2016-2017 学年第一学期一元微积分(B 上)月考答案

一、填空题（每题 5 分，共 20 分）

1. 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}=5$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-2x^2+3}{2x^6+3x^3+x}=\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\dfrac{3}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{\sin 3x}{x}+x\sin\dfrac{3}{x})=3$.

二、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1. 函数 $y=\arccos x$ 的值域是（B ）.

（A） $[-\pi,\pi]$　（B） $[0,\pi]$　（C） $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$　（D） $[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

2. 以下三个说法,<u>正确</u>的个数为（C ）.

1) $"\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$当$x>X$时,恒有$|f(x)-A|<e^{\frac{\varepsilon}{2016}}"\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A;$

2) $"\forall$正整数$N,\exists$正整数$K,$当$0<|x-x_0|\le\dfrac{1}{K}$时,恒有$|f(x)-A|<\dfrac{1}{2N}"$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A;$

3) $"\forall\varepsilon\in(0,1),\exists$正整数$N,$当$n\ge N$时,恒有$|x_n-a|<2\varepsilon"\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a;$

（A） 0　（B） 1　（C） 2　（D） 3.

3. 函数 $y=\sqrt{4-x^2}\ln(x-1)$ 的连续区间为（D）.

（A） $[-2,2]$　（B） $[1,2]$　（C） $[1,2)$　（D） $(1,2]$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ x^2-1 & x\ge 0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 为（C）.

（A） 1　（B） -1　（C） 不存在　（D） 1 或 -1.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1-ax)^{\frac{1}{x}}=e^2$，则 $a=$（D）.

（A） 2　（B） $-\dfrac{1}{2}$　（C） $\dfrac{1}{2}$　（D） -2.

6. 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1-2x^2)$ 与 $(\sin kx)^2$ 为同阶无穷小，则 $k=$（B）.

（A） $\sqrt{2}$　（B） 2　（C） 4　（D） -2.

7. 下列点中哪一个点的极坐标和$(2,\dfrac{\pi}{4})$是同一点（ C ）.

（A）$(-2,\dfrac{3\pi}{4})$　　（B）$(2,-\dfrac{\pi}{4})$　　（C）$(-2,\dfrac{5\pi}{4})$　　（D）$(-2,-\dfrac{\pi}{4})$.

8. 极坐标方程$r=1-\sin\theta, r=1$的交点有（B）个.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4.

三、解下列各题（每题 8 分，共 24 分）（评分标准由各题批改老师确定）

1.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)\cdot\ln\left(1+x^2\right)}{\left(1-\cos x\right)\tan 3x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)\cdot\ln\left(1+x^2\right)}{\left(1-\cos x\right)\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot x^2}{\frac{1}{2}x^2\cdot 3x}=\dfrac{4}{3}$.

2.求曲线$y=-\dfrac{x^2-4}{x+1}$的所有渐近线.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(-\dfrac{x^2-4}{x+1})=\infty$ 无水平渐近线；$\lim\limits_{x\to -1}(-\dfrac{x^2-4}{x+1})=\infty$ 由有垂直渐近线$x=-1$；

$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{-\frac{x^2-4}{x+1}}{x})=-1$，$\lim\limits_{x\to\infty}[(-\dfrac{x^2-4}{x+1})-(-x)]=1$，有斜渐近线$y=-x+1$.

3.求函数$f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|\left(x^2-2x-3\right)}$的间断点，并确定其类型.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|\left(x^2-2x-3\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)\sin x}{x\left(x^2-2x-3\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)}{\left(x^2-2x-3\right)}=-\dfrac{1}{3}$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|\left(x^2-2x-3\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)\sin x}{-x\left(x^2-2x-3\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-(x+1)}{\left(x^2-2x-3\right)}=\dfrac{1}{3}$,

$x=0$是跳跃间断点.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|\left(x^2-2x-3\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin x}{-x(x-3)}=-\dfrac{\sin 1}{4}$,

$x=-1$是可去间断点.

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|\left(x^2-2x-3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-3)(x+1)}=\infty$,

$x=3$是无穷间断点.

四、（9 分）“圆的面积可以归结为求其内接正多边形的面积的极限”，请利用这个想法推导出半径为 r 的圆的面积.

解：圆内接正 n 边形，连接圆心和 n 个顶点，可以得到面积为 $S_n = n\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$，取极限

$$S_{圆}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}=\pi r^2.$$

五、（7 分）设 $a_1=1, a_2=2,$ 当 $n\ge 3$ 时 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，

证明：① $\frac{3}{2}a_{n-1}\le a_n\le 2a_{n-1}$；；② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0.$

证明：①由已知可知数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 所以 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\le 2a_{n-1}\ (n\ge 3),$

因此 $a_{n-1}\ge\frac{1}{2}a_n\ (n\ge 2), a_{n-2}\ge\frac{1}{2}a_{n-1}\ (n\ge 3)$，所以

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ge a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-1}\ge\frac{3}{2}a_{n-1}，①成立.$$

②因为 $a_n\ge\frac{3}{2}a_{n-1}\ge(\frac{3}{2})^2a_{n-2}\ge\cdots\ge(\frac{3}{2})^{n-2}a_2\ge(\frac{3}{2})^{n-1}$，

所以 $0<\frac{1}{a_n}\le(\frac{2}{3})^{n-2}$, 由两边夹法则，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0.$