一元微积分 B 下复习题（一）

3.7---3.8 &4.1---4.7

1、$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=$___1___；$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=1/2$.

2、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x} & x<0\\ 6 & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}} & x>0\end{cases}$，问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 连续?

a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点?

解： $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\dfrac{1}{2}(-x^2)}$$

$=-6a$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{\dfrac{x^2}{4}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{\dfrac{1}{2}}=4+2a^2.$$

$4+2a^2=-6a$ 推出 $a=-1,a=-2$.

当 $4+2a^2=-6a=6$，即 $a=-1$ 时连续；

当 $4+2a^2=-6a\neq6$，即 $a=-2$ 时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点.

3、讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x(\arctan|x|-\dfrac{\pi}{2})$ 是否存在，若存在求极限值；若不存在说明理由.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\arctan|x|-\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{x\to+\infty} x(\arctan x-\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}==\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x(\arctan|x|-\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{x\to-\infty} x(\arctan(-x)-\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan(-x)-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1$

极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x(\arctan|x|-\frac{\pi}{2})$ 不存在.

4、已知 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int\frac{f(\ln x)}{x}dx=\underline{\frac{1}{x}+c}$

5、设 $\int f(x)\,dx=x^2+C$,则 $\int xf(1-x^2)\,dx=\underline{-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C}$.

6、$\int_{-\pi}^{\pi} x^4\sin x\,dx=0$.

7、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,dt}{x^2}=\underline{\frac{1}{2e}}$.

8、 当 $x>0$ 时 $f(x)$ 连续,且 $\int_1^{x^2} f(t)\,dt=x^2(1+x)$,则 $f(2)=\underline{1+\frac{3\sqrt{2}}{2}}$.

9、$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\underline{\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C}$.

10、反常积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^q}$,当 $\underline{q\geq1}$ 时,此积分发散.

11、 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ __发散____________填（“收敛”或“发散”）.

12、函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 在区间 $[-a,a]$ 上的平均值为 $\underline{\frac{\pi}{4}a}$.

13、若 $f(x)=e^{-x}$，则 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}\,dx=\underline{\frac{1}{x}+C}$.

14、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})=\underline{\ln 2}$.

15、设$\int_0^{x^2} xf(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 $f(t)$ 是连续函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t+2x^2 f(x^2)}$.

16、$\int_{-2}^{2}(\sqrt{4-x^2}+\arctan x)\,\mathrm{d}x=\underline{2\pi}$.

17、广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$ <u>发散</u>填（“收敛”或“发散”）

18、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\ln x}=\underline{\mathrm{e}}$.

19、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\underline{\dfrac{9\pi}{4}}$.

20、　设函数 $f(x)$ 连续可导，则 $\int f'(ax+b)\mathrm{d}x=\underline{\dfrac{1}{a}f(ax+b)+C}$.

21、　设 $f(x)=x^2+x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=\underline{x^2+\dfrac{2}{3}x}$.

22、　$\int_{-1}^{1}[\ln(x^2+1)\sin x+x^2]\mathrm{d}x=\underline{2/3}$.

23、　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=\underline{\pi/4}$.

24、　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}u}{x\sin^2 x}=\underline{\pi/12}$.

25、　讨论反常积分 $\int_0^1\dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ 的收敛性 <u>发散</u>.

26、若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为 $\underline{-\sin x}$.

27、下列结论错误的是（　B　　）

（A）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　　（B）$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$

（C）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　　（D）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=0$

28、 在下列等式中,正确的结果是(　C　　).

（A）$\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$　　　（B）$\int \mathrm{d}\,f(x)=f(x)$

（C）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$　　　（D）$\mathrm{d}\int f(x)=f(x)$

29、由定积分的定义 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$ 可表示为(　B　　).

（A） $\int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}\,x$ （B） $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}\,x$ （C） $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ （D） $\int_1^2 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}\,x$

30、下列选项中正确的是(　D　)

(A) $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x < \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x$ (B) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x < \int_1^2 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$

(C) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x < \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x$ (D) $\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x < \int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x$

31、若 $\frac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int x f'(x)\mathrm{d}x =$（　B　）

（A） $\frac{\ln x}{x}+C$ （B） $\frac{1-2\ln x}{x}+C$ （C） $\frac{1}{x}+C$ （D） $-\frac{1}{x}+C$

不要求 32、曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与其过原点的切线及 y 轴所围成的图形面积为(　C　)

(A) $\int_1^{\mathrm{e}} (\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$ (B) $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln y - y\ln y)\mathrm{d}y$;

(C) $\int_0^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x)\,\mathrm{d}x$ (D) $\int_0^1 (\ln y - y\ln y)\mathrm{d}y$

33、下列广义积分收敛的是（　D　）.

