中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

细推電動力學

程嘉杰　整理

USTC, 96 JinZhai Road, Hefei,
Anhui, P.R.China, 230026
中国安徽省合肥市金寨路 96 号
中国科学技术大学

文件网址：home.ustc.edu.cn/∼jiajie
编写日期：2022 年 2 月 22 日

Contents

前言

本资料主要是电动力学课程潘海俊老师的听课笔记，兼有公式题型梳理和概念理解

第一章　场论和张量分析

第 1 节　坐标变换

1　Einstein 求和约定

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n \tag{1.1}$$

其中，A,B 为 $n\times n$ 阶矩阵，此处 k 称为求和哑指标，哑指标和自由指标都可以替换成任何字母

2　Kronecker & Levi-Civita 排列符号

$$\delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \tag{1.2}$$

性质 1.1.1

(1) $\delta_{ii} = \delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33} = 3$

(2) $A_{ij}\delta_{jk} = (AI)_{ik} = A_{ik}$

(3) $A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = A_{jj} = \mathrm{tr}\,A$

$$\varepsilon_{ijk} \triangleq \begin{cases} +1, & (ijk)\text{顺序排列} = (123),(231)\text{ or }(312) \\ -1, & (ijk)\text{逆序排列} = (132),(213)\text{ or }(321) \\ 0, & \text{否则} \end{cases} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k1} & \delta_{k1} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

不随坐标系变化而改变，可以理解为张量密度

性质 1.1.2

(1) 轮换、完全反对称：$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji}$

(2) 3×3 矩阵的行列式

$$\varepsilon_{lmn}\det A = \varepsilon_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn} = \varepsilon_{ijk}A_{li}A_{mj}A_{nk}$$

(3) $\varepsilon-\delta$ 等式

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

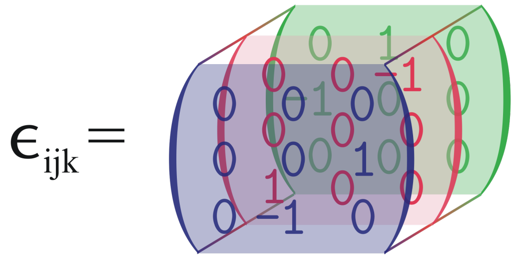


图 1: j,k 代表行列，i 代表深度 (blue: i = 1; red: i = 2; green: i = 3)

由此可以证明：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$\begin{aligned}
&[\nabla\times(\nabla\times E)]_i=\varepsilon_{ijk}\nabla_j(\nabla\times E)_k\\
&=\varepsilon_{ijk}\nabla_j\varepsilon_{kmn}\nabla_m E_n=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\nabla_j\nabla_m E_n\\
&=(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})\nabla_j\nabla_m E_n=\nabla_n\nabla_i E_n-\nabla_m\nabla_m E_i\\
&=\nabla_i(\nabla\cdot E)-(\nabla\cdot\nabla)E_i=[\nabla(\nabla\cdot E)]_i-\left(\nabla^2 E\right)_i
\end{aligned}$$

3　直角坐标系和旋转变换

(1) 基矢：$\hat{x}_i$

正交 : $\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j=\delta_{ij}$

右手: $\hat{x}_i\times\hat{x}_j=\varepsilon_{ijk}\hat{x}_k\Leftrightarrow(\hat{x}_i\times\hat{x}_j)\cdot\hat{x}_k=\varepsilon_{ijk}$

(2) 坐标（点乘相当于投影乘积值）：$x_i\triangleq\vec{r}\cdot\hat{x}_i\quad(i=1,2,3)$

(3) 位矢（含有坐标和方向信息的矢量）：$\vec{r}=x_i\hat{x}_i=(\vec{r}\cdot\hat{x}_i)\,\hat{x}_i$

(4) 转动矩阵：$R_{ij}\triangleq\hat{x}_i'\cdot\hat{x}_j\Rightarrow\hat{x}_i'=(\hat{x}_i'\cdot\hat{x}_j)\,\hat{x}_j=R_{ij}\hat{x}_j$

$$\begin{pmatrix}T_1\\T_2\\T_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11}&R_{12}&R_{13}\\R_{21}&R_{22}&R_{23}\\R_{31}&R_{32}&R_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_1\\T_2\\T_3\end{pmatrix}$$

注:

(1) 两个坐标系均为直角坐标系，$\delta_{ij}=\hat{x}_i'\cdot\hat{x}_j'=R_{ik}R_{jl}\hat{x}_k\cdot\hat{x}_l=R_{ik}R_{jl}\delta_{kl}=R_{ik}R_{jk}=\left(RR^T\right)_{ij}$

故 $R\in O(3)$ 为正交 (Orthogonality) 矩阵,$RR^T=I,\mathrm{det}R=\pm1$

若新旧两个坐标系为右手系，则 $\mathrm{det}R=+1$，$R\in SO(3)$ 特殊正交阵

(2) 一般地, 两个直角坐标系之间的变换为线性变换

$$x_i'=\lambda_{ij}x_j+a_i,\quad\lambda\in O(3)$$

(5) 反演矩阵：$x_i'=P_{ij}x_j,\quad P=\mathrm{diag}\{-1,-1,-1\}=-I$

第 2 节 张量代数

1 张量的定义

张量：一个描述了与向量空间相关的代数对象集之间的多线性关系的代数对象

设 T 在任一给定坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中需要 3^n 个分量 $T_{i_1\cdots i_n}$ 描述，在坐标变换 $x_i'=\lambda_{ij}x_j+a_i,\lambda\in O(3)$ 下：(1) 若其分量如下变换，则称 T 为 n 阶张量：

$$T'_{i_1\cdots i_n}=\lambda_{i_1j_1}\cdots\lambda_{i_nj_n}T_{j_1\cdots j_n}$$

(2) 若其分量如下变换，则称 T 为 n 阶赝张量：

$$T'_{i_1\cdots i_n}=(\det\lambda)\lambda_{i_1j_1}\cdots\lambda_{i_nj_n}T_{j_1\cdots j_n}$$

♣ 零阶张量（标量）$\varphi:\varphi\to\varphi'=\varphi$

♣ 一阶张量（矢量）：$\vec{f}:f_i\to f_i'=\lambda_{ij}f_j$

♣ 二阶张量：$\overleftrightarrow{T}:T_{ij}\to T'_{ij}=\lambda_{ik}\lambda_{jl}T_{kl}\leftrightarrow T'=\lambda T\lambda^T$, $\quad\overleftrightarrow{I}=\delta_{ij}$

♣ 并矢：两个矢量的并矢是二阶张量：$(\vec{f}\vec{g})_{ij}\triangleq f_ig_j$,$(\vec{f}\vec{g}\cdots\vec{h})_{ij\cdots k}\triangleq f_ig_j\cdots h_k$

$$\vec{f}\vec{g}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1&g_2&g_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1g_1&f_1g_2&f_1g_3\\f_2g_1&f_2g_2&f_2g_3\\f_3g_1&f_3g_2&f_3g_3\end{pmatrix}$$

当两个向量平行时候，并矢具有交换律 $\vec{f}\vec{g}=\vec{g}\vec{f}$

♣ 任一给定坐标系决定的九个特殊的二阶张量

$$(\hat{x}_i\hat{x}_j)_{mn}=\delta_{im}\delta_{jn}$$

$$\text{如}:\hat{x}_1\hat{x}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\hat{x}_1\hat{x}_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\hat{x}_2\hat{x}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\cdots$$

性质 1.2.1

1. 同阶张量的线性组合仍然是同阶张量
2. 张量选取和坐标系无关
3. 任一二阶张量都可以表示为对称张量与反对称张量之和：

$$T_{ij}=T_{(ij)}+T_{[ij]}=\frac{T_{ij}+T_{ji}}{2}+\frac{T_{ij}-T_{ji}}{2}$$

2 张量运算

I. 张量积：n 阶张量和 m 阶张量的张量积是 $n+m$ 阶张量

$$T_{i\cdots jk\cdots l}=(R\otimes S)_{i\cdots jk\cdots l}\triangleq R_{i\cdots j}S_{k\cdots l}$$

II. 缩并：对张量中任意两个基矢求点积，$n(\geqslant 2)$ 阶张量的缩并是 $n-2$ 阶张量，取不同基矢缩并不同

$$T_{\dots i\dots j\dots}\to T_{\dots i\dots i\dots}$$

· 二阶张量缩并得到标量

$$T_{ij}\to\phi\triangleq T_{ii}$$

· 三阶张量缩并得到矢量

$$T_{ijk}\quad\to\quad X_i\triangleq T_{ikk},\quad Y_i\triangleq T_{kik},\quad Z_i\triangleq T_{kki}$$

III. 点乘

$$\vec{f}\cdot\vec{g}\vec{h}\triangleq(\vec{f}\cdot\vec{g})\vec{h}$$

$$\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{T}\triangleq(f_jT_{ji})\,\hat{x}_i,\quad\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{f}\triangleq(T_{ij}f_j)\,\hat{x}_i$$

对称张量和矢量点乘可以交换位置

$$\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{S}\triangleq(T_{ik}S_{kj})\,\hat{x}_i\hat{x}_j$$

双点乘

$$\overleftrightarrow{T}:\overleftrightarrow{S}\triangleq T_{ij}S_{ji}=\mathrm{tr}(TS)=\overleftrightarrow{S}:\overleftrightarrow{T}$$

性质 1.2.2: 单位张量

$$\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{f}=\vec{f},\quad\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{I}\cdot\overleftrightarrow{T}=\overleftrightarrow{T},\quad\overleftrightarrow{I}:\overleftrightarrow{I}=3$$

$$\overleftrightarrow{T}:\overleftrightarrow{I}=\mathrm{tr}(T)\quad\Rightarrow\quad\vec{f}\vec{g}:\overleftrightarrow{I}=\mathrm{tr}(\vec{f}\vec{g})=\vec{f}\cdot\vec{g}$$

张量的点乘和叉乘均满足“就近点 (叉) 乘”原则

IV. 叉乘

$$\vec{f}\times\vec{g}\triangleq(\varepsilon_{kij}f_ig_j)\,\hat{x}_k=-\vec{g}\times\vec{f}$$

$$\vec{f}\times\vec{g}\vec{h}\triangleq(\vec{f}\times\vec{g})\vec{h},\quad\vec{g}\vec{h}\times\vec{f}\triangleq\vec{g}(\vec{h}\times\vec{f})$$

$$\vec{f}\times\overleftrightarrow{T}\triangleq(\varepsilon_{kil}f_kT_{ij})\,\hat{x}_l\hat{x}_j,\quad\overleftrightarrow{T}\times\vec{f}\triangleq(\varepsilon_{jkl}T_{ij}f_k)\,\hat{x}_i\hat{x}_l$$

$$\vec{f}\times\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{I}\times\vec{f}=\varepsilon_{ikj}f_k\hat{x}_i\hat{x}_j=-\varepsilon_{ijk}f_k\hat{x}_i\hat{x}_j=\begin{pmatrix}0&-f_3&f_2\\f_3&0&-f_1\\-f_2&f_1&0\end{pmatrix}$$

V. 混合积

(1) 点乘 + 叉乘轮换性质：　$\vec{f}\cdot(\vec{g}\times\vec{h})=(\vec{f}\times\vec{g})\cdot\vec{h}=\vec{g}\cdot(\vec{h}\times\vec{f})$(重要★)

(2) 三叉乘公式：（舍近求远 + 颠倒）（十分重要★）

$$\begin{aligned}\vec{f}\times(\vec{g}\times\vec{h})&=(\vec{f}\cdot\vec{h})\vec{g}-(\vec{f}\cdot\vec{g})\vec{h}\\&=\vec{f}\cdot(\vec{h}\vec{g}-\vec{g}\vec{h})=(\vec{g}\vec{h}-\vec{h}\vec{g})\cdot\vec{f}\\&=(\vec{h}\times\vec{g})\times\vec{f}\end{aligned}$$

第 3 节　场的微分

$$\text{微分和梯度的关系：}\mathrm{d}T=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial T}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot(\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{x}}+\mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}}+\mathrm{d}z\hat{z})=(\nabla T)\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l})$$

$$=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\mathrm{d}z$$

$$\text{梯度算子：}\nabla\triangleq\hat{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\hat{x}_i\partial_i$$

$$\text{散度：}\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(v_x\hat{\boldsymbol{x}}+v_y\hat{\boldsymbol{y}}+v_z\hat{z})=\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{旋度：}\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}&\hat{\boldsymbol{y}}&\hat{\boldsymbol{z}}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\v_x&v_y&v_z\end{vmatrix}=\hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+\hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

单位矢量 $\hat{r}$ 的含义（位置矢量的单位化）：

$$\hat{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

1　场的一阶导数

(1) 标量场梯度 $\nabla\varphi\triangleq\hat{x}_i(\partial_i\varphi)$

(2) 矢量场 $\begin{cases}\text{梯度}\nabla\vec{f}\triangleq\hat{x}_i\hat{x}_j(\partial_i f_j)\\\text{散度}\nabla\cdot\vec{f}\triangleq\partial_i f_i\\\text{旋度}\nabla\times\vec{f}\triangleq\hat{x}_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j f_k)=(\hat{x}_j\partial_j)\times(f_k\hat{x}_k)\end{cases}$

(3) 张量场散度 $\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\triangleq\hat{x}_i(\partial_j T_{ji})(\hat{x}_i\partial_i)\cdot(T_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k)=(\partial_i T_{jk})(\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j\hat{x}_k)=(\partial_i T_{jk})(\delta_{ij}\hat{x}_k)=(\partial_i T_{ik})\hat{x}_k$

例 1.3.1: 梯度散度旋度的计算

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^n)=nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}=nr^{n-1}\left(\frac{\hat{r}_x}{r}\right)=nr^{n-1}\hat{r}_x\text{以及}\sum\frac{x\hat{x}}{r}=\hat{r},\Rightarrow\nabla(r^n)=nr^{n-1}\hat{r}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\\
&= ()^{-\frac{3}{2}}+x(-3/2)()^{-\frac{5}{2}}2x+()^{-\frac{3}{2}}+y(-3/2)()^{-\frac{5}{2}}2y+()^{-\frac{3}{2}}+z(-3/2)()^{-\frac{5}{2}}2z\\
&= 3r^{-3}-3r^{-5}\left(x^2+y^2+z^2\right)=3r^{-3}-3r^{-3}=0.
\end{aligned}
$$

重要公式： $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a})-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

得到： $\nabla_f(\vec{f}\cdot\vec{g})=\vec{g}\times\nabla_f\times\vec{f}+(\vec{g}\cdot\nabla_f)\vec{f}$

性质 1.3.1: Leibniz 法则

$$
\begin{aligned}
\nabla(\varphi\psi) &= (\nabla\varphi)\psi+\varphi(\nabla\psi)\\
\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g}) &= \vec{f}\cdot\nabla\vec{g}+\vec{g}\cdot\nabla\vec{f}+\vec{f}\times(\nabla\times\vec{g})+\vec{g}\times(\nabla\times\vec{f})\\
\nabla(\varphi\vec{f}) &= (\nabla\varphi)\vec{f}+\varphi(\nabla\vec{f})\\
\nabla\cdot(\varphi\vec{f}) &= (\nabla\varphi)\cdot\vec{f}+\varphi(\nabla\cdot\vec{f})\\
\nabla\times(\varphi\vec{f}) &= (\nabla\varphi)\times\vec{f}+\varphi(\nabla\times\vec{f})\\
\nabla(\vec{f}\times\vec{g}) &= (\nabla\vec{f})\times\vec{g}-(\nabla\vec{g})\times\vec{f}\\
\nabla\cdot(\vec{f}\times\vec{g}) &= (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{g}-(\nabla\times\vec{g})\cdot\vec{f}\\
\nabla\times(\vec{f}\times\vec{g}) &= (\nabla\cdot\vec{g}+\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}-(\nabla\cdot\vec{f}+\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}
\end{aligned}
$$

例 1.3.2: 一些 Leibniz 法则的应用

证明. $\nabla\cdot(\vec{f}\vec{g})=(\nabla\cdot\vec{f})\vec{g}+(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}$

方法一：下标法

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\vec{f}\vec{g}) &= (\hat{x}_i\partial_i)\cdot(f_jg_k\hat{x}_j\hat{x}_k)\\
&= \left[\partial_i\left(f_jg_k\right)\right]\left(\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j\hat{x}_k\right)\\
&= \left[\left(\partial_if_j\right)g_k+f_j\left(\partial_ig_k\right)\right]\delta_{ij}\hat{x}_k\\
&= \left[\left(\partial_if_i\right)g_k+f_i\left(\partial_ig_k\right)\right]\hat{x}_k\\
&= (\nabla\cdot\vec{f}+\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}
\end{aligned}
$$

方法二：符号法

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(\vec{f}\vec{g}\right) &= \nabla_f\cdot(\vec{f}\vec{g})+\nabla_g\cdot(\vec{f}\vec{g})\\
&= \nabla_f\cdot\vec{f}\vec{g}+\nabla_g\cdot\vec{f}\vec{g}\\
&= \left(\nabla_f\cdot\vec{f}\right)\vec{g}+\left(\vec{f}\cdot\nabla_g\right)\vec{g}\\
&= (\nabla\cdot\vec{f})\vec{g}+(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}
\end{aligned}
$$

□

证明: $\nabla\cdot(\vec f\vec g\vec h)=(\nabla\cdot\vec f)\vec g\vec h+(\vec f\cdot\nabla\vec g)\vec h+\vec g(\vec f\cdot\nabla\vec h)$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\vec f\vec g\vec h)&=\nabla_f\cdot(\vec f\vec g\vec h)+\nabla_g\cdot(\vec f\vec g\vec h)+\nabla_h\cdot(\vec f\vec g\vec h)\\&=\nabla_f\cdot\vec f\vec g\vec h+\nabla_g\cdot\vec f\vec g\vec h+\nabla_h\cdot\vec f\vec g\vec h\\&=\left(\nabla_f\cdot\vec f\right)\vec g\vec h+\left(\vec f\cdot\nabla_g\right)\vec g\vec h+\left(\vec f\cdot\nabla_h\right)\vec g\vec h\\&=\left(\nabla_f\cdot\vec f\right)\vec g\vec h+\left(\vec f\cdot\nabla_g\vec g\right)\vec h+\vec g\left(\vec f\cdot\nabla_h\right)\vec h\\&=(\nabla\cdot\vec f)\vec g\vec h+(\vec f\cdot\nabla\vec g)\vec h+\vec g(\vec f\cdot\nabla)\vec h\end{aligned}$$

证明: $\nabla\times(\vec f\times\vec g)=(\vec g\cdot\nabla+\nabla\cdot\vec g)\vec f-(\vec f\cdot\nabla+\nabla\cdot\vec f)\vec g$

$$\because\vec a\times\vec b\times\vec c=(\vec c\cdot\vec a)\vec b-\vec c(\vec a\cdot\vec b)$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\vec f\times\vec g)&=\nabla_f\times(\vec f\times\vec g)+\nabla_g\times(\vec f\times\vec g)\\&=\left[(\nabla_f\cdot\vec g)\vec f-\left(\nabla_f\cdot\vec f\right)\vec g\right]+\left[(\nabla_g\cdot\vec g)\vec f-\left(\nabla_g\cdot\vec f\right)\vec g\right]\\&=\left[(\vec g\cdot\nabla_f)\vec f-\left(\nabla_f\cdot\vec f\right)\vec g\right]+\left[(\nabla_g\cdot\vec g)\vec f-\left(\vec f\cdot\nabla_g\right)\vec g\right]\\&=(\vec g\cdot\nabla)\vec f-(\nabla\cdot\vec f)\vec g+(\nabla\cdot\vec g)\vec f-(\vec f\cdot\nabla)\vec g\end{aligned}$$

证明: $\nabla(\vec f\cdot\vec g)=\vec f\cdot\nabla\vec g+\vec f\times(\nabla\times\vec g)+\vec g\cdot\nabla\vec f+\vec g\times(\nabla\times\vec f)$

$$\begin{aligned}\nabla(\vec f\cdot\vec g)&=\nabla_f(\vec f\cdot\vec g)+\nabla_g(\vec f\cdot\vec g)\\&=\nabla_f\vec f\cdot\vec g+\nabla_g\vec g\cdot\vec f\\&=\left(\nabla_f\vec f-\vec f\nabla_f\right)\cdot\vec g+\vec f\nabla_f\cdot\vec g+(\nabla_g\vec g-\vec g\nabla_g)\cdot\vec f+\vec g\nabla_g\cdot\vec f\\&=\vec g\times\left(\nabla_f\times\vec f\right)+\vec g\cdot\nabla_f\vec f+\vec f\times(\nabla_g\times\vec g)+\vec f\cdot\nabla_g\vec g\\&=\vec f\times(\nabla\times\vec g)+\vec g\times(\nabla\times\vec f)+\vec f\cdot\nabla\vec g+\vec g\cdot\nabla\vec f\end{aligned}$$

证明: $\vec f\times(\nabla\times\vec f)=\frac12\nabla(\vec f\cdot\vec f)-\vec f\cdot\nabla\vec f$

$$\nabla(\vec f\cdot\vec g)=\vec f\cdot\nabla\vec g+\vec f\times(\nabla\times\vec g)+\vec g\cdot\nabla\vec f+\vec g\times(\nabla\times\vec f)$$

令$g=f$ 得

$$\nabla f^2=2\vec f\cdot\nabla\vec f+2\vec f\times(\nabla\times\vec f)$$

$$\vec f\times(\nabla\times\vec f)=\frac12\nabla f^2-\vec f\cdot\nabla\vec f$$

证明: $\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T}\times\vec{r})=-\vec{r}\times(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T}\times\vec{r})&=(\hat{x}_i\partial_i)\cdot(T_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k\times x_l\hat{x}_l)\\&=\partial_i\left(T_{jk}x_l\right)\left(\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j\hat{x}_k\times\hat{x}_l\right)\\&=\left[\left(\partial_iT_{jk}\right)x_l+T_{jk}\delta_{il}\right]\left(\delta_{ij}\hat{x}_k\times\hat{x}_l\right)\\&=\left(\partial_iT_{ik}\right)x_l\hat{x}_k\times\hat{x}_l+T_{lk}\hat{x}_k\times\hat{x}_l\\&=(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})\times\vec{r}+0\\&=-\vec{r}\times(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})\end{aligned}$$

性质 1.3.2: 链式法则

设 $t_r=t_r(r)=t_r(x,y,z)$，而标量场 $\varphi=\varphi\left(t_r\right)$、矢量场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\left(t_r\right)$，则

$$\begin{cases}\nabla\varphi(t_r)=\varphi'\nabla t_r\\ \nabla\vec{A}(t_r)=(\nabla t_r)\vec{A}'\neq\vec{A}'(\nabla t_r)\\ \nabla\cdot\vec{A}(t_r)=(\nabla t_r)\cdot\vec{A}'=\vec{A}'\cdot\nabla t_r\\ \nabla\times\vec{A}(t_r)=(\nabla t_r)\times\vec{A}'=-\vec{A}'\times\nabla t_r\end{cases}\quad \text{其中}\quad\begin{cases}\varphi'=\frac{\partial\varphi}{\partial t_r}\\ \vec{A}'=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t_r}\end{cases}$$

2 场的二阶导数

♣ **恒等式：梯度的旋度为 0，旋度的散度为 0：**

$$\nabla\times\nabla\varphi\equiv0,\quad\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\equiv0$$

♣ Laplace **算子：** $\nabla^2\triangleq\nabla\cdot\nabla=\partial_i\partial_i$

$$\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{T})=\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial T}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}\right)$$

$$\text{Laplace 算符：}\Delta T=\nabla^2T=\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{v}\equiv\left(\nabla^2v_x\right)\hat{x}+\left(\nabla^2v_y\right)\hat{y}+\left(\nabla^2v_z\right)\hat{z}$$

♣ **算子的并：**

$$\nabla\nabla\triangleq\hat{x}_i\hat{x}_j\partial_i\partial_j$$

♣ Taylor **公式：**

$$\begin{aligned}\varphi(x+\varepsilon)&=\varphi(x)+\varepsilon\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{1}{2!}\varepsilon^2\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+\cdots\\ \varphi(\vec{r}+\vec{\varepsilon})&=\exp(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\varphi(\vec{r})\\&=\left[1+\vec{\varepsilon}\cdot\nabla+\frac{1}{2!}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)^2+\cdots\right]\varphi(\vec{r})\\&=\left[1+\vec{\varepsilon}\cdot\nabla+\frac{1}{2!}\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}:\nabla\nabla+\cdots\right]\varphi(\vec{r})\end{aligned}$$

3 相对 (间隔) 位矢 $\mathfrak{r}$

场点: $\vec{r} = x_i\hat{x}_i \quad \to \quad \nabla = \hat{x}_i\left(\partial/\partial x_i\right)$

源点: $\vec{r}' = x_i'\hat{x}_i \quad \to \quad \nabla' = \hat{x}_i\left(\partial/\partial x_i'\right)$

场点相当于源点的位矢：$\mathfrak{r} \triangleq \vec{r} - \vec{r}'$

性质 1.3.3

$$\begin{cases} \nabla\vec{\mathfrak{r}} = \overleftrightarrow{I} = -\nabla'\vec{\mathfrak{r}} \\ \nabla\cdot\vec{\mathfrak{r}} = 3 = -\nabla'\cdot\vec{\mathfrak{r}} \\ \nabla\times\vec{\mathfrak{r}} = 0 = \nabla'\times\vec{\mathfrak{r}} \end{cases}, \qquad \text{以及}\nabla\mathfrak{r} = \hat{\mathfrak{r}} = -\nabla'\mathfrak{r}$$

其它关系：

$$\nabla\varphi(\vec{\mathfrak{r}}) = -\nabla'\varphi(\vec{\mathfrak{r}}), \quad \nabla\varphi(\mathfrak{r}) = \varphi'(\mathfrak{r})\hat{\mathfrak{r}}$$

$$\begin{cases} \nabla\vec{A}(\mathfrak{r}) = (\nabla\mathfrak{r})\vec{A}'(\mathfrak{r}) = \hat{\mathfrak{r}}\vec{A}'(\mathfrak{r}) \\ \nabla\cdot\vec{A}(\mathfrak{r}) = (\nabla\mathfrak{r})\cdot\vec{A}'(\mathfrak{r}) = \hat{\mathfrak{r}}\cdot\vec{A}'(\mathfrak{r}) \\ \nabla\times\vec{A}(\mathfrak{r}) = (\nabla\mathfrak{r})\times\vec{A}'(\mathfrak{r}) = \hat{\mathfrak{r}}\times\vec{A}'(\mathfrak{r}) \end{cases}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \exp\left(-\vec{r}'\cdot\nabla\right)\frac{1}{r} = \left[1 - \vec{r}'\cdot\nabla + \frac{1}{2!}\vec{r}'\vec{r}' : \nabla\nabla + \cdots\right]\frac{1}{r}$$

第 4 节 场的积分

旋度散度梯度的积分定义（与坐标系无关）

$$\begin{cases} \nabla\varphi \triangleq \lim\limits_{V\to 0}\left[\dfrac{1}{V}\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\varphi\right] \\ \nabla\cdot\vec{F} \triangleq \lim\limits_{V\to 0}\left[\dfrac{1}{V}\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{F}\right] \\ \nabla\times\vec{F} \triangleq \lim\limits_{V\to 0}\left[\dfrac{1}{V}\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\times\vec{F}\right] \end{cases}$$

定理 1.4.1: 梯度积分基本定理

算子等式：

$$\int_P^Q d\vec{l}\cdot\nabla\blacksquare = \blacksquare|_P^Q$$

其中，■ 代表着张量（零阶、一阶、二阶）

定理 1.4.2: 散度积分基本定理 (Gauss)

$$\iiint_V dV\nabla\cdot\vec{F} = \oiint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{F}$$

算子等式:

$$\iiint_V dV \nabla\cdot\blacksquare = \oiint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\blacksquare$$

其中，■代表着张量（零阶、一阶、二阶）

定理 1.4.3: Green 公式

(1) 取 $\boldsymbol{F}=\varphi\nabla\psi$，得到格林第一公式:

$$\int_V dV\left[\varphi\nabla^2\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi\right]=\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\varphi\nabla\psi$$

