2016-2017 学年第二学期几何与多元微积分(B 上)月考答案

一、填空题（每题 5 分，共 30 分）

1.当 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{x^2}{2}}{x^4}=-\frac{1}{24}$.

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{2})$ 是发散的.（填“收敛”或“发散”）

4.已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项部分和 $S_n=\frac{n}{n+1}$，则 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$， $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$.

5.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

6. 将函数 $f(x)=x+1\,(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数，则 $a_2=0$， $b_2=-1$.

二、选择题（每题 5 分，共 25 分）

1. 下列级数收敛的是（ D ）.

（A） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ （B） $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ （C） $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$ （D） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^7-n+1}}$.

2. 下列说法正确的是（ B ）.

（A） $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

（B） $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

（C） $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散， $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散.

（D） $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

3. 下列说法正确的有（B ）个.

（1） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛.

（2） 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$必发散.

（3） 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$必收敛.

（4） 级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$收敛$(a_n > 0)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$必收敛.

（A）1（B）2（C）3（D）4.

4. 将$f(x) = \dfrac{1}{(2+x)^2}$展开为$x$的幂级数，则该级数的收敛半径为（B）.

（A）1（B）2（C）$\dfrac{1}{2}$（D）4.

5.设$f(x)$是周期为4的周期函数，它在$[-2,2]$上的表达式为$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < 2 \end{cases}$，将

$f(x)$展开成傅里叶级数，则其和函数在$x=0$处的值为（**A**）.

（A）0（B）1（C）-1（D）2.

三、（10分）判断级数$\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$是否收敛，若收敛指出是绝对收敛还是条件收敛.

解： 令$f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ 当$x > 2$时，$f'(x) < 0$

所以$\dfrac{\ln n}{n}$单调下降，且$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$. 由莱布尼茨定理可知$\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$收敛.

级数$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^n \ln n}{n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$, $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\ln n}{n} \quad (n > 2)$

由比较判别法，可知$\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$发散. 原级数条件收敛.

四、（10分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$的和函数，并计算$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$的值.

解： $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$，当$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$发散，$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$的收敛域为$[-1,1)$.

令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Rightarrow s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$

$\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\Rightarrow s(x)=-\ln(1-x)$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x).$ 令 $x=-1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2.$

五、(10 分) 将函数 $y=x\sin(x^2)$ 展开成 x 的幂级数，并指出展开式成立的区间.

解：

$$\sin(x^2)=x^2-\frac{(x^2)^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n-2}}{(2n-1)!}$$

$$y=x\sin(x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n-1}}{(2n-1)!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

六、(10 分) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解：$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\mathrm{d}x=1.$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{-1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{-1}{n\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{2}{(2k-1)\pi} & n=2k-1\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)x)\quad x\ne k\pi$$

七、(5 分) 利用级数收敛的性质，求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}$.

解：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}$, 由比值判别法 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2n+2)^{n+2}}\bigg/\frac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}=\frac{5}{2\mathrm{e}}<1$

所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}$ 收敛，通项极限为 0.