一、填空（每小题 5 分，共 30 分）

1、已知山东省(2010 年)6 个城市人口数(单位：万)为济南 681；青岛 872；临沂 1004；潍坊 909；荷泽 829；济宁 808。则样本均值为 850.5；样本中位数为 850.5。

2、已知 $P(A)=0.5,\ P(B)=0.6,\ P(B|A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$ 0.7。

3、设随机变量 $X_1$ 与 $X_2$ 相互独立，且 $X_1\sim B(4,0.6)$，$X_2\sim N(4,16)$，则 $E(X_1+2X_2)=$ 10.4。

4、设随机变量 $X$ 与 $Y$ 的相关系数为 0.9，$Z=4-X$，则 $Y$ 与 $Z$ 的相关系数为 $-0.9$。

5、设来自总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本的样本均值 $\overline{X}=5$，则未知参数 $\mu$ 的 95%置信区间为 $(\bar{x}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$。

6、在假设检验的 $p$ 值判别法中，当 $p$ 与显著性水平 $\alpha$ 满足 $p\le\alpha$ 时拒绝原假设。

二、（12 分）设随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$，

(1) 求系数 $A$；(2) 求随机变量 $X$ 落在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 内的概率；(3) 求 $Y=X^2$ 的密度函数。

解 ① $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=A\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\pi A\Rightarrow A=\frac{1}{\pi}$

② $P\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{6})\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{1}{3}$.

③ $y=x^2$ $\quad x\in(-1,1)\quad y\in(0,1)$.

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\{X^2\le y\}$.

① 当 $y\le 0$ 时 $F_Y(y)=0$.

② 当 $1>y>0$ 时 $F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx$.

③ 当 $y\ge1$ 时 $F_Y(y)=1$.

$\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0\\ 2\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} & 1>y>0\end{cases}$

三、（8 分）袋中有 5 个球，3 个新球，2 个旧球，每次无放回地取 1 球，共取 2 次，求第二次抽到新球的概率。

$A_i$：第 i 次抽到新球.

解：$P(A_1)=\frac{3}{5}\qquad P(\overline{A_1})=\frac{2}{5}$.

$P(A_2)=P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)+P(A_2|\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_1})$

$=\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\quad\frac{2}{5}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

一、填空（每小题 5 分，共 30 分）

1、已知山东省(2010 年)6 个城市人口数(单位：万)为济南 681；青岛 872；临沂 1004；潍坊 909；荷泽 829；济宁 808。则样本均值为 850.5；样本中位数为 850.5。

2、已知 $P(A)=0.5,\ P(B)=0.6,\ P(B|A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$ 0.7。

3、设随机变量 $X_1$ 与 $X_2$ 相互独立，且 $X_1\sim B(4,0.6)$，$X_2\sim N(4,16)$，则 $E(X_1+2X_2)=$ 10.4。

4、设随机变量 $X$ 与 $Y$ 的相关系数为 0.9， $Z=4-X$，则 $Y$ 与 $Z$ 的相关系数为 $-0.9$。

5、设来自总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本的样本均值 $\bar{X}=5$，则未知参数 $\mu$ 的 95%置信区间为 $\left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$。

6、在假设检验的 $p$ 值判别法中，当 $p$ 与显著性水平 $\alpha$ 满足 $P\leq\alpha$ 时拒绝原假设。

二、(12 分) 设随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$

(1) 求系数 $A$； (2) 求随机变量 $X$ 落在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 内的概率； (3) 求 $Y=X^2$ 的密度函数。

解 ① $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=A\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\pi A\Rightarrow A=\frac{1}{\pi}$

② $P\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{1}{3}$.

③ $y=x^2$

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=\{X^2\leq y\}$.

当 $y\leq 0$ 时 $F_Y(y)=0$.

当 $y>0$ 时 $F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx$.

$\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0 & y\leq 0\\ 2\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} & y>0\end{cases}$

三、(8 分) 袋中有 5 个球，3 个新球，2 个旧球，每次无放回地取 1 球，共取 2 次，求第二次抽到新球的概率。 $A_i$: 第i次抽到新球.

解: $P(A_1)=\frac{3}{5}$  $P(\bar{A}_1)=\frac{2}{5}$.