(2) 取 $\boldsymbol{F}=\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi$，得到格林第二公式:

$$\int_V dV\left[\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi\right]=\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\left[\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi\right]$$

(3) 取 $\boldsymbol{F}=\varphi\nabla\varphi$，得到格林第三公式:

$$\int_V dV\left[\varphi\nabla^2\varphi+(\nabla\varphi)^2\right]=\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\varphi\nabla\varphi=\oint_{\partial V}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma$$

定理 1.4.4: 旋度积分基本定理（Stokes）

$$\iint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot(\nabla\times\vec{F})=\oint_{\partial\Sigma} d\vec{l}\cdot\vec{F}\quad\Leftrightarrow\quad\iint_\Sigma(d\vec{\sigma}\times\nabla)\cdot\vec{F}=\oint_{\partial\Sigma} d\vec{l}\cdot\vec{F}$$

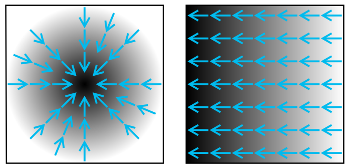
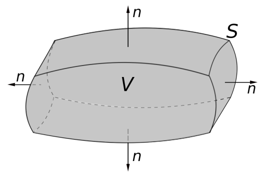
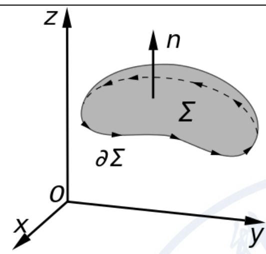
$$\iint_\Sigma(d\vec{\sigma}\times\nabla\blacksquare)=\oint_{\partial\Sigma} d\vec{l}\blacksquare$$

其中，■代表着张量（零阶、一阶、二阶）

证明: 常矢量点乘法证明这三个定理

$$\begin{cases}\vec{F}=\varphi\vec{c} & \int_V dV\nabla\varphi=\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\varphi\\ \vec{F}=\vec{A}\times\vec{c}\Longrightarrow & \int_V dV\nabla\times\vec{A}=\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\times\vec{A}\\ \vec{F}=\vec{T}\cdot\vec{c}\Longrightarrow & \int_V dV\nabla\cdot\vec{T}=\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{T}\end{cases}$$

小结：三大公式

	$\int_P^Q d\vec{l}\cdot\nabla\blacksquare=\blacksquare\vert_P^Q$
	$\iiint_V dV\nabla\cdot\blacksquare=\oiint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\blacksquare$
	$\iint_\Sigma(d\vec{\sigma}\times\nabla\blacksquare)=\oint_{\partial\Sigma}d\vec{l}\blacksquare$

第 5 节　正交曲线坐标系

曲线坐标系的微元

$$d\vec{r}=d\vec{l}=\sum_{a=1}^{3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_a}du_a=\sum_{a=1}^{3}(h_a du_a)\,\hat{u}_a$$

1　基本概念

♣ Lame 系数：

$$h_a\triangleq\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_a}\right|$$

♣ 基矢：

$$\hat{u}_a\triangleq\frac{\partial\vec{r}/\partial u_a}{|\partial\vec{r}/\partial u_a|}=\frac{1}{h_a}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_a}$$

♣ 正交右手坐标系满足（参考1.1.3）

$$\hat{u}_a\cdot\hat{u}_b=\delta_{ab}$$

$$\hat{u}_a\times\hat{u}_b=\sum_{c=1}^{3}\varepsilon_{abc}\hat{u}_c$$

例 1.5.1: 写出球坐标、柱坐标的 Lame 系数

$$
\begin{aligned}
&d\vec{r} = (dr)\hat{r} + (rd\theta)\hat{\theta} + (r\sin\theta d\phi)\hat{\phi} \\
&h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r\sin\theta, \quad H \triangleq h_r h_\theta h_\phi = r^2\sin\theta \\
&d\vec{r} = (ds)\hat{s} + (sd\phi)\hat{\phi} + (dz)\hat{z} \\
&h_s = 1, h_\phi = s, h_z = 1, \quad H \triangleq h_s h_\phi h_z = s
\end{aligned}
$$

2 场的导数、梯度、散度、旋度、拉普拉斯

$$
d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = \sum_{b=1}^{3} (\nabla\varphi)_b\,(h_b du_b) \Rightarrow (\nabla\varphi)_b = \frac{1}{h_b}\frac{\partial\varphi}{\partial u_b}
$$

正交曲线坐标系的梯度算子：$\nabla\varphi = \dfrac{\hat{u}_b}{h_b}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_b}$

正交曲线坐标系的散度：$\nabla\cdot\vec{F} = \dfrac{1}{H}\displaystyle\sum_a \dfrac{\partial}{\partial u_a}\left(\dfrac{HF_a}{h_a}\right)$

正交曲线坐标系的旋度：$\nabla\times\vec{F} = \dfrac{1}{H}\displaystyle\sum_{a,b,c}\left[\varepsilon_{abc}h_a\dfrac{\partial(h_cF_c)}{\partial u_b}\right]\hat{u}_a = \dfrac{1}{H}\begin{vmatrix} h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}$

正交曲线坐标系的拉普拉斯：$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \dfrac{1}{H}\displaystyle\sum_a \dfrac{\partial}{\partial u_a}\left(\dfrac{H}{h_a^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_a}\right)$

例 1.5.2: 球、柱坐标系的梯/散/旋/Δ

$$
\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi}
$$

$$
\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\hat{s} + \frac{1}{s}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}
$$

$$
\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta F_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}
$$

$$
\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(sF_s\right) + \frac{1}{s}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}
$$

$$
\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi \end{vmatrix}
$$

$$
\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{s}\begin{vmatrix} \hat{s} & s\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_s & sF_\phi & F_z \end{vmatrix}
$$

$$
\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}
$$

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)+\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

证明: 矢量分析三剑客

$$\nabla u_a=\frac{\hat{u}_a}{h_a},\quad \nabla\times\frac{\hat{u}_a}{h_a}=0,\quad \nabla\cdot\frac{h_a\hat{u}_a}{H}=0$$

解答: 求矢量场 $\vec{F}=\hat{\phi}\ln s$ 的散度和旋度

写出柱坐标系的 Lame 系数为: $h_s=1,h_\phi=s,h_z=1$ 。

故存在恒等式: $\nabla\cdot\hat{\phi}=0,\nabla\times(\hat{\phi}/s)=0$

散度: $\nabla\cdot(\hat{\phi}\ln s)=(\nabla\cdot\hat{\phi})\ln s+\hat{\phi}\cdot\nabla\ln s=\hat{\phi}\cdot\dfrac{\hat{s}}{s}=0$

旋度: $\nabla\times(\hat{\phi}\ln s)=\nabla\times\left(\dfrac{\hat{\phi}}{s}s\ln s\right)=\left(\nabla\times\dfrac{\hat{\phi}}{s}\right)(s\ln s)+\nabla(s\ln s)\times\dfrac{\hat{\phi}}{s}$

$$=\frac{\partial(s\ln s)}{\partial s}\hat{s}\times\frac{\hat{\phi}}{s}=\frac{\ln s+1}{s}\hat{z}$$

例 1.5.3

流体力学的 Navier-Stokes 方程涉及流速 v 与其旋度矢量积 $\vec{A}=\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$ 的旋度。已知某流体的流速矢量在柱坐标系中表为 $\vec{v}=\hat{z}\ln s$ 。请针对这样的流速计算 $\boldsymbol{A}$ 的旋度和散度

$$\nabla\times\vec{v}=\nabla\times(\hat{z}\ln s)=(\nabla\times\hat{z})\ln s+\nabla\ln s\times\hat{z}=\frac{\partial\ln s}{\partial s}\hat{s}\times\hat{z}=-\frac{\hat{\phi}}{s}$$

$$\Rightarrow\vec{A}=\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})=(\hat{z}\ln s)\times\left(-\frac{\hat{\phi}}{s}\right)=\frac{\ln s}{s}\hat{s}$$

$$\text{散度: }\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot\left(\frac{\hat{s}}{s}\ln s\right)=\left(\nabla\cdot\frac{\hat{s}}{s}\right)\ln s+\frac{\hat{s}}{s}\cdot\nabla\ln s=\frac{1}{s}\frac{\partial\ln s}{\partial s}=\frac{1}{s^2}$$

$$\text{旋度: }\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\left(\hat{s}\frac{\ln s}{s}\right)=(\nabla\times\hat{s})\frac{\ln s}{s}+\left(\nabla\frac{\ln s}{s}\right)\times\hat{s}=0$$

重要的散度和梯度计算 $\hat{r}/r^2$ 的旋度和散度。

$$\nabla\times\hat{r}=0,\quad \nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2\sin\theta}=0$$

(1)旋度(方法一:微分)

$$\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}=\left(\nabla\frac{1}{r^2}\right)\times\hat{r}=-\frac{2\nabla r}{r^3}\times\hat{r}=-\frac{2}{r^3}\hat{r}\times\hat{r}=0$$

(方法二：积分) 利用 Stokes 定理，对任一给定的曲面 Σ 有

$$\int_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\left(\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right)=\oint_{\partial\Sigma}d\vec{l}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=\oint_{\partial\Sigma}\frac{dr}{r^2}=\oint_{\partial\Sigma}d\left(-\frac{1}{r}\right)=0$$
$$\Rightarrow\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}=0$$

(2) 散度 (方法一：微分)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}&=\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2\sin\theta}\sin\theta\right)\\&=\frac{\hat{r}}{r^2\sin\theta}\cdot(\nabla\sin\theta)\\&=\frac{\hat{r}}{r^2\sin\theta}\cdot\hat{\theta}\frac{\partial\sin\theta}{\partial\theta}\\&=\hat{r}\cdot\hat{\theta}\frac{\cot\theta}{r^3}=0\end{aligned}$$

(方法二：积分) 利用高斯定理，对任一给定的三维区域 V 有

$$\begin{aligned}\int_V dV\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}&=\oint_{\partial V}d\vec{\sigma}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}\\&=\oint_{\partial V}d\Omega\\&=\begin{cases}4\pi, & \text{if } O\in V\\ 0, & \text{if } O\notin V\end{cases}\end{aligned}$$

结论：散度不为 0，微分方法和积分方法给出的结论不一致!

第 6 节 Dirac δ-函数

1 一维 δ-函数

定义：一维 Dirac $\delta-$ 函数 $\delta(x-a)$ 定义为: 对于任意行为良好的函数 $\varphi(x)$ ，都有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\varphi(x)dx=\varphi(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d^n}{dx^n}\delta(x-a)\right]\varphi(x)dx=(-1)^n\frac{d^n\varphi}{dx^n}(a)$$

行为良好：$\varphi(x)$ 无穷可微，且当 $x\to\infty$ 时，$\varphi(x)$ 及其所有导数都比 $\frac{1}{x^n}(n=1,2,3,\ldots)$ 更快地趋于零。

性质 1.6.1

$$\text{量纲满足:}[\delta(x)]=\frac{1}{[x]}$$

$$f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$$

$$x\delta(x)=0,\quad x^2\delta(x)=0,\quad x\delta'(x)=-\delta(x)$$

若 $f(x)$ 只有若干简单零点 $\{x_n\}$ ，则

$$\delta[f(x)]=\sum_n \frac{\delta\left(x-x_n\right)}{\left|f^{\prime}\left(x_n\right)\right|},$$

$x_n: f\left(x_n\right)=0, f^{\prime}\left(x_n\right) \neq 0$

由上述性质可以得到，

$$\delta\left(x^2-a^2\right)=\frac{1}{2}[\delta(x+a)+\delta(x-a)]$$

$$\delta(a x)=\frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0$$

性质 1.6.2: 形式定义

$$\left\{\begin{array}{l}\delta\left(x-x_0\right)=0, \quad x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^0 \delta\left(x-x_0\right) d x=1\end{array}\right.$$

或者可以将 $\delta-$ 函数视为普通函数的极限：$\delta(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad$ or $\quad \delta(x)=\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x)$

2　Heaviside 阶跃函数和符号函数

$$\Theta(x)=\begin{cases}1, & x>0 \\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$\delta(x)=\frac{d \Theta(x)}{d x}, \quad \Theta(x)=\int_{-\infty}^x \delta(y) d y$$

$$\operatorname{sgn}(x)=2 \Theta-1=\frac{d|x|}{d x}=\begin{cases}+1, & x>0 \\ -1, & x<0\end{cases}$$

3　三维 δ-函数

三维 Dirac $\delta-$ 函数 $\delta^3(r-a)$ 定义为：

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{a})=\delta\left(x_1-a_1\right) \delta\left(x_2-a_2\right) \delta\left(x_3-a_3\right)$$

即对于任意行为良好的函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$ ，都有

$$\int_V \varphi(\vec{r}) \delta^3(\vec{r}-\vec{a}) d V=\begin{cases}\varphi(\vec{a}), & \vec{a} \in V \\ 0, & \vec{a} \notin V\end{cases}$$

$\delta-$ 函数的 n 阶导数定义为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\vec{r})\left[\partial_i \delta^3(\vec{r}-\vec{a})\right] d x=-\partial_i \varphi(\vec{a})$$

性质 1.6.3

$$\text{量纲: } \left[\delta^3(\vec{r})\right] = 1/L^3$$

$$f(\vec{r})\delta^3(\vec{r}-\vec{a}) = f(\vec{a})\delta^3(\vec{r}-\vec{a})$$

$$x_i\delta(\vec{r}) = 0, \quad x_i x_j\delta(\vec{r}) = 0, \quad x_i\partial_j\delta(\vec{r}) = -\delta_{ij}\delta(\vec{r})$$

若 $f(r)$ 仅有一个简单零点 a ，则

$$\delta^3[\vec{f}(\vec{r})] = \frac{\delta^3(\vec{r}-\vec{a})}{|\det \partial_i f_j(\vec{a})|}$$

$$\begin{aligned}
&\text{点电荷密度:} \quad \rho(\vec{r}) = e\delta^3(\vec{r}) = e\delta(x)\delta(y)\delta(z) \\
&\text{线电荷密度:} \quad \rho(\vec{r}) = \lambda\delta(x)\delta(y) \\
&\text{面电荷密度:} \quad \rho(\vec{r}) = \sigma\delta(z)
\end{aligned}$$

注: 正交曲线坐标系的 δ-函数

$$\delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\delta\left(u_1-u_1'\right)\delta\left(u_2-u_2'\right)\delta\left(u_3-u_3'\right)$$

柱坐标系:

$$\delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) = \frac{1}{s}\delta\left(s-s'\right)\delta\left(\phi-\phi'\right)\delta\left(z-z'\right)$$

球坐标系:

$$\begin{aligned}
\delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta\left(r-r'\right)\delta\left(\theta-\theta'\right)\delta\left(\phi-\phi'\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\delta\left(r-r'\right)\delta\left(\cos\theta-\cos\theta'\right)\delta\left(\phi-\phi'\right)
\end{aligned}$$

4 平方反比矢量场 $\frac{\hat{r}}{r^2}$ 的梯、散、旋

I. 旋度

此结论前面例子中已经给出:

$$\int_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\left(\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 0, \quad \forall\Sigma \quad \Rightarrow \nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2} = 0$$

或者，对于任意区域 V ，有

$$\begin{aligned}
\int_V dV\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2} &= \oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\times\frac{\hat{r}}{r^2} = -\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\times\nabla\frac{1}{r} \\
&= -\oint_{\partial V}(d\vec{\sigma}\times\nabla)\frac{1}{r} = -\oint_{\partial\partial V}\frac{d\vec{l}}{r} \quad = 0
\end{aligned}$$

II. 散度

前面给出了结论:

$$\int_V dV\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = \begin{cases} 4\pi, & O\in V \\ 0, & O\notin V \end{cases}$$

由此得到：

$$\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}=4\pi\delta^3(\vec{r})$$

III. 梯度

(1) 如果 $\boldsymbol{r}\neq 0$ ，则有

$$\begin{aligned}\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}&=\nabla\frac{\vec{r}}{r^3}\\&=\left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\vec{r}+\frac{1}{r^3}(\nabla\vec{r})\\&=\left(-\frac{3\hat{r}}{r^4}\right)\vec{r}+\frac{1}{r^3}\overleftrightarrow{I}\\\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}&=\frac{\overleftrightarrow{I}-3\hat{r}\hat{r}}{r^3},\quad\vec{r}\neq 0\end{aligned}$$

(2) 为了解 $r=0$ 点的性质，在包含原点的小球形区域内积分：

$$\overleftrightarrow{T}\triangleq\int_{r<\varepsilon}dV\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}=\oint_{r=\varepsilon}d\vec{\sigma}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

其中，球面的面元

$$d\vec{\sigma}=\left(r^2d\Omega\right)\hat{r},\quad\hat{r}=n_i\hat{x}_i$$

因此，

$$\overleftrightarrow{T}=\oint\hat{n}\hat{n}d\Omega,\quad T_{ij}=\oint n_in_jd\Omega$$

由对称性可知，$T_{ij}=C\delta_{ij}$ 。由于

$$\begin{cases}T_{ii}=\int n_in_id\Omega=\int d\Omega=4\pi\\T_{ii}=C\delta_{ii}=3C\end{cases}$$

因此, $C=4\pi/3$ 。从而

$$\overleftrightarrow{T}\triangleq\int_{r<\varepsilon}dV\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}=\frac{4\pi}{3}\overleftrightarrow{I}$$

(3) 综上得到:

$$\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}=\frac{\overleftrightarrow{I}-3\hat{r}\hat{r}}{r^3}+\frac{4\pi\delta^3(\vec{r})}{3}\overleftrightarrow{I}$$

重要结论：

$$\begin{aligned}&\nabla\times\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}=0,\quad\nabla\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}=4\pi\delta^3(\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}})\\&\nabla\frac{1}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}=-\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2},\quad\nabla^2\frac{1}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}=-4\pi\delta^3(\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}})\end{aligned}$$

例 1.6.1: 验证 Biot-Savart's Law/ Ampere's Law

(Gauss 定理)

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\nabla\cdot\frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')\times\mathscr{r}}{\mathscr{r}^2}\\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot\left(\nabla\times\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)\\
\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r}) &= 0,\quad \forall\vec{r}
\end{aligned}
$$

(Ampere 环路定理)

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\nabla\times\frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\left[\left(\nabla\cdot\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)\vec{j}\,(\vec{r}\,')-\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot\nabla\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right]\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\left[4\pi\delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)\vec{j}\,(\vec{r}\,')+\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right]
\end{aligned}
$$

右边第一个积分给出 $\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$，下面证明第二个积分等于零。

$$
\int dV'\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}=\int dV'\nabla'\cdot\frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')\,\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}-\int dV'\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\nabla'\cdot\vec{j}\,(\vec{r}\,')
$$

由于稳恒条件 $\nabla'\cdot\vec{j}\,(\vec{r}\,')=0$，右边第二个积分为零。因此

$$
\int dV'\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}=\oint d\vec{\sigma}\,'\cdot\frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')\,\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}
$$

由于电流是局域的，没有电流由边界流进/出，所以

$$
\int dV'\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}=0
$$

因此

$$
\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\mu_0\vec{j}(\vec{r}),\quad\forall\vec{r}
$$

第 7 节　Helmholtz 定理

若已知矢量场的散度和旋度

$$
\nabla\cdot\vec{F}(\vec{r})=D(\vec{r}),\quad\nabla\times\vec{F}(\vec{r})=\vec{C}(\vec{r})
$$

若 $r\to\infty$ 时, $r^2D(\boldsymbol{r})\to 0,\quad r^2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\to 0$，则向量场 $\vec{F}(r)$ 唯一确定, 且可表示为:

$$
\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}) &= -\nabla\varphi(\vec{r})+\nabla\times\vec{A}(\vec{r})\\
&= -\nabla\left[\frac{1}{4\pi}\int dV'\frac{D\left(\vec{r}\,'\right)}{\mathscr{r}}\right]+\nabla\times\left[\frac{1}{4\pi}\int dV'\frac{\vec{C}\left(\vec{r}\,'\right)}{\mathscr{r}}\right]
\end{aligned}
$$

证明: (唯一性) 设有两个解 F_1 和 F_2 均满足

$$
\nabla\cdot\vec{F}_1=D=\nabla\cdot\vec{F}_2,\quad\nabla\times\vec{F}_1=\vec{C}=\nabla\times\vec{F}_2
$$

则 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2$ 满足方程

$$\nabla\cdot\vec{F}=0,\quad \nabla\times\vec{F}=0$$
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{F})=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}=-\nabla^2\vec{F}=0$$

令 $\varphi=F_k$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的某个笛卡尔分量，由 Green III 得到

$$\int dV(\nabla\varphi)^2=\int dV\left[\varphi\nabla^2\varphi+(\nabla\varphi)^2\right]=\oint d\vec{\sigma}\cdot\varphi\nabla\varphi=0$$
$$\nabla\varphi=0,\quad \varphi=C\equiv 0,\quad \vec{F}_1=\vec{F}_2$$

(存在性)

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r})&=\int dV'\vec{F}\left(\vec{r}'\right)\delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\\&=-\frac{1}{4\pi}\int dV'\vec{F}\left(\vec{r}'\right)\nabla^2\frac{1}{\mathscr{r}}\\&=-\frac{1}{4\pi}\int dV'\nabla^2\frac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}\\&=-\frac{1}{4\pi}\int dV'\left\{\nabla\left[\nabla\cdot\frac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}\right]-\nabla\times\left[\nabla\times\frac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}\right]\right\}\end{aligned}$$
$$\Rightarrow\vec{F}(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int dV'\nabla\cdot\frac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int dV'\nabla\times\frac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}$$

由于

$$\begin{cases}\nabla\cdot\dfrac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}=\dfrac{\nabla'\cdot\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}-\nabla'\cdot\dfrac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}=\dfrac{D\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}-\nabla'\cdot\dfrac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}\\ \nabla\times\dfrac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}=\dfrac{\nabla'\times\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}-\nabla'\times\dfrac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}=\dfrac{\vec{C}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}-\nabla'\times\dfrac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r})=&-\frac{1}{4\pi}\nabla\int dV'\frac{D\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int dV'\frac{\vec{C}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}\\&+\frac{1}{4\pi}\nabla\oint d\vec{\sigma}'\cdot\frac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}-\frac{1}{4\pi}\nabla\times\oint d\vec{\sigma}'\times\frac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r})=&-\frac{1}{4\pi}\nabla\int dV'\frac{D\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int dV'\frac{\vec{C}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}\\&+\frac{1}{4\pi}\nabla\oint d\vec{\sigma}'\cdot\frac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}-\frac{1}{4\pi}\nabla\times\oint d\vec{\sigma}'\times\frac{\vec{F}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}\end{aligned}$$

两个体积分收敛要求当 $r\to\infty$ 时

$$r^2D(\vec{r})\to 0,\quad r^2\vec{C}(\vec{r})\to 0$$

从而 $r\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\to 0$，所以，两个面积分等于零。因此

$$\vec{F}(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int dV'\frac{D\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int dV'\frac{\vec{C}\left(\vec{r}'\right)}{\mathscr{r}}$$

例 1.7.1: 已知静磁场满足方程 $\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}), \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$ 试求静电场的分布。

设电荷分布在有限区域。由 Helmholtz 定理

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= -\nabla \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{\nabla' \cdot \vec{B}(\vec{r}')}{\mathscr{r}} + \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{\nabla' \times \vec{B}(\vec{r}')}{\mathscr{r}} \\
&= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\mathscr{r}} \quad = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\mathscr{r}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \nabla \frac{1}{\mathscr{r}} \times \vec{j}(\vec{r}') \quad = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \left(-\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) \times \vec{j}(\vec{r}') \\
&\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}
\end{aligned}$$

第二章 电磁现象的基本规律

第 1 节 电荷守恒

1 电荷的描述

- 点电荷系统 ($\boldsymbol{r}_k(t)$ 为带电粒子 e_k 的路径)

$$\rho(t, \vec{r}) = \sum_k e_k \delta^3 (\vec{r} - \vec{r}_k(t))$$

- 线电荷体密度 (位于 z 轴上)

$$\rho(\vec{r}) = \lambda \delta(x) \delta(y)$$

- 面电荷体密度 (位于 xy 平面内)

$$\rho(\vec{r}) = \sigma \delta(z)$$

关系: $\sigma = \rho d_\perp, \lambda = \rho S_\perp$

2 电流的描述

穿过某个给定曲面的电流强度：单位时间穿过该曲面的电量。常用体电流密度描述电荷流动的快慢及方向：

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \int_\Sigma d\vec{\sigma} \cdot \vec{j}(t, \vec{r})$$

密度为 ρ 的电荷以速度 v 运动时，体电流密度为

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \sum_k \rho_k(t, \vec{r}) \vec{v}_k(t, \vec{r})$$

点电荷系统的电流体密度:

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \sum e_k \vec{v}_k(t) \delta^3 (\vec{r} - \vec{r}_k(t))$$

3 电荷守恒连续性方程

局域守恒：V 内增加的电量等于通过∂V 流进来的电量。

全空间守恒：全空间的总电量守恒 (物理电流在远处足够快地趋于零)

定理 2.1.1: 连续性方程

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

第 2 节 电动力学基本方程

注: 基本运动学量

(1) 带电粒子系统的位形用其位矢 ($3N$ 个变量) 描述

$$\vec{r}_k(t), \quad k = 1, 2, \cdots, N$$

(2) 电磁场的位形用两个矢量函数 (6 个场) 描述 $\begin{cases} \vec{E}(t, \vec{r}) & \text{电场强度} \\ \vec{B}(t, \vec{r}) & \text{磁感应强度 (磁场强度)} \end{cases}$

Lorentz 力：

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$

1 Lorentz 方程

带电粒子 e 在电磁场中运动时，其位矢 r(t) 满足 Lorentz 方程：

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = e(\vec{E} + \vec{\beta} \times c\vec{B})$$

$$\vec{p} \triangleq \gamma m \vec{v}, \quad \gamma \triangleq \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{\beta} \triangleq \frac{\vec{v}}{c}$$

2 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, & [\,\text{E-Gauss}\,] \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, & [\,\text{B-Gauss}\,] \\ \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, & [\,\text{Faraday}\,] \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}, & [\,\text{Ampere - Maxwell}\,] \end{cases}$$

在源给定时，六个未知函数 E、B 满足八个方程,4 个独立的初始条件 $\longrightarrow$ 电磁场有 4 个（一阶）自由度

例 2.2.1: 通过电磁场相互作用的 N 个带电粒子的动力学基本方程

(1) Lorentz 方程

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt}=e_k\left[\vec{E}\left(t,\vec{r}_k\right)+\vec{v}_k\times\vec{B}\left(t,\vec{r}_k\right)\right],\quad k=1,2,\cdots,N$$

(2) Maxwell 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t}+\nabla\times\vec{E}(t,\vec{r})=0, & \nabla\cdot\vec{B}(t,\vec{r})=0,\\ -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t}+\nabla\times\vec{B}(t,\vec{r})=\mu_0\vec{j}(t,\vec{r}), & \nabla\cdot\vec{E}(t,\vec{r})=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})\end{cases}$$

其中

$$\rho(t,\vec{r})=\sum_k e_k\delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}_k(t)\right),\quad \vec{j}(t,\vec{r})=\sum_k e_k\vec{v}_k(t)\delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}_k(t)\right)$$

证明: 电磁相互作用过程中电荷守恒

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{B}&=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E}\\ \nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})&=\mu_0\left[\nabla\cdot\vec{j}+\varepsilon_0\nabla\cdot\left(\partial_t\vec{E}\right)\right]\\ \Rightarrow 0&=\mu_0\left[\nabla\cdot\vec{j}+\varepsilon_0\partial_t(\nabla\cdot\vec{E})\right]\\ 0&=\nabla\cdot\vec{j}+\partial_t\rho\end{aligned}$$

3 边值关系

面电荷、面电流两侧的电磁场满足边值关系 (本质是面电荷、面电流的 Maxwell 方程)

$$\begin{cases}\hat{n}\cdot\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\\ \hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0\\ \hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0\\ \hat{n}\times\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=\mu_0\vec{K}\end{cases}$$

