2016-2017 学年第一学期一元微积分(B 上)试卷 A 标答

踏实学习，弘扬正气；诚信做人，诚实考试；作弊可耻，后果自负

教师_________班号____专业班级_________学号_________姓名________

一、填空题（每题 4 分，共 16 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=$ ___ $\frac{1}{2}$ ______.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=$ ____1_____.

3. 设 $y=e^{2x}+2x^9+\sin 2x-\ln 2$，则 $y^{(10)}\big|_{x=0}=2^{10}$.

4. $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值，则 $a=$ ___2______.

二、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 设 $f(u)$ 可微，且 $y=e^{f(2x)}+f(\sin\frac{1}{x})$, 则 $\mathrm{d}y=$ (**D**).

（A）$e^{f(2x)}+f'(\sin\frac{1}{x})\cos\frac{1}{x}$　　（B）$2e^{f(2x)}-\dfrac{f'(\sin\frac{1}{x})\cos\frac{1}{x}}{x^2}$

（C）$[e^{f(2x)}f'(2x)-\dfrac{f'(\sin\frac{1}{x})\cos\frac{1}{x}}{x^2}]\mathrm{d}x$　　（D）$[2e^{f(2x)}f'(2x)-\dfrac{f'(\sin\frac{1}{x})\cos\frac{1}{x}}{x^2}]\mathrm{d}x$.

2. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续是函数 $f(x)$ 在该点可导的(**B**).

（A）充分条件　（B）必要条件　（C）充要条件　（D）无关条件.

3. 方程 $xe^x=2$ 在区间 $[-1,1]$ 内的实根个数为(**B**).

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ x^2-1 & x\geq 0\end{cases}$，则 $f'(0)$ 为（ **C** ）.

（A）0　（B）-2　（C）不存在　（D）2.

5. 函数 $y=x^3+x-1$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为（ **C** ）.

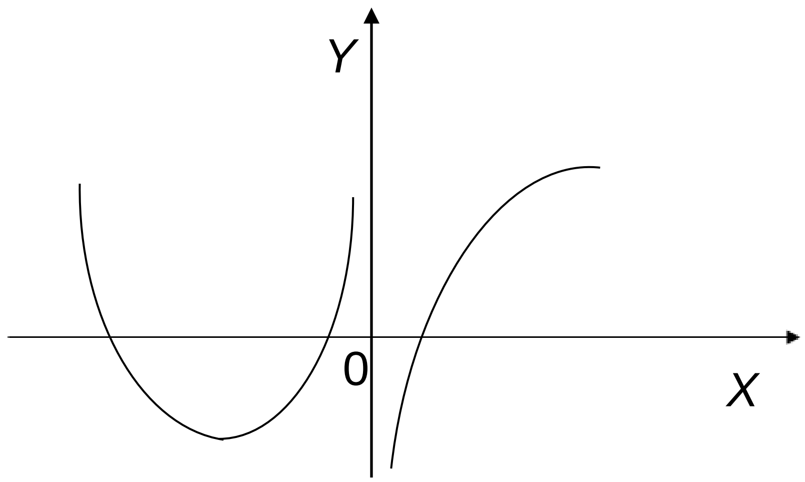
（A）-1　（B）0　（C）1　（D）2.

6. 在区间[[0,8]内，对函数 $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$ 罗尔定理(**C**).

（A）不成立　　（B）成立，并且 $f'(2)=0$

（C）成立，并且 $f'(4)=0$　　（D）成立，并且 $f'(8)=0$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，其导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示，则 $f(x)$（ D ）.



（A）有三个极小值点和一个极大值点　　（B）有一个极大小值点和两个极大值点
（C）有两个极小值点和一个极大值点　　（D）有两个极小值点和两个极大值点.

8. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+xy=1$ 所确定,则 $\frac{d^2 y}{d x^2}\Big|_{x=0}=$（ **B** ）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4.

.

三、解下列各题（每题 6 分，共 36 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}}$

2. 求函数 $y=x^x$ 的导数.

解：等式两边同时取对数，$\ln y = x\ln x$，

对等式两边同时求导，$\frac{y'}{y}=\ln x+1 \Rightarrow y'=x^x(\ln x+1)$.

