

# 一元微积分 B 下复习题 (一)

## 3.7---3.8 & 4.1---4.7

1、  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2、设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} & x < 0 \\ 6 & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} & x > 0 \end{cases}$  , 问  $a$  为何值时,  $f(x)$  在  $x=0$  连续?

$a$  为何值时,  $x=0$  是  $f(x)$  的第一类可去间断点?

3、讨论极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\arctan |x| - \frac{\pi}{2})$  是否存在, 若存在求极限值; 若不存在说明理由.

4、已知  $e^{-x}$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

5、设  $\int f(x) dx = x^2 + C$ , 则  $\int xf(1-x^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6、  $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7、  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 e^{-t^2} dt}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8、当  $x > 0$  时  $f(x)$  连续, 且  $\int_1^{x^2} f(t) dt = x^2(1+x)$ , 则  $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9、  $\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10、反常积分  $\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ , 当  $q$   $\underline{\hspace{2cm}}$  时, 此积分发散.

11、  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$   $\underline{\hspace{2cm}}$  填 (“收敛” 或 “发散”).

12、函数  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  在区间  $[-a, a]$  上的平均值为 \_\_\_\_\_.

13、若  $f(x) = e^{-x}$ , 则  $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx =$  \_\_\_\_\_.

14、极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}) =$  \_\_\_\_\_.

15、设  $\int_0^{x^2} xf(t) dt$ , 其中  $f(t)$  是连续函数, 则  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_.

16、 $\int_{-2}^2 (\sqrt{4-x^2} + \arctan x) dx =$  \_\_\_\_\_.

17、广义积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$  填 (“收敛”或“发散”) \_\_\_\_\_.

18、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x e^{t^2} dt}{\ln x} =$  \_\_\_\_\_.

19、 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6 \cos^4 \theta d\theta =$  \_\_\_\_\_.

20、设函数  $f(x)$  连续可导, 则  $\int f'(ax+b) dx =$  \_\_\_\_\_.

21、设  $f(x) = x^2 + x \int_0^1 f(x) dx$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

22、 $\int_{-1}^1 [\ln(x^2+1) \sin x + x^2] dx =$  \_\_\_\_\_.

23、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) =$  \_\_\_\_\_.

24、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt] du}{x \sin^2 x} =$  \_\_\_\_\_.

25、讨论反常积分  $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$  的收敛性 \_\_\_\_\_.

26、若  $f(x)$  的导函数是  $\sin x$ , 则  $f(x)$  有一个原函数为 \_\_\_\_\_.

27、下列结论错误的是 ( )

(A)  $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$  (B)  $\int f'(x) dx = f(x)$

(C)  $\frac{d}{dx} \int_1^x f(x) dx = f(x)$  (D)  $\frac{d}{dx} \int_1^2 f(x) dx = 0$

28、在下列等式中,正确的结果是( ).

- (A)  $\int f'(x) dx = f(x)$  (B)  $\int df(x) = f(x)$   
(C)  $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$  (D)  $d \int f(x) = f(x)$

29、由定积分的定义  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}})$  可表示为( ).

- (A)  $\int_0^1 (1+x) dx$  (B)  $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$  (C)  $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$  (D)  $\int_1^2 \sqrt{1+x} dx$

30、下列选项中正确的是( )

- (A)  $\int_0^1 e^x dx < \int_0^1 e^{x^2} dx$  (B)  $\int_0^1 e^{-x} dx < \int_1^2 e^{-x} dx$   
(C)  $\int_1^e \ln x dx < \int_1^e (\ln x)^2 dx$  (D)  $\int_e^{2e} \ln x dx < \int_e^{2e} (\ln x)^2 dx$

31、若  $\frac{\ln x}{x}$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int x f'(x) dx = ( )$

- (A)  $\frac{\ln x}{x} + C$  (B)  $\frac{1-2\ln x}{x} + C$  (C)  $\frac{1}{x} + C$  (D)  $-\frac{1}{x} + C$

32、曲线  $y = e^x$  与其过原点的切线及  $y$  轴所围成的图形面积为( )

- (A)  $\int_1^e (e^x - xe^x) dx$  (B)  $\int_1^e (\ln y - y \ln y) dy$  ;  
(C)  $\int_0^1 (e^x - ex) dx$  (D)  $\int_0^1 (\ln y - y \ln y) dy$

33、下列广义积分收敛的是( ).

- (A)  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$  (B)  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$  (C)  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$  (D)  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

34、设  $F(x)$  和  $G(x)$  都是  $f(x)$  的原函数, 则( ).

- (A)  $F(x) - G(x) = 0$  (B)  $F(x) - G(x) = C$  ( $C$  为任意常数)  
(C)  $F(x) + G(x) = 0$  (D)  $F(x) + G(x) = C$  ( $C$  为任意常数)

35、设  $f(x)$  满足  $\int_0^1 f(tx) dt = f(x) + x \sin x$ ,  $f(0) = 0$  且有一阶导数, 当  $x \neq 0$  时, 求  $f'(x)$ .

36、计算  $I = \int_0^{2013\pi} x |\sin x| dx$ .

37、 $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ .

38、已知函数  $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f^2(x) dx$ , 求  $f(x)$ .

39、试求  $y'' = x$  的经过点  $(0,1)$  且在此点与直线  $y = \frac{x}{2} + 1$  相切的积分曲线.

40、计算  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

41、计算  $\int_0^\pi \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$

42、用递推式计算  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx \ (n \in N, a > 0)$ .

43、设  $f(x)$  是  $e^{2x}$  的一个原函数, 且  $f(0) = 1$ .  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数,  $F(0) = 1$ , 求  $F(x)$ .

44、利用定积分的定义计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sin \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \sin \frac{n}{n} \right) \frac{1}{n}$ .

45、求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \ln(1+t) dt}{\int_{\cos x}^1 (1-e^{-t}) dt}$ .

46、判断无穷限积分  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$  是否收敛, 若收敛, 求其值.

47、一路灯离地面 6 米。现有一身高 1.8 米的人从灯下离灯而去, 他行走的速率为  $5.6m/s$ . 则此人影子增长的速率是\_\_\_\_\_

48、计算  $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx$