

# 东华大学 2016~2017 学年第一学期概率统计 B 试题 (A)

踏实学习, 弘扬正气; 诚信做人, 诚实考试; 作弊可耻, 后果自负。

教师	班号	专业年级	学号	姓名					
试题得分	一	二	三	四	五	六	七	八	总分

分布数据:  $\sqrt{114}=10.68$ ,  $z_{0.025}=1.96$ ,  $z_{0.05}=1.65$ ,  $t_{0.05}(3)=2.35$ ,  $t_{0.05}(4)=2.13$ ,  $t_{0.025}(3)=3.18$ ,  $t_{0.025}(4)=2.78$ .

## 一、填空 (每小题 5 分, 共 30 分)

1、在学校期末的概率统计考试中, 一宿舍 4 名女生的成绩分别为 91, 67, 88, 82。则样本均值为 82; 样本方差为 114。

2、条件同上题, 一般认为学生的考试成绩服从正态分布。则全校平均成绩的 95% 置信区间为  $(\bar{x} - 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}) \rightarrow (82 - 16.98, 82 + 16.98) = (-65.02, 98.98)$ 。

3、从 1 到 10 这十个数中任取 3 个, 则取到的最大数为 5 的概率是  $\frac{C_4^2}{C_{10}^3}$ 。

4、在区间 (0,1) 中随机地取两个数, 则两数之和小于 1.2 的概率为  $1 - 0.32 = 0.68$ 。

5、设随机变量  $X_1$  与  $X_2$  相互独立, 且  $X_1 \sim U(0,12)$ ,  $X_2 \sim \chi^2(20)$ , 则  $D(X_1+2X_2) = \frac{12^2}{12} + 4 \times 20 = 12 + 80 = 92$ 。

6、设  $X_1, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu, \sigma_0^2)$  的样本, 其中  $\sigma_0^2$  已知,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。

当检验假设  $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$  时, 选取统计量  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$ , 当  $H_0$  成立时, 它服从  $N(0,1)$  分布。

二、(8 分) 将两信息分别编码 A 和 B 传送出去, 接收站收到时, A 被误作 B 的概率为 0.02, 而 B 被误作 A 的概率为 0.01。信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2:1。若接收站收到的信息是 A, 问原发信息是 A 的概率是多少?

解:  $A_0, B_0$ : 原发信息为 A, B.

$A_1, B_1$ : 收到信息为 A, B.

$$P(A_0) = \frac{2}{3} \quad P(B_0) = \frac{1}{3}$$

$$P(B_1|A_0) = 0.02. \quad P(A_1|B_0) = 0.01$$

$$\begin{aligned} \text{则 } P(A_1) &= P(A_1|A_0) \cdot P(A_0) + P(A_1|B_0) \cdot P(B_0) \\ &= (1-0.02) \times \frac{2}{3} + (0.01) \times \frac{1}{3} = \frac{1.97}{3} \end{aligned}$$

$$\text{而 } P(A_0|A_1) = \frac{P(A_1|A_0) \cdot P(A_0)}{P(A_1)} = \frac{(1-0.02) \times \frac{2}{3}}{\frac{1.97}{3}} = \frac{1.96}{1.97}$$



三、(14 分) 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \frac{A}{e^x + e^{-x}}, & 0 < x < +\infty, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 求系数  $A$ ; (2) 求随机变量  $X$  落在  $(0, \frac{1}{2}\ln 3)$  内的概率; (3) 求  $Y = e^X$  的密度函数。

解:  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} \frac{A}{e^x + e^{-x}} dx$   
 $= A \arctan(e^x) \Big|_0^{+\infty} = A \left[ \frac{\pi}{2} - 0 \right] \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}$

②  $P\{0 < X < \frac{1}{2}\ln 3\} = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{2}{\pi} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$   
 $= \frac{2}{\pi} \arctan(e^x) \Big|_0^{\frac{1}{2}\ln 3} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{3} - 0 \right] = \frac{2}{3}$

③  $Y = e^X \rightarrow y = e^x \quad x > 0 \quad y > 0$

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{e^X \leq y\} = P\{X \leq \ln y\}$

当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = 0$

当  $y > 0$  时,  $F_Y(y) = P\{X \leq \ln y\}$

$\rightarrow f_Y(y) = \frac{\frac{2}{\pi}}{e^{\ln y} + e^{-\ln y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{\frac{2}{\pi}}{y + \frac{1}{y}}$   
 $= \frac{2}{\pi(y^2 + 1)}$

四、(10 分) 已知在  $t$  天内发现沉船的概率为  $P(t) = 1 - e^{-\frac{t}{4}}$ 。

(1) 求发现沉船所需要的平均搜索时间;

(2) 已知已经搜索了 2 天, 问至少要搜索 4 天的概率为多少?