3. 设参数方程 $\begin{cases} x=t-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$ 所确定的的函数 $y=y(x)$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-3t^2}{1-2t}$；$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-6t(1-2t)+2(1-3t^2)}{(1-2t)^2}}{1-2t}=\frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=2$，利用拉格朗日中值定理，求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+3)-f(x)]$.

解：利用拉格朗日中值定理求极限

$$f(x+3)-f(x)=f'(c)(x+3-x) \quad (x<c<x+3)$$

当 $x\to\infty$ 时， $x+3\to\infty$，由夹逼准则：$c\to\infty$，所以

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+3)-f(x)]=3\lim_{x\to\infty} f'(c)=6.$$

4. 求函数 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间以及极值点.

解： $f'(x)=\dfrac{10}{3}(\sqrt[3]{x^2}-x^{-\frac{1}{3}})=\dfrac{10}{3}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$， $x_2=0$ 是不可导点

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值点（0，0）	↘	极小值点（1，-3）	↗

单增区间为：$(-\infty,0]$ 和 $[1,+\infty)$　　单减区间为：$[0,1]$

极大值点为： $x=0$　　极小值点为： $x=1$

5. 若点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，求 $a-b$ 的值.

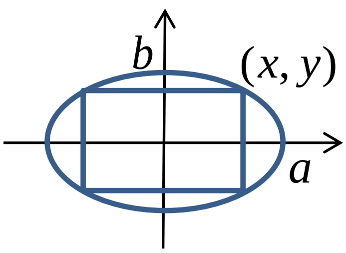
解：$y=ax^3+bx^2$ 为二阶可导，又 $(1,3)$ 为拐点，故有 $f''(1)=0\Rightarrow 6a+2b=0\Rightarrow b=-3a$

又拐点为曲线上的点，故有

$$f(1)=3\Rightarrow 3=a+b\Rightarrow 3=a-3a\Rightarrow a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}\Rightarrow a-b=-6.$$

四、（8 分）已知椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，求其内接矩形，它的边平行于椭圆的轴，且具有最大的面积.

解：如图所示



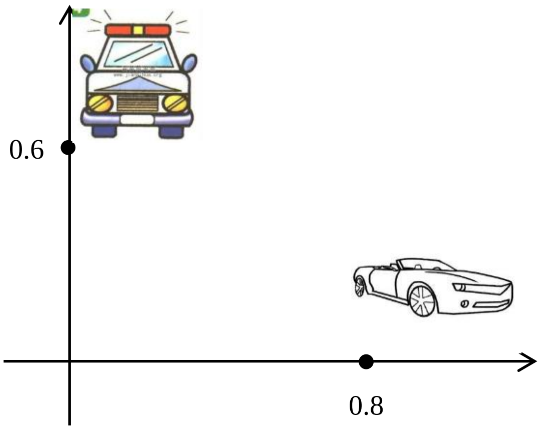
已知点 $P(x,y)$ 为内接矩形与椭圆的交点（第一象限），则 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

矩形面积为 $f(x)=2x\cdot 2y=4x\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{4bx}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$$f'(x)=\frac{4b}{a}(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}) \Rightarrow 令 f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}a}{2}$$

由实际问题可知，矩形的长为 $\sqrt{2}a$，宽为 $\sqrt{2}b$，面积为 $2ab$.

五.（8 分）如图，一辆巡逻警车正在追逐一辆超速行驶汽车。当警车正从北向南驶入一个直角路口，超速汽车已拐过路口向东驶去。当巡逻警车离路口向北 0.6 公里而汽车离路口向东 0.8 公里时，警察用雷达确定了两车之间的距离正以 20 公里/时的速率在增长。如果巡逻车在该测量时刻以 60 公里/小时的速率行驶，试问该瞬间超速汽车的速率为多少？



解：如图建立坐标系，设 x 表示时刻 t 汽车的位置，y 表示时刻 t 警车的位置，s 表示时刻 t 警车与汽车的距离。

则有 $s^2=x^2+y^2$ ，等式两边同时对 t 求导，$2s\frac{ds}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$，

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{s}(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt})=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}),$$

当 $x=0.8, y=0.6, \frac{dy}{dt}=-60, \frac{ds}{dt}=20 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=70$

即超速汽车的瞬间速度为 70 公里/小时。