第三章　　导数的应用（3.1---3.6）

1、$d(x^2e^{x+1}) = \underline{(2x+x^2)e^{x+1}}\,dx$

2、函数 $f(x)=(x^2-2)e^{x^2}$ 的所有单调递增区间为$\underline{[-1,0]\cup[1,+\infty)}$

3、函数 $f(x)=e^{\sin x}$ 在 0 点处带佩亚诺型余项的 3 阶泰勒公式为$\underline{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}$

4、函数 $f(x)=\frac{x}{2}-\sin x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为$\underline{\quad 0 \quad}$，最小值为$\underline{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

5、设点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则参数 $\underline{a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}}$

6、函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=-1$ 处的 3 阶带佩亚诺型余项的泰勒公式为

$\underline{\frac{1}{x}=-1-(x+1)-(x+1)^2-(x+1)^3+o[(x+1)^3]}$

7、函数 $y=x+2\cos x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为 $\underline{\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}}$

8、函数 $y=x^ne^{-x}\quad(n>0,x\ge 0)$ 单调增加的区间是$\underline{[0,n]}$

9、$\frac{d[(1-2x)^{100}]}{dx}=\underline{-200(1-2x)^{99}}$

10、在函数 $y=3x^2e^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是$\underline{\frac{3}{(n-2)!}}$

11、已知 $f(x)=\ln(1+x)$，则在$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理的$c=\underline{\frac{1}{\ln 2}-1}$

12、已知 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$，则在$[-1,2]$上满足罗尔定理的$c=\underline{\frac{-4+\sqrt{37}}{3}}$

13、设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,且$\lim_{h\to 0}\frac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=\frac{1}{4}$，

则 $f'(x_0)=$（　B　）

（A）-4　　（B）-2　　（C）2　　（D）4

14、函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续是函数 $f(x)$ 在该点可导的（ B ）

（A）充分条件　（B）必要条件　（C）充要条件　（D）无关条件

15、下列结论正确的是（ A ）

（A） x_0 是 $f(x)$ 的极值点,且 $f'(x_0)$ 存在,则必有 $f'(x_0)=0$

（B） x_0 是 $f(x)$ 的极值点,则 x_0 必是 $f(x)$ 的驻点

（C）若 $f'(x_0)=0$,则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点

（D） 使 $f'(x)$ 不存在的点 x_0,一定是 $f(x)$ 的极值点

16、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导， $f'(x)>0$, 并且 $f(0)<0, f(1)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内

（ B ）

（A）至少有两个零点　（B）有且仅有一个零点

（C）没有零点　（D）零点个数不能确定

17、下列函数中在 $[0,3]$ 上不满足拉格朗日定理条件的是（ C ）

（A） $2x^2+x+1$　（B） $\cos(1+x)$　（C） $\dfrac{x^2}{1-x^2}$　（D） $\ln(1+x)$

18、曲线 $y=|x(x-1)|$（ C ）拐点

（A）仅有 $(1,0)$　（B）仅有 $(0,0)$　（C） $(1,0)$ 与 $(0,0)$　（D）无拐点

19、设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+x f'(x)+f^2(x)=0$，

在 x_0 处 $f(x_0)\neq 0$， $f'(x_0)=0$，则在 x_0 处（ A ）

（A）必定取得极大值　（B）必定取得极小值

（C）必定不取得极值　（D）是否取得极值与 $f(x_0)$ 的值有关

20、设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

解：在方程两边同时对 x 求导一次，得到

$$(3y^2+2xy+x^2)y'+(y^2+2xy)=0$$

即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y^2-2xy}{3y^2+2xy+x^2}$

令 $\dfrac{dy}{dx}=0$ 及 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$，得到函数唯一驻点 $x=1, y=-2$.

在（1）式两边同时对 x 求导一次，得到

$$（(6yy'+4y+2xy'+4x)y'+(3y^2+2xy+x^2)y''+2y=0$$

把 $x=1, y=-2, y'(1)=0$ 代入，得到 $y''(1)=\dfrac{4}{9}>0$，

所以函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $y=-2$.