性质 2.2.1: 空间中电荷体密度、电场、磁场

$$\begin{cases}\rho(t,\vec{r})=\rho_+(t,\vec{r})\Theta(z)+\rho_-(t,\vec{r})\Theta(-z)+\sigma(t,x,y)\delta(z)\\ \vec{E}(t,\vec{r})=\vec{E}_+(t,\vec{r})\Theta(z)+\vec{E}_-(t,\vec{r})\Theta(-z)\\ \vec{B}(t,\vec{r})=\vec{B}_+(t,\vec{r})\Theta(z)+\vec{B}_-(t,\vec{r})\Theta(-z)\end{cases}$$

根据

$$\begin{aligned}\nabla\cdot[\vec{f}\Theta(\pm z)]&=(\nabla\cdot\vec{f})\Theta(\pm z)+[\nabla\Theta(\pm z)]\cdot\vec{f}\\ &=(\nabla\cdot\vec{f})\Theta(\pm z)\pm\hat{z}\cdot\vec{f}\delta(z)\end{aligned}$$

Gauss 定理

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\left[\left(\nabla\cdot\vec{E}_+\right)\Theta(z)+\left(\nabla\cdot\vec{E}_-\right)\Theta(-z)\right]+\hat{z}\cdot\left[\vec{E}_+-\vec{E}_-\right]\delta(z) \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}=\left[\frac{\rho_+}{\varepsilon_0}\Theta(z)+\frac{\rho_-}{\varepsilon_0}\Theta(-z)\right]+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta(z) \end{cases} \quad \hat{z}\cdot\left(\vec{E}_+-\vec{E}_-\right)\delta(z)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta(z)$$

Faraday 定律

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=\left[\left(\nabla\times\vec{E}_+\right)\Theta(z)+\left(\nabla\times\vec{E}_-\right)\Theta(-z)\right]+\hat{z}\times\left[\vec{E}_+-\vec{E}_-\right]\delta(z) \\ -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\left(-\frac{\partial\vec{B}_+}{\partial t}\right)\Theta(z)+-\frac{\partial(\vec{B}_-)}{\partial t}\Theta(-z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{z}\times\left(\vec{E}_+-\vec{E}_-\right)\delta(z)=0$$

4 电磁势和两大规范

$$\vec{B}(t,\vec{r})=\nabla\times\vec{A}(t,\vec{r})$$

根据 Faraday 定律

$$0=\nabla\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=\nabla\times\vec{E}+\partial_t(\nabla\times\vec{A})=\nabla\times\left(\vec{E}+\partial_t\vec{A}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(t,\vec{r})=-\nabla\varphi(t,\vec{r})-\partial_t\vec{A}(t,\vec{r})$$

电磁场的六个分量可以用电磁势的四个分量完全描述

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\quad \vec{E}=-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A}$$

注: 矢势的物理含义

矢势的物理含义是：在任意时刻沿任意闭曲线的环量等于该时刻穿过以为边界的的任一曲面的磁通量。

$$\oint_{\partial\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{l}=\iint_{\Sigma}\vec{B}\cdot d\vec{\sigma}$$

规范变换：给定电磁场可以用不同电磁势描述，不同电磁势的关系变换称之为规范 (gauge) 变换

$$\varphi'=\varphi-\partial_t\psi,\quad \vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi$$

规范变换的不变性：不同规范势对应着同一组 (E, B)

（1）Coulomb 规范：规范选择条件为

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

(2) Lorenz 规范: 规范选择条件为

$$L\triangleq\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

注: 自由度

对于离散体系，若需要 2n 个独立的初始条件才能由其动力学方程确定体系的演化，则称该体系具有 n 个自由度。

例 2.2.2: 试求匀速运动点电荷的规范势

$$\begin{cases} \rho(\vec{r},t)=e\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt) \\ \vec{j}(\vec{r},t)=ev\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt)\hat{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Box\varphi=-\frac{e}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt), \\ \Box\vec{A}=-\frac{ev}{\varepsilon_0 c^2}\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt)\hat{z} \end{cases}$$

矢量势只有 z 分量，且匀速运动意味着 φ 和 A 可以写为

$\varphi=\varphi(x,y,\xi),\quad \vec{A}=A(x,y,\xi)\hat{z}=\frac{\vec{v}}{c^2}\varphi,\quad \xi\triangleq z-vt$

令 $\beta=v/c,\varphi$ 满足方程

$$\Box\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\left(1-\beta^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=-\frac{e}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta(\xi)$$

做变量变换

$$\vec{r}=(x,y,z)\rightarrow\quad\vec{r}'=(x',y',z')=(x,y,\gamma\xi),\quad\gamma=\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$$

标量势方程写为 Poisson 方程形式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}=-\frac{\gamma e}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta\left(z'\right)$$

因此，匀速运动点电荷的规范势为

$$\varphi=\frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0 r'}=\frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+\gamma^2(z-vt)^2}},\qquad\vec{A}=\frac{\vec{v}}{c^2}\varphi$$

性质 2.2.2: 匀速运动点电荷的电磁场

$$\begin{aligned}\vec{E}=-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\hat{z}\\&=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\hat{z}\end{aligned}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\left(\frac{\vec{v}}{c^2}\varphi\right)=\nabla\varphi\times\frac{\vec{v}}{c^2}=-\left(-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A}\right)\times\frac{\vec{v}}{c^2}$$

$$\vec{E}=\frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+(z-vt)\hat{z}}{r'^3}$$

$$\vec{B}=\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}$$

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}},\qquad \vec{A}=\frac{\vec{v}}{c^2}\varphi$$
$$\vec{E}=\frac{e\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}},\quad \vec{B}=\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}$$

第 3 节 物质中电磁场基本方程

1 介质的极化

I. 极化强度

$$\vec{P}\triangleq\frac{\sum\vec{p}_{分子}}{\Delta V}=n\vec{p}=nq\vec{l}$$

穿过面元 $d\sigma$ 到区域外的电荷量为：

$$dQ=nq\vec{l}\cdot d\vec{\sigma}=\vec{P}\cdot d\vec{\sigma}$$

任意给定区域 V 内的净极化电荷为

$$Q_P=\int_V\rho_P dV=-\oint_{\partial V}\vec{P}\cdot d\vec{\sigma}$$
$$\Rightarrow\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P},\quad \sigma_P=\hat{n}\cdot\left(\vec{P}_1-\vec{P}_2\right)$$

II. 电位移矢量:

$$\vec{D}\triangleq\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}=\rho_f+\rho_P=\rho_f-\nabla\cdot\vec{P}$$

III. 极化电流：

$$\int_\Sigma\vec{j}_P\cdot d\vec{\sigma}=\int_\Sigma\partial_t\vec{P}\cdot d\vec{\sigma}\Rightarrow\vec{j}_P=\partial_t\vec{P}$$

2 介质的磁化

I. 磁化强度：

$$\vec{M}\triangleq\frac{\sum\vec{m}_{分子}}{\Delta V}=n\vec{m}=nI\vec{S}$$

$$dI_M=nI\vec{S}\cdot d\vec{l}=\vec{M}\cdot d\vec{l}$$
$$I_M=\int_\Sigma\vec{j}_M\cdot d\vec{\sigma}=\oint_{\partial\Sigma}\vec{M}\cdot d\vec{l}$$
$$\Rightarrow\vec{j}_M=\nabla\times\vec{M},\quad \vec{K}_M=\hat{n}\times\left(\vec{M}_2-\vec{M}_1\right)$$

II. $\vec{H}$ 矢量

$$\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}_M+\boldsymbol{j}_P$$

$$\nabla\times\frac{\vec{B}}{\mu_0}=\vec{j}_f+\vec{j}_M+\vec{j}_P+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{j}_f+\nabla\times\vec{M}+\underbrace{\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$$

$$\vec{H}\triangleq\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$$

介质中的 Ampere-Maxwell 定律写为:

$$\nabla\cdot\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

3　物质的 Maxwell 方程和本构方程

(1) 介质中的 Maxwell 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\times\vec{E}=0, & [\textbf{F}]\\ \nabla\times\vec{H}-\partial_t\vec{D}=\vec{j}_f, & [\textbf{AM}]\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f, & [\textbf{EG}]\\ \nabla\cdot\vec{B}=0, & [\textbf{BG}]\end{cases}$$

注: 辅助矢量 D 和 H 不是真正的物理实在量

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P},\quad \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

性质 2.3.1

- 位移电流密度:

$$\vec{j}_D\triangleq\partial_t\vec{D}=\varepsilon_0\partial_t\vec{E}+\partial_t\vec{P}=\varepsilon_0\partial_t\vec{E}+\vec{j}_P$$

- 自由电荷与束缚电荷各自守恒（未考虑电离、复合）:

$$\begin{aligned}&\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\partial_t\vec{D},\quad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\\ &0=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H})=\nabla\cdot\vec{j}_f+\partial_t(\nabla\cdot\vec{D})=\nabla\cdot\vec{j}_f+\partial_t\rho_f\\ &\vec{j}'=\vec{j}_M+\vec{j}_P=\nabla\times\vec{M}+\partial_t\vec{P},\quad \rho'=\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}\\ &\nabla\cdot\vec{j}'=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{M})+\partial_t(\nabla\cdot\vec{P})=-\partial_t\rho'\end{aligned}$$

边值关系:

$$\begin{cases}\hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0, & \hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0\\ \hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{K}_f, & \hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma_f\end{cases}$$

(2) 电磁性能方程/本构关系:

$$\vec{D}=\vec{D}\{\vec{E},\vec{B}\},\quad \vec{H}=\vec{H}\{\vec{E},\vec{B}\}\text{(绝缘介质)}$$

简单介质（静止、线性、各向同性、时谐函数）:

4 自由电荷和传导电流

I. 在绝缘介质中，传导电流为零；内部或表面上的自由电荷或等于零，或给定不变.

若绝缘介质表面均无自由电荷，则边值关系均是齐次的

$$\begin{cases} \hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0, & \hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0 \\ \hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=0, & \hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=0 \end{cases}$$

II. Ohm 型导体

$$\partial_t\rho_f=-\nabla\cdot\vec{j}_f=-\sigma\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho_f$$

$$\rho_f(t,\vec{r})=\rho_f(0,\vec{r})e^{-t/\tau},\quad \tau\triangleq\varepsilon_0/\sigma$$

$$\varepsilon_0\sim10^{-11}\ \mathrm{F/m},\quad \sigma=10^6\sim10^8\ \mathrm{S/m},\Rightarrow\tau=10^{-17}\sim10^{-19}\ \mathrm{s}$$

通常假定导体内部$\rho_f=0$, 即自由电荷只存在于导体表面。

III. 理想导体 $\sigma\to\infty$ 理想导体内部 $\rho_f=0$，自由电荷仅分布于导体表面。

理想导体内部 $\boldsymbol{E}=0$ 。$\vec{E}=\vec{j}_f/\sigma\to0,\quad$ 因为 $\vec{j}_f$ 的有限性

理想导体内部 B 被”冻结”。

$$\partial_t\vec{B}=-\nabla\times\vec{E}=0\Rightarrow\vec{B}(t,\vec{r})=\vec{B}(0,\vec{r})$$

如果我们假设理想导体内部初始磁场为 0，则理想导体表面自动是电磁场的边界。

第 4 节 能量守恒

电磁场能量守恒是一种局域守恒

(1) 能量密度 $w=w(t,r)$: 单位体积的能量;（2）能流密度 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}(t,\boldsymbol{r})$: 沿能量传输方向，大小为单位时间穿过单位横截面积的能量。

1 能量守恒微积分表达

$$-\frac{d}{dt}\int_V w dV=\oint_{\partial V}\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}+\int_V\vec{f}\cdot\vec{v}dV$$

$$-\partial_t w=\nabla\cdot\vec{S}+\vec{f}\cdot\vec{v}\quad\leftrightarrow\quad\vec{f}\cdot\vec{v}=-\partial_t w-\nabla\cdot\vec{S}$$

其中，功率密度

$$\vec{f}\cdot\vec{v}=(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})\cdot\vec{v}=\rho\vec{E}\cdot\vec{v}=\vec{E}\cdot\vec{j}$$

2 证明能量守恒

$$\begin{aligned}
\vec{E}\cdot\vec{j} &= \tfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B}) - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\partial_t\vec{E} \qquad \text{(AM)}\\
&= -\partial_t\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) - \tfrac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \tfrac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) \qquad \text{(Leibnitz)}\\
&= -\partial_t\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) - \tfrac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \tfrac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\partial_t\vec{B} \qquad \text{(F)}\\
&= -\partial_t\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \tfrac{1}{2\mu_0}B^2\right) - \nabla\cdot\left(\tfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\right) \qquad \text{(Leibnitz)}\\
&= -\partial_t w - \nabla\cdot\vec{S}
\end{aligned}$$

3 能流物理量含义

Poynting 定律：

$$-\partial_t w - \nabla\cdot\vec{S} = \vec{E}\cdot\vec{j}$$

电磁场的能量密度

$$w \triangleq \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2 + c^2B^2\right)$$

电磁场的能流密度 (Poynting 矢量)

$$\vec{S} \triangleq \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = c^2\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$$

将 V 取为全空间。若 $r\to\infty$ 时，E、$\boldsymbol{B}\sim O(1/r)$，则

$$\int \vec{E}\cdot\vec{j}dV = -\frac{d}{dt}\int wdV$$

则为全空间能量守恒

$$\frac{d(U+W)}{dt} = 0 \Rightarrow U + W = \text{ const}$$

例 2.4.1: 导体能量守恒

$$\frac{d}{dt}\int_V wdV + \int_V \frac{j^2}{\sigma}dV = -\oint_{\partial V}\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}$$

说明：由边界流进区域的电磁场能量, 一部分使得区域内电磁场的能量增加, 一部分以焦耳热的形式损耗掉。

注: 电磁场的能量密度与能流密度的表达式并不唯一

$$-\partial_t w - \nabla\cdot\vec{S} = \vec{E}\cdot\vec{j} = -\partial_t w' - \nabla\cdot\vec{S}'$$

$$\partial_t\alpha + \nabla\cdot\vec{\beta} = 0, \quad \alpha \triangleq w' - w, \quad \vec{\beta} \triangleq \vec{S}' - \vec{S}$$

$$w' = w + \alpha, \quad \vec{S}' = \vec{S} + \vec{\beta}, \quad \left(\partial_t\alpha + \nabla\cdot\vec{\beta} = 0\right)$$

第 5 节 动量守恒

（1）动量密度: $\vec{g}=\vec{g}(t,\vec{r})$（2） 动量流密度: $\overleftrightarrow{T}=\overleftrightarrow{T}(t,\vec{r})$

$$\vec{g}\triangleq\vec{D}\times\vec{B}$$

$$\overleftrightarrow{T}\triangleq\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\overleftrightarrow{I}-(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H})$$

1 动量守恒微积分表达

$$-\frac{d}{dt}\int_V\vec{g}dV=\oint_{\partial V}d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}+\int_V\vec{f}dV$$
$$-\partial_t\vec{g}=\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}+\vec{f}\leftrightarrow\vec{f}=-\partial_t\vec{g}-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$$

2 证明动量守恒

$$\begin{aligned}\vec{f}=&\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}\\ =&\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\varepsilon_0c^2(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}-\varepsilon_0\partial_t\vec{E}\times\vec{B}\qquad(\text{EG、AM})\\ =&-\partial_t\left(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}\right)+\varepsilon_0\vec{E}\times\partial_t\vec{B}+\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}\qquad(\text{Leibnitz})\\ &+\varepsilon_0c^2(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}\\ =&-\partial_t\left(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}\right)\\ &+\varepsilon_0[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{f}&=-\partial_t\left(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}\right)+\varepsilon_0\nabla\cdot\left(\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}\right)+\varepsilon_0c^2\nabla\cdot\left(\vec{B}\vec{B}-\frac{1}{2}B^2\overleftrightarrow{I}\right)\\ &=-\partial_t\left(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}\right)-\nabla\cdot\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2+c^2B^2\right)-\varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E}+c^2\vec{B}\vec{B}\right)\right]\\ &=-\partial_t\vec{g}-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\end{aligned}$$

3 能流物理量含义

动量流密度张量的物理意义体现在 $d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}=$ 单位时间通过面元 $d\sigma$ 流到区域 V 不部的动量。因而，其分量 T_{ij} 的含义也就明确了

$$T_{ij}\triangleq\hat{x}_i\cdot\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{x}_j$$

按照 Lorentz 方程或者 Newton 第二定律，T 穿过区域 V 边界的动量就是电磁场通过边界施加给外部环境的力:

$$\vec{F}_{\text{exterier}}=\oint_{\partial V}d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

法向力称为压力，切向力称为前切力。V 内的电磁场通过单位面积边界作用于外部环境的力称为应力。

4 Maxwell 应力张量

如果区域 V 内的电磁场动量不随时间变化，则电磁场对区域 V 内的实物粒子施加的力可以写为

$$\vec{F}=\int_V \vec{f}dV=-\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

因此，又将 T 的负值称为 Maxwell 应力张量

$$-\overleftrightarrow{T}=\varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E}+c^2\vec{B}\vec{B}\right)-\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2+c^2B^2\right)\overleftrightarrow{I}$$

考察静电场，此时

$$\overleftrightarrow{T}\triangleq\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}=w_e(\overleftrightarrow{I}-2\hat{E}\hat{E})$$

因此, 为求某个带电体受到的静电力 $\boldsymbol{F}$ ，只需任取一个将该带电体完全包含进来的闭曲面，从而

$$\vec{F}=-\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}=-\oint_{\partial V}(\hat{n}\cdot\overleftrightarrow{T})d\sigma$$

$$\vec{F}=\oint_{\partial V} w_e[2(\hat{n}\cdot\hat{E})\hat{E}-\hat{n}]d\sigma$$

第 6 节 角动量守恒

电磁场 (相对于 O 点) 的角动量密度：$\vec{l}\triangleq\vec{r}\times\vec{g}$

电磁场 (相对于 O 点) 的角动量流密度：$\overleftrightarrow{R}\triangleq-\overleftrightarrow{T}\times\vec{r}$

1 角动量守恒微积分表达

$$\int_V dV(\vec{r}\times\vec{f})=-\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{R}-\frac{d}{dt}\int_V \vec{l}dV \quad\leftrightarrow\quad \vec{r}\times\vec{f}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{R}-\frac{\partial\vec{l}}{\partial t}$$

2 证明角动量守恒

动量守恒定律

$$\vec{f}=-\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$$

用位置矢量叉乘上式，得到

$$\begin{aligned}\vec{r}\times\vec{f}&=-\vec{r}\times\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}-\vec{r}\times\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\\&=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r}\times\vec{g})+\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T}\times\vec{r})\\&=-\partial_t\vec{l}-\nabla\cdot\overleftrightarrow{R}\end{aligned}$$

例 2.6.1

【例】半径为 a 、带电量为 Q 的铁磁性金属球被均匀磁化，磁化强度为 $\boldsymbol{M}$ ，电荷在球表面均匀分布。(1) 试计算球的电磁角动量; (2) 试计算在去磁过程中球获得的力学角动量。

【解】(1) 由 Gauss 定理得到球内电场为零，而

$$\vec{E}_{\text{out}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r},\quad (r>a)$$

可证明: 均匀磁化介质球激发的磁场为

$$\begin{cases}\vec{B}_{\text{in}}=\frac{2}{3}\mu_0\vec{M}, & (r<a)\\ \vec{B}_{\text{out}}=\frac{\mu_0}{3}\frac{a^3}{r^3}[3(\vec{M}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{M}], & (r>a)\end{cases}$$

电磁场只有在球外有非零的动量，密度为

$$\vec{g}=\varepsilon_0\vec{E}_{\text{out}}\times\vec{B}_{\text{out}}=\varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\times\frac{\mu_0 M}{3}\frac{a^3}{r^3}[3(\vec{M}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{M}]$$

$$\Rightarrow\vec{g}=\frac{\mu_0 Qa^3}{12\pi r^5}\vec{M}\times\hat{r},\quad (r>a)$$

电磁场相对于球心的角动量密度为 (球外)

$$\vec{l}_{\text{em}}=\vec{r}\times\vec{g}=\frac{\mu_0 Qa^3}{12\pi r^4}[\hat{r}\times(\vec{M}\times\hat{r})]=\frac{\mu_0 Qa^3}{12\pi r^4}[\vec{M}-(\vec{M}\cdot\hat{r})\hat{r}]$$

$$\Rightarrow\vec{l}_{\text{em}}=\frac{\mu_0 Qa^3}{12\pi r^4}\left[M_i-(M_j n_j n_i)\right]\hat{x}_i,\quad (r>a)$$

其中 n_i 是径向单位矢量的直角分量。

(2) 方法一：去磁过程中磁场减小诱导出的电场对球面上的电荷施加力矩。对称性意味着涡旋电场 $\vec{E}'=E'(r,\theta)\hat{\phi}$，选择以 z 轴为对称轴、半径为 a 的圆 C 作为闭合曲线，由 Faraday 定律有

$$(2\pi a\sin\theta)E'=-\dot{B}_{\text{in}}\,\pi a^2\sin^2\theta\Longrightarrow\vec{E}'=-\frac{a\sin\theta}{2}\dot{B}_{\text{in}}\,\hat{\phi}$$

作用于球上的力矩为

$$\vec{\tau}=\frac{Q}{4\pi a^2}\oint_S d\sigma\left(a\hat{r}\times\vec{E}'\right)=\hat{z}\frac{Q}{4\pi a^2}\oint_S d\sigma\,(aE'\sin\theta)=-\frac{1}{3}Qa^2\dot{\vec{B}}$$

由角动量定理得到

$$\vec{L}_{\text{mech}}=\int_0^\infty\vec{\tau}dt=\frac{Qa^2}{3}\vec{B}_{\text{in}}(t=0)=\frac{2}{9}\mu_0 Qa^2\vec{M}$$

正如角动量守恒所预期的，有 $\vec{L}_{\text{mech}}=\vec{L}_{\text{EM}}$

总的电磁角动量为

$$\begin{aligned}\vec{L}_{\text{em}}&=\int_{r>a}\vec{l}_{\text{em}}dV\\&=\frac{\mu_0 Qa^3}{12\pi}\cdot\int_a^\infty\frac{dr}{r^2}\cdot\left[M_i\oint d\Omega-M_j\oint n_i n_j d\Omega\right]\hat{x}_i\\&=\frac{\mu_0 Qa^3}{12\pi}\cdot\frac{1}{a}\cdot\left(4\pi M_i-\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}M_j\right)\hat{x}_i\end{aligned}$$

因此

$$\vec{L}_{\text{em}}=\frac{2}{9}\mu_0 Qa^2\vec{M}$$

(2) 方法二: 去磁过程中，感应电场对球面上的电荷施加力矩

$$
\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \frac{Q}{4\pi a^2}\oint_{r=a} d\sigma(a\hat{r}\times\vec{E}) \\
&= \frac{Q}{4\pi a}\oint_{r=a} d\vec{\sigma}\times\vec{E} \\
&= \frac{Q}{4\pi a}\int_{r<a} dV(\nabla\times\vec{E}) \\
&= -\frac{Q}{4\pi a}\int_{r<a} dV\partial_t\vec{B} \\
&= \frac{Q}{4\pi a}\frac{d}{dt}\int_{r<a} dV\vec{B}
\end{aligned}
$$

由角动量定理得到金属球最终获得的 (力学) 角动量为

$$\vec{L}_{\text{mech}} = \int_0^\infty \vec{\tau}dt = \left[\frac{Q}{4\pi a}\int_{r<a}\vec{B}dV\right]_{t=0}$$

由于初始时，球内的磁场 B_{in} 均匀，因而

$$\vec{L}_{\text{mech}} = \frac{Q}{4\pi a}\left(\frac{4\pi a^3}{3}\vec{B}_{\text{in}}\right) = \frac{Q}{4\pi a}\left(\frac{4\pi a^3}{3}\frac{2}{3}\mu_0\vec{M}\right) = \frac{2}{9}\mu_0 Q a^2\vec{M}$$

即初始时电磁场的角动量完全转移给实物金属球，金属球最终会绕着初始磁矩的方向转动起来 (设 $Q>0$)。

3 能流物理量含义

第 7 节 物质中的守恒定律

外界对自由电荷的冲量和冲量矩存在类似结果：一部分转化为电磁动量和角动量，另一部分以某种方式转移给介质。

是否存在相应的能量、动量和角动量守恒定理，取决于转移给介质的部分能否写成介质电磁参量 (与其他参量例如温度无关) 的态函数，后者与介质的电磁特性有关。

电磁场对自由电荷的功率密度为

$$
\begin{aligned}
\vec{E}\cdot\vec{j}_f &= \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}) - \vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} && \text{(AM)} \\
&= -\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) + \vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} && \text{(Leibnitz)} \\
\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{j}_f &= -\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) - \left(\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} + \vec{H}\cdot\partial_t\vec{B}\right) && \text{(F)}
\end{aligned}
$$

第三章 狭义相对论

第 1 节 时空性质与 Einstein 假设

1 惯性观测者

惯性标架是一个用来记录事件发生的时间和地点的信息采集系统.
其中，时钟位置可由笛卡尔坐标描述，即是说空间是欧几里德的；时钟是同步的、校准的

2 时空观

空间是均匀的、各向同性的；时间是均匀的

3 Newton 时空观

我们观测时空具有相对性

I. Galileo 变换

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t - \vec{a} \\ t' = t - t_0 \end{cases} \text{or} \begin{cases} x_i' = R_{ij}x_j - v_i t - a_i \\ t' = t - t_0 \end{cases}$$

II. Newton 时空观: 走时（时间间隔）、距离（空间间隔）、同时性是绝对的

加速度是绝对的；速度是相对的，满足 Galileo 速度合成法则

III. 粒子的动力学方程在 Galileo 变换下是不变的

IV. 波动力学：（1）Galileo 变换并不能保持波动方程的形式不变。

（2）机械波的传播离不开介质的存在，通常所说波速是与介质质心保持相对静止的观测者测量的波速。

V. 根据牛顿方程，物体的速度原则上没有上限。但是实验结果显示：当粒子能量持续增加时，其速度将趋于一个确定的值（c）

VI. 光的认识：Newton 粒子说；Huygens/Thomas Young/Fresnel 等波动；Maxwell 的电磁波

注: 以太的验证

Airy/Fizeau/Michelson–Morley 实验

4 相对论假设

性质 3.1.1: 相对论基本假设

(1) 时空假设：空间是均匀的、各向同性的，时间是均匀的。
(2) 光速普适原理：真空中的光速对于所有观测者都具相同的数值。(与光源的运动无关)

$$c = 299792458\ \mathrm{m/s} \approx 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

(3) 相对性原理：物理定律在所有惯性系中都具有形同的形式。(所有惯性系都是等价的)

5 数学符号

1. 逆变时空坐标:

$$x^\alpha \triangleq \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$$

约定

$$\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma, \cdots \in \{0,1,2,3\} \\ i, j, k, \cdots \in \{1,2,3\} \end{cases}$$

记作：$x^i \triangleq (x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow \vec{x}, \quad x^\alpha \triangleq (ct, \vec{x}) \leftrightarrow x$

2. 度规矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 及其逆矩阵 $g^{\alpha\beta}$ 定义为

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{-1, +1, +1, +1\}$$

对于两个指标的量，总是遵循**“左行右列”**。如下面诸 α 均表示行指标，而 β 则为列指标:

$$T^{\alpha\beta}, \quad T_{\alpha\beta}, \quad T^\alpha{}_\beta, \quad T_\alpha{}^\beta$$

3. Einstein 求和约定：若在同一单项式中，同一字母分别以上指标和下指标的形式各出现一次，则默认要对其求和

$$X_\alpha Y^\alpha = X_0 Y^0 + X_1 Y^1 + X_2 Y^2 + X_3 Y^3 = X_0 Y^0 + X_i Y^i$$

$$g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha{}_\beta \triangleq \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha = \beta \\ 0, & \text{if } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

4. 事件的协变时空坐标定义为”上逆下协”

$$\text{协变坐标：} x_\alpha \triangleq g_{\alpha\beta} x^\beta = \left(-x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (-ct, \vec{x})$$

$$\text{逆变坐标：} x^\alpha = g^{\alpha\beta} x_\beta = \left(+x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (+ct, \vec{x})$$

