# 一元微积分B下复习题（二）

1、方程 $y'=\mathrm{e}^{x+y}$ 的通解为 $\underline{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-y}=C}$

2、微分方程 $y'''=\mathrm{e}^{x}$ 的通解是 $\underline{y=\mathrm{e}^{x}+C_1x^2+C_2x+C_3}$

3、方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的特解形式为 $\underline{y^{*}=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x}$

4、 $y'''=x+\sin x$ 的通解是 $\underline{y=\dfrac{x^4}{24}+\cos x+C_1x^2+C_2x+C_3}$

5、已知二阶常系数线性齐次方程 $y''+4y'+5y=0$ 的通解为 $\underline{\mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)}$

6、已知二阶数线性齐次方程的特征根为 $r_{1,2}=2\pm i$，则其所对应的方程是 $\underline{y''-4y'+5y=0}$

6、写出 $y''+3y'+2y=x+x^2\mathrm{e}^{-x}$ 的特解形式为 $\underline{ax+b+x(cx^2+dx+e)\mathrm{e}^{-x}}$

7、求初值问题 $\begin{cases}2xy'=y-x^3\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解.

解: $y'-\dfrac{y}{2x}=-\dfrac{x^2}{2}\qquad p(x)=-\dfrac{1}{2x},q(x)=-\dfrac{x^2}{2}$

$$y=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{-x^2}{2}\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\sqrt{x}\left[\int\frac{-x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+C\right]=-\frac{x^3}{5}+C\sqrt{x}$$

代入初值条件 $C=\dfrac{1}{5}$　　解为 $-\dfrac{x^3}{5}+\dfrac{\sqrt{x}}{5}$

8、求心形线 $r=a(1+\cos\theta)\quad(a>0)$ 的周长.

解: $l=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\pi}a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta=8a$$

9、螺线 $r=\theta$ 介于 $\theta\in[0,2\pi]$ 部分的弧长为 $\underline{\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\dfrac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})}$

10、曲线 $y^2=x^3$ 从坐标原点到点 $(4,8)$ 的弧长为（ B ）

A. 2　　B. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$　　C. $\frac{4}{9}(10\sqrt{10}-1)$　　D.3

11、设线性无关的函数 $y_1, y_2$ 与 $y_3$ 均为二阶非齐次线性方程的解, $C_1$ 与 $C_2$ 是任意常数,则该非齐次线性方程的通解是( C ).

A. $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　B. $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$

C. $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$　　D. $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

12、计算三叶玫瑰线 $r=a\sin 3\theta\ (a>0)$ 所围成的图形的面积.

解: $\sin 3\theta \ge 0 \Rightarrow 2k\pi \le 3\theta \le 2k\pi+\pi \quad \therefore \frac{2}{3}k\pi \le \theta \le \frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{3}$

$$S=3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(a\sin 3\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 6\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi a^2}{4}$$

13、已知二阶可微函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)+\int_0^x(t-x)f(t)\mathrm{d}t=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$，求 $f(x)$.

解： $f(x)+\int_0^x(t-x)f(t)\mathrm{d}t=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$

$$\Rightarrow f(x)+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Rightarrow f'(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-x\mathrm{e}^{-x}, f(0)=1$$

$$\Rightarrow f''(x)-f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{-x}, f(0)=1, f'(0)=0$$

方程 $y''-y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}$；

又设 $y''-y=(x-1)\mathrm{e}^{-x}$ 的特解为 $y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$，

代入方程可以得到 $a=-\frac{1}{4}, b=\frac{1}{4}$.

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}+(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x)\mathrm{e}^{-x}$$

由 $f(0)=1, f'(0)=0$ 得到 $C_1=\frac{3}{8}, C_2=\frac{5}{8}$

$$f(x)=\frac{3}{8}\mathrm{e}^{-x}+\frac{5}{8}\mathrm{e}^{x}+(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x)\mathrm{e}^{-x}$$

14、求微分方程 $y^{(4)}+2y''+y=0$ 的通解.

解: 其特征方程为 $r^4+2r^2+1=0$ $(r^2+1)^2=0$ $\therefore r_{1,2}=i, r_{3,4}=-i$

通解为: $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$

15、已知一阶可微函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)+2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x^2}$，求 $f(x)$.

