东华大学 2017-2018 学年第一学期线性代数 A 试卷 A 答案

踏实学习，弘扬正气；诚信做人，诚实考试；作弊可耻，后果自负。

教师＿＿＿＿＿＿班号＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿考试教室＿＿＿

试题	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一． 填空题(每小题 4 分, 满分 40 分)

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ 中一次项 x 的系数为＿＿2＿＿＿.

2. 若 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，则 $AB=\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$＿＿＿＿＿.

3. 设三阶方阵 A,B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$，且 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ 则 $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$＿＿＿＿＿.

4. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩为＿＿2＿＿.

5. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，$|A|=2,|B|=-3$，则 $|2A^{*}B^{-1}|=$＿＿$-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$＿＿＿

6. 正交矩阵的行列式为＿1 或-1＿＿＿＿

7. 、设 A,B,C 为 n 阶方阵，且 $ABC=E$，则必有 $BCA=$＿E＿＿.

8. 已知二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型的条件为 $-2<t<1$＿

9. 已知 $\beta=\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征向量，则 $a=$＿＿0, −1＿＿＿＿＿＿

10. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix}$，其中 $a>b>0, a^2+b^2=1$，则 A 为＿＿正交＿＿矩阵.

二.（10 分）设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1,$，对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，求 A。

解：对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1,$ 于两个线性无关的特征向量 ξ_2,ξ_3，它们都与 ξ_1 正交.

所以，可取 $\xi_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\xi_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$……… 4 分

令 $T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ …….. 2 分，则 $T^T=T^{-1}$ ……. 1 分

所以， $A=T\Lambda T^T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$………3 分

三、（10 分）已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，且 $A^2-AB=I$，其中 I 为三阶单位阵，求矩阵 B.

解：由 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 可求 $|A|=-1\neq 0$………. 2 分

可求得： $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$……. 2 分

又 $A^2-AB=A(A-B)=I$ ……. 2 分

所以 $A-B=A^{-1}$，即 $B=A-A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$……4 分

四、（10 分）已知 R^3 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量组 $\beta_1=\alpha_1-k\alpha_2$， $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$， $\beta_3=\alpha_3+k\alpha_1$ 线性相关，求 k 的值。

解：设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是一组不全为零的数， $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3=0$ ……. 2 分

即： $\lambda_1(\alpha_1-k\alpha_2)+\lambda_2(\alpha_2+\alpha_3)+\lambda_3(\alpha_3+k\alpha_1)=(\lambda_1+k\lambda_3)\alpha_1+(\lambda_2-k\lambda_1)\alpha_2+(\lambda_2+\lambda_{31})\alpha_3=0$ ……. 2 分

即方程组 $\begin{cases} \lambda_1+k\lambda_3=0 \\ \lambda_2-k\lambda_1=0 \\ \lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$ 有非零解………. 2 分

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ …………. 2 分，计算得 $k=\pm 1$ ………2 分

五、（12 分）设矩阵 A,B 相似，且 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$

（1）求 a、b 的值。

（2）求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$

解：（1）A 的特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda-a \end{vmatrix}$

由 A,B 相似可知， A,B 有相同的特征值 $\lambda_1=b,\lambda_2=\lambda_3=2,$，代入上式可以得到 $a=5,$ …. . 3 分

同时 $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$，所以， $b=6$ ……. 3 分

（2） $\lambda_1=6,$时，解线性方程组$(6I-A)x=0$得基础解系$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$……. 1 分

$\lambda_2=\lambda_3=2$时，得基础解系$\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ $\xi_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$……. 2 分

令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&-1&0\\3&0&-1\end{bmatrix}$, 则有$P^{-1}AP=B$。…….. 3 分

六、（12 分）λ取何值时方程组$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$无解？有唯一解？有无穷多解？并在无穷多解时写出方程组的通解。

解：$\begin{bmatrix}2&\lambda&-1&1\\ \lambda&-1&1&2\\ 4&5&-5&-1\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}2&\lambda&-1&1\\ \lambda+2&\lambda-1&0&3\\ -6&-5\lambda+5&0&-6\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}2&\lambda&-1&1\\ \lambda+2&\lambda-1&0&3\\ 5\lambda+4&0&0&9\end{bmatrix}$

（ 或 者 行 列 式 为 零 计 算 ：

$$\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\ \lambda&-1&1\\ 4&5&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&\lambda&\lambda-1\\ \lambda&-1&0\\ 4&5&0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(5\lambda+4)=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-\frac{4}{5}$$

）

当$\lambda=-\frac{4}{5}$时，原方程无解。…….. 3 分

当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-\frac{4}{5}$时，原方程有唯一解。……. 3 分

当$\lambda=1$时，原方程有无穷多解。………. 3 分

其通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$（$k$为任意实数） …….. 3 分

七、(6 分) A,B均为n阶矩阵，$AB=0$，求证：秩A+秩$B\leq n$。

解：线性方程组$AX=0$，当秩$A=r$时，基础解系为$n-r$个………2 分

由$AB=A(b_1,b_2\ldots b_n)=(Ab_1,Ab_2\ldots Ab_n)=0\Rightarrow Ab_j=0(j=1,2,\ldots n)$ …….. 2 分

即 B 的列均为$AX=0$的解，即秩 B$\leq n-r$，亦即秩A+秩$B\leq n$……. 2 分