+t\right)\mathrm{d}x \\
\text{令 } y=(1/2-t)x \quad &= c\cdot\frac{1}{(1/2-t)^{n/2}}\int_0^{+\infty} y^{n/2-1}e^{-y}\mathrm{d}y \\
\Gamma \text{ 函数定义} &= \frac{1}{\Gamma(n/2)}\frac{1}{(1-2t)^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \\
&= \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}.
\end{aligned}$$

当 $t\geq 1/2$ 时, $\mathbb{E}\left(e^{tY_n}\right)$ 显然不收敛.

(3) 对于任意 $y\geq 0$, 我们有

$$\mathbb{P}(Y\leq y)=\mathbb{P}(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

对等号两边求导, Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2},\quad y\geq 0.$$

当 $y<0$ 时, $f_Y(y)=0$. 注意到 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, 那么 $Y=X^2\sim\chi^2(1)$.

Note: 通过上述矩母函数的计算也可以发现 $\chi^2(1)$ 即为 $\mathcal{N}(0,1)$ 的平方.

$\triangleleft$