（A） $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ （B） $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$ （C） $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ （D） $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$

34、设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数,则（　B　）.

（A） $F(x)-G(x)=0$ （B） $F(x)-G(x)=C$ (C 为任意常数)

（C） $F(x)+G(x)=0$ （D） $F(x)+G(x)=C$ (C 为任意常数)

35、设 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}\,t = f(x)+x\sin x$, $f(0)=0$ 且有一阶导数，当 $x\neq 0$ 时，求 $f'(x)$.

解: 对积分 $\int_0^1 f(t\,x)\,\mathrm{d}\,t$ 作变换 $t\,x=u$,则 $\mathrm{d}\,t=\frac{\mathrm{d}\,u}{x}$ 原式可化为

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}\,u = f(x)+x\sin x\,,$$

即 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}\,u = x\,f(x)+x^2\sin x$,上式对 x 求导.

可得 $f'(x)=-x\cos x-2\sin x,(x\neq 0)$。

36、计算 $I=\int_0^{2013\pi} x\left|\sin x\right|\mathrm{d}\,x$.

解：设 $x=2013\pi-t$, 则 $I=\int_{2013\pi}^{0}(2013\pi-t)\left|\sin t\right|\mathrm{d}(2013\pi-t)$

$$=-\int_0^{2013\pi} t\left|\sin t\right| \mathrm{d}t + 2013\pi\int_0^{2013\pi}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t$$

$$=-I+2\times(2013)^2\pi$$

$\therefore I=(2013)^2\pi$.

37、$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$.

解:原式=$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}(1+\tan\frac{x}{2})}$

$=\int\dfrac{\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})}{1+\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|1+\tan\dfrac{x}{2}\right|+C$

38、已知函数 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解: 两边同时平方 $f^2(x)=(3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x)^2$

两边同时求定积分

$a=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 9x^2\,\mathrm{d}x-a\int_0^1 6x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x$

$a=3$ $\qquad f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}$

39、试求 $y''=x$ 的经过点 $(0,1)$ 且在此点与直线 $y=\dfrac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线.

解:由已知$\begin{cases} y''=x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $\qquad y'=\dfrac{1}{2}x^2+C_1 \qquad C_1=\dfrac{1}{2}$

$y=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x+C_2 \qquad C_2=1 \qquad y=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x+1$

40、计算 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解：令 $x=t^6 \Rightarrow \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int\frac{(t^3+1)-1}{1+t}\mathrm{d}t=6\int(t^2-t+1-\frac{1}{1+t})\mathrm{d}t$$

$$=6(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|1+t|)+c=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+C$$

41、计算. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,\mathrm{d}x$$

解：原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{3}$

42、用递推式计算 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x\ (n\in N,a>0)$.

解：设

$$I_n=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{a}x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^{-ax}=-\frac{1}{a}x^n\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}nx^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n}{a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n}{a}I_{n-1}$$

$$I_n=\frac{n}{a}I_{n-1}=\frac{n}{a}\cdot\frac{n-1}{a}\cdot I_{n-2}=\frac{n}{a}\cdot\frac{n-1}{a}\cdots\frac{2}{a}$$

$$I_1=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}$$

$$I_n=\frac{n!}{a^{n+1}}.$$

43、设 $f(x)$ 是 e^{2x} 的一个原函数，且 $f(0)=1$。$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(0)=1$，求 $F(x)$.

解：$f(x)=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C_1,\ f(0)=1\Rightarrow C_1=\frac{1}{2},\ f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}$

$F(x)=\int(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2})\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}x+C_2,F(0)=1\Rightarrow C_2=\frac{3}{4}\ F(x)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

44、利用定积分的定义计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x$

$=(-x\cos x+\sin x)\big|_0^1=-\cos 1+\sin 1$

45、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\int_{\cos x}^{1}(1-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\int_{\cos x}^{1}(1-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin x)\cos x}{(1-\mathrm{e}^{-\cos x})\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{(1-\mathrm{e}^{-\cos x})}=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}$

46、判断无穷限积分 $\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 是否收敛，若收敛，求其值.

解：$\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^2 de^{-x}=-x^2\mathrm{e}^{-x}\mid_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$=-\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}\mid_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$=-2\mathrm{e}^{-x}\mid_0^{+\infty}=2$

47、一路灯离地面 6 米。现有一身高 1.8 米的人从灯下离灯而去，他行走的速率为 $5.6m/s$. 则此人影子增长的速率是 8m/s.

48、计算 $\int\dfrac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+8\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+13}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+8\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+4}$$

解：原式 $=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+2\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(\frac{x-3}{2})^2+1}=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+4\int\dfrac{\mathrm{d}(\frac{x-3}{2})}{(\frac{x-3}{2})^2+1}$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$$