

Bezier曲线拟合单位圆

刘家豪：3160104463

1.1 设计思路

使用有理三次Bezier曲线表示一段圆弧，通过多次绘制不同位置圆弧，将圆弧拼接成单位圆。

为了使拟合效果较好，我采用4段圆弧拼接成单位圆。

Bezier曲线绘制单位圆的基本原理：

有理三次Bezier曲线的相应原理公式如下：

$$p(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(t) = P_0 B_{0,3}(t) + P_1 B_{1,3}(t) + P_2 B_{2,3}(t) + P_3 B_{3,3}(t)$$

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,3}(t) = t^3$$

$$p(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

经过上课老师讲解，我们知道，利用Bezier曲线对圆弧的拟合，可以采用下面公式进行。我们只需要针对不同 P_i 求解出不同的 ω_i 即可求解出针对不同参数 t 的Bezier上不同的点，进而拟合出对应圆弧。

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \omega_i P_i}{\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \omega_i} = \sum_{i=0}^n R_{i,3}(t) P_i$$

求解 ω_i 根据Bezier曲线的数学性质可知曲线方程中 $t = 0.5$ 时的点一定在圆弧上，又由于点的对称性，我们可知：

$$w_0 = w_3$$

$$w_1 = w_2$$

进而，我们知道 $w_1 = \alpha w_0$ 故我们令 $w_0 = 1$ ，所以最后只需求解一个变量 w_1 。

1.2 实现过程

1.2.1 求解Bezier曲线上点

分三个步骤进行：

- 求解分子部分

- ```
Point sumBwp(double w, double t, Point control[])
{
 double x = 0;
 double y = 0;
 x = pow(1 - t, 3) * control[0].x + 3 * t * pow(1 - t, 2) *
control[1].x * w + 3 * pow(t, 2) * (1 - t) * control[2].x * w +
pow(t, 3) * control[3].x;
 y = pow(1 - t, 3) * control[0].y + 3 * t * pow(1 - t, 2) *
control[1].y * w + 3 * pow(t, 2) * (1 - t) * control[2].y * w +
pow(t, 3) * control[3].y;
 Point res;
 res.x = x;
 res.y = y;
 return res;
}
```

- 求解分母部分

- ```
double sumBw(double w, double t)
{
    double res = 0;
    res = pow(1 - t, 3) + 3 * t * pow(1 - t, 2) * w + 3 * pow(t, 2)
* (1 - t) * w + pow(t, 3);
    return res;
}
```

- 求解Bezier曲线上点

- ```
Point pointinBezier(double w, double t, Point control[])
{
 Point res;
 Point p1;
 double sb;
 p1 = sumBwp(w, t, control);
 sb = sumBw(w, t);

 res.x = p1.x / sb;
 res.y = p1.y / sb;
 return res;
}
```