注: 指标的升降

在相对论中，如果一个量可以由另一量乘以若干度规矩阵或其逆得到，这样的两个经常用同一字母表示，二者的差别通过指标上下位置的不同来体现。定义如下：

$$\begin{cases} \text{指标下降:} & g_{\alpha\rho}T^{\cdots\rho\cdots} = T^{\cdots}{}_{\alpha}{}^{\cdots} \\ \text{指标抬升:} & g^{\alpha\rho}T_{\ldots\rho\ldots} = T_{\ldots}{}^{\alpha}{}_{\ldots} \end{cases}$$

- 由于度规矩阵可逆，这样的变换是可逆的。
- 通过指标升降联系的各量用相同的字母表示，而用指标的位置对各量加以区分。

$$g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \qquad g^{\alpha\gamma}\delta^{\beta}_{\gamma} = g^{\alpha\beta}$$

-遵循“左行右列”

例 3.1.1: 已知$T^{\alpha\beta}$，试写出$T^{\alpha}{}_{\beta}, T_{\alpha}{}^{\beta}$ 和$T_{\alpha\beta}$。

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}, T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\alpha}T^{\alpha\beta}g_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} T^{00} & -T^{01} & -T^{02} & -T^{03} \\ -T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ -T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ -T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

$$T^{\alpha}{}_{\beta} = T^{\alpha\beta}g_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} -T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ -T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ -T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ -T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}, T_{\alpha}{}^{\beta} = \begin{pmatrix} -T^{00} & -T^{01} & -T^{02} & -T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

性质 3.1.2: 升降指标法则

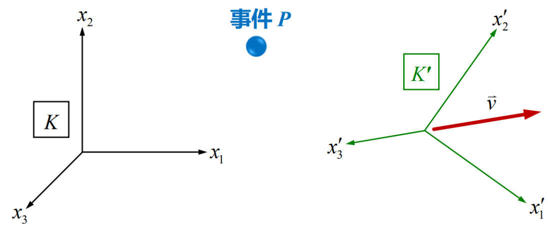
升降指标法则 1：同一个等式可以左右同一个指标上升下降

$$T^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} \Leftrightarrow T_{\alpha\beta} \quad = S_{\alpha\beta} \Leftrightarrow T^{\alpha}{}_{\beta} = S^{\alpha}{}_{\beta} \Leftrightarrow T^{\beta}_{\alpha} \quad = S^{\beta}_{\alpha}$$

升降指标法则 2：一对哑指标，上指标下降的同时下指标抬升，不改变单项式：

$$T^{\cdots\alpha\cdots}{}_{\ldots\alpha\ldots} = T^{\cdots}{}_{\alpha}{}^{\cdots}{}_{\ldots}{}^{\alpha}{}_{\ldots}$$

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}S_{\alpha\gamma} &= \left(g^{\alpha\rho}T_{\rho}\beta\right)\left(g_{\alpha\sigma}S^{\sigma}{}_{\gamma}\right) = \delta^{\rho}_{\sigma}T^{\beta}_{\rho}S^{\sigma}{}_{\gamma} \\ &= T_{\rho}{}^{\beta}S^{\rho}{}_{\gamma} \quad = T_{\alpha}{}^{\beta}S^{\alpha}{}_{\gamma} \end{aligned}$$



第 2 节 时空间隔和相对论基本假设

设有两个标架 K 和 K', K' 相对于 K 以速度 v 运动。任一给定事件 P 在 K 和 K' 中的时空坐标 x^α 和 x'^α 的关系可设为

$$x'^\alpha = f^\alpha(x)$$

性质 3.2.1: 线性性质

由于时空均匀性，改变 K 系中的时空原点不会改变两事件在 K' 系中的时空位移，即对于任意的 b^α ，都有

$$x'^\alpha - y'^\alpha = f^\alpha(x) - f^\alpha(y) = f^\alpha(x+b) - f^\alpha(y+b)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^\beta} = \frac{\partial f^\alpha(x+b)}{\partial x^\beta} = \text{constant} = \Lambda^\alpha{}_\beta$$

此矩阵仅依赖于相对速度，与坐标位置无关。

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha, \quad \Lambda^\alpha{}_\beta = \Lambda^\alpha{}_\beta(\vec{v})$$

定理 3.2.1: 时空间隔

若两个事件在标架 K 中的时空坐标分别为 x^α 和 $x^\alpha + \Delta x^\alpha$ ，则两事件的时空间隔定义为

$$\Delta s^2 \triangleq g_{\rho\sigma}\Delta x^\rho \Delta x^\sigma = |\Delta\vec{x}|^2 - (c\Delta t)^2 = g^{\rho\sigma}\Delta x_\rho \Delta x_\sigma$$

同样的两事件在标架 K' 中的时穴间隔可以写为

$$\Delta s'^2 \triangleq g_{\alpha\beta}\Delta x'^\alpha \Delta x'^\beta = g_{\alpha\beta}\Lambda_{\rho^\alpha}\Lambda_\sigma^\beta \Delta x^\rho \Delta x^\sigma = -M_{\rho\sigma}\Delta x^\rho \Delta x^\sigma$$

即 $\Delta s'^2$ 是 Δx^α 的二次齐次函数，其中

$$M_{\rho\sigma} \triangleq -g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\sigma{}_\beta = M_{\rho\sigma}(\vec{v}), \quad M_{\rho\sigma} = M_{\sigma\rho}$$

光速普适原理意味着任两事件在两个惯性标架中的时空间隔满足关系

$$\Delta s'^2 = M_{00}(\vec{v})\Delta s^2$$

由空间各向同性和速度的反变换得到

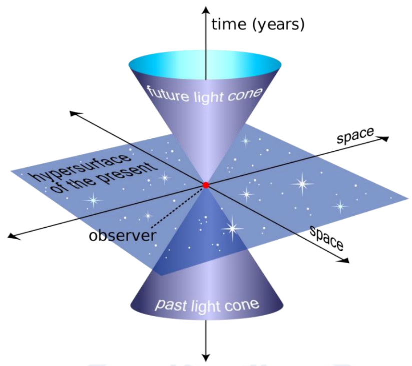
$$M_{00}(|\vec{v}|) = \pm 1$$

定理 3.2.2: 不变间隔

任意两个给定事件的时空间隔与参考系无关

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2$$

此结论来自相对论的前两条假设：(1) 时间均匀性、空间均匀性和各向同性；(2) 光速普适原理。



时空光锥

若 $\Delta s^2 < 0$，则称两事件是类时分割的 (timelike seperated)，两事件可用低于光速的作用联系

若 $\Delta s^2 = 0$，则称两事件是类光分割的 (lightlike seperated)，两事件可用光信号联系

若 $\Delta s^2 > 0$，则称两事件是类空分割的 (spacelike seperated)，两事件的空间距离超过了光在给定时间内传播的距离

性质 3.2.2: 协变时空坐标变换

将逆变时空坐标变换式左右两边同乘 $g_{\mu\alpha}$，并对 α 求和，就得到协变坐标的变换：

$$\begin{aligned} x'^{\alpha} &= \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha} \\ \Rightarrow x'_{\mu} = g_{\mu\alpha} x'^{\alpha} &= g_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} + g_{\mu\alpha} a^{\alpha} \\ &= g_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} g^{\beta\nu} x_{\nu} + a_{\mu} \\ \Rightarrow x'_{\mu} &= \tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu} + a_{\mu} \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\nu} \triangleq g_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} g^{\beta\nu} \leftrightarrow \tilde{\Lambda} = g\Lambda g$$

注: 相对论假设和时空间隔不变性

$$\begin{aligned} ds'^2 = g_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} dx^{\rho} dx^{\sigma} \\ &= g_{\rho\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} \\ \Rightarrow \qquad g_{\rho\sigma} &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \end{aligned}$$

第 3 节 Lorentz 变换与 Poincaré 变换

1 Lorentz 群（即前述变换矩阵）

坐标变换中的 4×4 矩阵 $\Lambda^{\mu}{}_{v}$ 的元素并非任意，而是要满足时空间隔不变所施加的约束。对于任意两个事件，有

$$\begin{aligned} ds'^2 &= g_{\alpha\beta}dx'^{\alpha}dx'^{\beta} = g_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\rho}\Lambda^{\beta}{}_{\sigma}dx^{\rho}dx^{\sigma} \\ &\parallel \\ ds^2 &= g_{\rho\sigma}dx^{\rho}dx^{\sigma} \end{aligned}$$

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\rho}\Lambda^{\beta}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \leftrightarrow \Lambda^{T}g\Lambda = g$$

这意味着矩阵 Λ 的 16 个元素中只有 6 个是独立的。

性质 3.3.1: Lorentz 群满足如下两个条件：

$$|\det\Lambda| = 1, \quad |\Lambda^{0}{}_{0}| \geqslant +1$$

2 正规 Lorentz 变换

Lorentz 群可以分解为四个互不相交的子集:

$$O(1,3) = SO(1,3)_c \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

其中

$$\begin{aligned} SO(1,3)_c &= \{\Lambda \in O(1,3) \mid \det\Lambda = +1, \quad \Lambda^{0}{}_{0} \geq +1 \\ \Sigma_1 &= \{\Lambda \in O(1,3) \mid \det\Lambda = -1, \quad \Lambda^{0}{}_{0} \geq +1 \\ \Sigma_2 &= \{\Lambda \in O(1,3) \mid \det\Lambda = -1, \quad \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1\} \\ \Sigma_3 &= \{\Lambda \in O(1,3) \mid \det\Lambda = +1, \quad \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1\} \end{aligned}$$

- $\Sigma_i(i=1,2,3)$ 可以用 Σ_i 中的一个固定元素 $\Lambda_i \in \Sigma_i$ 乘 $SO(1,3)_c$ 的每一个元素得到。正规 Lorentz 变换包含两类变换：

(1) 转动 (rotation)

$$ct' = ct, \quad x'^{i} = R^{i}{}_{j}x^{j}, \quad R \in SO(3)$$

(2) 推动 (boost，又称为特殊 Lorentz 变换) 如

$$ct' = \gamma(ct-\beta x), \quad x' = \gamma(x-\beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z$$

3 离散变换

$\Sigma_i(i=1,2,3)$ 可以用 Σ_i 中的一个固定元素 $\Lambda_i \in \Sigma_i$ 去乘 $SO(1,3)_c$ 的每一个元素得到。最简单的选择是

$$\Lambda_1 = \mathscr{P}, \quad \Lambda_2 = \mathscr{T}, \quad \Lambda_3 = -I = \mathscr{P}\mathscr{T}$$

其中 P 和 T 分别称为空间反演（宇称）算子和时间反演算子，定义如下

$$\mathscr{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad \mathscr{T}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

4 无穷小 Lorentz 变换

考察如下 Lorentz 矩阵 $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ 所定义的无穷小 Lorentz 变换

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}=\delta^{\alpha}{}_{\beta}+\Omega^{\alpha}{}_{\beta},\quad \left|\Omega^{\alpha}{}_{\beta}\right|<<1,\quad (\forall\alpha,\beta)$$

要求

$$g\Omega=-\Omega^{T}g \text{ or } \Omega_{\mu\nu}=-\Omega_{\nu\mu},\quad \Omega_{\mu\nu}\triangleq g_{\mu\beta}\Omega^{\beta}{}_{\nu}$$

定理 3.3.1: 无穷小 Lorentz 变换

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}=\delta^{\alpha}{}_{\beta}+\Omega^{\alpha}{}_{\beta}=\delta^{\alpha}{}_{\beta}+g^{\alpha\mu}\Omega_{\mu\beta},\quad \Omega_{\mu\nu}=-\Omega_{\mu\nu}$$

依赖于六个任意参数,6 个任意参数可取为

$$\vec{\xi}=\begin{pmatrix}\xi_1, & \xi_2, & \xi_3\end{pmatrix},\quad \theta\hat{n}=\begin{pmatrix}\theta n_1, & \theta n_2, & \theta n_3\end{pmatrix}$$

其定义如下：

$$\Omega_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0&\xi_1&\xi_2&\xi_3\\-\xi_1&0&-\theta n_3&\theta n_2\\-\xi_2&\theta n_3&0&-\theta n_1\\-\xi_3&-\theta n_2&\theta n_3&0\end{pmatrix}$$

由 $\Omega^{\alpha}{}_{\beta}$ 定义的无穷小 Lorentz 为

$$x'^{\alpha}=\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta}=\left(\delta^{\alpha}{}_{\beta}+\Omega^{\alpha}{}_{\beta}\right)x^{\beta}=x^{\alpha}+\Omega^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta}$$

由于矩阵 $\Omega^{\alpha}{}_{\beta}$ 只是将矩阵 $\Omega_{\alpha\beta}$ 的第一行变为负值，因此

$$\begin{pmatrix}ct'\\x'^1\\x'^2\\x'^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ct\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\xi_1&-\xi_2&-\xi_3\\-\xi_1&0&-\theta n_3&\theta n_2\\-\xi_2&\theta n_3&0&-\theta n_1\\-\xi_3&-\theta n_2&\theta n_3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ct\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}$$

即无穷小 Lorentz 变换表示为

$$\begin{cases}ct'=ct-\vec{\xi}\cdot\vec{x}\\x^i=x^i-\xi^i ct+\theta(\hat{n}\times\vec{x})^i\end{cases}$$

一般的无穷小 Lorentz 为

$$\begin{cases}ct'=ct-\vec{\xi}\cdot\vec{x}\\x'^i=x^i-\xi^i ct+\theta(\hat{n}\times\vec{x})^i\end{cases}$$

(1) 若 $\xi=0$ ，则为无穷小转动：

$$ct'=ct,\quad x'^i=x^i+\theta(\hat{n}\times\vec{x})^i$$

(2) 若 $\theta=0$ ，则为无穷小推动：

$$ct'=ct-\vec{\xi}\cdot\vec{x},\quad x'^i=x^i-\xi^i ct$$

其中的 ξ 是无量纲的，称为快度 (rapidity)。

5 有限正规 Lorentz 变换

$$\Lambda=e^{\Omega}$$

其,$\Omega=\left(\Omega^{\alpha}{}_{\beta}\right)$ 满足 $g\Omega=-\Omega^T g$, 即 $\Omega_{\alpha\beta}=-\Omega_{\beta\alpha}$ 。

$$\Omega_{\alpha\beta}=\theta\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\theta&\sin\theta\\0&0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\Omega_{\alpha\beta}=\xi\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}=\begin{pmatrix}\cosh\xi&-\sinh\xi&0&0\\-\sinh\xi&\cosh\xi&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

第 4 节 Минковский 几何

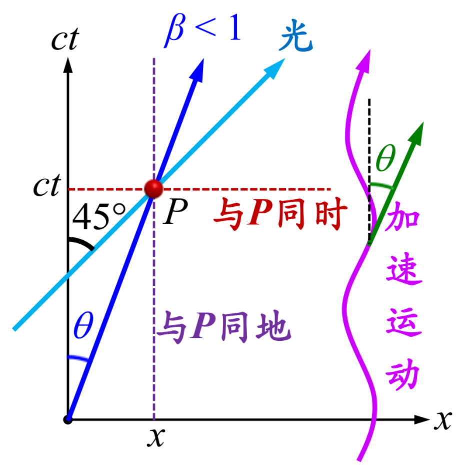
定理 3.4.1: 标架 K

Minkowski 空间系指以时空坐标 (ct,x,y,z) 为直角坐标构建的一个四维伪欧几里德空间。其中

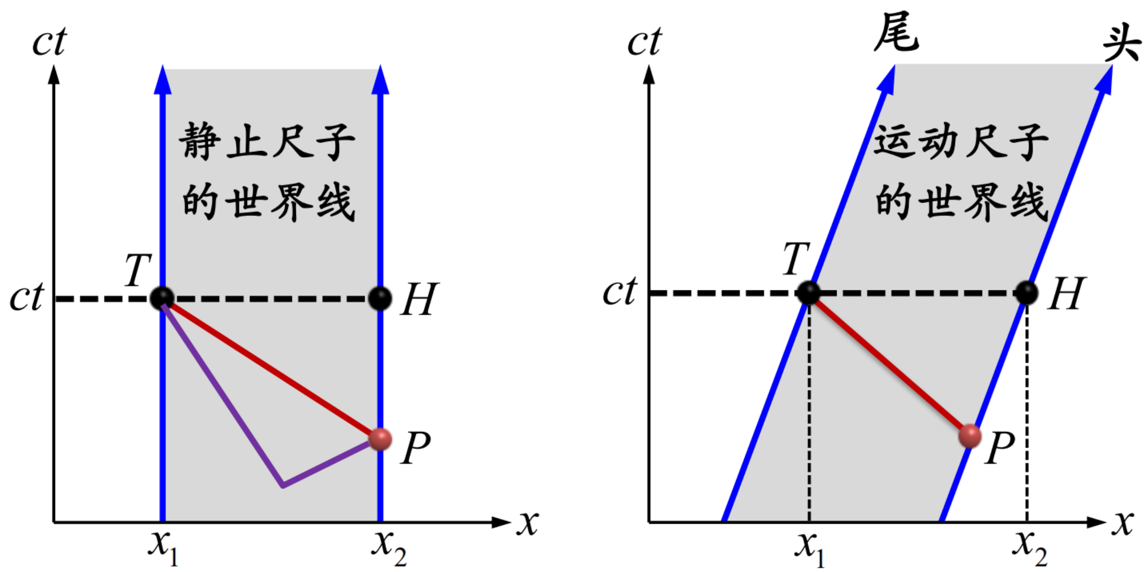
- ♣ 一个事件由 Minkowski 空间中的一个点表示
- ♣ Minkowski 空间中点的一维集合称为世界线。
- ♣ - 世界线在其上某点的切线斜率

$$k=\frac{d(ct)}{dx}=\frac{1}{\beta},\quad\beta\triangleq\frac{v}{c}=\tan\theta$$

- ♣ (1) 世界线越陡, 运动越慢;
  (2) 光的世界线是 45° 线。



ct 轴是 K 系中发生于位置 x ＝ 0 处的事件集合。ct 轴也是 K 系中静止于 x ＝ 0 处的时钟的世界线 x 轴是 K 系中同时发生于时刻 t ＝ 0 的事件集合。平行于 x 轴的世界线是 K 系中同时发生的事件的集合

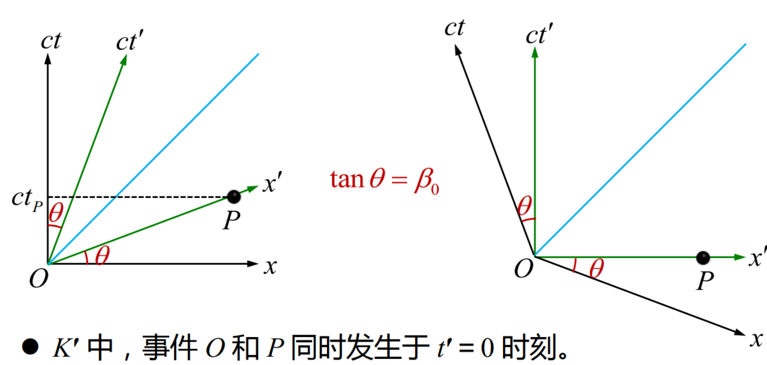


以同时记录的首尾相重点的距离定义尺子的长度 Δl

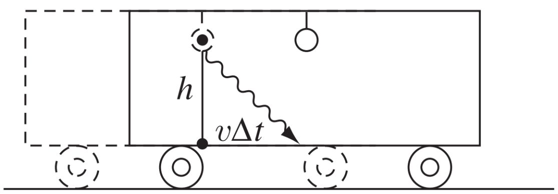
1 标架 K' 的构建

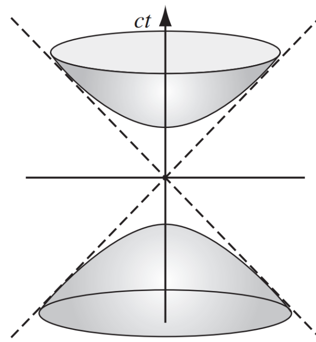
性质 3.4.1: 性质

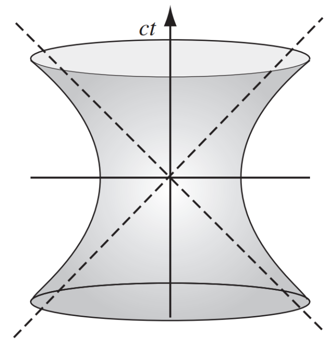
同时的相对性：一个观测者看来同时发生两事件，在另一观测者看来，运动前方事件晚发生。
在 K 中同时发生于垂直于速度 v 的平面内两事件，在 K′ 中也必同时发生于垂直速度 v 平面内。
垂直于运动方向的尺子在两系中所测长度相同。
在标架 K，K′ 中，切线与 $ct'(x)$ 轴平行，上面的事件为 K′ 系中同地点 (时间) 发生的事件集合。



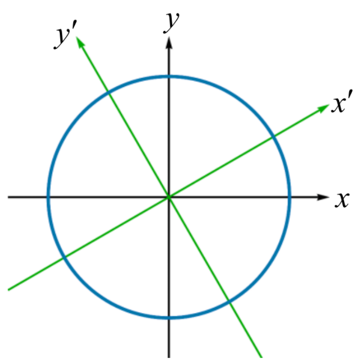
- K' 中，事件 O 和 P 同时发生于 $t' = 0$ 时刻。
- K 中事件 O 发生于 $t = 0$ 时刻，事件 P 发生于时刻 $t_P > 0$。

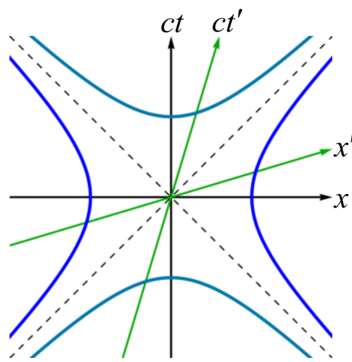






转动 **推动**





2 标度的变换

以 E 点为例，$x=\beta ct,\quad c^2t^2-x^2=1$等等

	A	E	B	F
(ct,x)	$(0,1)$	$(\beta\gamma,\gamma)$	$(1,0)$	$(\gamma,\beta\gamma)$
(ct',x')	$(-\beta\gamma,\gamma)$	$(0,1)$	$(\gamma,-\beta\gamma)$	$(1,0)$

3 Lorentz 变换

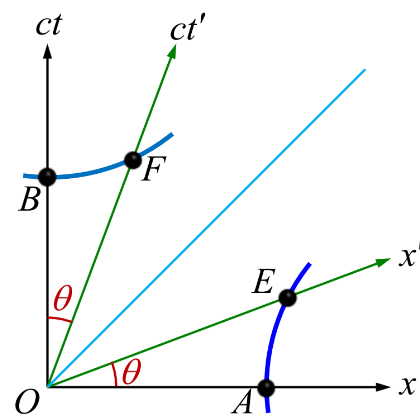
$$\begin{cases} ct'=\gamma(ct-\beta x)\\ x'=\gamma(x-\beta ct)\\ y'=y\\ z'=z \end{cases} \text{x 轴方向为速度方向, 反变换} \begin{cases} ct=\gamma\left(ct'+\beta x'\right)\\ x=\gamma\left(x'+\beta ct'\right)\\ y=y'\\ z=z' \end{cases}$$

或者写出矢量的形式

$$\begin{cases} ct'=\gamma(ct-\vec{\beta}\cdot\vec{r})\\ \vec{r}'_{/\!/}=\gamma\left(\vec{r}_{/\!/}-\vec{\beta}ct\right)\\ \vec{r}'_{\perp}=\vec{r}_{\perp} \end{cases}$$

在标架 K' 中，OE 和 OF 的长度均为 1 。而在标架 K 中，它们的长度均为

$$\sqrt{\gamma^2+\beta^2\gamma^2}=\gamma\sqrt{1+\beta^2}=\gamma/\cos\theta$$



一维 Lorentz 变换可以写为矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi \\ -\sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

其中

$$\gamma=\cosh\xi,\quad \beta\gamma=\sinh\xi,\quad \text{快度：}\ \xi\triangleq\frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

第 5 节 狭义相对论时空观

同时相对性，尺缩和钟慢

1 瞬时共动标架 MCRF

对于运动的粒子，在任一特定时刻，都存在一个特殊的惯性参考系，粒子在该时刻相对于该参考系的速度恰好为零，这样的参考系称为瞬时共动标架 MCRF:Momentarily Comoving Reference Frame

2 原时和原长

均是相对于 MCRF 的固有量

$$d\tau\triangleq\frac{dt}{\gamma}=\frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$$

$$dV=dV_0/\gamma$$

解答: 火车过隧道

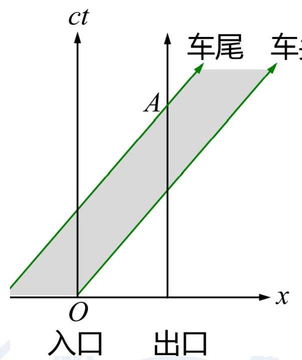
【例】火车原长为 l_0 ，速度为 v ；隧道原长为 L_0 。分别在地面以及火车参考系中求从车头到达隧道入口至车尾离开隧道出口这一过程所经历的时间间隔。

【解】以车头到达隧道入口这一事件作为两系共同的时空原点。车尾离开隧道出口这一事件 A 的坐标为

$$(ct,x)=(ct,L_0)\,,\quad (ct',x')=(ct',-l_0)$$

利用 Lorentz 变换

$$
\begin{gathered}
ct' = \gamma\left(ct - \beta L_0\right), \quad -l_0 = \gamma\left(L_0 - \beta ct\right) \\
\Rightarrow t = \frac{L_0 + l_0/\gamma}{v} = \frac{L_0 + l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v} \\
t' = \frac{l_0 + L_0/\gamma}{v} = \frac{l_0 + L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v}
\end{gathered}
$$

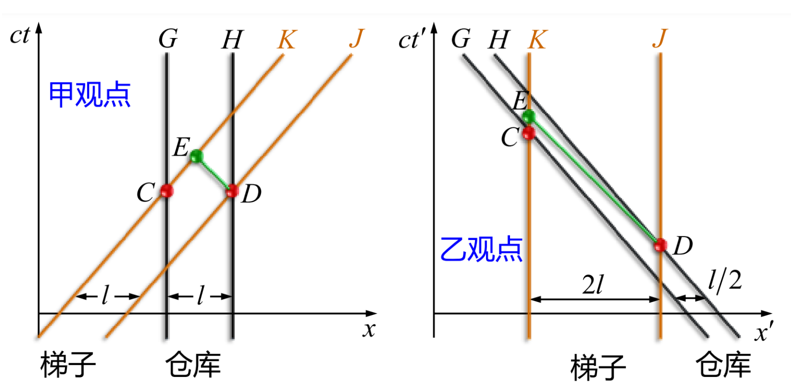


解答: 梯子容纳问题

【例】现有一长为 l 的仓库和一长为 $2l$ 的梯子，设甲相对于地面静止，而乙则拿着梯子匀速 $(\gamma = 2)$ 跑向仓库。

(1) 从甲、乙各自观点看，仓库长度是否足够容纳梯子? (2) 如果仓库的后墙是刚性的，从甲、乙各自观点看，梯子是否可以放入仓库?

【解】(1) 在甲看来，由于仓库长度为 l，而运动梯子长度亦为 l，因此仓库恰好可以容纳梯子；而在乙看来，由于梯子长度为 $2l$，而运动仓库长度为 $l/2$，因此仓库不可能容纳梯子。两种观点皆正确。(2) 甲、乙都认为梯子可以放入仓库。这是由于信号传递的最大速度是光速，设 E 是梯子前端撞上墙壁这一信号以最大的速度 —— 光速传递到梯子后部这一事件。E 这一事件在甲、乙两观测者看来都发生于 C 事件之后。



解答: 双生子佯谬

【例】在 20 岁生日时，双胞胎中的一个 (甲) 留在地球上，另一个 (乙) 则离开家前往距地球 $l=24$ 光年远的行星，到达该行星后乙即返航，旅途中乙的速度大小始终为 $v=(24/25)c$ 。试问当乙回到家中时甲、乙两双胞胎的年龄分别为多大?