$P(A_2)=P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)+P(A_2|\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_1)$

$=\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

四、（10 分）已知正常成人男性血液中，每一毫升白细胞数平均是 7300，均方差 700。请用切比雪夫不等式估计并用中心极限定理计算每一毫升白细胞数在 5200~9400 之间的概率 $P$。

解：X：正常男性一毫升白细胞数 $E(X)=7300$ $D(X)=700^2$

$P\{5200\le X\le 9400\}=P\{|X-7300|\le 2100\}>1-\frac{700^2}{2100^2}=\frac{8}{9}$

X→所有男性成人每一毫升白细胞数的平均值．n充分大 由中心极限定理可知．

$\frac{X-7300}{700}$ 近似服从 $N(0,1)$

$P\{|X-7300|\le 2100\}=P\{|\frac{X-7300}{700}|\le 3\}\approx\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)-1$

五、（8 分）假定某食品厂生产的袋装花生米每袋净重 $X\sim N(150,\sigma^2)$，其中 $\sigma>0$ 未知。现开箱任意抽取 16 袋得净重数据如下：$\bar{x}=151.6,\ s=2.56$。问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可认为该箱袋装花生米每袋净重 150(单位：克)？

解：正态总体对μ的假设检验，$\sigma^2$未知．t-检验法．

① $H_0: \mu=150$ $H_1: \mu\ne 150$
$\alpha=0.05$ $n=16$

② 在$H_0$成立时，$T=\frac{\bar{X}-150}{S/\sqrt{16}}\sim t(15)$ $t=\frac{151.6-150}{2.56/4}=\frac{1.6}{2.56}\times 4=2.5$

拒绝域：$|T|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.131$

$t=2.5>2.131$ 落入拒绝域．

∴否定$H_0$．认为…不是150克．

$p=2P\{T>2.5\}=2\times 0.012$
$=0.024\le 0.05$
∴否定$H_0$，认为…不是150克．

六、（10 分）某仪器有 3 只独立工作的同型号电子元件，其寿命(单位：小时)均服从 $\lambda=\frac{1}{600}$ 的指数分布。求在仪器使用的最初 200 小时内，至少有一只电子元件损坏的概率。

解：设X：一只元件寿命 $X\sim Exp(\frac{1}{600})$

$P\{X<200\}=\int_{-\infty}^{200}f(x)dx=\int_0^{200}\frac{1}{600}e^{-\frac{1}{600}x}dx=e^{-\frac{1}{600}x}\Big|_{200}^{0}$

$=1-e^{-\frac{1}{3}}=p$

Y：三只元件在200小时内损坏的元件个数．

$Y\sim B(3,p)$．

$P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_3^0p^0q^3=1-(e^{-\frac{1}{3}})^3=1-e^{-1}$.

七、（8 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 为来自 $N(0, 2^2)$ 的样本，设 $Y = \dfrac{C(X_1^2 + \cdots + X_{10}^2)}{X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2}$。

求 $C$ 的值，并问 $Y$ 服从什么分布（说明自由度）？

解：$X_i \sim N(0, 2^2) \longrightarrow \frac{X_i - 0}{2} \sim N(0,1)$　$\frac{X_1^2}{4} + \cdots + \frac{X_{10}^2}{4} \sim \chi^2(10)$

$\frac{X_{11}^2}{4} + \cdots + \frac{X_{15}^2}{4} \sim \chi^2(5)$

$\therefore \dfrac{\frac{1}{4}(X_1^2 + \cdots + X_{10}^2)/10}{\frac{1}{4}(X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2)/5} \sim F(10, 5)$

$\therefore Y = \frac{1}{2} \dfrac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2}$　即 $C = \frac{1}{2}$.

八、（8 分）设总体 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，其中 $\lambda$ 是未知参数，$X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体的随机样本，求 $P(X=0)$ 的极大似然估计。

解：$X \sim P(\lambda)$

$$\therefore L(\lambda) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda} \cdots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \cdots x_n!} e^{-n\lambda}$$

$$\ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!)$$

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\therefore \hat{\lambda} = \bar{X}$$

$$\therefore P\{X=0\} = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

$$\therefore \hat{P}\{X=0\} = e^{-\hat{\lambda}} = e^{-\bar{X}}$$

九、（6 分）设随机变量 $X \sim \chi^2(n)$，试证 $D(X) = 2n$。

解：$\cancel{E(X) = n}$ $\because X \sim \chi^2(n)$

$\therefore X = X_1^2 + \cdots + X_n^2$　$X_i \sim N(0,1)$ $i=1 \cdots n$ 相互独立.

$D(X) = D(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$　$D(X_1^2) = E(X_1^4) - E^2(X_1^2)$

$= \sum_{i=1}^n D(X_i^2)$　$E(X_1^2) = D(X_1) + E^2(X_1) = 1 + 0^2 = 1$

$$E(X_1^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} d(\tfrac{1}{2}x_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d(-e^{-\frac{1}{2}x_1^2})$$

$$= -x_1^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} 3x_1^2 dx_1 = 3 \times 1 = 3.$$

$\therefore D(X_1^2) = 3 - 1 = 2$