2016-2017 学年第一学期一元微积分 B 下月考试卷答案

一、填空题（每题 6 分，共 24 分）

1. $\int_{-1}^{1}\frac{1+\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\underline{\frac{\pi}{2}}$.

2. 设 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, 则 $\int xf(2-x^2)\mathrm{d}x=\underline{-\frac{1}{2}F(2-x^2)+C}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t}{x^2}=\underline{1}$.

4. 由曲线 $y=x,y=\frac{1}{x},x=2$ 共同围成的平面区域的面积为 $\underline{\frac{3}{2}-\ln 2}$.

二、选择题（每题 6 分，共 42 分）

1. 下列说法**错误**的是（ B ）.

（A）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　（B）$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$

（C）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　（D）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=0$.

2. 设 $0<x<+\infty$，则 $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=$ （C）.

（A）$\arctan x$　　（B）$2\arctan x$　　（C）$\frac{\pi}{2}$　　（D）0.

3. 下列结论**不一定成立**的是（ D ）.

（A）若 $f(x)\geq0$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq0$ ；

（B）若可导函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数 ；

（C）若可积函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 也为奇函数 ；

（D）若 $[c,d]\subseteq[a,b]$ 则必有 $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

4. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\sin x}\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{x}\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\tan x}\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系是（A）.

（A）$I<J<K$　　（B）$I<K<J$　　（C）$J<I<K$　　（D）$K<J<I$.

5.由曲线 $r=1+\cos\theta$ 所围成图形面积为（ A ）.

（A）$\frac{3}{2}\pi$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{2}$　　（C）$\frac{4\pi}{3}$　　（D）π.

6. 下列广义积分**发散**的是（ D ）.

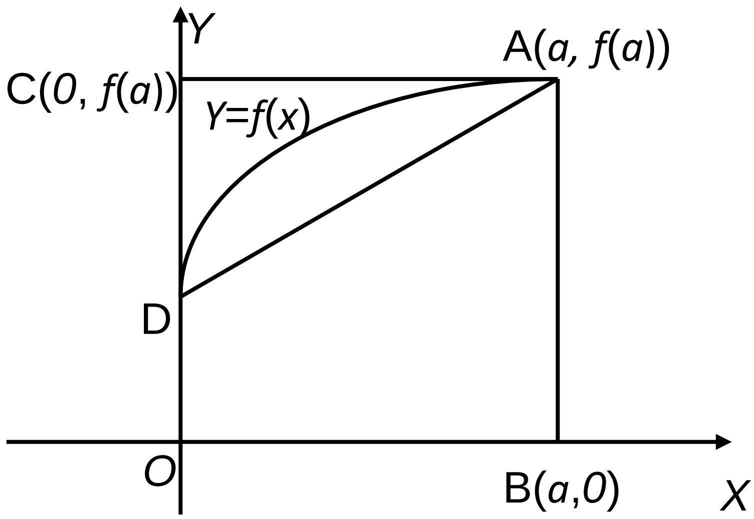
（A）$\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$　（B）$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$　（C）$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$　（D）$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

7. 如图, 曲线段方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分

$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于（C　）.

（A）曲边梯形 ABOD 面积　（B）梯形 ABOD 面积

（C）曲边三角形 ACD 面积　（D）三角形 ACD 面积.



三、解下列各题（每题 9 分，共 18 分）

1. 计算 $\int_0^1 x\cdot e^{2x}\mathrm{d}x$.

【解】: 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}e^{2x}=\frac{1}{2}[x\cdot e^{2x}\big|_0^1-\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x]$

$$=\frac{1}{2}[e^2-\frac{1}{2}e^{2x}\big|_0^1]=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}.$$

2. 求 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.

【解】: 令 $x=\sin t \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t \Rightarrow \mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin t=\cos t\mathrm{d}t,\quad t:\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}$

原式

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\csc^2 t-1\right)\mathrm{d}t=-\cot t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-(0-1)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{4}.$$

四、(12 分)求 a 的值，使曲线 $y=a\left(1-x^2\right)$ $\left(a>0,-1\le x\le 1\right)$ 与在点 $\left(-1,0\right)$、$\left(1,0\right)$ 处的法线所围成的平面图形面积最小.

【解】: 曲线 $y=a\left(1-x^2\right)$ 的导数为 $y'=-2ax$

在点 $\left(-1,0\right)$ 的切线斜率为 $2a$，所以法线的斜率为 $\frac{1}{-2a}$，所以法线方程为

$$y=\frac{1}{-2a}(x+1)$$

同理在点 $\left(1,0\right)$ 的斜线斜率为 $-2a$，所以法线斜率为 $\frac{1}{2a}$，$y=\frac{1}{2a}(x-1)$

由对称性可知,所求面积为 $2S_1=2\int_0^1[a(1-x^2)-\frac{1}{2a}(x-1)]\mathrm{d}x=2(\frac{2}{3}a+\frac{1}{4a})$

要求面积 $S=2(\frac{2}{3}a+\frac{1}{4a})$ 最小，对其求导，令 $\frac{2}{3}-\frac{1}{4a^2}=0$，$\therefore a=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

$S''(\frac{\sqrt{6}}{4})>0$，为最小值.

五、(4 分)利用换元法证明等式 $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$,并由此计算 $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

【证】: 左边 $=\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x\overset{x=\pi-t}{=}\int\limits_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))(-\mathrm{d}x)=\int\limits_0^{\pi}\pi f(\sin t)\mathrm{d}t-\int\limits_0^{\pi}tf(\sin t)\mathrm{d}t$

$$\therefore\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x}=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{\pi}{2}(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{4}$$

.