【解】$\beta=v/c=24/25, \gamma=\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}=25/7$ - 从甲的观点看，旅行所花时间为 $T=2l/v=50$ 年。所以当乙返回时甲的年龄为 70 岁。- 由于运动时钟变慢，因而从乙的观点看，旅行所花时间为

$$T'=T/\gamma=14 \text{ 年}$$

或者，由于在乙看来，行星与地球的距离只有 l/γ。所以当乙回到家时，甲的年龄为 70 岁，而乙的年龄只有 34 岁。

3 速度和加速度变换

设 K' 系相对于 K 系以速度 v_0 沿着 x 轴正向运动，质点在两系中的速度分别定义为

$$\vec{v} \triangleq \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad \vec{v}' \triangleq \frac{d\vec{x}'}{dt'}$$

直接利用 Lorentz 反变换

$$\begin{cases} cdt=\gamma_0\left(cdt'+\beta_0 dx'\right) \\ dx=\gamma_0\left(dx'+\beta_0 cdt'\right) \\ dy=dy', \quad dz=dz' \end{cases}$$

即给出速度变换关系

$$\beta_x=\frac{\beta_x'+\beta_0}{1+\beta_0\beta_x'}, \quad \beta_{y,z}=\frac{\beta_{y,z}'}{\gamma_0\left(1+\beta_0\beta_x'\right)}$$

$$\vec{\beta}_{/\!/}=\frac{\vec{\beta}_{/\!/}'+\vec{\beta}_0}{1+\vec{\beta}_0\cdot\vec{\beta}'}, \quad \vec{\beta}_{\perp}=\frac{\vec{\beta}_{\perp}'}{\gamma_0\left(1+\vec{\beta}_0\cdot\vec{\beta}'\right)}$$

或者

$$\vec{v}_{/\!/}=\frac{\vec{v}_{/\!/}'+\vec{v}_0}{1+\vec{v}_0\cdot\vec{v}'/c^2}, \quad \vec{v}_{\perp}=\frac{\vec{v}_{\perp}'}{\gamma_0\left(1+\vec{v}_0\cdot\vec{v}'/c^2\right)}$$

如果 $v'\perp v_0$ ，则

$$\vec{v}_{/\!/}=\vec{v}_0, \quad \vec{v}_{\perp}=\frac{\vec{v}'}{\gamma_0}$$

速度方向变化：设粒子在 K, K' 中的速度与 v_0 的夹角分别为 θ 和 θ' 。则

$$\tan\theta=\frac{\beta_{\perp}}{\beta_{/\!/}}=\frac{\beta_{\perp}'}{\gamma_0\left(\beta_{/\!/}'+\beta_0\right)} \Longrightarrow \tan\theta=\frac{\beta'\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0+\beta'\cos\theta'}\sin\theta'$$

光行差公式

$$\Delta\theta \triangleq \theta'-\theta=\beta_0\sin\theta$$

由于

$$\vec{\beta}_{/\!/}=\frac{\vec{\beta}_{/\!/}'+\vec{\beta}_0}{1+\vec{\beta}_0\cdot\vec{\beta}'}, \quad \vec{\beta}_{\perp}=\frac{\vec{\beta}_{\perp}'}{\gamma_0\left(1+\vec{\beta}_0\cdot\vec{\beta}'\right)}, \quad \frac{dt}{dt'}=\gamma_0\left(1+\vec{\beta}_0\cdot\vec{\beta}'\right)$$

得到

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\beta}_{/\!/}}{dt} = \dfrac{1}{dt/dt'}\dfrac{d\vec{\beta}_{/\!/}}{dt'} = \dfrac{1}{c}\dfrac{1}{dt/dt'}\left[\dfrac{\vec{a}'_{/\!/}}{1+\vec{\beta}_0\cdot\vec{\beta}'} - \dfrac{\left(\vec{\beta}'_{/\!/}+\vec{\beta}_0\right)\vec{\beta}_0\cdot\vec{a}'}{\left(1+\vec{\beta}_0\cdot\vec{\beta}'\right)^2}\right] \\ \dfrac{d\vec{\beta}_{\perp}}{dt} = \dfrac{1}{dt/dt'}\dfrac{d\vec{\beta}_{\perp}}{dt'} = \dfrac{1}{c}\dfrac{1}{dt/dt'}\dfrac{1}{\gamma_0}\left[\dfrac{\vec{a}'_{\perp}}{1+\vec{\beta}_0\cdot\vec{\beta}'} - \dfrac{\left(\vec{\beta}_0\cdot\vec{a}'\right)\vec{\beta}'_{\perp}}{\left(1+\vec{\beta}_0\cdot\vec{\beta}'\right)^2}\right] \end{cases}$$

略作整理即可给出加速度的变换关系。所以，粒子在 K 系中的加速度 $\boldsymbol{a}$ 与其在 MCRF 中的加速度 $\boldsymbol{a}'$ 之间满足关系 (在 $\beta'=0$ 情况下)

$$\vec{a}_{/\!/} = \frac{\vec{a}'_{/\!/}}{\gamma^3}, \quad \vec{a}_{\perp} = \frac{\vec{a}'_{\perp}}{\gamma^2} \leftrightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{a}'_{/\!/}}{\gamma^3} + \frac{\vec{a}'_{\perp}}{\gamma^2}$$

第 6 节 Минковский 空间的张量

这里列举的重点概念乃后面相对论运动分析的基础内容。

1 张量的指标

两个 (m,n) 阶张量 R 和 S 的线性组合（其中，a,b 为标量）

$$T = aR + bS$$

仍然是一个 (m,n) 阶张量定义如下:

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n} \triangleq aR^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n} + bS^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}$$

所有(m,n) 阶张量构成了一个4^{m+n} 维线性空间。
利用 Minkowski 度规，一个 (m,n) 阶张量可以通过升、降 k 个指标变为一个 $(m\pm k, n\mp k)$ 阶张量，如:

$$T_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}T^{\mu\nu}{}_{\gamma}$$

2 张量积

(m,n) 阶张量 R 与 (k,l) 阶张量 S 的张量积

$$T = R\otimes S$$

是一个 $(m+k, n+l)$ 阶张量，定义如下

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_n\nu_1\cdots\nu_l} \triangleq R^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}S^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}$$

两个矢量 X^μ 和 Y^ν 的张量积为二阶张量:

$$T^{\mu\nu} = X^\mu\otimes Y^\nu$$

3 缩并和导数

▶ 将 (m,n) 阶的 k 个协变指标和 k 个逆变指标缩并得到一个 $(m-k,n-k)$ 阶张量。(非常重要)
两个矢量 X^α 和 Y^α 的标量积定义为

$$X^\alpha Y_\alpha = -X^0Y^0 + \vec{X}\cdot\vec{Y} = g_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$$

若 $X^\alpha Y_\alpha = 0$，则称两矢量正交。
矢量 X^α 或 X_α 的平方定义为:

$$X^\alpha X_\alpha = g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = |\vec{X}|^2 - \left(X^0\right)^2$$

注: 矢量的平方

(1) 若 $X^a X_\alpha < 0$，则称其为是类时矢量
(2) 若 $X^\alpha X_\alpha = 0$，则称其为是类光矢量 (空矢量), 类光矢量与自身正交。
(3) 若 $X^a X_\alpha > 0$，则称其为是类空矢量

4-梯度算子：对时空坐标的导数构成了 4-矢分量

$$\partial_\alpha \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \leftrightarrow \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right) \Leftrightarrow \partial^\alpha \triangleq \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \leftrightarrow \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right)$$

例 3.6.1: 张量导数举例

$(m+n)$ 阶张量场的导数是 $(m+n+1)$ 阶张量场

$$\partial_\gamma T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)$$

矢量场的散度是标量场

$$\partial_\alpha A^\alpha = \partial_0 A^0 + \nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{c}\partial_t A^0 + \nabla\cdot\vec{A}$$

二阶张量场的散度是矢量场

$$T^{\alpha\beta} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi & \vec{p} \\ \vec{q} & \vec{T} \end{pmatrix} \longrightarrow \partial_\alpha T^{\alpha\beta} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_0\varphi + \nabla\cdot\vec{q} \\ \partial_0\vec{p} + \nabla\cdot\vec{T} \end{pmatrix}$$

达朗贝尔算子是 4-标量算子

$$\square \triangleq \partial_\alpha\partial^\alpha = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

4 4-张量举例

I. 4-速度：$u^\alpha \triangleq \dfrac{dx^\alpha}{d\tau}$

$$u^\alpha = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{dt} \leftrightarrow \gamma\left(c,\frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$

$$u^\alpha \leftrightarrow \gamma(c,\vec{v}) = \gamma c(1,\vec{\beta})$$

在 MCRF(瞬时共动参考系）中，$u'^\alpha \leftrightarrow (c,\mathbf{0})$，故 4-速度的平方为$u_\alpha u^\alpha = -c^2$ 。

解答: 试利用 4- 速度推导相对论的速度合成法则。

4-速度满足 Lorentz 变换

$$\gamma c\begin{pmatrix}1\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_0 & \beta_0\gamma_0 & 0 & 0\\ \beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\gamma' c\begin{pmatrix}1\\ \beta_1'\\ \beta_2'\\ \beta_3'\end{pmatrix}$$

即有

$$\begin{cases}\gamma=\gamma_0\gamma'(1+\beta_0\beta_1')\\ \gamma\beta_1=\gamma_0\gamma'(\beta_0+\beta_1')\\ \gamma\beta_{2,3}=\gamma'\beta_{2,3}'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta_1=\dfrac{\beta_0+\beta_1'}{1+\beta_0\beta_1'}\\ \beta_{2,3}=\dfrac{\beta_{2,3}'}{\gamma_0\left(1+\beta_0\beta_1'\right)}\end{cases}$$

II. 4-加速度: $A^\alpha\triangleq\dfrac{du^\alpha}{d\tau}$

4-加速度与 3− 加速度的关系

$$A^\alpha=\frac{dt}{d\tau}\frac{du^\alpha}{dt}\leftrightarrow\gamma\frac{d}{dt}(\gamma c,\gamma\vec{v}),\quad\frac{d\gamma}{dt}=\frac{1}{c}\gamma^3(\vec{\beta}\cdot\vec{a})$$

$$A^\alpha\leftrightarrow\gamma^4\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a},\left(1-\beta^2\right)\vec{a}+(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\vec{a}\right)=\gamma^4(\vec{\beta}\cdot\vec{a},\vec{a}-\vec{\beta}\times(\vec{a}\times\vec{\beta}))$$

在 MCRF 中，$A'^\alpha=(0,\boldsymbol{a}')$，故 4-加速度的平方 $A_\alpha A^\alpha=-a'^2$，4-加速度与 4−速度正交: $u_\alpha A^\alpha=0$

解答: 试将 K 系中的加速度 a 用 MCRF 中的加速度 a' 表示

将 $\boldsymbol{\beta}$ 的方向取为 x^1 轴正向 (MCRF 相对于 K 系以速度 $v=c\beta$ 运动)，从而

$$\begin{aligned}A^\alpha&\leftrightarrow\gamma^4\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a},\left(1-\beta^2\right)\vec{a}+(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\vec{a}\right)\\&=\left(\gamma^4\beta a_1,\quad\gamma^4 a_1,\quad\gamma^2 a_2,\quad\gamma^2 a_3\right)\end{aligned}$$

4-加速度满足 Lorentz 变换:

$$\begin{pmatrix}\gamma^4\beta a_1\\ \gamma^4 a_1\\ \gamma^2 a_2\\ \gamma^2 a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma & 0 & 0\\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ a_1'\\ a_2'\\ a_3'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_1=a_1'/\gamma^3\\ a_2=a_2'/\gamma^2\\ a_3=a_3'/\gamma^2\end{cases}$$

III. 4-动量: 静止质量为 m 的粒子的 4-动量定义为

$$p^\alpha\triangleq mu^\alpha=m\frac{dx^\alpha}{d\tau}\leftrightarrow\gamma mc(1,\vec{\beta})=\left(\frac{\mathscr{E}}{c},\vec{p}\right)$$

其中，$\mathscr{E}$ 和 p 分别称为粒子的相对论能量和动量:

$$\mathscr{E}\triangleq\gamma mc^2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad\vec{p}\triangleq\gamma m\vec{v}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

由定义可知

$$\mathscr{E}^2 = |\vec{p}|^2c^2 + m^2c^4, \quad \vec{\beta} = c\vec{p}/\mathscr{E}$$

其中第一个关系也可利用 4-动量的平方给出

$$p^\alpha p_\alpha \triangleq |\vec{p}|^2 - \mathscr{E}^2/c^2 = -m^2c^2$$

IV. 4-波矢：对于光子 (零质量粒子)，前面 4-动量定义失效。实验表明

$$\mathscr{E} = |\vec{p}|c, \quad \vec{\beta} = \vec{p}/\varepsilon = c\hat{k}$$

因此，零质量粒子的 4-动量可写为

$$p^\alpha \leftrightarrow (\mathscr{E}/c, \vec{p}) = (|\vec{p}|, \vec{p}), \quad p^\alpha p_\alpha = 0$$

在量子力学中

$$\mathscr{E} = hf = \hbar\omega, \quad p = h/\lambda = \hbar k$$

利用关系 $\lambda = c/f$ ，光子的 4-动量又可以表示为 $p^\alpha = \hbar k^\alpha$ ，其中 k^α 称为4-波矢

$$k^\alpha \leftrightarrow (\omega/c, \vec{k}) = (|\vec{k}|, \vec{k}), \quad k^\alpha k_\alpha = 0 \Leftrightarrow \omega = |\vec{k}|c$$

V. Levi—Civita 张量：

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \triangleq \begin{cases} +1, & \text{如果}\alpha\beta\gamma\delta\text{ 是偶排列}0,1,2,3 \\ -1, & \text{如果}\alpha\beta\gamma\delta\text{ 是奇排列}3,2,1,0 \\ 0, & \text{如果两个指标相同} \end{cases}$$

交换上下标符号改变

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{0123} = -1$$

$$\varepsilon^{0ijk} = \varepsilon^{ijk}, \quad \varepsilon_{0ijk} = -\varepsilon_{ijk}$$

Levi-Civita 张量是完全又对称的四阶张量。实际上它是宇称和时间反演下的赝张量

VI. 对称和反对称张量：对于二阶张量：(1) 若 $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ ，则称 S 为对称张量。(2) 若 $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ ，则称 A 为对称张量。

任一二阶张量 $T^{\mu\nu}$ 都可表为其对称部分与反对称部分之和

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}\right) = T^{(\mu\nu)} + T^{[\mu\nu]}$$

如果 $(n,0)$ 阶张量 $A^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 在任一对指标交换下是 (反) 对称的，则称其为完全 (反) 对称张量。

$(n,0)$ 阶张量的完全反对称部分：

$$T^{[\alpha_1\cdots\alpha_n]} = \frac{1}{n!}\left(T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} - T^{\alpha_2\alpha_1\cdots\alpha_n} + \cdots\right)$$

(1) 若 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 的任一对指标对称，则其反对称部分为零。

(2) 反对称张量 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 与一般张量 $A^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 的缩并满足:

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}A_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = T^{[\alpha_1\cdots\alpha_n]}A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$$

$(n,0)$ 阶张量的完全对称部分：

$$T^{(\alpha_1\cdots\alpha_n)} = \frac{1}{n!}\left(T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} + T^{\alpha_2\alpha_1\cdots\alpha_n} + \cdots\right)$$

VII. **对偶张量**：一个反对称张量 $A^{\alpha\beta}$ 的对偶张量定义为:

$$\tilde{A}^{\alpha\beta} \triangleq \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}A_{\mu\nu}$$

$$A^{\alpha\beta} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & 0 & a_3 & -a_2 \\ -p_2 & -a_3 & 0 & a_1 \\ -p_3 & a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \\ -\vec{p} & \vec{a} \end{pmatrix} = \{\vec{p}, \vec{a}\}, \quad a^{ij} \triangleq \varepsilon^{ijk}a_k$$

得到

$$A_{\alpha\beta} = \{-\vec{p}, \vec{a}\}, \quad \tilde{A}^{\alpha\beta} = \{\vec{a}, -\vec{p}\}, \quad \tilde{\tilde{A}}^{\alpha\beta} = -\{\vec{p}, \vec{a}\} = -A^{\alpha\beta}$$

例 3.6.2: 矢量X^α 与反对称张量$A^{\alpha\beta}$ 的缩并

$$\begin{aligned} X_\alpha A^{\alpha\beta} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} X_0, & \vec{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \\ -\vec{p} & \vec{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\vec{X}\cdot\vec{p}, & X_0\vec{p} + \vec{X}\cdot\vec{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由于

$$(\vec{X}\cdot\vec{a})^i = X_j a^{ji} = \varepsilon^{jik}X_j a_k = -(\vec{X}\times\vec{a})^i$$

所以

$$X_\alpha A^{\alpha\beta} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\vec{X}\cdot\vec{p}, & X_0\vec{p} - \vec{X}\times\vec{a} \end{pmatrix}$$

例 3.6.3: 反对称张量自身缩并

$$A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \\ -\vec{p} & \vec{a} \end{pmatrix} \text{缩并} \begin{pmatrix} 0 & -\vec{p} \\ \vec{p} & -\vec{a} \end{pmatrix} = -\vec{p}^2 - \vec{p}^2 - \overleftrightarrow{a}\overleftrightarrow{a} = 2\left(a^2 - p^2\right)$$

$$\because \overleftrightarrow{a}\overleftrightarrow{a} = \varepsilon_{ijk}a_k\varepsilon_{ijl}a_l = -2\delta_{kl}a_k a_l = -2a^2$$

VIII. **赝张量**：宇称下的 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ 阶赝张量与 (m,n) 阶张量唯一的差别是，在宇称变换 $x' = Px$ (即 $t' = t, x' = -x$) 下，赝张量如下变换:

$$T'^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}(Px) = -\mathscr{P}^{\alpha_1}_{\rho_1}\cdots\mathscr{P}^{\alpha_m}_{\rho_m}\tilde{\mathscr{P}}^{\sigma_1}_{\beta_1}\cdots\tilde{\mathscr{P}}^{\sigma_n}_{\beta_n}T^{\rho_1\cdots\rho_m}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_n}(x)$$

空间反演下的赝标量

$$\varphi'(\mathscr{P}x) = -\varphi(x)$$

空间反演下的赝矢量

$$X'^0\left(P_x\right) = -X^0(x), \quad \vec{X}'\left(P_x\right) = \vec{X}(x)$$

5 不变（迷向）张量

证明: 证明 Levi–Civita 张量是空间反演和时间反演下的赝张量

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\nu}\Lambda^{\gamma}_{\rho}\Lambda^{\delta}_{\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=(\det\Lambda)\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

正规 Lorentz 变换下, $\det\Lambda=+1$ ，故

$$\varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta}=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=\Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\nu}\Lambda^{\gamma}_{\rho}\Lambda^{\delta}_{\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

空间反演和时间反演下，均有 $\det\Lambda=-1$ ，故

$$\varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta}=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=-\Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{v}\Lambda^{\gamma}_{\rho}\Lambda^{\delta}_{\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

（1）4-位移 dx^{μ} 是空间反演和时间反演下的矢量。

(2) 原时是 $d\tau$ 是空间反演的标量、时间反演下的赝标量。

$$d\tau=dt/\gamma=\sqrt{1-\beta^2}dt$$

(3) 4-速度 $u^{\mu}=dx^{\mu}/d\tau$，4-动量 $p^{\mu}=mu^{\mu}$ 是空间反演下的矢量、时间反演下赝矢量。

$$\mathscr{P}:u'^{\mu}=\mathscr{P}^{\mu}_{v}u^{v},\quad T:u'^{\mu}=-\mathscr{T}^{\mu}_{v}u^{v}$$

$$\Longrightarrow\mathscr{P}:\left\{\begin{array}{l}u'^{0}=u^{0}\\ \vec{u}'=-\vec{u}\end{array}\right.,\quad T:\left\{\begin{array}{l}u'^{0}=u^{0}\\ \vec{u}'=-\vec{u}\end{array}\right.$$

（4）4-加速度 $w^{\mu}=d^2x^{\mu}/d\tau^2$ 是空间、时间反演下的矢量。

定理 3.6.1

Lorentz 变换下的不变张量 (迷向张量) 是指在正规 Lorentz 变换下，分量不变的张量。【定理】Lorentz 变换下，基本不变张量有三个 $g^{\alpha\beta},\quad g_{\alpha\beta},\quad\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 一个在 Lorentz 变换下不变的张量必然是这三个基本不变张量的代数组合。【推论】不存在奇数 $(m+n)$ 阶的不变张量。

例 3.6.4: 二阶偶数阶张量不变张量

二阶不变张量具有下面的形式:

$$T^{\alpha\beta}=ag^{\alpha\beta},\quad T_{\alpha\beta}=ag_{\alpha\beta},\quad T^{\alpha}{}_{\beta}=a\delta^{\alpha}_{\beta}=ag^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}$$

$(4,0)$ 阶不变张量的最一般表达式为:

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta}=a_1g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}+a_2g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}+a_3g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}+a_4\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

（1）若 $Ta\beta\gamma\delta$ 是完全反对称的，则 $a_1=a_2=a_3=0$ 。(2) 若 $T\nabla\beta\gamma\delta$ 关于 α 和 β 反对称，则 $a_1=0$ 且 $a_2=-a_3$ 。（3）若 $T^{a\beta\gamma\gamma\delta}$ 是完全对称的，则 $a_4=0$ 且 $a_1=a_2=a_3$ 。（4）若 $T^{q\gamma\gamma\delta}$ 关于 α 和 β 对称，则 $a_4=0$ 且 $a_2=a_3$ 。

第四章 电磁规律的协变性

第 1 节 协变的电磁场方程

1 电荷密度

设空间中有电荷、电流分布，在 K 系中

$$\rho \triangleq \frac{dQ}{dV}, \quad \vec{j} \triangleq \rho\vec{v}$$

自身系是唯一的，自身系中的电荷密度 ρ_0 和体积元 dV_0 天然地是两个 4-标量，分别称为固有电荷密度和固有体积元，有

$$\rho_0 \triangleq \frac{dQ_0}{dV_0}$$

- 鉴于运动方向长度缩短，有

$$dV = dV_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = dV_0/\gamma \Rightarrow \rho = \gamma\rho_0$$

4-电流密度矢量 电荷密度ρ 与电流密度j 构成一个四维矢量,

$$j^\alpha \triangleq \rho_0 u^\alpha = \left(j^0, \vec{j}\right) = (\rho c, \vec{j}) = (\rho c, \rho\vec{v}) = \rho_0\gamma(c, \vec{v})$$

2 连续性方程和守恒荷

描述电荷守恒的连续性方程可以写为协变形式:

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{j} + \partial_t\rho = 0$$

局域守恒的含义:

$$\frac{dQ_V}{dt} = -\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}, \quad Q_V \triangleq \frac{1}{c}\int_V j^0 d^3x$$

全空间的电量是守恒的:

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad Q \triangleq \frac{1}{c}\int j^0 d^3x = \lim_{r\to\infty} Q_V$$

通常将满足连续性方程的 j^α 称为守恒流，而其时间分量对全空间的积分（除 c）称为守恒荷
若 j^α 为守恒流 (即满足连续性方程 $\partial_a j^\alpha = 0$)，则守恒荷

$$Q(t) = \frac{1}{c}\int j^0(t, \bar{x})d^3x$$

是一个 4-标量。简单起见，设 j^α 满足渐近条件:

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \left[|\vec{x}|^3 j^\alpha(t, \vec{x})\right] = 0, \quad (\forall t)$$

证明: 连续性方程带来的 Q 守恒

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{c}\int j^0(0,\vec{x})d^3x \\
&= \frac{1}{c^2}\int j^0(x)\delta(t)d^4x \\
&= \frac{1}{c}\int j^0(x)\partial_0\Theta(t)d^4x \\
&= \frac{1}{c}\int j^\alpha(x)\partial_\alpha\Theta(t)d^4x
\end{aligned}
$$

在正规 Lorentz 变换 $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta \quad (\Lambda^0{}_0 \geq 1)$ 下

$$
Q' = \frac{1}{c}\int j'^\alpha\left(x'\right)\partial'_\alpha\Theta\left(t'\right)d^4x'
$$

由于 $j^\alpha\partial_\alpha$ 是标量算子，而 $\det\left(\Lambda^\alpha{}_\beta\right) = 1$ ，因而

$$
Q' = \frac{1}{c}\int j^\alpha(x)\partial_\alpha\Theta\left(t'\right)d^4x
$$

其中 t' 由下式确定:

$$
ct' = \Lambda^0_0 ct + \Lambda^0_i x^i, \quad \left(\Lambda^0_0 \geq 1\right)
$$

因此，Q' 与 Q 之差可以写为

$$
Q' - Q = \frac{1}{c}\int j^\alpha(x)\partial_\alpha\left[\Theta\left(t'\right) - \Theta(t)\right]d^4x
$$

利用连续性方程，给出

$$
\begin{aligned}
Q' - Q &= \frac{1}{c}\int \partial_\alpha\left\{j^\alpha(x)\left[\Theta\left(t'\right) - \Theta(t)\right]\right\}d^4x \\
&= \frac{1}{c}\int \partial_0\left\{j^0(x)\left[\Theta\left(t'\right) - \Theta(t)\right]\right\}cdtd^3x \\
&+ \frac{1}{c}\int \nabla\cdot\left\{\vec{j}(x)\left[\Theta\left(t'\right) - \Theta(t)\right]\right\}cdtd^3x
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
Q' - Q =& \frac{1}{c}\int \left\{j^0(x)\left[\Theta\left(t'\right) - \Theta(t)\right]\right\}_{t=-\infty}^{t=+\infty}d^3x \\
&+ \int dt\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{j}(x)\left[\Theta\left(t'\right) - \Theta(t)\right]
\end{aligned}
$$

利用 $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ 以及渐近条件，就得到右边两项皆为零。故

$$
Q' = Q
$$

即全空间的电量在正规 Lorentz 变换下是不变的。

注: 带电系统电流密度

在 Lorentz 变换下有

$$j'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} j^{\beta}$$

3 场方程

注

4-张量的定义以及各种矩阵表示和运算法则见3.6.4

经典力学中，对于自由度为 N 的体系，其位形需要 N 个广义坐标 q_k 描述，而确定体系演化的运动方程则是 N 个二阶微分方程，其典型形式是

$$\vec{q}_k + \cdots \propto Q_k$$

其中，Q_k 为广义力。我们目前研究的场起着广义坐标的作用，而 j^{α} 则起着广义力的作用，因此，运动方程的形式应该是

$$\partial_t^2 A + \cdots \propto j^{\alpha}$$

其中，A 可以是某阶的张量场。这样的方程不满足相对性原理, 注定不可能是正确的。
为了符合相对性原理，有必要将前面的方程改写为

$$\partial_{\beta}\partial^{\beta} A + \cdots \propto j^{\alpha}$$

由于 j^{α} 是 4-矢, 故 A 须也是一个 4-矢，将其记为 A^{α} 。若坚持微分方程阶数不超过二阶的话，则可以用 A^{α} 构造出来的、关于 A^{α} 为线性、且微分算符 ∂^{α} 不超过两个的 4-矢只有

$$A^{\beta}, \quad \partial^{\alpha}\partial_{\alpha} A^{\beta}, \partial^{\beta}\partial_{\alpha}\Lambda^{\alpha}$$

故以 j^{α} 为源的场 A^{α} 满足的最一般二阶线性偏微分方程是

$$\partial_{\alpha}\partial^{\alpha} A^{\beta} + a\partial^{\beta}\partial_{\alpha} A^{\alpha} + bA^{\beta} = -\mu_0 j^{\beta}$$

解答: 系数 b,a 确定

在无源情形 $(j^{\alpha} = 0)$ 下，方程为

$$\partial_{\alpha}\partial^{\alpha} A^{\beta} + a\partial^{\beta}\partial_{\alpha} A^{\alpha} + bA^{\beta} = 0$$

容易验证该方程的一个解是

$$A^{\beta} = (0, \quad \cos(kz - \omega t), \quad 0, \quad 0), \quad \omega \triangleq c\sqrt{k^2 - b}$$

它表示沿着 z 轴方向传播的单色平面波。该单色平面波的群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2 - b}}$$

为了保证群速度不大于光速, b 不能取负数。考察一个静态特例 ($j^0 \neq 0$⊠$\boldsymbol{j} = 0$) : 空间中只有电荷而无电流，且电荷分布具有球对称性。不妨设 $\boldsymbol{A} = 0$ ，而 A^0 满足:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^0 + a\partial^0 \partial_\alpha A^\alpha + bA^0 = -\mu_0 j^0 = -\mu_0 \rho c$$

忽略对时间的导数项后，方程写为 $\nabla^2 A^0 + bA^0 = -\mu_0 \rho c$
根据电荷分布对称性，设 A^0 只依赖于径向距离 r ，即

$$A^0 = A^0(r)$$

利用球坐标系下 Lapalce 算子的表达式，可以将方程写为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial A^0}{\partial r}\right) + bA^0 = \frac{\partial^2 A^0}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A^0}{\partial r} + bA^0 = -\mu_0 \rho c$$

因此，电荷之外区域的方程可以写为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rA^0\right) + \frac{b}{r}\left(rA^0\right) = 0 \leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rA^0\right) + b\left(rA^0\right) = 0$$

该方程有两个独立的解:

$$A^0 \propto \frac{e^{\pm\sqrt{-br}}}{r}$$

其中，只有负指数的解是适用的。该解表明场在电荷分布之外随距离指数衰减。电磁作用是长程力意味着 $b = 0$. 由于 $b = 0$ ，因而场方程简化为了

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta + a\partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha = -\mu_0 j^\beta$$

为确定 a ，将上式两边用 ∂_β 作用:

$$\partial_\beta\left(\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta + a\partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha\right) = -\mu_0 \partial_\beta j^\beta$$

利用连续性方程就得到:

$$(1+a)\partial_\alpha \partial^\alpha \left(\partial_\beta A^\beta\right) = 0$$

为使得场方程与连续性方程自洽的最好方法是取 $a = -1$ 。(也可以让 a 任意取值, 而对 A^α 强加限制条件 $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ 。)

电磁场方程:

$$\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha \partial_\beta A^\beta = -\mu_0 j^\alpha$$

变换$A^\alpha \to A^\alpha + \partial^\alpha \psi$ 称为规范变换，而ψ 则称为规范函数 (任一标量函数)。

第二章给出了电磁势的方程

$$\Box\varphi + \partial_t L = -\rho/\varepsilon_0, \quad \Box\vec{A} - \nabla L = -\mu_0 \vec{j}$$

其中

$$\begin{cases} \Box \triangleq \nabla^2 - c^{-2}\partial_t^2 = \partial_\beta \partial^\beta \\ L \triangleq \nabla \cdot \vec{A} + c^{-2}\partial_t \varphi = \partial_0(\varphi/c) + \partial_i A^i \end{cases}$$

将电磁势满足的方程与上页得到的场方程对比:

$$\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha \partial_\beta A^\beta = -\mu_0 j^\alpha$$

可知 A^α 的时间分量为 φ/c, 而空间分量则为 3-矢量势, 即:

$$A^\alpha = \left(A^0, \vec{A}\right) = (\varphi/c, \vec{A})$$

规范变换 $A^\alpha \to A^\alpha + \partial\alpha\psi$ 具体写出来为

$$A^0 \to A^0 + \partial^0\psi, \quad \vec{A} \to \vec{A} + \nabla\psi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \to \varphi - \partial_t\psi, \quad \vec{A} \to \vec{A} + \nabla\psi$$

场方程 & Lorenz 规范条件 $(\partial_\alpha A^\alpha = 0)$ 是协变的; 在 Lorentz 规范下，场方程可进一步简化为:

$$\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = -\mu_0 j^\alpha \quad \leftrightarrow \quad \Box A^\alpha = -\mu_0 j^\alpha$$

4 Maxwell 张量（电磁场强张量）

Maxwell 张量定义为: $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$

Maxwell 张量是一个反对称二阶张量: $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$.