解: ①  $P(t) = 1 - e^{-\frac{t}{4}} \quad (t \geq 0)$  发现沉船所需时间为  $T$

$f(t) = P'(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{4}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad T \sim \text{Exp}(\frac{1}{4})$

$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{4}} dt = \int_0^{+\infty} t d(e^{-\frac{t}{4}})$   
 $= -te^{-\frac{t}{4}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{4}} dt = 4e^{-\frac{t}{4}} \Big|_0^{+\infty} = 4$

②  $T \sim \text{Exp}(\frac{1}{4})$  无记忆性

$P\{T > 4 \mid T > 2\} \Rightarrow P\{T > 2\} = 1 - P\{T \leq 2\}$   
 $= 1 - (1 - e^{-\frac{2}{4}}) = e^{-\frac{1}{2}}$



五、(12分) 保险公司售出某种寿险(一年)保单 2500 份。已知此项寿险每单需交保费 120 元，当被保险人一年内死亡时，其家属可以从保险公司获得 2 万元的赔偿(即保额为 2 万元)。若此类被保险人一年内死亡的概率为 0.002，分别用下列三种方法计算保险公司的此项寿险亏本的概率(营业成本忽略不计)。

(1) 二项分布(列式即可); (2) 泊松近似(列式即可); (3) 中心极限定理(计算到可查表)。

解:  $X$ : 一年内被保险人死亡人数  $X \sim B(2500, 0.002)$   $E(X)=5$ ,  $D(X)=4.99$

$$2500 \times 120 < 20000X \Rightarrow X > 15 \text{ 亏本}$$

$$\textcircled{1} P\{X > 15\} = \sum_{i=16}^{2500} C_{2500}^i (0.002)^i (0.998)^{2500-i} \text{ or } = 1 - \sum_{i=0}^{15} C_{2500}^i (0.002)^i (0.998)^{2500-i}$$

$$\textcircled{2} \lambda = np = 2500 \times 0.002 = 5, \text{ 泊松分布}$$

$$P\{X > 15\} = 1 - P\{X \leq 15\} = 1 - \sum_{i=0}^{15} \frac{5^i}{i!} e^{-5}$$

$$\textcircled{3} n=2500, \text{ 充分大, 由中心极限定理可知. } \frac{X-5}{\sqrt{4.99}} \text{ 近似服从 } N(0,1)$$

$$P\{X > 15\} = P\{X \geq 16\} \approx P\{X \geq 15.5\}$$

$$= P\left\{ \frac{X-5}{\sqrt{4.99}} \geq \frac{15.5-5}{\sqrt{4.99}} \right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{10.5}{\sqrt{4.99}}\right)$$

六、(10分) 设随机变量  $X$  与  $Y$  独立同分布,  $P\{X=i\} = \frac{i}{3}, i=1,2$ 。

求: (1)  $P\{X=Y\}$ ; (2)  $\text{Cov}(X,Y)$ 。

解:  $P\{X=Y\} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$X \backslash Y$	1	2
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = 1 \times 1 \times \frac{1}{9} + 1 \times 2 \times \frac{2}{9} + 2 \times 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times 2 \times \frac{4}{9}$$

$$= \frac{1+4+4+16}{9} = \frac{25}{9}$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = E(Y)$$

$$\therefore \text{Cov}(X,Y) = \frac{25}{9} - \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = 0$$

or  $\because X, Y \text{ 独立 } E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow \text{Cov}(X,Y) = 0$



七、(10分) 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu, \sigma^2$  是未知参数,  $X_1, \dots, X_n$  为来自总体的随机样本,

已知  $\mu$  的极大似然估计为  $\hat{\mu} = \bar{X}$ , 求  $\sigma^2$  和  $P\{X \leq a\} (a \in R)$  的极大似然估计。

$$\text{解: } L(\sigma^2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(X_1-\mu)^2 + \dots + (X_n-\mu)^2]}$$

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \cdot \frac{-1}{(\sigma^2)^2} = 0$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

$$\therefore \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

$$P\{X \leq a\} = P\left\{ \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{a - \mu}{\sigma} \right\} = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\therefore \hat{P}\{X \leq a\} = \Phi\left(\frac{a - \hat{\mu}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}\right) = \Phi\left(\frac{a - \bar{X}}{\sqrt{\frac{n-1}{n} S^2}}\right)$$

八、(6分) 设  $X_1, \dots, X_n$  为来自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  为样本均值,

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  为样本方差, 证明  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 。

$$\text{解: } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

且  $\bar{X}$  与  $S^2$  独立.

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{n-1}{\sigma^2} S^2}{n-1}}} \sim t(n-1)$$

$$\parallel \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = T$$