21、试问：a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{4}\sin 4x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处取到极值？它是极小值还是极大值？并求此极值.

解：　$f'(x)=a\cos x+\cos 4x$

$f'(\frac{\pi}{4})=a\cos\frac{\pi}{4}+\cos(4\cdot\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}a+(-1)=0 \qquad a=\sqrt{2}$

$f''(x)=-a\sin x-4\sin 4x \qquad f''(\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}-4\sin\pi<$

$f(\frac{\pi}{4})=1$ 是极大值.

22、在区间 $[0,8]$ 上求曲线 $y=x^2$ 的切线，使该切线与 $y=0$ 及 $x=8$ 所围成的区域的面积为最大.

解：设切点为 (t,t^2) ,切线的斜率为 $y=2t$ ，切线方程为 $y-t^2=2t(x-t)$,

为当 $y=0$ 时，推出 $x=\frac{t}{2}$ ，　　$x=8$ 时推出 $y=16t-t^2$,

所围区域面积为 $S=\frac{1}{2}(8-\frac{t}{2})(16t-t^2)=64t-8t^2+\frac{t^3}{4}$

$S'(t)=64-16t+\frac{3t^2}{4}=0$ 推出 $t=\frac{16}{3},t=16$（舍去）

当 $t<\frac{16}{3}$ 时 $S'(t)>0$；当 $t>\frac{16}{3}$ 时 $S'(t)<0$，故当 $t=\frac{16}{3}$ 时区域面积最大，

对应切线方程为：$y=\frac{32}{3}x-\frac{256}{9}$.

23、讨论函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7$ 单调区间与极值，上凸、下凸区间与拐点.

【解】：1）定义域：$(-\infty,+\infty)$

2）$y'=\left(2x^3-6x^2-18x-7\right)'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$

$y''=\left(6x^2-12x-18\right)'=12x-12=12(x-1)$

3）$f'(x)=0$，有 $x=-1$ 或 $x=3$。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	>0	0	<0	0	>0
y	递增	极大值 3	递减	极小值-61	递增

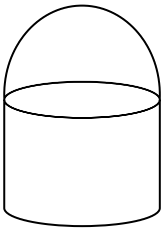
4） $f''(x)=0$，有 $x=1$。

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	<0	0	>0
y	上凸	拐点 $(1,-29)$	下凸

单增区间 $(-\infty,-1),(3,+\infty)$　单减区间 $(-1,3)$　极大值 $f(-1)=3$　极小值 $f(3)=-61$

上凸区间 $(-\infty,1)$　下凸区间 $(1,+\infty)$　拐点 $(1,-29)$

24、某建筑物的外形是圆柱体的上方接一半球体，其体积是 V，考虑材料和加工两方面的因素，半球顶表面每平方米的费用是圆柱体侧面每平方米的费用的 2 倍.问圆柱体的底面半径 R 等于多少时，费用最省？



解：设侧面每平方米的费用为 k，

$$V=\frac{2}{3}\pi R^3+\pi R^2 h \qquad h=\frac{V-\frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2}=\frac{V}{\pi R^2}-\frac{2}{3}R$$

$$f=2\pi R^2\times 2k+2\pi Rhk=4k\pi R^2+\frac{2kV}{R}-\frac{4}{3}k\pi R^2$$

$$f'(R)=8k\pi R-\frac{2kV}{R^2}-\frac{8}{3}k\pi R=\frac{16}{3}k\pi R-\frac{2kV}{R^2}=\frac{\frac{16}{3}k\pi R^3-2kV}{R^2}=0$$

$\frac{16}{3}k\pi R^3=2kV$　　$R=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$　　$R>\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$ 时导数大于 0, $R<\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$ 时导数小于 0

故当 $R=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$ 时费用最省.