

2016-2017 学年第一学期一元微积分(B 下)试卷 A

踏实学习, 弘扬正气; 诚信做人, 诚实考试; 作弊可耻, 后果自负

教师_____班号_____专业_____班级_____学号_____姓名_____

一、填空题(每题 4 分, 共 16 分)

1. 设 $f(x) = x^2 \sin x$, 则 $\int_{-\pi}^0 f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx =$ _____.
2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^x tf(t)dt = \sqrt{1+x^2}$, 则 $f(1) =$ _____.
3. 方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解为_____.
4. 二阶微分方程 $y'' + 4y' - 5y = xe^{-2x}$ 的特解形式为_____.

二、选择题(每题 4 分, 共 32 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx =$ ().
(A) $\int_0^a (f(x) + f(-x))dx$ (B) $2\int_0^a f(x)dx$
(C) 0 (D) $\int_0^a (f(x) - f(-x))dx$.
2. 下列反常积分**收敛**的是().
(A) $\int_1^{+\infty} e^x dx$ (B) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (C) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (D) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$.
3. $\int xf''(x)dx =$ ().
(A) $xf'(x) - \int f(x)dx$ (B) $xf'(x) - f'(x) + C$
(C) $xf'(x) - f(x) + C$ (D) $f(x) - xf'(x) + C$.
4. 设 y_1, y_2, y_3 均为方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个线性无关的特解, c_1, c_2 为任意常数, 则方程的通解是 ().
(A) $c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$ (B) $c_1y_1 + c_2y_2 - (c_1 + c_2)y_3$
(C) $c_1(y_1 - y_2) + c_2(y_1 + y_2) + y_3$ (D) $c_1(y_1 - y_3) + c_2(y_2 - y_3) + y_1$.

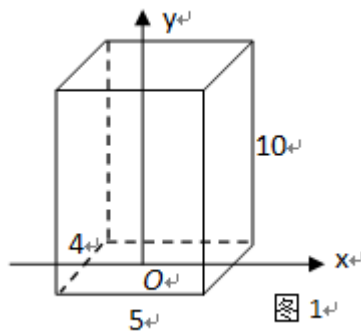
5. 微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ (a, b 是常数) 的特征方程的两个根分别是 1 和 2, 则方程是 ().

- (A) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (B) $y'' + 2y' - 3y = 0$
(C) $y'' - 3y' - 2y = 0$ (D) $y'' + 2y' + 3y = 0$.

6. 如图 1, 从充满水的长方体中把水抽到顶, 所做的功为 ().

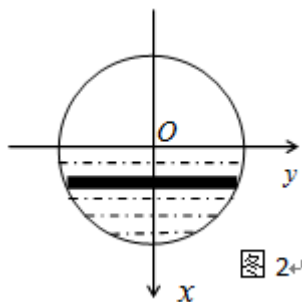
(长方体的长为 5 米, 宽为 4 米, 高为 10 米, 水重 9800 牛顿/米³)

- (A) $\int_0^{10} 9800 \cdot 5 \cdot 4 \cdot y dy$
(B) $\int_0^{10} 9800 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10 dy$
(C) $\int_0^{10} 9800 \cdot 5 \cdot 4(10 - y) dy$
(D) $\int_0^{10} 9800 \cdot 5(10 - y) dy$.



7. 如图 2, 一个圆盘, 半径为 3 米, 被垂直淹没在液体中, 当液体水平面齐及直径, 则液体对圆盘面的作用力可表示为 () (液体的密度 ρ 吨/米³).

- (A) $\int_0^3 \rho g x \sqrt{9 - x^2} dx$ (B) $\int_0^3 2 \rho g x \sqrt{9 - x^2} dx$
(C) $\int_0^3 x \sqrt{9 - x^2} dx$ (D) $\int_0^3 2 \rho g \pi x \sqrt{9 - x^2} dx$.



8. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则

$f(x) =$ ().

- (A) $x + 2$ (B) $x - 1$ (C) $x + 3$ (D) $x - 2$.

三、解下列各题 (每题 7 分, 共 35 分)

1. 求不定积分 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx$.

2. 计算积分 $\int_0^\pi f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$.

3. 求对数螺线 $r = e^{2\theta}$ 上 $\theta = 0$ 到 $\theta = 2\pi$ 的弧长.

4. 求解初值问题:
$$\begin{cases} (x+1)y' - 2y = (x+1)^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

5. 计算星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} (a > 0)$ 所围平面图形的面积.

四、(12 分) 设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域; D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$;

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 ; D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2 ;

(2) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 试求此最大值.

五、(5 分) 设有连接点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 OA , 对于 OA 上任一点

$P(x, y)$, 曲线弧 OP 与直线段 \overline{OP} 所围的面积为 x^2 , 求曲线弧 OA 的方程.