解：等式两边求导得到

$f'(x)+2xf(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}, f(0)=1$

方程的通解为 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}[C+\int -2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x]=\mathrm{e}^{-x^2}(C-x^2)$

由 $f(0)=1$ 得到 $C=1$. $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}(1-x^2)$.

16、求可降阶的二阶微分方程 $y''=2y^3$ 满足定解条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解.

解：令 $p=y', y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程可以化为 $p\mathrm{d}p=2y^3\mathrm{d}y$，

且当 $y=1$ 时 $p=1$。

$pdp=2y^3dy \Rightarrow p^2=y^4+C_1$

代入 $y=1$ 时 $p=1$，可以得到 $p=y^2$。

即 $\dfrac{dy}{dx}=y^2, y(0)=1$，通解为 $-\dfrac{1}{y}=x+C_2$，

代入 $y(0)=1$ 得到 $C_2=-1$。方程解为 $-\dfrac{1}{y}=x-1$.

17、星形线方程为 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(a>0)$,求它绕 $X$ 轴旋转而成的旋转体体积 $V$.

解: $V=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\sin^6 t\,\mathrm{d}(a\cos^3 t)=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t-\sin^9 t)\,\mathrm{d}t$

$=6\pi a^3(I_7-I_9)=\dfrac{32}{105}\pi a^3$.

18、摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 与 $x$ 轴围成的图形绕 $x$ 轴旋转所得的旋转体体积.

解：$V=\int_{0}^{2\pi a}\pi y^2\,\mathrm{d}\,x=\int_{0}^{2\pi}\pi(a(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}\,a(t-\sin t)$

$=\pi a^3\int_{0}^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,\mathrm{d}t=\pi a^3(t\Big|_0^{2\pi}+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)\Big|_0^{2\pi})$

$=5\pi a^3$.

19、试求 $y''=x$ 的经过点 $(0,1)$ 且在此点与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线.

解:由已知 $\begin{cases} y''=x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad y'=\frac{1}{2}x^2+C_1 \quad C_1=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+C_2 \qquad C_2=1 \qquad y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1$.

20、设 $D$ 是由曲线 $y=(x-1)^2$、该曲线在点 $(0,1)$ 处的切线与 $x$ 轴围成的平面区域.计算 $D$ 的面积，以及区域 $D$ 绕 $y$ 轴旋转生成的旋转体体积.

解：切线方程为 $y=-2x+1$，

$D$ 的面积为 $\int_0^1\left[(1-\sqrt{y})+\frac{y-1}{2}\right]\mathrm{d}y=\frac{1}{12}$.

$D$ 绕 $y$ 轴旋转生成的旋转体体积为

$\pi\int_0^1\left[(1-\sqrt{y})^2-(-\frac{y-1}{2})^2\right]\mathrm{d}y=\pi\int_0^1\left[(1-2\sqrt{y}+y)-\frac{1}{4}(y-1)^2\right]\mathrm{d}y=\frac{\pi}{12}$.

21、在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上的点 $M\ (1,\mathrm{e})$ 处作切线，设该切线与曲线及 $y$ 轴围成平面图形 $D$。

（1） 求平面图形 $D$ 的面积.（2）求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转所成旋转体的体积.

解：由题意，所得切线为 $y-\mathrm{e}=\mathrm{e}(x-1)$ 即 $y=\mathrm{e}x$

由公式，所求面积为 $S=\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}x^2}{2}\Big|_0^1=(\mathrm{e}-1)-\frac{\mathrm{e}}{2}=\frac{\mathrm{e}}{2}$-1

由公式，所求体积为$V=\pi\int_0^1((e^x)^2-(ex)^2)dx=\pi(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{e^2x^3}{3})\Big|_0^1=\frac{\pi e^2}{6}-\frac{\pi}{2}$

22、设直线$y=ax(0<a<1)$与抛物线$y=x^2$围成的图形的面积为$S_1$。它们和直线$x=1$围成的面积为$S_2$。（1）求$S_1$；（2）求$S_2$；（3）确定$a$使$S_1+S_2$最小.

解：（1）$S_1=\int_0^a(ax-x^2)\,dx=\frac{a^3}{6}$

（2）$S_2=\int_a^1(x^2-ax)\,dx=\frac{1-a^3}{3}-\frac{a-a^3}{2}=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6}(0<a<1)$

（3）设$S_1+S_2=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{3}=\frac{2a^3-3a+2}{6}$

令$S'=\frac{6a^2-3}{6}=0$，驻点为$a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，负的舍去，得惟一驻点.$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，最小.

