2016-2017 学年第一学期一元微积分(B 下)试卷 A 答案

一、填空题（每题 4 分，共 16 分）

1. 设 $f(x)=x^2\cdot\sin x$，则 $\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=$ ____0________.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\sqrt{1+x^2}$，则 $f(1)=$ __ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ______.

3. 方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解为____ $y=(c_1+c_2x)e^{-2x}$ ________.

4. 二阶微分方程 $y''+4y'-5y=xe^{-2x}$ 的特解形式为__ $y^*=(ax+b)e^{-2x}$ ______.

二、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=$ （**A**）.

（A）$\int_0^a (f(x)+f(-x))\mathrm{d}x$　　（B）$2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

（C）0　　（D）$\int_0^a (f(x)-f(-x))\mathrm{d}x$.

2. 下列广义积分收敛的是(**C**　).

（A）$\int_1^{+\infty} e^x\mathrm{d}x$　　（B）$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　（C）$\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　（D）$\int_0^1\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

3. $\int xf''(x)\mathrm{d}x=$（**C**　).

（A）$xf'(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$　　（B）$xf'(x)-f'(x)+C$

（C）$xf'(x)-f(x)+C$　　（D）$f(x)-xf'(x)+C$.

4. 设 y_1,y_2,y_3 均为方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关的特解，c_1,c_2 为任意常数，则方程的通解是（**D**）.

（A）$c_1y_1+c_2y_2+y_3$　　（B）$c_1y_1+c_2y_2-(c_1+c_2)y_3$

（C）$c_1(y_1-y_2)+c_2(y_1+y_2)+y_3$　　（D）$c_1(y_1-y_3)+c_2(y_2-y_3)+y_1$.

5. 微分方程 $y''+ay'+by=0$（a,b 是常数）的特征方程的两个根分别是 1 和 2，则方程是（**A**）.

（A）$y''-3y'+2y=0$　　（B）$y''+2y'-3y=0$

（C）$y''-3y'-2y=0$　　（D）$y''+2y'+3y=0$.

6. 如图 1，从充满水的长方体中把水抽到顶，所做的**功**为(**C**　).

（长方体的长为 5 米，宽为 4 米，高为 10 米，水重 9800 牛顿/米 ^{3}）

（A）$\int_0^{10} 9800\cdot 5\cdot 4\cdot y\mathrm{d}y$

（B）$\int_0^{10} 9800\cdot 5\cdot 4\cdot 10\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^{10} 9800\cdot 5\cdot 4(10-y)\mathrm{d}y$

（D）$\int_0^{10} 9800\cdot 5(10-y)\mathrm{d}y$.

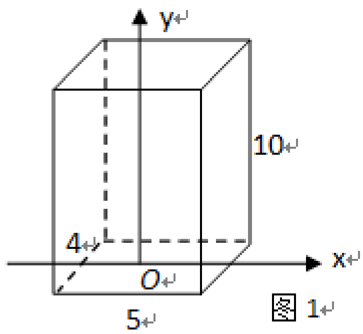

图 1

7. 如图 2，一个圆盘,半径为 3 米，被垂直淹没在液体中，当液体水平面齐及直径，则液体对圆盘面的作用力可表示为（ **B** ）（液体的的密度 ρ 吨/米 ^{3}）.

（A）$\int_0^3 \rho g x\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ （B）$\int_0^3 2\rho g x\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$

（C）$\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ （D）$\int_0^3 2\rho g \pi x\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

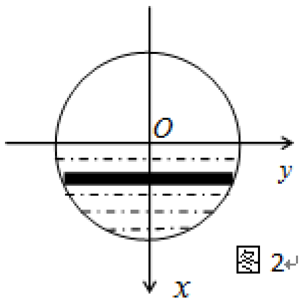

图 2

8. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，则

$f(x)=$（**B**）.

（A）$x+2$ （B）$x-1$ （C）$x+3$ （D）$x-2$.

三、解下列各题（每题 7 分，共 35 分）

1. 求不定积分 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

【解】: $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}$

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.$$

2. 计算积分 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases} x+1, 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \sin x, \frac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases}$.

【解】: $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}+1.$$

3. 求对数螺线 $r=e^{2\theta}$ 上 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 的弧长.

【解】: $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(e^{2\theta})^2+(2e^{2\theta})^2}\mathrm{d}\theta=\sqrt{5}\int_0^{2\pi}e^{2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1).$

4.求解初值问题：$\begin{cases}(x+1)y'-2y=(x+1)^3\\ y(0)=1\end{cases}$.

【解】:此一阶线性方程可整理为$(x+1)y'-2y=(x+1)^3\Rightarrow y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^2$

$p(x)=-\frac{2}{x+1},q(x)=(x+1)^2$

$\therefore -\int p(x)dx=\int\frac{2dx}{x+1}=\ln(x+1)^2\Rightarrow e^{-\int p(x)dx}=(x+1)^2$

$\therefore y(x)=(x+1)^2(x+c)$

$y(0)=1\Rightarrow c=1$

解为$y=(x+1)^3$.

5. 计算星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}(a>0)$所围平面图形的面积.

【解】:由对称性，$A=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\mathrm{d}(a\cos^3 t)=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.$

四、(12 分)设D_1是由抛物线$y=2x^2$和$x=a,x=2$及$y=0$所围成的平面区域；D_2是由抛物线$y=2x^2$和直线$y=0$，$x=a$所围成的平面区域，其中$0<a<2$;

(1）试求D_1绕x轴旋转而成的旋转体体积V_1；D_2绕y轴旋转而成的旋转体体积V_2；

(2）问当a为何值时，V_1+V_2取得最大值？试求此最大值.

【解】(1) $V_1=\int_a^2\pi(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\pi(32-a^5).$

$V_2=\int_0^a 2\pi x(2x^2)\mathrm{d}x=\pi a^4.$

(2) $V_1+V_2=\frac{128}{5}\pi+\pi a^4-\frac{4}{5}\pi a^5\Rightarrow(V_1+V_2)'=4\pi a^3-4\pi a^4$

令$(V_1+V_2)'=0\Rightarrow a=1\ or\ a=0$（舍），当$a=1$时，有最大值为$\frac{129\pi}{5}$.

五、(5 分)设有连接点$O(0,0)$和$A(1,1)$的一段向上凸的曲线弧OA,对于OA上任一点

$P(x, y)$，曲线弧 OP 与直线段 $\overline{OP}$ 所围的面积为 x^2,求曲线弧 OA 的方程.

【解】: 设曲线弧 OA 的方程为 $y=f(x)$，由题意有 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}xf(x)=x^2$ (*)

对（*）式两边同时对 x 求导，得 $f(x)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}xf'(x)=2x$

即 $y'=\frac{y}{x}-4$，令 $\frac{y}{x}=u\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

方程化简为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-4\Rightarrow u=-4\ln x+C\Rightarrow\frac{y}{x}=-4\ln x+C\Rightarrow y=-4x\ln x+Cx$

由 $x=1, y=1\Rightarrow C=1$，所以 OA 的方程为

$y=-4x\ln x+x=x(1-4\ln x)$.