## 1.2.2 分别绘制圆弧

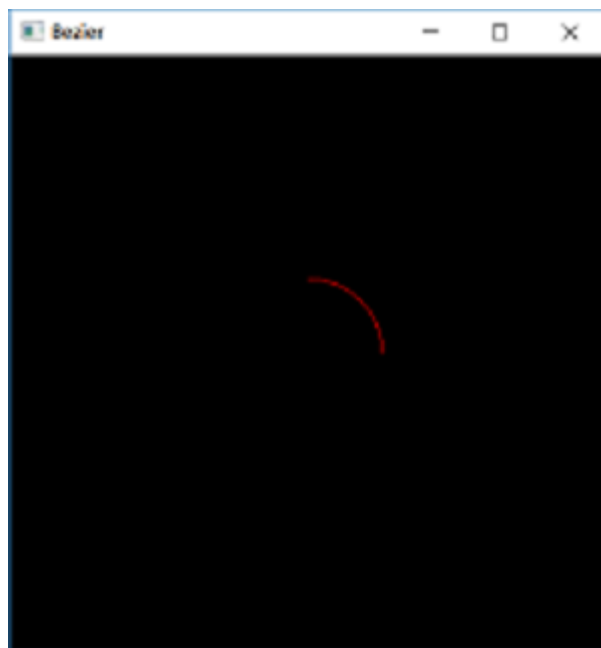
根据1.1节的分析，可以针对所输入的控制点，求出其对应的 $w$ 值。

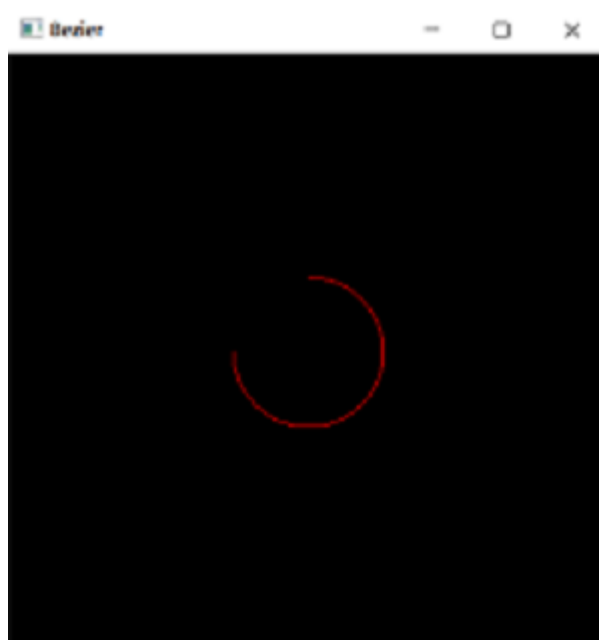
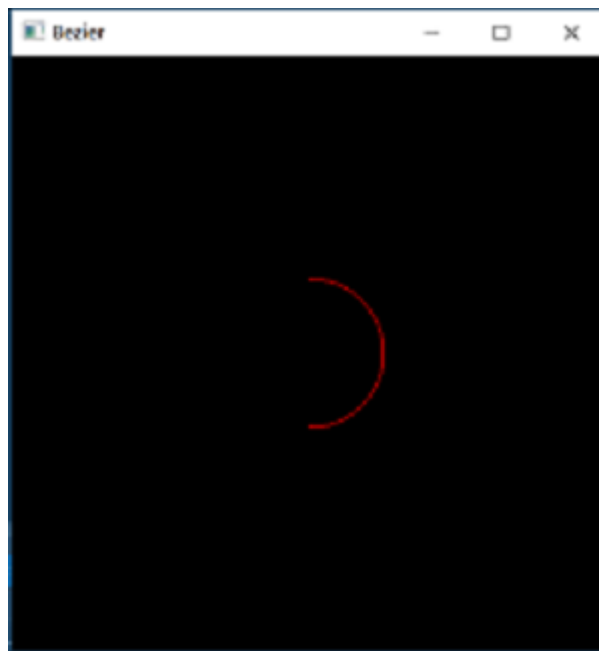
$$\frac{(1-t)^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} w + 3t^2(1-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} w + t^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 w + 3t^2(1-t) w + t^3} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

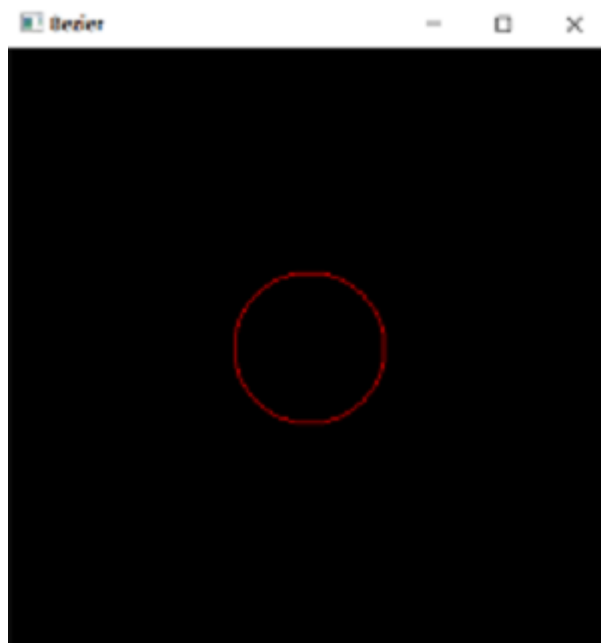
当 $t=0.5$ 时  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  在  $x^2 + y^2 = 1$  上，  
解得： $w = 1.610895$

根据 $w$ 值，即可进行相应圆弧的绘制。

相应的绘制结果，如下图所示：







## 1.3 总结

---

通过此次作业，对Bezier曲线的理解有了进一步的加深，并且掌握了Bezier曲线的一些使用方法，可以运用Bezier曲线进行一些简单曲线的绘制。