23、设有连接点$O(0,0)$和$A(1,1)$的一段向上的曲线弧$\overset{\frown}{OA}$,对于$\overset{\frown}{OA}$上任一点$P(x,y)$,曲线弧$OP$与直线段$\overline{OP}$所围的面积为$x^2$,求曲线弧$\overset{\frown}{OA}$的方程.

解:设曲线弧$\overset{\frown}{OA}$的方程为$y=f(x)$，由题意得$\int_0^x f(x)\,dx-\frac{1}{2}xf(x)=x^2$

对上式两边对$x$求导,得$f(x)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}xf'(x)=2x$，即$y'=\frac{y}{x}-4$

令$\frac{y}{x}=u$,则$y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,原式可化为$\frac{du}{dx}=-4\Rightarrow u=-4\ln x+C$

$\therefore y=-4x\ln x+Cx$，$\because x=1,y=1,\Rightarrow C=1$所以$\overset{\frown}{OA}$的方程为$y=-4x\ln x+x$.

24、已知曲线$l$通过点$(\frac{\pi}{2},1)$且$l$上任一点处切线的斜率为$\frac{1}{x}(\sin x-y)$，求$l$的方程.

解： 由题意。问题化为求$\begin{cases} y'=\frac{1}{x}(\sin x-y) \\ y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1 \end{cases}$

$$y'=\frac{1}{x}(\sin x-y)\Rightarrow y'=\frac{\sin x}{x}-\frac{y}{x}\Rightarrow\quad y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$$

$$p(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow\int p(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Rightarrow \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}=\mathrm{e}^{-\ln x}=\mathrm{e}^{\ln x^{-1}}=\frac{1}{x}$$

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\ln x}=x \qquad Q(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$
$$=\frac{1}{x}(\int\frac{\sin x}{x}\cdot x\mathrm{d}x+C)=\frac{1}{x}(\int\sin x\mathrm{d}x+C)=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$$

把 $(\frac{\pi}{2},1)$ 代入得 $C=\frac{2}{\pi}$ $\qquad y=\frac{1}{x}(-\cos x+\frac{2}{\pi})$

25、水从一个体积 $V$ 为 55 升的水箱底部，以 $V'(t)=11-t$ （升/小时）的速度流出. 若水箱起初是满的，则从时间 $t=3$ 到 $t=5$ 之间共流出( **A** )升水.

（A）14 （B）16 （C）15 （D）12.

26、设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m$ （$m$ 为常数），则曲线 $y=g(x),y=f(x),x=a$ 及 $x=b$ 所围成的平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积为（ **B** ）.

（A）$\int_a^b\pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

（B）$\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

（C）$\int_a^b\pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

（D）$\int_a^b\pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

27、如图 1，从充满水的底半径为 5 米、高为 10 米的圆柱形槽中把水抽到槽顶以上 4 米高处，所做的**功**为( **C** ).（其中 $\rho(kg/m^3)$ 为水的密度，$g$ 为重力加速度）

（A）$\int_0^{10}25\pi\rho g(10-x)\mathrm{d}x$

（B）$\int_0^{14}25\pi\rho g(10-x)\mathrm{d}x$

（C）$\int_0^{10}25\pi\rho g(14-x)\mathrm{d}x$

（D）$\int_0^{14}25\pi\rho g(14-x)\mathrm{d}x$.

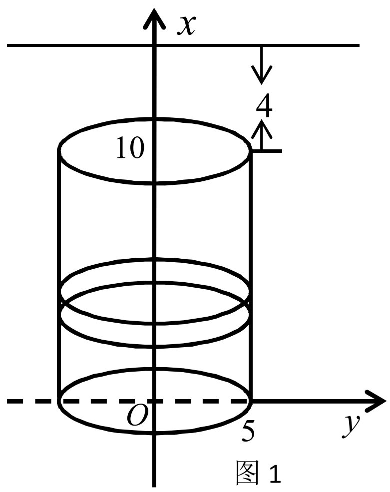


图 1

28、一个矩形薄板,长为 $a$，宽为 $b$，被垂直淹没在液体中，长边平行于液面与液体水平面齐及（如图 2），则液体对长方形薄板的**作用力**可表示为（ **A** ）

（$g$ 为重力加速度，液体的密度为 $\rho$）.

