三、（14分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{e^{x}+e^{-x}}, & 0<x<+\infty, \\ 0, & 其他\end{cases}$

(1) 求系数 A；(2) 求随机变量 X 落在 $\left(0,\frac{1}{2}\ln 3\right)$ 内的概率；(3) 求 $Y=e^{X}$ 的密度函数。

解：① $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{A}{e^x+e^{-x}}dx$

$= A\arctan(e^x)\Big|_0^{+\infty} = A\left[\frac{\pi}{2}-0\right] \Rightarrow A=\frac{2}{\pi}$

② $P\{0<X<\frac{1}{2}\ln 3\} = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{2}{\pi}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

$= \frac{2}{\pi}\arctan(e^x)\Big|_0^{\frac{1}{2}\ln 3} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{6}$

③ $Y=e^X \longrightarrow y=e^x \quad x>0 \quad y>1$

$F_Y(y) = P\{Y\le y\} = P\{e^X\le y\} = \cancel{P\{X\le \ln y\}}$

当 $y\le 1$ 时 $F_Y(y)=0$

当 $y>1$ 时 $F_Y(y)=P\{X\le \ln y\} \rightarrow f_Y(y)=\frac{\frac{2}{\pi}}{e^{\ln y}+e^{-\ln y}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{\frac{2}{\pi}}{y+\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{y}$

$= \frac{2}{\pi(y^2+1)}$

$\therefore f_Y(y) = \begin{cases}\frac{2}{\pi(1+y^2)} & y>1 \\ 0 & y\le 1\end{cases}$

四、（10分）已知在 t 天内发现沉船的概率为 $P(t)=1-e^{-\frac{t}{4}}$。

(1) 求发现沉船所需要的平均搜索时间；

(2) 已知已经搜索了2天，问至少要搜索4天的概率为多少？

解：① $P(t)=1-e^{-\frac{t}{4}}$ $(t>0)$ 设 发现沉船所需搜索时间为 T.

$f(t)=P'(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}} & t>0 \\ 0 & t\le 0\end{cases} \quad T\sim Exp(\frac{1}{4})$

$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt = \int_0^{+\infty} t\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}dt = \int_0^{+\infty} t\, d(-e^{-\frac{t}{4}})$

$= -te^{-\frac{t}{4}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{4}}dt = 4e^{-\frac{t}{4}}\Big|_{+\infty}^{0} = 4$

② $T\sim Exp(\frac{1}{4})$ 无记忆性

$P\{T>4 \mid T>2\} \Rightarrow P\{T>2\} = 1-P\{T\le 2\}$

$=1-(1-e^{-\frac{2}{4}}) = e^{-\frac{1}{2}}$

东华大学 2016～2017 学年第一学期**概率统计 B** 试题（A）

踏实学习，弘扬正气；诚信做人，诚实考试；作弊可耻，后果自负。

教师__________ 班号______ 专业年级__________ 学号__________ 姓名________

试题	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

分布数据：$\sqrt{114}=10.68$, $z_{0.025}=1.96$, $z_{0.05}=1.65$, $t_{0.05}(3)=2.35$, $t_{0.05}(4)=2.13$, $t_{0.025}(3)=3.18$, $t_{0.025}(4)=2.78$.

一、填空（每小题 5 分，共 30 分）

1、在学校期末的概率统计考试中，一宿舍 4 名女生的成绩分别为 91，67，88，82。则样本均值为 82. ；样本方差为 114 。

2、条件同上题，一般认为学生的考试成绩服从正态分布。则全校平均成绩的 95%置信区间为 $(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$ 。$\rightarrow (82-16.98,\ 82+16.98)=(-65.02,\ 98.98)$.

3、从 1 到 10 这十个数中任取 3 个，则取到的最大数为 5 的概率是________。$\rightarrow \frac{C_4^2}{C_{10}^3}$.

4、在区间(0,1)中随机地取两个数，则两数之和小于 1.2 的概率为 $1-0.32=0.68$.

5、设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，且 $X_1\sim U(0,12)$，$X_2\sim\chi^2(20)$，则 $D(X_1+2X_2)=$ $\frac{12^2}{12}+4\times2\times20$ $=12+160=172$。

6、设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma_0^2)$ 的样本，其中 σ_0^2 已知，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$。

当检验假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$ 时，选取统计量 $Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$ ，当 H_0 成立时，它服从 $N(0,1)$ 分布。

二、（8 分）将两信息分别编码 A 和 B 传送出去，接收站收到时，A 被误作 B 的概率为 0.02，而 B 被误作 A 的概率为 0.01。信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2:1。若接收站收到的信息是 A，问原发信息是 A 的概率是多少？

解：A_0：B_0：原发信息为 A. B.

A_1，B_1：收到信息为 A. B.

$P(A_0)=\frac{2}{3}$　$P(B_0)=\frac{1}{3}$.

$P(B_1|A_0)=0.02$.　$P(A_1|B_0)=0.01$

则 $P(A_1)=P(A_1|A_0)\cdot P(A_0)+P(A_1|B_0)P(B_0)$

$=(1-0.02)\times\frac{2}{3}+(0.01)\times\frac{1}{3}=\frac{1.97}{3}$

而 $P(A_0|A_1)=\frac{P(A_1|A_0)\cdot P(A_0)}{P(A_1)}=\frac{(1-0.02)\times\frac{2}{3}}{\frac{1.97}{3}}=\frac{196}{197}$

三、（14 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{e^{x}+e^{-x}}, & 0<x<+\infty,\\ 0, & 其他\end{cases}$

(1) 求系数 A；　(2) 求随机变量 X 落在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$ 内的概率；　(3) 求 $Y=e^{X}$ 的密度函数。