$F^{\alpha\beta}$ 是规范不变的: 在规范变换 $A^\alpha \to A^\alpha + \partial^\alpha\psi$ 下

$$\begin{aligned} &\partial^\alpha\left(A^\beta + \partial^\beta\psi\right) - \partial^\beta\left(A^\alpha + \partial^\alpha\psi\right) \\ &= \left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha\right) + \left(\partial^\alpha\partial^\beta\psi - \partial^\beta\partial^\alpha\psi\right) \end{aligned}$$

$F^{\alpha\beta}$ 的分量为

$$\begin{cases} F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -\frac{1}{c}\left(\partial_t A^i + \partial^i\varphi\right) = -\frac{1}{c}\left(\nabla\varphi + \partial_t\vec{A}\right)^i \\ F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \varepsilon^{ijk}(\nabla \times \vec{A})_k \end{cases}$$

因此（可以将电场和磁场用 $F^{\alpha\beta}$ 表示）

$$F^{00} = 0, \quad F^{0i} = E_i/c = -F^{i0}, \quad F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k$$

亦即

$$F^{\alpha\beta} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$$

作为反对称张量，可以将 $F^{\alpha\beta}$ 简记为:

$$F^{\alpha\beta} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & \vec{B} \end{pmatrix} = \left\{\frac{\vec{E}}{c}, \vec{B}\right\}, \quad B^{ij} \triangleq \varepsilon^{ijk} B_k$$

而其协变形式 $F_{\alpha\beta}$ 就可以写为:

$$F_{\alpha\beta}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & -\vec{E}/c\\ \vec{E}/c & \vec{B}\end{pmatrix}=\left\{-\frac{\vec{E}}{c},\vec{B}\right\}$$

由此可得 $F^{\alpha\beta}$ 的对偶张量为:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta}\triangleq\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & \vec{B}\\ -\vec{B} & -\vec{E}/c\end{pmatrix}=\left\{\vec{B},-\frac{\vec{E}}{c}\right\},\quad E^{ij}\triangleq\varepsilon^{ijk}E_k$$

5 Maxwell 方程

由于

$$\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha=\partial_\alpha\left(\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta A^\alpha\right)=\partial_\alpha F^{\alpha\beta}$$

因此，利用 $F^{\alpha\beta}$ ，场方程可以写为

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=-\mu_0 j^\beta$$

通常将此四个方程称为 Maxwell 方程。

Maxwell 方程实际上就是 Ampere-Maxwell 定律和电场 Gauss 定律:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=-\mu_0 j^\beta\Leftrightarrow\nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}=\mu_0\vec{j},\quad\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

【证明】利用

$$X_\alpha A^{\alpha\beta}\leftrightarrow\begin{pmatrix}X_0, & \vec{X}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \vec{p}\\ -\vec{p} & \vec{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\vec{X}\cdot\vec{p}, & X_0\vec{p}-\vec{X}\times\vec{a}\end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{aligned}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}&\leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial_t, & \nabla\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \vec{E}/c\\ -\vec{E}/c & \vec{B}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\nabla\cdot\frac{\vec{E}}{c}, & \frac{1}{c}\partial_t\frac{\vec{E}}{c}-\nabla\times\vec{B}\end{pmatrix}\\&=-\begin{pmatrix}\mu_0 j^0, & \mu_0\vec{j}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\mu_0\rho c, & \mu_0\vec{j}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

【思考】请自行验证:

$$\vec{X}\cdot\vec{a}=-\vec{X}\times\vec{a},\quad\vec{a}\cdot\vec{X}=\vec{X}\times\vec{a}\quad\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}\vec{a}-a^2\vec{I}$$

$\hat{\hat{\nabla}}$

$$\begin{aligned}G^\beta&\triangleq\partial_\alpha F^{\alpha\beta}+\mu_0 j^\beta\\\partial_\beta G^\beta&=\partial_\beta\left(\partial_\alpha F^{\alpha\beta}+\mu_0 j^\beta\right)\\&=\partial_\beta\partial_\alpha F^{\alpha\beta}+\mu_0\partial_\beta j^\beta\\&=0+0\equiv 0\end{aligned}$$

因此

$$\partial_\beta G^\beta=0\leftrightarrow\partial_0 G^0=-\nabla\cdot\vec{G}$$

四个 Maxwell 方程中只有三个是函数独立的。

6 Bianchi 恒等式

$F^{\alpha\beta}$ 满足 Bianchi 恒等式:

$$\partial_v F_{\rho\sigma}+\partial_\rho F_{\sigma V}+\partial_\sigma F_{v\rho}=0$$

Bianchi 恒等式也可写为下面的等价形式:

$$\partial_{[v} F_{\rho\sigma]}=0, \quad \varepsilon^{\mu v\rho\sigma}\partial_v F_{\rho\sigma}=0, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu v}=0$$

【证明】$\varepsilon^{\mu v\rho\sigma}\partial_v F_{\rho\sigma}=\varepsilon^{\mu v\rho\sigma}\left(\partial_v\partial_\rho A_\sigma-\partial_v\partial_\sigma A_\rho\right)\equiv 0$ Bianchi 恒倖式实际上就是 Faraday 定律和磁场 Gauss 定律:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu v}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=0, \quad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

【证明】利用

$$X_\alpha A^{\alpha\beta}\leftrightarrow\begin{pmatrix}X_0, & \vec{X}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \vec{p}\\ -\vec{p} & \vec{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\vec{X}\cdot\vec{p}, & X_0\vec{p}-\vec{X}\times\vec{a}\end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{aligned}\partial_\mu\tilde{F}^{\mu v}&\leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial_t, & \nabla\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \vec{B}\\ -\vec{B} & -\vec{E}/c\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-\nabla\cdot\vec{B}, & \frac{1}{c}\partial_t\vec{B}+\nabla\times\frac{\vec{E}}{c}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0, & \vec{0}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

注

对于给定的电荷电流分布，Maxwell 张量满足的基本方程是 (1) Bianchi 恒等式

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}=0$$

(2) Maxwell 方程

$$\partial_\mu F^{\mu v}=-\mu_0 j^v$$

Bianchi 恒等式容许人们用规范势描述电磁场，而规范势可以相差一个规范变换，即

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}=0\Leftrightarrow F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_v-\partial_\nu A_\mu, \quad A_\mu\sim A_\mu+\partial_\mu\psi$$

【定理】若矢量场 $F_a(x)$ 为无旋场，即

$$\partial_\alpha F_\beta=\partial_\beta F_\alpha$$

则存在标量场 $\psi(x)$ ，使得

$$F_\alpha=\partial_\alpha\psi$$

$\psi(x)$ 具有不确定性:

$$\tilde{\psi}(x)=\psi(x)+\text{ const }.$$

【定理】若反对称张量场 $F_{\alpha\beta}(x)$ 满足 Bianchi 恒等式，即

$$\partial_{[v}F_{\rho\sigma]}=0 \quad \text{or} \quad \partial_v F_{\rho\sigma}+\partial_\rho F_{\sigma v}+\partial_\sigma F_{v\rho}=0$$

则存在矢量场 $A_\alpha(x)$，使得

$$F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha$$

$A_\alpha(x)$ 具有不确定性:

$$\tilde{A}_\alpha=A_\alpha+\partial_\alpha\psi$$

7 电磁场的变换

I. 不变量：利用

$$F^{\alpha\beta}=\{\vec{E}/c,\vec{B}\},\quad F_{\alpha\beta}=\{-\vec{E}/c,\vec{B}\},\quad \tilde{F}^{\alpha\beta}=\{\vec{B},-\vec{E}/c\}$$

可得以下两物理量是不变量 (标量)：

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}=-2\frac{E^2}{c^2}+2B^2,\quad F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}=-\frac{4}{c}\vec{E}\cdot\vec{B}$$

即如下两个量是不变量

$$E^2-c^2B^2,\quad \vec{E}\cdot\vec{B}$$

II. 电磁场分类：由于 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ 是不变量, 因此, 某时空点的 E 和 B 是否正交、以及二者夹角为锐角、直角还是钝角具有不变的含义。由于 $E^2-c^2B^2$ 是不变量, 因此, 某时空点的 $\boldsymbol{E}$ 和 $c\boldsymbol{B}$ 哪个更大具有不变的含义。根据 $\boldsymbol{E}$ 和 $c\boldsymbol{B}$ 的大小关系，对电磁场作如下分类：(1) 若 $E>cB$，则称电磁场为类电场 (2) 若 $E<cB$，则称电磁场为类磁场 (3) 若 $E=cB$，则称电磁场为类光场 (类电磁波)

III. 电磁场的变换：设 K' 系相对于 K 系中以速度 v_0 沿着 x 轴运动，从而 Lorentz 变换矩阵为

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\gamma_0 & -\beta_0\gamma_0 & 0 & 0\\ -\beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

即 Λ 的非零元素只有

$$\Lambda_0^0=\Lambda_1^1=\gamma_0,\quad \Lambda_1^0=\Lambda_0^1=-\beta_0\gamma_0,\quad \Lambda_2^2=\Lambda_3^3=1$$

利用张量的变换规律 $F'^{\alpha\beta}=\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_v F^{\mu v}$，即可得到不同惯性系中的电磁场之间的关系。

$$\Lambda_0^0=\Lambda_1^1=\gamma_0,\quad \Lambda_1^0=\Lambda_0^1=-\beta_0\gamma_0,\quad \Lambda_2^2=\Lambda_3^3=1$$

$$F'^{01}=\Lambda_\mu^0\Lambda_v^1F^{\mu v}=\Lambda_0^0\Lambda_1^1F^{01}+\Lambda_1^0\Lambda_0^1F^{10}=\left(\gamma_0^2-\beta_0^2\gamma_0^2\right)F^{01}$$

$$\Rightarrow E_1'=E_1$$

$$F^{002}=\Lambda_\mu^0\Lambda_v^2F^{\mu v}=\Lambda_0^0\Lambda_2^2F^{02}+\Lambda_1^0\Lambda_2^2F^{12}=\gamma_0F^{02}-\beta_0\gamma_0F^{12}$$

$$\Rightarrow E_2'=\gamma_0\left(E_2-\beta_0cB_3\right)=\gamma_0\left(\vec{E}+\vec{\beta}_0\times c\vec{B}\right)_2$$

$$F'^{03}=\Lambda_\mu^0\Lambda_v^3F^{\mu v}=\Lambda_0^0\Lambda_3^3F^{03}+\Lambda_1^0\Lambda_3^3F^{13}=\gamma_0F^{03}+\beta_0\gamma_0F^{31}$$

$$\Rightarrow E_3'=\gamma_0\left(E_3+\beta_0cB_2\right)=\gamma_0\left(\vec{E}+\vec{\beta}_0\times c\vec{B}\right)_3$$

$$\Lambda_0^0=\Lambda_1^1=\gamma_0,\quad \Lambda_1^0=\Lambda_0^1=-\beta_0\gamma_0,\quad \Lambda_2^2=\Lambda_3^3=1$$
$$F'^{23}=\Lambda_\mu^2\Lambda_v^3F^{\mu v}=\Lambda_2^2\Lambda_3^3F^{23}=F^{23}$$
$$\Rightarrow B_1'=B_1$$
$$F^{231}=\Lambda_\mu^3\Lambda_v^1F^{\mu v}=\Lambda_3^3\Lambda_0^1F^{30}+\Lambda_3^3\Lambda_1^1F^{31}=\beta_0\gamma_0F^{03}+\gamma_0F^{31}$$
$$\Rightarrow cB_2'=\gamma_0\left(cB_2+\beta_0E_3\right)=\gamma_0\left(c\vec{B}-\vec{\beta}_0\times\vec{E}\right)_2$$
$$F'^{12}=\Lambda_\mu^1\Lambda_v^2F^{\mu v}=\Lambda_0^1\Lambda_2^2F^{02}+\Lambda_1^1\Lambda_2^2F^{12}=-\beta_0\gamma_0F^{02}+\gamma_0F^{12}$$
$$\Rightarrow B_3'=\gamma_0\left(cB_3-\beta_0E_2\right)=\gamma_0\left(c\vec{B}-\vec{\beta}_0\times\vec{E}\right)_3$$

综上得到

$$\begin{cases}E_x'=E_x\\ E_y'=\gamma_0(E_y-\beta_0cB_z)\\ E_z'=\gamma_0(E_z+\beta_0cB_y)\end{cases}\text{and}\begin{cases}cB_x'=cB_x\\ cB_y'=\gamma_0\left(cB_y+\beta_0E_z\right)\\ cB_z'=\gamma_0\left(cB_z-\beta_0E_y\right)\end{cases}$$

一般情形下有

$$(\text{正变换})\begin{cases}\vec{E}_\parallel'=\vec{E}_\parallel,\quad \vec{E}_\perp'=\gamma_0\left(\vec{E}_\perp+\vec{\beta}_0\times c\vec{B}\right)\\ \vec{B}_\parallel'=\vec{B}_\parallel,\quad c\vec{B}_\perp'=\gamma_0\left(c\vec{B}_\perp-\vec{\beta}_0\times\vec{E}\right)\end{cases}$$

或者

$$(\text{逆变换})\begin{cases}\vec{E}_\parallel=\vec{E}_\parallel',\quad \vec{E}_\perp=\gamma_0\left(\vec{E}_\perp'-\vec{\beta}_0\times c\vec{B}'\right)\\ \vec{B}_\parallel=\vec{B}_\parallel',\quad c\vec{B}_\perp=\gamma_0\left(c\vec{B}_\perp'+\vec{\beta}_0\times\vec{E}'\right)\end{cases}$$

在非相对论情形下（非相对论极限）$(\beta_0<<1)$：

$$\begin{cases}\vec{E}_\parallel'=\vec{E}_\parallel,\quad \vec{E}_\perp'=\vec{E}_\perp+\vec{\beta}_0\times c\vec{B}\\ \vec{B}_\parallel'=\vec{B}_\parallel,\quad c\vec{B}_\perp'=c\vec{B}_\perp-\vec{\beta}_0\times\vec{E}\end{cases}$$
$$\vec{E}'=\vec{E}+\vec{\beta}_0\times c\vec{B}$$
$$c\vec{B}'=c\vec{B}-\vec{\beta}_0\times\vec{E}$$

若 $B'=0$，则

$$\vec{E}=\vec{E}_\parallel'+\gamma_0\vec{E}_\perp',\quad c\vec{B}=\vec{\beta}_0\times\vec{E}$$

若 $E'=0$，则

$$\vec{B}=\vec{B}_\parallel'+\gamma_0\vec{B}_\perp',\quad \vec{E}=-\vec{\beta}_0\times c\vec{B}$$

例 4.1.1: 试求以速度 v_0 匀速运动的点电荷 e 所激发的电磁场。

【解】不妨设点电荷沿着 x 正方向运动，初始时刻位于原点。粒子自身系中

$$\vec{E}'=\frac{e\vec{r}'}{4\pi\varepsilon_0r'^3},\quad \vec{B}'=0,\quad (\vec{r}'=x'\hat{x}+y'\hat{y}+z'\hat{z})$$

在地面系中，有 $B=v_0\times E/c^2$ 及

$$\begin{cases}E_x=E_x'=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3}\\ E_y=\gamma_0E_y'=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma_0y'}{r'^3}\\ E_z=\gamma_0E_z'=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma_0z'}{r'^3}\end{cases}$$

用 $R = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_0 t = (X, Y, Z) = (x - v_0 t, y, z)$ 标志场点相对于粒子目前所在位置的位矢。利用 Lorentz 变换

$$x' = \gamma_0 (x - v_0 t) = \gamma_0 X, \quad y' = y = Y, \quad z' = z = Z$$

得到 $\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma_0 \vec{R}}{r'^3}, \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\vec{v}_0 \times \vec{E}$ 其中的 r' 用地面系中的坐标表示出来为 $r' = \sqrt{\gamma_0^2 X^2 + Y^2 + Z^2} = \gamma_0\sqrt{X^2 + (1-\beta_0^2)(Y^2+Z^2)}$ $r' = \gamma_0 R\sqrt{1-\beta_0^2\sin^2\theta}$ 定义角度因子

$$g(\theta) \triangleq \frac{1-\beta_0^2}{\left(1-\beta_0^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

以速度 v_0 匀速运动的点电荷 e 所激发的电场为

$$\vec{E} = \frac{e\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} g(\theta)$$

磁场为

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}_0 \times \vec{E}}{c^2} = \frac{\mu_0 e \vec{v}_0 \times \hat{R}}{4\pi R^2} g(\theta)$$

IV. 电磁场变换几个推论:

▶存在惯性系使正交 ($\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$) 类电场 ($E > cB$) 成为纯电场。如: 可取 $\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{E}\times c\vec{B}}{E^2} \Longrightarrow \vec{B}' = 0, \quad \vec{E}' = \frac{\vec{E}}{\gamma_0} = \vec{E}\sqrt{1-\frac{c^2B^2}{E^2}}$

▶ 存在惯性系使正交 ($\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$) 类磁场 ($E < cB$) 成为纯磁场。如: 可取 $\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{E}\times c\vec{B}}{c^2B^2} \Longrightarrow \vec{E}' = 0, \quad \vec{B}' = \frac{\vec{B}}{\gamma_0} = \vec{B}\sqrt{1-\frac{E^2}{c^2B^2}}$

▶ 存在惯性系使非正交 ($\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \neq 0$) 的电磁场成为“平行”场。如: 可取 $\frac{\vec{\beta}_0}{1+\beta_0^2} = \frac{\vec{E}\times c\vec{B}}{E^2+c^2B^2} \Longrightarrow \vec{E}'\times\vec{B}' = 0$

【证明】K' 系中为纯电场要求 $\boldsymbol{B}' = 0$，因而有

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0 \\ c\vec{B}'_{\perp} = \gamma_0(c\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta}_0\times\vec{E}) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{\beta}_0 \perp \vec{B} \\ c\vec{B} = c\vec{B}_{\perp} = \vec{\beta}_0\times\vec{E} \end{array}\right.$$

可取 $\boldsymbol{\beta}_0 \perp \boldsymbol{E}$，如此就有

$$\vec{\beta}_0 = \vec{E}\times c\vec{B}/E^2, \quad \left(1/\gamma_0 = \sqrt{1-c^2B^2/E^2}\right)$$

K' 系中电场为

$$\vec{E}' = \vec{E}/\gamma_0 = \vec{E}\sqrt{1-c^2B^2/E^2}$$

V. 宇称和时间反演：与 u^μ 一样，j^μ 是空间反演下的矢量、时间反演下的赝矢量。

$$\mathscr{P}: \left\{\begin{array}{l} j'^0 = j^0 \\ \vec{j}' = -\vec{j} \end{array}\right., \quad T: \left\{\begin{array}{l} j'^0 = j^0 \\ \vec{j}' = -\vec{j} \end{array}\right.$$

电动力学基本方程在 $O(3,1)$ 下的不变性意味着 Maxwell 张量 $F^{\mu\nu}$ 是空间反演下的张量、时间反演下的赝张量。

$$\mathscr{P}: F'^{\mu\nu} = \mathscr{P}^\mu_\alpha \mathscr{P}^\nu_\beta F^{\alpha\beta}, \quad T: F^{\mu\nu\nu} = -\mathscr{T}^\mu{}_\alpha T^v_\beta F^{\alpha\beta}$$

即有

$$\mathscr{P}:\left\{\begin{array}{l}\vec{E}'=-\vec{E}\\ \vec{B}'=\vec{B}\end{array}\right.,\quad T:\left\{\begin{array}{l}\vec{E}'=\vec{E}\\ \vec{B}'=-\vec{B}\end{array}\right.$$

8 介质中基本方程

I. Bianchi 恒等式仍然成立，可以写为

$$\varepsilon^{\mu v\rho\sigma}\partial_v F_{\rho\sigma}=0,\quad \partial_{[v}F_{\rho\sigma]}=0,\quad \partial_v F_{\rho\sigma}+\partial_\rho F_{\sigma v}+\partial_\sigma F_{v\rho}=0$$

写出

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu v}=0\quad\Leftrightarrow\quad \nabla\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=0,\quad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

介质中的电磁场仍可以规范势 $A^\mu=(\frac{\varphi}{c},\vec{A})$描述

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu v}=0\quad\Leftrightarrow\quad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_v-\partial_\nu A_\mu,\quad A_\mu\sim A_\mu+\partial_\mu\psi$$

II. 对比真空与介质中的 Maxwell 方程: 真空 : $\nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}=\mu_0\vec{j},\quad \nabla\cdot\vec{E}=\mu_0 c^2\rho$ 介质: $\nabla\times\vec{H}-\partial_t\vec{D}=\vec{j}_f,\quad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$ 只需作如下代换即可由前者得到后者

$$\begin{cases}\mu_0\to 1,\\ \rho\to\rho_f,\quad \vec{j}\to\vec{j}_f\\ \vec{B}\to\vec{H},\quad \vec{E}\to c^2\vec{D}\end{cases}$$

定义辅助张量:

$$H^{\alpha\beta}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & cD_1 & cD_2 & cD_3\\ -cD_1 & 0 & H_3 & -H_2\\ -cD_2 & -H_3 & 0 & H_1\\ -cD_3 & H_2 & -H_1 & 0\end{pmatrix}=\{c\vec{D},\vec{H}\}$$

介质中的 Maxwell 方程为

$$\partial_\mu H^{\mu\nu}=-j_f^\nu$$

III. 电磁极化张量：对比介质中的 Maxwell 方程和束缚电荷、电流的关系可得:

$$\nabla\times\vec{H}-\partial_t\vec{D}=\vec{j}_f,\quad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\quad\Leftrightarrow\quad \partial_\mu H^{\mu v}=-j_f^v$$

$$\nabla\times\vec{M}+\partial_t\vec{P}=\vec{j}_b,\quad \nabla\cdot\vec{P}=-\rho_b\quad\Leftrightarrow\quad \partial_\mu M^{\mu\nu}=-j_b^v$$

其中，$M^{\mu\nu}$ 为电磁极化张量

$$M^{\mu\nu}\triangleq\frac{1}{\mu_0}F^{\mu v}-H^{\mu v}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & -cP_1 & -cP_2 & -cP_3\\ cP_1 & 0 & M_3 & -M_2\\ cP_2 & -M_3 & 0 & M_1\\ cP_3 & M_2 & -M_1 & 0\end{pmatrix}=\{-c\vec{P},\vec{M}\}$$

【例】试由静止介质中的电磁性能方程

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\quad \vec{B}=\mu\vec{H}$$

导出缓慢运动介质中的电磁性能方程【解】介质自身系中

$$\vec{D}'=\varepsilon\vec{E}',\quad \vec{B}'=\mu\vec{H}'$$

低速情形下电磁场的变换规律为

$$\vec{E}'=\vec{E}+\vec{\beta}_0\times c\vec{B},\quad c\vec{B}'=c\vec{B}-\vec{\beta}_0\times\vec{E}$$

作替换 $\boldsymbol{E}\to c^2\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{H}$ 得到辅助矢量的变换规律为

$$c\vec{D}'=c\vec{D}+\vec{\beta}_0\times\vec{H},\quad \vec{H}'=\vec{H}-\vec{\beta}_0\times c\vec{D}$$

由以上三组关系得到 (略去 β_0 的二阶小量)

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{D}\approx\varepsilon\vec{E}+\varepsilon\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\vec{\beta}_0\times c\vec{B}\\ \vec{H}\approx\frac{1}{\mu}\vec{B}+\frac{1}{\mu c}\left(n^2-1\right)\vec{\beta}_0\times\vec{E}\end{array}\right.$$

其中，n 为介质的折射率:

$$n\triangleq\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

也可将其写成更为对称的形式:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}+\frac{1}{c}\left(n^2-1\right)\vec{\beta}_0\times\vec{H}\\ \vec{B}=\mu\vec{H}-\frac{1}{c}\left(n^2-1\right)\vec{\beta}_0\times\vec{E}\end{array}\right.$$

第 2 节 守恒定律

1 相对论能量和动量

为⊠给出相对论粒子能是 $\mathcal{E}$ 与动是 p 的表达式, 作如下假设: (1) 孤立体系的能量与动量守恒; (2) $\mathcal{E}$ 与 p 是速度的单值函数, 且 p 沿着速度方向, 即:

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}(v),\quad \vec{p}=\tilde{m}(v)\vec{v}$$

(3) 速度相同时, 不同粒子的 $\mathcal{E},\boldsymbol{p}$ 与质量 m 成正比, 即

$$\mathcal{E}(v)\propto m,\quad \vec{p}\propto m\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\mathcal{E}_1(v)}{\mathcal{E}_2(v)}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{\tilde{m}_1(v)}{\tilde{m}_2(v)}$$

2 全同粒子的碰撞

弹性碰撞: 考察两个静止质量均为 m 的全同粒子之间的弹性碰撞。设在 K 系中，碰撞前两粒子速度 $\boldsymbol{v}_{1,2}$ 大小相同、方向相反。- K 系中能量、动量守恒 (设碰后速度为 $\boldsymbol{u}_{1,2}$)

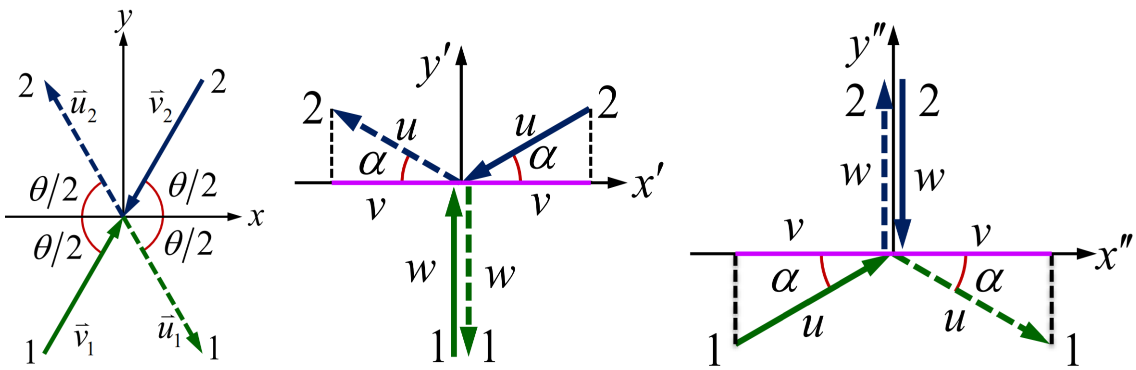
$$\left\{\begin{array}{c}\tilde{m}\left(u_1\right)\vec{u}_1+\tilde{m}\left(u_2\right)\vec{u}_2=\tilde{m}\left(v_1\right)\vec{v}_1+\tilde{m}\left(v_2\right)\vec{v}_2=0\\ \mathcal{E}\left(u_1\right)+\mathcal{E}\left(u_2\right)=\mathcal{E}\left(v_1\right)+\mathcal{E}\left(v_2\right)\end{array}\right.$$

$$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2, \quad u_{1,2} = v_{1,2}$$

设 K' 相对于 K 以粒子 1 的水平速度向右运动，K'' 相对于 K 以粒子 2 的水平速度向左运动。由于 K'' 相对于 K' 以速度 v (粒子 1 在 K 中的水平速度) 向左运动，因此

$$v\tan\alpha = w\sqrt{1-v^2/c^2}$$
$$u^2 = v^2 + w^2 - \frac{v^2w^2}{c^2}, \quad 1-\frac{u^2}{c^2} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)$$

新系中 x 方向的动量显然守恒，而 y 方向动量守恒表示为



(a) 实验室参考系 (b) 参考系 1 (c) 参考系 2

$$\begin{aligned}&\tilde{m}(w)w - \tilde{m}(u)v\tan\alpha\\&= -\tilde{m}(w)w + \tilde{m}(u)v\tan\alpha\\ \Rightarrow &\frac{\tilde{m}(u)}{\tilde{m}(w)} = \frac{w}{v\tan\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\end{aligned}$$

$$\frac{\tilde{m}(u)}{\tilde{m}(w)} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad 1-\frac{u^2}{c^2} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)$$

(1) 当 $w\to 0$ 时，有 $\tilde{m}(w)\to m, u\to v$

$$\Rightarrow \tilde{m}(v) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
$$\vec{p} \triangleq \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m\vec{v}$$

(2) 对于一般的 w ，容易验证

$$\frac{\tilde{m}(u)}{\tilde{m}(w)} = \frac{\sqrt{1-w^2/c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

非弹性碰撞：考察两个静止质量均为 m 的全同粒子之间的非弹性碰撞。在 K 系中，碰撞前两粒子速度大小均为 v、方向相反。碰撞后结合在一起生成一个新的粒子，设其静止质量为 M

在 K 系中，为符合动量守恒，M 的速度必为零。由能量守恒得

$$2\mathcal{E}_m(v) = \mathcal{E}_M(0)$$

又由于

$$\frac{\mathcal{E}_M(0)}{\mathcal{E}_m(0)}=\frac{M}{m}\quad\Longrightarrow\frac{\mathcal{E}_m(v)}{\mathcal{E}_m(0)}=\frac{\mathcal{E}_m(v)}{\mathcal{E}_M(0)}\frac{\mathcal{E}_M(0)}{\mathcal{E}_m(0)}=\frac{M}{2m}$$

在相对于 K 以速度 v 向左运动的 K' 中，碰前其中一个粒子静止，而另一粒子的速度为

$$u=\frac{2v}{1+v^2/c^2}\Longrightarrow\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}$$

又由于 K' 中的动量守恒碰前

$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

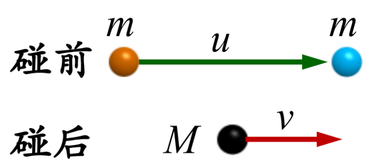
碰后

$$\Rightarrow\frac{M}{m}=\frac{2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\Longrightarrow\frac{\mathcal{E}_m(v)}{\mathcal{E}_m(0)}=\frac{M}{2m}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

所以质量为 m 的粒子的相对论能量为

$$\varepsilon_m(v)=\frac{\varepsilon_m(0)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

【思考】利用前面得到的公式



$$u=\frac{2v}{1+v^2/c^2},\quad\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2},\quad\frac{M}{m}=\frac{2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

请自行验证: K' 中能量确实是守恒的, 即下式成立

$$\mathcal{E}_m(u)+\mathcal{E}_m(0)=\mathcal{E}_M(v)\quad\text{or}\quad\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}+mc^2=\frac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

定理 4.2.1: 4-能量、4-动量

质量为 m 的粒子以速度 v 运动时，其相对论能量与动量为

$$\mathcal{E}\triangleq\gamma mc^2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad\vec{p}\triangleq\gamma m\vec{v}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

即是说，相对论能量与动量构成了 4-矢量，称为 4-动量

$$p^\alpha\triangleq mu^\alpha=m\frac{dx^\alpha}{d\tau}=\gamma mc(1,\vec{\beta})=(\mathcal{E}/c,\vec{p})$$

两个常用关系：

$$p^\alpha p_\alpha=-m^2c^2\leftrightarrow\mathcal{E}^2=p^2c^2+m^2c^4,\quad\vec{v}=c^2\vec{p}/\mathcal{E}$$

对于零质量粒子，上面的两个关系仍然成立:

$$p^{\alpha}p_{\alpha}=0 \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{E}=pc, \quad \vec{v}=c\hat{p}$$

孤立体系的能量、动量守恒定律与惯性系的选取无关，即粒子的相对论动能定义为

$$T \triangleq (\gamma-1)mc^2=\mathcal{E}-\mathcal{E}_0$$

当粒子速度 $v<<c$ 时，

$$T=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)\approx mc^2\cdot\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{2}mv^2$$

- 在牛顿力学中，孤立体系的动量、质量总是守恒的，动能则未必守恒；
  - 在相对论中，孤立体系的动量、能量总是守恒的，而质量、动能则未必守恒。
  - 无论在牛顿力学还是相对论中，若碰撞过程中动能守恒，则称其为弹性碰撞，否则称为非弹性碰撞。在相对论弹性碰撞过程中，动能守恒。此种情形下，静止能量、从而静止质量也是守恒的。在实际过程中，这意味着碰撞前后有相同的粒子。

例 4.2.1: 完全非弹性碰撞

静止质量同为 m、速度均为 (3/5)c 的两团粘土对头碰撞，碰后黏在一起。试问黏在一起的粘土质量 M 等于多大?

由动量守恒，碰后 M 静止。由能量守恒得到

$$2\times\frac{mc^2}{\sqrt{1-(3/5)^2}}=2\times\frac{5}{4}mc^2=Mc^2 \quad \Longrightarrow M=\frac{5}{2}m$$

动能转化为了热能（热能即是物质内部原子/分子随机运动的动能和势能之和）。

譬如，静止的中性 π 介子衰变为一个电子和一个反电子时，

$$\pi^0\to e^-+e^+$$

由于

$$\begin{cases} m_\pi=2.4\times10^{-28}\ \mathrm{kg}\to 135\mathrm{MeV} \\ m_e=0.911\times10^{-30}\ \mathrm{kg}\to 0.511\mathrm{MeV}\end{cases}$$

因此静止能量几乎全部转化为了动能，只有原始质量的不到 1% 保留了下来。

例 4.2.2: μ 子的衰变

【例】静止 π 衰变为一个 μ 子和一个中微子（假设 $m_v=0$）

$$\pi^-\to\mu^-+\bar{v}_\mu$$

试用质量 m_π 和 m_μ 表示 μ 子的能量。

$$\left(m_\pi c^2=140\mathrm{MeV}, m_\mu c^2=105\mathrm{MeV}\right)$$

（方法一）由能量、动量守恒得到

$$m_\pi c^2=\mathcal{E}_\mu+\mathcal{E}_v,\quad 0=\vec{p}_\mu+\vec{p}_v$$

由动量守恒以及中微子质量为零，得到

$$\mathcal{E}_v=p_\nu c=p_\mu c=\sqrt{\mathcal{E}_\mu^2-m_\mu^2c^4}$$

代入能量守恒方程得到

$$\mathcal{E}_\mu+\sqrt{\mathcal{E}_\mu^2-m_\mu^2c^4}=m_\pi c^2$$

解得

$$\mathcal{E}_\mu=\frac{\left(m_\pi^2+m_\mu^2\right)c^2}{2m_\pi}\approx 109\mathrm{MeV}$$

由此还可得中微子能量为

$$\mathcal{E}_\nu=m_\pi c^2-\mathcal{E}_\mu\approx 31\mathrm{MeV}$$

(方法二) 衰变前后 3 个粒子的四动量分别为:

$$p_\pi\leftrightarrow\left(m_\pi c,\quad \vec{0}\right),\quad p_\mu\leftrightarrow\left(\mathcal{E}_\mu/c,\quad \vec{p}_\mu\right),\quad p_\nu\leftrightarrow\left(p_\mu,-\vec{p}_\mu\right)$$

由 4-动量守恒得到

$$p_\pi=p_\mu+p_v\quad\Longrightarrow p_\pi-p_\mu=p_v$$

左右两边分别取平方 (与自身标量积) 给出

$$p_\pi\cdot p_\pi+p_\mu\cdot p_\mu-2p_\pi\cdot p_\mu=p_v\cdot p_v$$

即有

$$-m_\pi^2c^2-m_\mu^2c^2+2m_\pi\mathcal{E}_\mu=0$$

$$\Rightarrow\mathcal{E}_\mu=\frac{m_\pi^2+m_\mu^2}{2m_\pi}c^2$$

(方法二) 衰变前后 3 个粒子的四动量分别为:

$$p_\pi\leftrightarrow\left(m_\pi c,\quad \vec{0}\right),\quad p_\mu\leftrightarrow\left(\mathcal{E}_\mu/c,\quad \vec{p}_\mu\right),\quad p_\nu\leftrightarrow\left(p_\mu,-\vec{p}_\mu\right)$$

由 4-动量守恒得到

$$p_\pi=p_\mu+p_v\quad\Longrightarrow p_\pi-p_\mu=p_v$$

左右两边分别取平方 (与自身标量积) 给出

$$p_\pi\cdot p_\pi+p_\mu\cdot p_\mu-2p_\pi\cdot p_\mu=p_v\cdot p_v$$

即有

$$-m_\pi^2c^2-m_\mu^2c^2+2m_\pi\mathcal{E}_\mu=0$$

$$\Rightarrow\mathcal{E}_\mu=\frac{m_\pi^2+m_\mu^2}{2m_\pi}c^2$$

若将 4-动量守恒写为:

$$p_\pi=p_\mu+p_v\longrightarrow p_\pi-p_v=p_\mu$$

左右两边分别取平方 (与自身标量积) 给出

$$p_\pi \cdot p_\pi + p_v \cdot p_v - 2p_\pi \cdot p_\nu = p_\mu \cdot p_\mu$$

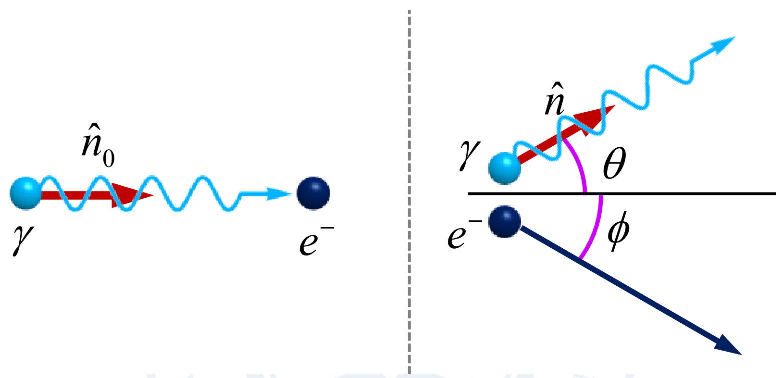
即有

$$-m_\pi^2 c^2 + 0 + 2m_\pi c p_\mu = m_\mu^2 c^2$$
$$\Rightarrow p_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

由此也可得到相同结果

$$\mathcal{E}_\mu = \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

3 Compton 效应



【解】碰撞前、后各粒子的四动量分别表示为:

Before: $p_\gamma = \frac{Q_0}{c}(1, \quad \hat{n}_0)$, $p_e = \left(m_e c, \quad \vec{0} \right)$

After: $p'_\gamma = \frac{Q}{c}(1, \quad \hat{n})$, $p'_e = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \quad \vec{p}\right)$

由 4-动量守恒得到

$$p_\gamma + p_e = p'_\gamma + p'_e$$
$$\Rightarrow \left(p_\gamma - p'_\gamma\right) \cdot \left(p_\gamma - p'_\gamma\right) = \left(p'_e - p_e\right) \cdot \left(p'_e - p_e\right)$$
$$\Rightarrow p_\gamma \cdot p_\gamma + p'_\gamma \cdot p'_\gamma - 2p_\gamma \cdot p'_\gamma = p_e \cdot p_e + p'_e \cdot p'_e - 2p_e \cdot p'_e$$
$$\Rightarrow 2\frac{QQ_0}{c^2}(1 - \cos\theta) = -2m_e^2 c^2 + 2m_e \mathcal{E} = 2m_e \left(\mathcal{E} - m_e c^2\right)$$

结合能量守恒

$$\mathcal{E} + Q = m_e c^2 + Q_0$$

就得到

$$QQ_0(1 - \cos\theta) = m_e c^2 \left(Q_0 - Q\right) \Leftrightarrow \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2}$$

将光子能量通过 de Broglie (德布罗意) 关系用波长表示为:

$$Q = hf = h\frac{c}{\lambda}, \quad Q_0 = h\frac{c}{\lambda_0}$$

由此就给出了 Compton 效应得到的数学表述

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1-\cos\theta), \quad \lambda_c \triangleq \frac{h}{m_e c} \approx 0.2426\ \mathrm{nm}$$

此处的 λ_c 称为电子的 Compton 波长。

第 3 节　协变形式粒子动力学方程

考察在外电磁场中运动的质量为 m 、带电量为 e 的粒子。

设 K 系中 t 时刻粒子所在位置处的电场为 $\boldsymbol{E}$ ，磁场为 $\boldsymbol{B}$ 。不妨设 t 时刻粒子的加速度为 a ，速度沿着 x 轴方向，即

$$\vec{v} = v\hat{x}$$

▶ 设 K' 系为粒子自身系，其相对于 K 系以速度 v 沿 x 轴正向运动。(在 K' 系中粒子的瞬时速度为零) 为了给出带电粒子在电磁场中正确的运动方程, 假设在 K' 系中 Newton 方程是严格成立的:

$$ma'_x = eE'_x, \quad ma'_{y,z} = eE'_{y,z}$$

由于 (1) $E'_x = \vec{E}_x, \quad E'_{y,z} = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta}\times c\vec{B})_{y,z}$ (2) $a_x = a'_x/\gamma^3, \quad a_{y,z} = a'_{y,z}/\gamma^2$

因此，K 系中正确的运动方程为

$$\gamma^3 m a_x = eE_x, \quad \gamma m a_{y,z} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})_{y,z}$$

即有

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \triangleq \vec{F}$$

$$\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \quad \vec{v} = c^2\vec{p}/\mathcal{E}$$

因此

$$\mathcal{E}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = c^2\vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} = \frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}$$

即有动能定理：

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

由于

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dp^\alpha}{dt} = \gamma\frac{dp^\alpha}{dt}$$

因此，带电粒子的运动方程及动能定理可以统一写为

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \gamma(\vec{F}\cdot\vec{\beta}, \quad \vec{F}) \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \triangleq \vec{F}$$

方程右边实际上构成了一 4-矢量 K^α, 称为4-电磁力：

$$K^\alpha \triangleq eF^{\alpha\beta}u_\beta \leftrightarrow e\begin{pmatrix} 0 & \vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & \vec{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix} = e\gamma\begin{pmatrix} \vec{E}\cdot\vec{\beta} \\ \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} \end{pmatrix}$$

电磁场中带电粒子的协变动力学方程写为

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau}=eF^{\alpha\beta}u_\beta\left(\triangleq K^\alpha\right)$$

此方程称为Lorentz 方程。Lorentz 方程也可用 4-加速度表示为

$$mA^\alpha=eF^{\alpha\beta}u_\beta$$

利用 4-速度与 4-加速度正交以及 $F^{\alpha\beta}$ 的反对称性，易见 Lorentz 方程中只有三个是函数独立的:

$$u_\mu\left(mA^\mu-eF^{\mu v}u_v\right)=mu_\mu A^\mu-eF^{\mu v}u_\mu u_v=0-0\equiv 0$$

在承认 Lorentz 方程协变的前提下，也可推知 $F^{\mu v}$ 为二阶张量

$$\begin{aligned}
&\frac{dp^\alpha}{d\tau}=eF^{\alpha\beta}u_\beta\leftrightarrow\frac{dp'^\mu}{d\tau}=eF'^{\mu\rho}u'_\rho\\
&\Rightarrow\Lambda^\mu_\alpha\frac{dp^\alpha}{d\tau}=e\tilde{\Lambda}^\beta_\rho F'^{\mu\rho}u_\beta=e\Lambda^\mu{}_\alpha F^{\alpha\beta}u_\beta\\
&\Rightarrow\tilde{\Lambda}^\beta_\rho F'^{\mu\rho}=\Lambda^\mu{}_\alpha F^{\alpha\beta}\\
&\Rightarrow\tilde{\Lambda}^\beta_\rho\Lambda^v{}_\beta F'^{\mu\rho}=\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^v_\beta F^{\alpha\beta}\\
&\Rightarrow F'^{\mu v}=\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^v{}_\beta F^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

解答: 带电粒子电场中运动轨迹

【例】带电粒子在恒定电场 E 中运动，初始时，粒子动量与 E 垂直，大小为 p_0 。试求粒子的运动轨迹。【解】不妨设电场沿着 x 轴正向，初动量沿着 y 轴方向。(1) 首先求能量、动量与时间的关系。由运动方程

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=e\vec{E}=eE\hat{x}$$

以及初始条件 $p_y(t=0)=p_0,p_x(t=0)=0=p_z(t=0)$ 得到:

$$p_x=eEt,\quad p_y=p_0,\quad p_z=0$$

粒子能量为

$$\mathcal{E}=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}=\sqrt{\varepsilon_0^2+(eEct)^2},\quad\left(\varepsilon_0\triangleq\sqrt{m^2c^4+p_0^2c^2}\right)$$

(2) 求速度与时间的关系。利用

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}=\frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}}$$

即得

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{eEc^2t}{\sqrt{\varepsilon_0^2+(eEct)^2}},\quad v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{p_0c^2}{\sqrt{\varepsilon_0^2+(eEct)^2}}$$

当 $t\to\pm\infty$ 时，有 $v_x\to c$ 及 $v_y\to 0$ ，从而 $v\to c$ 。

(3) 求轨迹。将前面的方程对时间积分得到

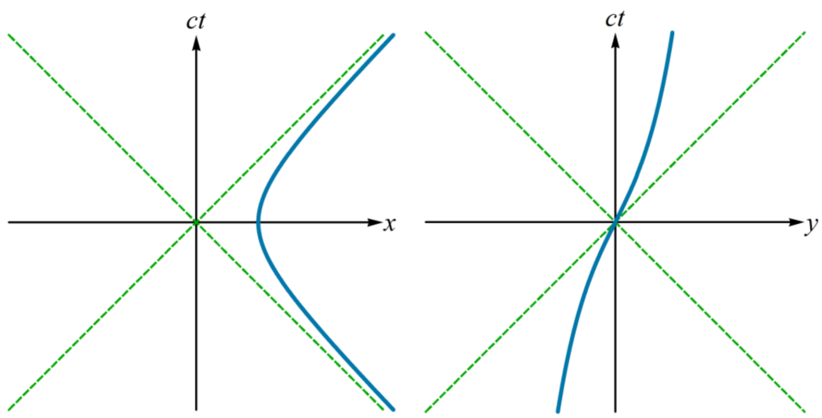
$$x-x_0=\frac{\sqrt{\varepsilon_0^2+(eEct)^2}}{eE}-\frac{\varepsilon_0}{eE},\quad y-y_0=\frac{p_0c}{eE}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{eEct}{\varepsilon_0}\right)$$

合适选择坐标原点，上式可简化为

$$x=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_0}{eE}\right)^2+c^2t^2},\quad y=\frac{p_0c}{eE}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{eEct}{\varepsilon_0}\right)$$

消去时间，得到轨迹为

$$x=\frac{\mathscr{E}_0}{eE}\cosh\frac{eEy}{p_0c}$$



解答: 带电粒子在磁场中运动

运动方程为:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=e\vec{v}\times\vec{B}$$

由于力与动量垂直，故速度大小不变，因而方程可写为

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{e}{\gamma m}\vec{v}\times\vec{B}=\vec{\Omega}\times\vec{v},\quad\left(\vec{\Omega}\triangleq-\frac{e}{\gamma m}\vec{B}\right)$$

即带电粒子的速度以角速度 Ω 转动。将 v 在磁场方向与垂直于磁场方向分解: $v=v_{\parallel}+v_{\perp}$ 。其中 $v_{\parallel}$ 守恒，而 $v_{\perp}$ 满足方程 $\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{v}_{\perp}$ （$\boldsymbol{v}_{\perp}$ 大小不变, 方向以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动）垂直于磁场方向的运动方程可以写为

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=\frac{d\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}_{\perp}\right)}{dt}$$
$$\Rightarrow\vec{v}_{\perp}-\vec{v}_{0\perp}=\vec{\Omega}\times(\vec{r}_{\perp}-\vec{r}_{0\perp})$$

其中，$v_{0\perp}$ 和 $r_{0\perp}$ 分别为初始位置和初始速度在垂直于 B 的平面内的投影，由于

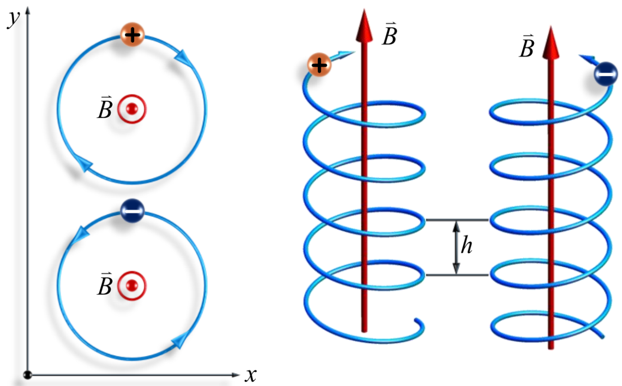
$$\vec{v}_{0\perp}=\left(\vec{\Omega}\times\vec{v}_{0\perp}\right)\times\vec{\Omega}$$

垂直于磁场方向的运动方程可以写为

$$\frac{d\left(\vec{r}_{\perp}-\vec{r}_{c\perp}\right)}{dt}=\vec{\Omega}\times\left(\vec{r}_{\perp}-\vec{r}_{c\perp}\right)\text{ where }\vec{r}_{c\perp}\triangleq\vec{r}_{0\perp}+\frac{\vec{\Omega}\times\vec{v}_{0\perp}}{\Omega^2}$$

在垂直于 B 的平面内, $r_| - r_c$⊠大小不变, 方向以角速度 Ω 转动。即带电粒子以 $r_{c\perp}$ 为圆做匀速圆周运动, 半径为

$$R = |\vec{r}_{0\perp} - \vec{r}_{c\perp}| = \left|\frac{\vec{\Omega} \times \vec{v}_{0\perp}}{\Omega^2}\right| = \frac{v_\perp}{\Omega} = \gamma \frac{mv_\perp}{|e|B}$$



1 粒子系统能量-动量张量

对于大量粒子构成的系统，仅仅考虑能量密度本身是没有意义的，因为在一个参考系中的能量密度，在另一个参考系看来，将是能量密度、能量流密度、动量密度以及动量流密度的某种组合。事实上，所有这些量构成了一个单一张量，并且必须把它们放在一起考虑。对于带电粒子系统，我们前面引入了电荷密度和电流密度

$$j^\alpha(x) = \sum_n e_n \frac{dx_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \leftrightarrow (\rho c, \vec{j})$$

现在对能量-动量四维矢量的密度和流密度给出类似的定义。设粒子 n 的 4-动量为 $p_n^\alpha(t)$

4-动量的密度定义为 (量纲与能量密度除光速相同)

$$\sum_n p_n^\beta(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

4-动量的流密度定义为 (量纲与能量密度相同)

$$\sum_n p_n^\beta(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

两个定义可统一写为

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \frac{dx_n^\alpha(t)}{dt} p_n^\beta(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

称为带电粒子系统的能是旦一云量张是。其。中 $x_n^0(t) = ct$

$$p_n^\alpha = m_n \frac{dx_n^\alpha}{d\tau} = m_n \frac{dt}{d\tau} \frac{dx_n^\alpha}{dt} = \gamma_n m_n \frac{dx_n^\alpha}{dt} \Rightarrow \frac{dx_n^\alpha}{dt} = \frac{c^2 p_n^\alpha}{\mathcal{E}_n}$$

因而

$$T^{\alpha\beta}(x) = c^2 \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{\mathcal{E}_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

可见, $T^{\alpha\beta}$ 是对称的:

$$T^{\alpha\beta}=T^{\beta\alpha}$$

$T^{\alpha\beta}$ 分量的含义

$$T^{\alpha\beta}=\sum_n \frac{dx_n^\alpha}{dt}p_n^\beta\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)=c^2\sum_n\frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{\mathcal{E}_n}\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)$$

$T^{a\beta}$ 的各分量具有能量密度的量纲。$T^{a\beta}$ 的各分量的表达式及其含义是 $T^{00}=\sum_n \mathcal{E}_n\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n\right)\rightarrow$ 能量密度 $T^{0k}=c\sum_n p_n^i\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n\right)=T^{k0}$ $\rightarrow k$ 方向动量密度 $\times\, c$ $\rightarrow$ 能量流密度能量 $\div\, c$ $T^{ij}=T^{ij}=\sum_n p_n^i\frac{dx_n^j}{dt}\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n\right)\rightarrow j$ 方向的 i 动量流密度类似于电流的处理，我们也可以将 $T^{\alpha\beta}$ 改写:

$$\begin{aligned}
T^{\alpha\beta}(x)&=\sum_n\frac{dx_n^\alpha}{dt}p_n^\beta\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)\\
&=c\sum_n\int\frac{dx_n^\alpha}{d\tau_n}p_n^\beta\delta^4\left(x-x_n\left(\tau_n\right)\right)d\tau_n
\end{aligned}$$

