Softmax

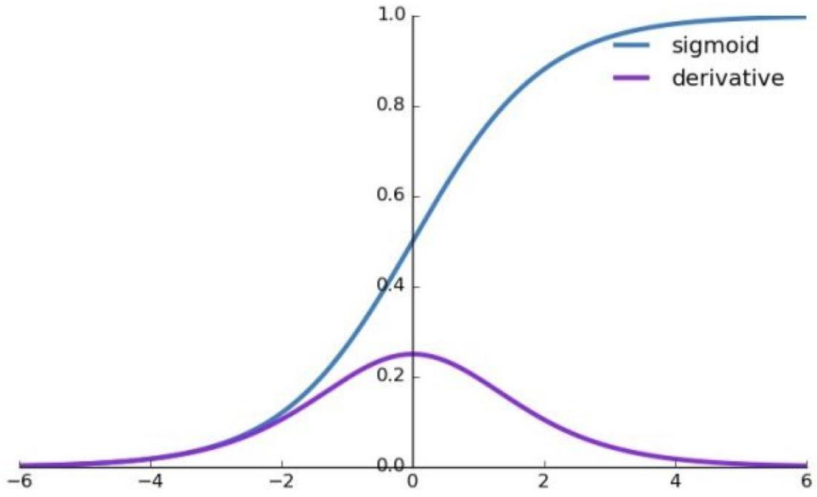
交叉熵损失函数相对于 mse 损失函数的优点

1）收敛速度交叉熵损失函数更快
2）mse 求出来的概率值可能在 0-1 之外

缺点

使用MSE的一个缺点就是其偏导值在输出概率值接近0或者接近1的时候非常小，这可能会造成模型刚开始训练时，偏导值几乎消失。

假设我们的MSE损失函数为： $J=\frac{1}{2}(y_i-\hat{y_i})^2$ ，偏导为： $\frac{dJ}{dW}=(y_i-\hat{y_i})\sigma'(Wx_i+b)x_i$ ，其中 $\sigma'(Wx_i+b)$ 为 $\sigma(Wx_i+b)(1-\sigma(Wx_i+b))$ 。*可以看出来，在* $\sigma(Wx_i+b)$ 值接近0或者1的时候， $\frac{dJ}{dW}$ 的值都会接近于0，其函数图像如下：



这导致模型在一开始学习的时候速率非常慢，而使用交叉熵作为损失函数则不会导致这样的情况发生。

$$\frac{\partial p_j}{\partial y_i} = \frac{\partial(\frac{e^{y_j}}{\sum_{j=1}^{K} e^{y_j}})}{\partial y_i} = \frac{(e^{y_j})' \sum_{j=1}^{K} e^{y_j} - e^{y_j}(\sum_{j=1}^{K} e^{y_j})'}{(\sum_{j=1}^{K} e^{y_j})^2} = \frac{0 \sum_{j=1}^{K} e^{y_j} - e^{y_j} e^{y_i}}{(\sum_{k=1}^{K} e^{y_k})^2} = \frac{-e^{y_j} e^{y_j}}{(\sum_{j=1}^{K} e^{y_j})^2} = -S(y_j)S(y_i$$

- 再看 $\frac{\partial y_i}{\partial w_n}$

$$\frac{\partial y_i}{\partial w_n} = x_n$$

接下来我们只需要把上面的组合起来：

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial y_i} &= -p(i)(1-p(i)) \sum_{i=1,i=j}^{K} \frac{y_i}{p_i} - p(i)p(j) \sum_{i=1,i\neq j}^{K} \frac{y_i}{p_j} \\ &= -(1-p(i)) \sum_{i=1,i=j}^{K} y_i - p(i) \sum_{i=1,i\neq j}^{K} y_i \\ &= -\sum_{i=1,i=j}^{K} y_i + p(i) \sum_{i=1}^{K} y_i \end{aligned}$$

最后针对分类问题，给定的y_i中只会有一个类别是1，其他类别都是0，所以

$$\frac{\partial J}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial J}{\partial w_n} = \frac{\partial y_i}{\partial w_n} = (p(i)-1)w_n$$

注意看，$p(i)-1$是啥？是不是**SoftMax层的输出的概率-1**，梯度就是这么容易计算！！！太神奇了？！

就是为什么神经网络分类器要用交叉熵损失函数的原因！

softmax 思想

就是一个向量乘以 w 矩阵，目标为了将向量维度变为和目标类别同样维度，然后计算 exp（pi^）即可