2016-2017 学年第一学期一元微积分(B 上)月考答案

一、填空题（每题 5 分，共 20 分）

1. 函数 $y(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{x}$ 是__奇__（填“奇”、“偶”、或“非奇非偶”）函数 .

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-2x^2+3}{2x^6+3x^3+x}=\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\dfrac{3}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{\sin 3x}{x}+x\sin\dfrac{3}{x})=3$.

二、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1. 函数 $y=\arccos x$ 的值域是（B ）.

（A）$[-\pi,\pi]$　　（B）$[0,\pi]$　　（C）$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$　　（D）$[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

2. 以下三个说法,正确的个数为（C ）.

1) "$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$当$x>X$时,恒有$|f(x)-A|<e^{\frac{\varepsilon}{2016}}$" $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$;

2) "$\forall$正整数N,$\exists$正整数K,当$0<|x-x_0|\le\dfrac{1}{K}$时,恒有$|f(x)-A|<\dfrac{1}{2N}$"

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$;

3) "$\forall\varepsilon\in(0,1),\exists$正整数$N$,当$n\ge N$时,恒有$|x_n-a|<2\varepsilon$" $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$;

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3.

3. 函数 $y=\sqrt{4-x^2}\ln(x-1)$ 的连续区间为（D）.

（A）$[-2,2]$　　（B）$[1,2]$　　（C）$[1,2)$　　（D）$(1,2]$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ x^2-1 & x\ge0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 为（C）.

（A）1　　（B）-1　　（C）不存在　　（D）1 或-1.

5. $\lim\limits_{x\to0}(1-ax)^{\frac{1}{x}}=e^2$，则 $a=$（D）.

（A）2　　（B）$-\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）-2.

6. 当 $x\to0$ 时，$\ln(1-2x^2)$ 与 $(\sin x)^k$ 为同价无穷小，则 $k=$（ B ）.

（A） 1　　　　　　（B） 2　　　　　（C） 3　　　　　（D） 4.

7. 下列点中哪一个点的极坐标和 $(2,\dfrac{\pi}{4})$ 是同一点（ C ）.

（A） $(-2,\dfrac{3\pi}{4})$　　　（B） $(2,-\dfrac{\pi}{4})$　　　（C） $(-2,\dfrac{5\pi}{4})$　　　（D） $(-2,-\dfrac{\pi}{4})$.

8. 极坐标方程 $r=1-\sin\theta, r=1$ 的交点有（B）个.

（A） 1　　　　　　（B） 2　　　　　（C） 3　　　　　（D） 4.

三、解下列各题（每题 8 分，共 24 分）（评分标准由各题批改老师确定）

1. 求曲线 $y=-\dfrac{x^2-4}{x+1}$ 的所有渐近线.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(-\dfrac{x^2-4}{x+1})=\infty$ 无水平渐近线；$\lim\limits_{x\to-1}(-\dfrac{x^2-4}{x+1})=\infty$ 由有垂直渐近线 $x=-1$；

$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{-\dfrac{x^2-4}{x+1}}{x})=-1$， $\lim\limits_{x\to\infty}[(-\dfrac{x^2-4}{x+1})-(-x)]=1$，有斜渐近线 $y=-x+1$.

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-2x-3)}$ 的间断点，并确定其类型.

解：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-2x-3)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x^2-2x-3)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)}{(x^2-2x-3)}=-\dfrac{1}{3}$,

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-2x-3)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)\sin x}{-x(x^2-2x-3)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-(x+1)}{(x^2-2x-3)}=\dfrac{1}{3}$,

$x=0$ 是跳跃间断点.

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-2x-3)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin x}{-x(x-3)}=-\dfrac{\sin 1}{4}$,

$x=-1$ 是可去间断点.

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-2x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-3)(x+1)}=\infty$,

$x=-1$ 是无穷间断点.

3.求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{2x}-1)\cdot\ln(1+x^2)}{(1-\cos x)\tan 3x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)\cdot\ln\left(1+x^2\right)}{\left(1-\cos x\right)\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot x^2}{\frac{1}{2}x^2\cdot 3x}=\dfrac{4}{3}$.

四、（9 分）“圆的面积可以归结为求其内接正多边形的面积的极限”，请利用这个想法推导出半径为 r 的圆的面积.

解：圆内接正 n 边形，连接圆心和 n 个顶点，可以得到面积为 $S_n=n\cdot\dfrac{r^2}{2}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}$，取极限

$$S_{圆}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}=\pi r^2.$$

五、（7 分）设 $a_1=1, a_2=2,$ 当 $n\geq 3$ 时 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，

证明：①$\dfrac{3}{2}a_{n-1}\leq a_n\leq a_{n-1}$;；②$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0.$

证明：①由已知可知数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 所以 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\leq 2a_{n-1}\ (n\geq 3),$

因此 $a_{n-1}\geq\dfrac{1}{2}a_n\ (n\geq 2), a_{n-2}\geq\dfrac{1}{2}a_{n-1}\ (n\geq 3)$，所以

$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\geq a_{n-1}+\dfrac{1}{2}a_{n-1}\geq\dfrac{3}{2}a_{n-1}$，①成立.

②因为 $a_n\geq\dfrac{3}{2}a_{n-1}\geq(\dfrac{3}{2})^2a_{n-2}\geq\cdots\geq(\dfrac{3}{2})^{n-2}a_2\geq(\dfrac{3}{2})^{n-1}$，

所以 $0<\dfrac{1}{a_n}\leq(\dfrac{2}{3})^{n-2}$, 由两边夹法则，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0.$