（A）$\int_0^b \rho gax\mathrm{d}x$　　（B）$\int_0^a \rho gax\mathrm{d}x$

（C）$\int_0^b \rho gx\mathrm{d}x$　　（D）$\int_0^a \rho gx\mathrm{d}x$.

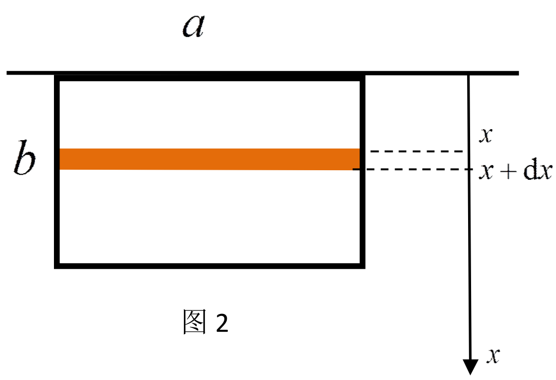
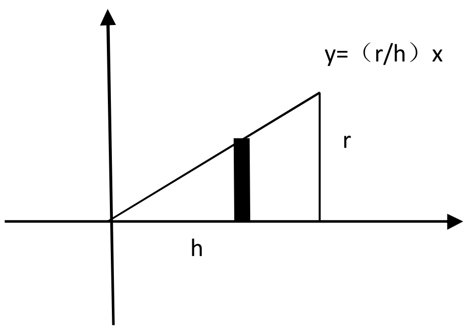



图 2

29、设一正圆锥体的底半径为 $r$，高为 $h$，用**两种**方法计算该正圆锥体积.（要求应用定积分来计算，画出计算过程中对应的草图）

解：1、圆盘法

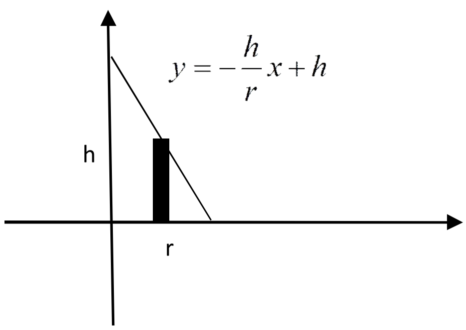



画出来，直线方程对给 3 分

$$V=\int_0^h \pi(\frac{r}{h}x)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}r^2h.$$

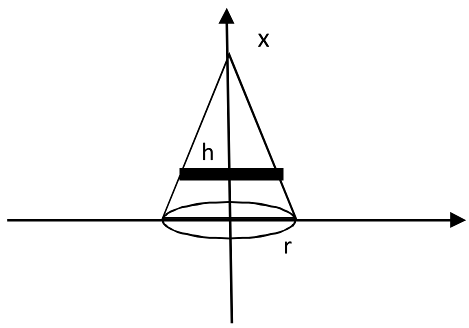
（3 分）

2、圆柱薄壳法




$$V=2\pi\int_0^r (-\frac{h}{r}x+h)x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}r^2h.$$

3、切片法




由　　　相　　　似　　　形 $\frac{y}{r}=\frac{h-x}{h} \Rightarrow y=\frac{h-x}{h}r$

切片面积为$\pi(\frac{h-x}{h}r)^2$，体积为

$$V=\int_0^h \pi(\frac{h-x}{h}r)^2 \mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}r^2 h.$$

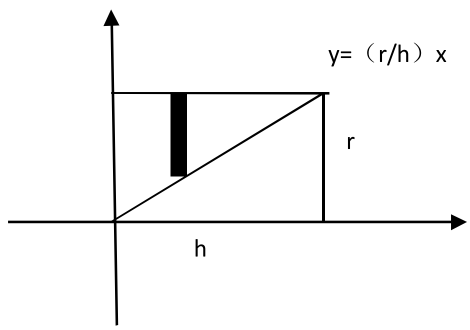
4、垫圈法

大圆柱体积减小体积

$V_{大}=\pi r^2 h$

$$V_{小}=\int_0^h \pi(r^2-(\frac{r}{h}x)^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

体　　　积　　　为 $\pi r^2 h-\frac{2}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$