解：① $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{A}{e^{x}+e^{-x}}dx$

$= A\arctan(e^{x})\Big|_{0}^{+\infty} = A\left[\frac{\pi}{2}-0\right] \Rightarrow A=\frac{2}{\pi}$

② $P\{0<X<\frac{1}{2}\ln 3\} = \int_{0}^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{2}{\pi}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}dx$

$= \frac{2}{\pi}\arctan(e^{x})\Big|_{0}^{\frac{1}{2}\ln 3} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{3}-0\right] = \frac{2}{3}$

③ $Y=e^{x} \longrightarrow y=e^{x}$　$x>0$　$y>0$

$F_Y(y) = P\{Y\le y\} = P\{e^{x}\le y\}$ ~~$= P\{X\le \ln y\}$~~

当 $y\le 0$ 时　$F_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时　$F_Y(y) = P\{X\le \ln y\} \rightarrow f_Y(y) = \frac{\frac{2}{\pi}}{e^{\ln y}+e^{-\ln y}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{\frac{2}{\pi}}{y+\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{y}$

$= \frac{2}{\pi(y^2+1)}$

$\therefore f_Y(y) = \begin{cases}\frac{2}{\pi(1+y^2)} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

四、（10 分）已知在 t 天内发现沉船的概率为 $P(t)=1-e^{-\frac{t}{4}}$。

(1) 求发现沉船所需要的平均搜索时间；

(2) 已知已经搜索了 2 天，问至少要搜索 4 天的概率为多少？

解：① $P(t)=1-e^{-\frac{t}{4}}$ $(t>0)$ 设：发现沉船所需搜索时间为 T.

$f(t)=P'(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$　$T\sim Exp(\frac{1}{4})$

$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} t\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}dt = \int_{0}^{+\infty} t\, d(-e^{-\frac{t}{4}})$

$= -te^{-\frac{t}{4}}\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{4}}dt = 4e^{-\frac{t}{4}}\Big|_{+\infty}^{0} = 4$

② $T\sim Exp(\frac{1}{4})$　无记忆性

$P\{T>4\mid T>2\} \Rightarrow P\{T>2\} = 1-P\{T\le 2\}$

$= 1-(1-e^{-\frac{2}{4}}) = e^{-\frac{1}{2}}$

五、（12 分）保险公司售出某种寿险(一年)保单 2500 份。已知此项寿险每单需交保费 120 元，当被保人一年内死亡时，其家属可以从保险公司获得 2 万元的赔偿(即保额为 2 万元)。若此类被保人一年内死亡的概率为 0.002，分别用下列三种方法计算保险公司的此项寿险亏本的概率(营业成本忽略不计)。

(1) 二项分布（列式即可）；(2)泊松近似（列式即可）；(3) 中心极限定理（计算到可查表）。

解：X：一年内被保人死亡人数 $X \sim B(2500, 0.002)$ $E(X)=5$，$D(X)=4.99$

$2500 \times 120 < 20000X \Rightarrow X > 15$ 亏本

① $P\{X>15\} = \sum_{i=16}^{2500} C_{2500}^{i}(0.002)^i(0.998)^{2500-i}$ or $=1-\sum_{i=0}^{15} C_{2500}^{i} 0.002^i 0.998^{2500-i}$

② $\lambda = np = 2500 \times 0.002 = 5$，~~X近似服从P~~

$P\{X>15\} = 1-P\{X\leq 15\} = 1-\sum_{i=0}^{15}\frac{5^i}{i!}e^{-5}$

③ $n=2500$，充分大，由中心极限定理 可知 $\frac{X-5}{\sqrt{4.99}}$ 近似服从 $N(0,1)$

$P\{X>15\} = P\{X\geq 16\} \xrightarrow{\text{连续修正}} P\{X\geq 15.5\}$

$=P\left\{\frac{X-5}{\sqrt{4.99}} \geq \frac{15.5-5}{\sqrt{4.99}}\right\} \approx 1-\Phi\left(\frac{10.5}{\sqrt{4.99}}\right)$

六、（10 分）设随机变量 X 与 Y 独立同分布，$P\{X=i\}=\frac{i}{3},\ i=1,2$。

求：(1) $P\{X=Y\}$；(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

解：$P\{X=Y\} = \frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

Y \ X	1	2
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)$

$E(XY) = 1\times1\times\frac{1}{9}+1\times2\times\frac{2}{9}+2\times1\times\frac{2}{9}+2\times2\times\frac{4}{9}$

$=\frac{1+4+4+16}{9}=\frac{25}{9}$

$E(X) = 1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=\frac{5}{3}=E(Y)$

$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{25}{9}-\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}=0$

or $\because X,Y$ 独立 $E(XY)=E(X)E(Y) \Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0$

七、（10 分）设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 是未知参数，$X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体的随机样本，已知 μ 的极大似然估计为 $\hat{\mu} = \overline{X}$，求 σ^2 和 $P\{X \le a\}(a \in R)$ 的极大似然估计。

解：$L(\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x_1-\mu)^2 + \cdots + (x_n-\mu)^2]}$

$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sigma^2}$

$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cdot \frac{-1}{(\sigma^2)^2} = 0$

$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

$\therefore \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{n-1}{n}S^2$

$P\{X \le a\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\} = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$\therefore \hat{P}\{X \le a\} = \Phi\left(\frac{a-\hat{\mu}}{\sqrt{\hat{\sigma^2}}}\right) = \Phi\left(\frac{a-\overline{X}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}S}\right)$

八、（6 分）设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 为样本均值，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 为样本方差，证明 $T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$。

解：$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$

且 $\overline{X}$ 与 S^2 独立

$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \Big/ (n-1)}} \sim t(n-1)$

$= \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = T$