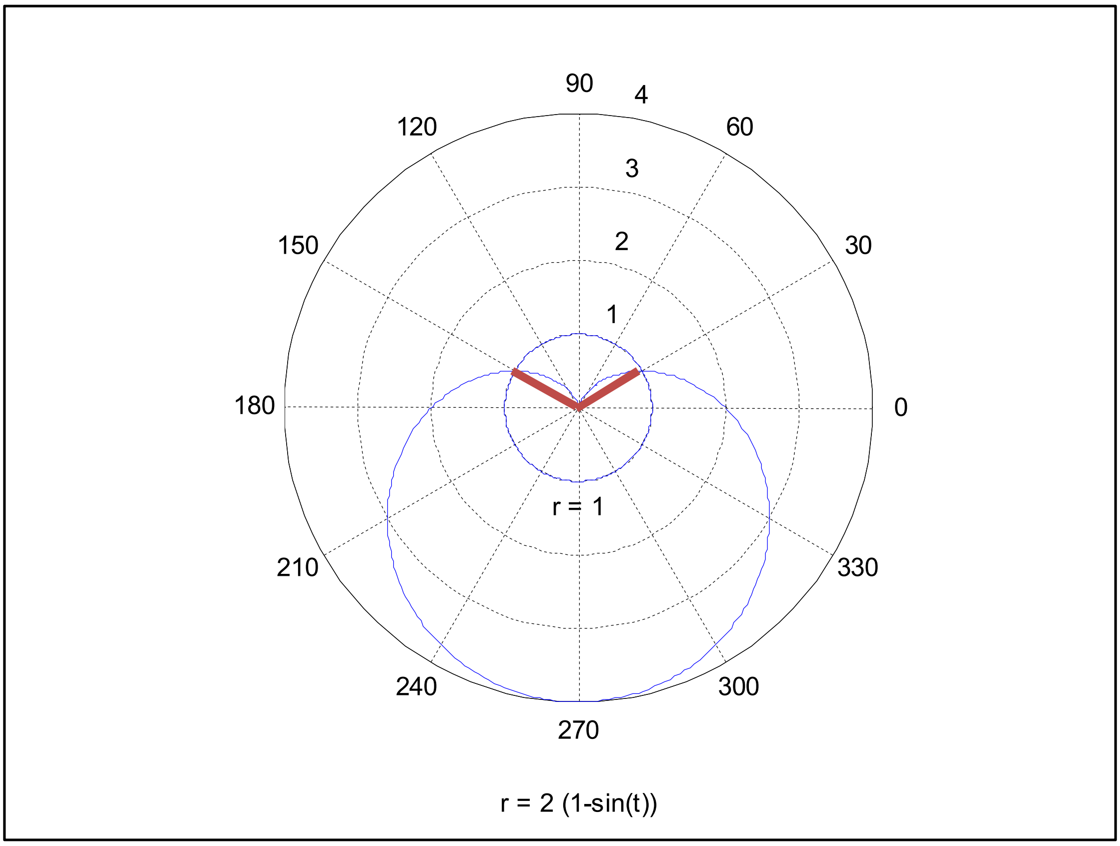



30、已知曲线$L_1: r=1; L_2: r=2(1-\sin\theta)$.

(1)画出曲线$L_1, L_2$的草图

(2)求出曲线$L_1, L_2$的交点

(3)求出在曲线$L_2: r=2(1-\sin\theta)$外，而在曲线$L_1: r=1$内的平面区域面积.




（2）$\begin{cases} r=1 \\ r=2(1-\sin\theta) \end{cases} \Rightarrow \sin\theta=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6} or \dfrac{5\pi}{6}$

交点为$(1,\dfrac{\pi}{6}),(1,\dfrac{5\pi}{6})$.

（3）所求面积为三分之一的圆面积减去心形线 30 度到 90 度的那部分的两倍

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(2(1-\sin\theta))^2\mathrm{d}\theta=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{3}+4\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{3}-2\sqrt{3}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2\pi}{3}-2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}-\frac{\sin2\theta}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi-\frac{7}{4}\sqrt{3}$$

⑥

面积为$\dfrac{1}{3}\pi-2(\pi-\dfrac{7}{4}\sqrt{3})=\dfrac{7}{2}\sqrt{3}-\dfrac{5}{3}\pi.$

31、请结合圆盘法和弧微分的思想方法，求出由曲线$y=\sqrt{x}(0\le x\le1)$绕$x$轴旋转，所成旋转曲面的面积（即旋转体的侧面积）。

解：侧面积为$2\pi\int_0^1 f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$

$$=2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+(\frac{1}{2\sqrt{x}})^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{(x+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi\,.$$