可见, $T\alpha$ 确实为张量。

2 能量-动量守恒定律

$$\begin{aligned}
\partial_i T^{i\beta}&=\sum_n\frac{dx_n^i(t)}{dt}p_n^\beta(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)\\
&=-\sum_n\frac{dx_n^i(t)}{dt}p_n^\beta(t)\frac{\partial}{\partial x_n^i}\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)\\
&=-\sum_n p_n^\beta(t)\frac{\partial}{\partial t}\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)\\
&=-\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_n p_n^\beta(t)\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)\right]+\sum_n\frac{dp_n^\beta(t)}{dt}\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)
\end{aligned}$$

定义 4-力密度为

$$f^\beta(x)\triangleq\sum_n\frac{dp_n^\beta(t)}{dt}\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)$$

因此，我们得到

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=f^\beta$$

这就是粒子系统的能量-动量守恒定律。该定律告诉我们实物粒子由于受到电磁力的作用获得□侚少能量和动量。- 在有外力作用的情况下, 带电粒子系统的总动量并不守恒。如果粒子之间没有力的作用, 则有:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=0$$

○ 对于腘一个 $\beta=0,1,2,3$ 都存在一个守恒流。- 与四个守恒流对应地，就有四个守恒荷 (不随时间变化)，称为粒子系统的 4-动量:

$$P^\beta\triangleq\frac{1}{c}\int T^{0\beta}d^3x$$

注: 粒子系统

对于由电磁作用联系着的带电粒子系统，由于

$$\frac{dp_n^\beta}{dt}=\frac{d\tau_n}{dt}\frac{dp_n^\beta}{d\tau_n}=\frac{d\tau_n}{dt}e_nF^{\beta\gamma}\left(x_n\right)\frac{dx_n^\gamma}{d\tau_n}=e_nF^{\beta\gamma}\left(x_n\right)\frac{dx_n^\gamma}{dt}$$

因此

$$f^\beta(x)\triangleq\sum_n\frac{dp_n^\beta(t)}{dt}\delta^3\left(\bar{x}-\bar{x}_n(t)\right)=\sum_n e_nF^{\beta\gamma}\left(x_n\right)\frac{dx_n^\gamma}{dt}\delta^3\left(\vec{x}-\bar{x}_n(t)\right)$$

利用 δ-函数的性质，上式中 Maxwell 张量 $F^{\beta\gamma}$ 的自变量 x_n 可直接用替换 x ，从而有

$$f^\beta(x)=F^{\beta\gamma}(x)\sum_n e_n\frac{dx_n^\gamma}{dt}\delta^3\left(\bar{x}-\vec{x}_n(t)\right)$$

3 角动量

定义 4-力矩密度张量:

$$\tau^{\alpha\beta}\triangleq x^\alpha f^\beta-x^\beta f^\alpha$$

$\tau^{\alpha\beta}$ 是一个反对称张量，可以将其简写为其中，

$$\vec{\tau}\triangleq\vec{x}\times\vec{f},\quad \tau^{ij}\triangleq\varepsilon^{ijk}\tau_k$$

利用粒子系统的能量-动量守恒定律:

$$f^\beta=\partial_\alpha T^{\alpha\beta}$$

我们有:

$$\begin{aligned}\tau^{\alpha\beta}&=x^\alpha f^\beta-x^\beta f^\alpha=x^\alpha\partial_\mu T^{\mu\beta}-x^\beta\partial_\mu T^{\mu\alpha}\\&=\partial_\mu\left(x^\alpha T^{\mu\beta}\right)-\partial_\mu\left(x^\beta T^{\mu\alpha}\right)-\delta_\mu^\alpha T^{\mu\beta}+\delta_\mu^\beta T^{\mu\alpha}\\&=\partial_\mu\left(x^\alpha T^{\mu\beta}-x^\beta T^{\mu\alpha}\right)-\left(T^{\alpha\beta}-T^{\beta\alpha}\right)\\&=\partial_\mu\left(x^\alpha T^{\mu\beta}-x^\beta T^{\mu\alpha}\right)\end{aligned}$$

定义粒子系统的角动量流密度张量:

$$M^{\mu\alpha\beta}\triangleq x^\alpha T^{\mu\beta}-x^\beta T^{\mu\alpha}$$

由此就得到

$$\tau^{\alpha\beta}=\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta}$$

这就是粒子系统的角动量守恒定律。- 在有外力矩作用的情况下，粒子系统的总角动量并不守恒。- 显然，$M^{\mu\alpha\beta}$ 关于后两个指标 α 和 β 的交换是反对称的，即有

$$M^{\mu\alpha\beta}=-M^{\mu\beta\alpha}$$

如果粒子之间没有力的作用, 则 $M^{\mu\alpha\beta}$ 满足连续性方程:

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta}=0$$

- 由于 $M^{\mu\alpha\beta}=-M^{\mu\beta\alpha}$，因而这就给出了六个独立的守恒流。- 与六个守恒流对应地，就有六个守恒荷(不随时间变化)，称为粒子系统的 4-角动量张量:

$$L^{\alpha\beta}\triangleq\frac{1}{c}\int M^{0\alpha\beta}d^3x=\frac{1}{c}\int\left(x^\alpha T^{0\beta}-x^\beta T^{0\alpha}\right)d^3x$$

鉴于 $L^{\alpha\beta}$ 是反对称张量，将其简记为

$$L^{\alpha\beta}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & \vec{K}\\ -\vec{K} & \vec{L}\end{pmatrix}=\{\vec{K},\vec{L}\},\quad L^{ij}\triangleq\varepsilon^{ijk}L_k=-L^{ji}$$

从而有

$$\frac{dL^{\alpha\beta}}{dt}=0\Leftrightarrow\frac{d\vec{K}}{dt}=0=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

下面分别考察 K 和 L 的物理含义，会用到定义:

$$T^{0\alpha}=c\sum_n p_n^\alpha\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right),\quad M^{0\alpha\beta}=x^\alpha T^{0\beta}-x^\beta T^{0\alpha}$$

L 的含义利用

$$T^{0i}=c\sum_n p_n^i\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)$$

可得

$$L^{ij}=\frac{1}{c}\int M^{0ij}d^3x=\frac{1}{c}\int\left(x^iT^{0j}-x^jT^{0i}\right)d^3x$$
$$L^{ij}=\sum_n\int\left(x^ip_n^j-x^jp_n^i\right)\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)d^3x$$

因此

$$L^{ij}=\sum_n\left(x_n^ip_n^j-x_n^jp_n^i\right),\quad\vec{L}=\sum_n\left(\vec{x}_n\times\vec{p}_n\right)$$

即 L 为粒子系统的总角动量。

K 的含义

$$K^i=L^{0i}=\frac{1}{c}\int M^{00i}d^3x=\frac{1}{c}\int\left(x^0T^{0i}-x^iT^{00}\right)d^3x$$

其中

$$T^{00}=\sum_n\mathcal{E}_n\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right),\quad T^{0i}=c\sum_n p_n^i\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)$$

因此

$$K^i=\sum_n\int\left(p_n^ict-\frac{\mathcal{E}_n}{c}x^i\right)\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)d^3x$$
$$\Rightarrow\vec{K}=\sum_n\left(\vec{p}_nct-\frac{\mathcal{E}_n}{c}\vec{x}_n\right)$$

即有

$$\vec{K}=ct\vec{P}-\frac{1}{c}\sum_n\mathcal{E}_n\vec{x}_n$$

其中，P 是体系的总动量。为了给 K 提供一个物理解释，我们定义相对论体系的质心位置如下:

$$\vec{x}_{\text{cm}}(t)\triangleq\frac{\int\vec{x}T^{00}d^3x}{\int T^{00}d^3x}=\frac{\sum_n\mathcal{E}_n\vec{x}_n}{\mathcal{E}}$$

所以，K 守恒意味着

$$\vec{K} = ct\vec{P} - \frac{\mathcal{E}}{c}\vec{x}_{\text{cm}}(t) = -\frac{\mathcal{E}}{c}\vec{x}_{\text{cm}}(0)$$

即孤立体系的质火做匀速直线运动:

$$\vec{x}_{\text{cm}}(t) = \vec{x}_{\text{cm}}(0) + \frac{c^2\vec{P}}{\mathcal{E}}t \Rightarrow \vec{v}_{\text{cm}}(t) = \frac{c^2\vec{P}}{\mathcal{E}}$$

即有

$$\vec{K} = ct\vec{P} - \frac{1}{c}\sum_n \mathcal{E}_n\vec{x}_n$$

其中，P 是体系的总动量。为了给 K 提供一个物理解释，我们定义相对论体系的质心位置如下:

$$\vec{x}_{\text{cm}}(t) \triangleq \frac{\int \vec{x}T^{00}d^3x}{\int T^{00}d^3x} = \frac{\sum_n \mathcal{E}_n\vec{x}_n}{\mathcal{E}}$$

所以，K 守恒意味着

$$\vec{K} = ct\vec{P} - \frac{\mathcal{E}}{c}\vec{x}_{\text{cm}}(t) = -\frac{\mathcal{E}}{c}\vec{x}_{\text{cm}}(0)$$

即孤立体系的质火做匀速直线运动:

$$\vec{x}_{\text{cm}}(t) = \vec{x}_{\text{cm}}(0) + \frac{c^2\vec{P}}{\mathcal{E}}t \Rightarrow \vec{v}_{\text{cm}}(t) = \frac{c^2\vec{P}}{\mathcal{E}}$$

4 再推守恒定律

定义 4-力密度矢量:

$$f^\mu \triangleq F^{\mu\alpha}j_\alpha \leftrightarrow (f^0, \vec{f})$$

分量的含义

$$F^{\mu\alpha}j_\alpha \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & \overleftrightarrow{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}\cdot\vec{j}/c \\ \rho\vec{E} + \overleftrightarrow{B}\cdot\vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow f^\mu \leftrightarrow \left(f^0, \quad \vec{f}\right) = \left(\frac{\vec{E}\cdot\vec{j}}{c}, \quad \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}\right) = \left(\ \vec{f}\cdot\vec{\beta}, \quad \vec{f}\ \right)$$

利用 Maxwell 方程 $\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = -\mu_0 j_\beta$ 可得

$$f^\mu \triangleq F^{\mu\alpha}j_\alpha = \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}\partial^\beta F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0}\partial^\beta\left(F^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{\mu_0}F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\mu\alpha}$$

利用 Bianchi 恒等式，有

$$\begin{aligned} -F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\mu\alpha} &= F_{\alpha\beta}\partial^\mu F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}\partial^\alpha F^{\beta\mu} \\ &= F_{\alpha\beta}\partial^\mu F^{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha}\partial^\beta F^{\alpha\mu} \\ &= F_{\alpha\beta}\partial^\mu F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\mu\alpha} \end{aligned}$$

大比

$$-F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\mu\alpha} = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\partial^\mu F^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\partial^\mu\left(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)$$

所以有

$$\begin{aligned} f^\mu &= \frac{1}{\mu_0}\partial^\beta\left(F^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{4\mu_0}\partial^\mu\left(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) \\ &= \partial_v\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F^v_\alpha\right) + \partial_v\left(\frac{1}{4\mu_0}g^{\mu v}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) \end{aligned}$$

定义电磁场的能量-动量张量

$$T^{\mu v} \triangleq g^{\mu v}\mathcal{L}_{\mathrm{em}} - \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{v}, \quad \text{where} \quad \mathcal{L}_{\mathrm{cm}} \triangleq -\frac{1}{4\mu_0}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

则得到

$$f^{\mu} = -\partial_v T^{\mu v}$$

这就是电磁场的能量-动量守恒定律。该定律告诉我们电磁场把多少能量和动量转移给其所作用的实物粒子。电磁招的能量一动量张量是对称张量

$$T^{\mu v} \triangleq g^{\mu v}\mathcal{L}_{\mathrm{cm}} - \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{v}, \quad \mathcal{L}_{\mathrm{em}} \triangleq -\frac{1}{4\mu_0}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2 - c^2B^2\right)$$

【证明】第一项关于指标 α 和 β 显然是对称的。而由于

$$\begin{aligned}
F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{v} &= g_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\beta v} \\
&= g_{\alpha\beta}F^{\alpha\mu}F^{\nu\beta} \\
&= g_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}F^{\alpha\mu} \\
&= F^{\nu\beta}F_{\beta}^{\mu}
\end{aligned}$$

故电磁场的能量-动量张量是对称的。

分量的吕 X $F^{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & \vec{B} \end{pmatrix}$ 由于

$$-\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{v} = -\varepsilon_0 c^2 F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{v} \quad F_{\alpha}{}^{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & \vec{B} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow -\varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & \vec{E} \\ -\vec{E} & c\vec{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\vec{E} \\ -\vec{E} & c\vec{B} \end{pmatrix} \\
&= -\varepsilon_0 \begin{pmatrix} -E^2 & \vec{E}\cdot c\vec{B} \\ -c\vec{B}\cdot\vec{E} & -\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\cdot\vec{B} \end{pmatrix} \\
&= \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E^2 & \vec{E}\times c\vec{B} \\ \vec{E}\times c\vec{B} & c^2B^2\vec{I} - \vec{E}\vec{E} - c^2\vec{B}\vec{B} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

又由于前面已经给出

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cm}} \triangleq -\frac{1}{4\mu_0}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2 - c^2B^2\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
T^{\mu v} &\triangleq g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mathrm{em}} - \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{v} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2 - c^2B^2\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \vec{I} \end{pmatrix} + \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E^2 & \vec{E}\times c\vec{B} \\ \vec{E}\times c\vec{B} & c^2B^2\vec{I} - \vec{E}\vec{E} - c^2\vec{B}\vec{B} \end{pmatrix} \\
&= \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(E^2 + c^2B^2\right) & \vec{E}\times c\vec{B} \\ \vec{E}\times c\vec{B} & \frac{1}{2}\left(E^2 + c^2B^2\right)\vec{I} - \left(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

电磁场的能量-动量张量可以表示为

$$T^{\mu\nu} \leftrightarrow \begin{pmatrix} w & \vec{S}/c \\ \vec{S}/c & \vec{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & c\vec{g} \\ \vec{S}/c & \vec{T} \end{pmatrix}$$

$T^{00} = w \triangleq \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2 + c^2B^2\right) \rightarrow$ 能量密度 $T^{0k} \leftrightarrow c\vec{g} = \varepsilon_0\vec{E} \times c\vec{B} \rightarrow k$ 方向动量密度 $\times c$ $T^{k0} \leftrightarrow \vec{S}/c = \varepsilon_0\vec{E} \times c\vec{B} \rightarrow$ 能量流密度能量 $\div c$ $T^{ij} \leftrightarrow w\vec{I} - \varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B}\right) \rightarrow j$ 方向的 i 动量流密度

能量-动量守恒定律的三维牙述由于

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t, & \nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & c\vec{g} \\ \vec{S}/c & \vec{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t w + \frac{1}{c}\nabla\cdot\vec{S}, & \partial_t\vec{g} + \nabla\cdot\vec{T} \end{pmatrix}$$

而

$$-f^\nu \leftrightarrow -\left(\frac{\vec{E}\cdot\vec{j}}{c}, \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}\right)$$

因此，电磁场的能量-动量守恒定律可写为如下的三维形式:

$$\begin{cases} \vec{E}\cdot\vec{j} = -\partial_t w - \nabla\cdot\vec{S} \\ \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} = -\partial_t\vec{g} - \nabla\cdot\vec{T} \end{cases}$$

电磁诏的 4-动量在无源情况下，电磁场的能量-动量张量满足连续性方程:

$$\partial_\mu T^{\mu v} = 0$$

- 对于每一个 $v = 0, 1, 2, 3$ 都存在一个守恒流。- 与四个守恒流对应地，就有四个守恒荷（不随时间变化），称为电磁场的 4-动量:

$$G^\mu \triangleq \frac{1}{c}\int T^{0\mu} d^3x \leftrightarrow \quad \left(G^0, \vec{G}\right) = \left(\frac{W}{c}, \vec{G}\right)$$

下面通过下标“p ” 和” em ” 分别标志带电粒子和电磁场的能量-动量张量:

$$\begin{cases} T_{\text{em}}^{\mu v} \triangleq g^{\mu v}\mathcal{L}_{\text{em}} - \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_\alpha^v \\ T_{\text{p}}^{\mu\nu} \triangleq \sum_n \frac{dx_n^\mu}{dt} p_n^v \delta^3\left(\vec{x} - \vec{x}_n(t)\right) \end{cases}$$

- 前面我们分别给出了电磁场和带电粒子系统的的能量-动量守恒定律，即

$$f^v = -\partial_\mu T_{\text{em}}^{\mu v}, \quad f^v = \partial_\mu T_{\mathbf{p}}^{\mu\nu} \quad \text{where} \quad f^\mu \triangleq F^{\mu\alpha} j_\alpha$$

其中，f^v 为 4-电磁力密度。定义带电粒子与电磁场的能量-动量张量为

$$T^{\mu v} \triangleq T_{\text{em}}^{\mu v} + T_{\text{p}}^{\mu v}$$

具体写出来为

$$T^{\mu v} = g^{\mu v}\mathcal{L}_{\text{em}} - \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_\alpha^v + \sum_n \frac{dx_n^\mu}{dt} p_n^v \delta^3\left(\vec{x} - \vec{x}_n(t)\right)$$

所以，电磁作用下的带电粒子系统，实物粒子与场的总能量动量 (密度) 张量 $T^{\mu v}$ 满足连续性方程

$$\partial_\mu T^{\mu v} = 0$$

对于每一个 v⊠$T^{\mu v}$ 都定义了一个守恒流。因而，相应地就是四个守恒荷：

$$P^\mu + G^\mu = \frac{1}{c}\int T^{0\mu} d^3x$$

显然，这就是体系的总 4-动量，即

$$P^\mu + G^\mu \leftrightarrow \left(\frac{\mathcal{E}+W}{c}, \quad \vec{P}+\vec{G}\right)$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}=\textstyle\sum_n \mathcal{E}_n, \quad W=\int \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2+c^2B^2\right)d^3x,\\ &\vec{P}=\textstyle\sum_n \vec{p}_n, \quad \vec{G}=\int \varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B} d^3x\end{aligned}$$

定义 4-力矩密度张量:

$$\tau^{\alpha\beta} \triangleq x^\alpha f^\beta - x^\beta f^\alpha$$

$\tau^{\alpha\beta}$ 是一个反对称张量，可以将其简写为

$$\tau^{\alpha\beta} \leftrightarrow \left\{\vec{f}_{ct}-(\vec{f}\cdot\vec{\beta})\vec{x}, \quad \vec{\tau}\right\} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{f}ct-(\vec{f}\cdot\vec{\beta})\vec{x} \\ -\vec{f}_{ct}+(\vec{f}\cdot\vec{\beta})\vec{x} & \vec{\tau} \end{pmatrix}$$

其中，

$$\vec{\tau} \triangleq \vec{x}\times\vec{f}, \quad \tau^{ij} \triangleq \varepsilon^{ijk}\tau_k$$

利用电磁场的能量-动量守恒定律（暂不写下标“em”）：

$$f^\beta = -\partial_\alpha T^{\alpha\beta}$$

我们有:

$$\begin{aligned}\tau^{\alpha\beta} &= x^\alpha f^\beta - x^\beta f^\alpha = -x^\alpha\partial_\mu T^{\mu\beta} + x^\beta\partial_\mu T^{\mu\alpha}\\ &= -\partial_\mu\left(x^\alpha T^{\mu\beta}\right) + \partial_\mu\left(x^\beta T^{\mu\alpha}\right) + \delta^\alpha_\mu T^{\mu\beta} - \delta^\beta_\mu T^{\mu\alpha}\\ &= -\partial_\mu\left(x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}\right) + \left(T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}\right)\\ &= -\partial_\mu\left(x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}\right)\end{aligned}$$

定义电磁场的角动量流密度张量:

$$M^{\mu\alpha\beta} \triangleq x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}$$

显然，$M^{\mu\alpha\beta}$ 关于后两个指标 α 和 β 的交换是反对称的

$$M^{\mu\alpha\beta} = -M^{\mu\beta\alpha}$$

利用 $M^{\mu\alpha\beta}$ ，前面的结论就可以表示为:

$$\tau^{\alpha\beta} = -\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta}$$

这就是电磁场的角动量守恒定律。

类似于粒子系统，我们定义电磁场的角动量张量

$$L^{\alpha\beta} \triangleq \frac{1}{c}\int M^{0\alpha\beta} d^3x = \frac{1}{c}\int\left(x^\alpha T^{0\beta} - x^\beta T^{0\alpha}\right)d^3x$$

鉴于 $L^{\alpha\beta}$ 是反对称张量，将其简记为

$$L^{\alpha\beta} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \vec{K} \\ -\vec{K} & \vec{L} \end{pmatrix} = \{\vec{K}, \vec{L}\}, \quad L^{ij} \triangleq \varepsilon^{ijk} L_k = -L^{ji}$$

下面分别给出 K 和 L 的表达式，会用到定义：

$$T^{0\alpha} \leftrightarrow (w, c\vec{g}), \quad M^{0\alpha\beta} = x^\alpha T^{0\beta} - x^\beta T^{0\alpha}$$

L 的含义由于 $T^{0i} = cg^i$ ，因而

$$\begin{aligned} L^{ij} &= \frac{1}{c} \int M^{0ij} d^3x \\ &= \frac{1}{c} \int \left(x^i T^{0j} - x^j T^{0i} \right) d^3x \\ &= \int \left(x^i g^j - x^j g^i \right) d^3x \end{aligned}$$

由此给出

$$\vec{L} = \int \vec{x} \times \vec{g} d^3x, \quad L^{ij} = \varepsilon^{ijk} L_k$$

即 L 为电磁场的兰角动量。

K 的表达式由于 $T^{0i} = cg^i$ 以及 $T^{00} = w$ ，因而

$$\begin{aligned} K^i = L^{0i} &= \frac{1}{c} \int M^{00i} d^3x \\ &= \frac{1}{c} \int \left(x^0 T^{0i} - x^i T^{00} \right) d^3x \\ &= \int \left(x^0 g^i - \frac{w}{c} x^i \right) d^3x \end{aligned}$$

$$\vec{K} = \int \left(\vec{g}ct - \frac{w}{c} \vec{x} \right) d^3x = \vec{G}ct - \frac{1}{c} \int w \vec{x} d^3x$$

下面通过下标“p ” 和”em ” 分别标志带电粒子和电磁场的角动量流密度张量：

$$\begin{cases} M_{\text{em}}^{\mu\alpha\beta} \triangleq x^\alpha T_{\text{em}}^{\mu\beta} - x^\beta T_{\text{em}}^{\mu\alpha} \\ M_{\text{p}}^{\mu\alpha\beta} \triangleq x^\alpha T_{\text{p}}^{\mu\beta} - x^\beta T_{\text{p}}^{\mu\alpha} \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} T_{\text{em}}^{\mu v} \triangleq g^{\mu v} \mathcal{L}_{\text{em}} - \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\alpha} F_\alpha^v \\ T_{\text{p}}^{\mu v} \triangleq \sum_n \frac{dx_n^\mu}{dt} p_n^v \delta^3 \left(\vec{x} - \vec{x}_n(t) \right) \end{cases}$$

前面我们分别给出了电磁场和带电粒子系统的的角动量守恒定律，即

$$\tau^{\alpha\beta} = -\partial_\mu M_{\text{em}}^{\mu\alpha\beta}, \quad \tau^{\alpha\beta} = \partial_\mu M_{\text{p}}^{\mu\alpha\beta}$$

其中，$\tau^{\alpha\beta}$ 为 4-电磁力矩密度。定义带电粒子与电磁场的角动量流密度张量

$$M^{\mu\alpha\beta} \triangleq x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} = M_{\text{em}}^{\mu\alpha\beta} + M_{\text{p}}^{\mu\alpha\beta}, \quad \left(T^{\mu\nu} \triangleq T_{\text{em}}^{\mu v} + T_{\text{p}}^{\mu\nu} \right)$$

所以，电磁作用下的带电粒子系统，实物粒子与场的角动量流密度张量 $M^{\mu\alpha\beta}$ 满足连续性方程

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0$$

由于 $M^{\mu\alpha\beta}=-M^{\mu\beta\alpha}$ ，因而这就给出了六个独立的守恒流。因而，相应地就是六个守恒荷:

$$L^{\alpha\beta}\triangleq\frac{1}{c}\int M^{0\alpha\beta}d^3x=L_{\text{em}}^{\alpha\beta}+L_{\text{p}}^{\alpha\beta}$$

鉴于 $L^{\alpha\beta}$ 是反对称张量，将其简记为

$$L^{\alpha\beta}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0&\vec{K}\\-\vec{K}&\vec{L}\end{pmatrix}=\{\vec{K},\vec{L}\},\quad L^{ij}\triangleq\varepsilon^{ijk}L_k=-L^{ji}$$

从而有

$$\frac{dL^{\alpha\beta}}{dt}=0\Leftrightarrow\frac{d\vec{K}}{dt}=0=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

L 的含义艮据之前的讨论，我们可以直接得到 $\boldsymbol{L}$ 为实物粒子与电磁场的总角动量。ק|

$$\vec{L}=\vec{L}_{\text{em}}+\vec{L}_{\text{p}}=\int\vec{x}\times\vec{g}d^3x+\sum_n\left(\vec{x}_n\times\vec{p}_n\right)$$

K 的含义根据之前的讨论，我们可以直接得到

$$\vec{K}=\vec{K}_{\text{em}}+\vec{K}_{\text{p}}=ct(\vec{G}+\vec{P})-\frac{1}{c}\left(\int w\vec{x}d^3x+\sum_n\mathcal{E}_n\vec{x}_n\right)$$

定义电磁场与带电粒子系统的相对论质心位置如下:

$$\vec{x}_{\text{cm}}(t)\triangleq\frac{\int\vec{x}T^{00}d^3x}{\int T^{00}d^3x}=\frac{\int w\vec{x}d^3x+\sum_n\mathcal{E}_n\vec{x}_n}{W+\mathcal{E}}$$

而 K 守恒意味着孤立体系的质心做匀速直线运动:

$$\vec{v}_{\text{cm}}(t)=c^2\frac{\vec{G}+\vec{P}}{W+\mathcal{E}}$$

第 4 节 带电粒子的 Lagrange 表述

对于一个理栀的保守力学本系，真实运云力是有相同端点的所有可能路径当中使得 T 乍用量 S 取马主值的，艮

$$\begin{cases}\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q})dt=0\\\delta q_k\left(t_1\right)=0=\delta q_k\left(t_2\right)\end{cases}$$

L 称为体系的 Lagrange 函数。

1 (Hamilton) 最小作用量原理和 Euler-Lagrange 方程

由于对任意的变分 $\delta q=\{\delta q_k\}$ ，有 $0=\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\delta q_k+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right)\right]dt$ $=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\delta q_kdt+\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right)\Big|_{t_1}^{t_2}$ $\frac{\delta L}{\delta q_k}\triangleq\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}=0$ 此方程称为 Euler-Lagrange 方程。

在非相对论力学中，体系的 Lagrange 函数可以写为动能与势能之差。譬如单粒子的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2-U(\vec{r})$$

代入 Euler-Lagrange 方程中，得到

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = 0$$

这实际上就是 Newton 第二定律:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \vec{F}$$

同一体系可以有不同的 Lagrange 函数，这称为 Lagrange 函数的不确定性。譬如，Lagrange 函数可以相差一个规范变换:

$$\tilde{L}(q,\dot{q}) = L(q,\dot{q}) + \frac{dF(q)}{dt} \leftrightarrow L(q,\dot{q})$$

体系的 Hamilton 函数定义为

$$H \triangleq p_k\dot{q}_k - L(q,\dot{q}) = H(q,p)$$

其中，p_k 称为广义坐标 q_k 的共轭正则动量:

$$p_k \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Hamilton 量通常用于体系的能量, 并且是守恒的。

2 Hamilton 原理两种提法

(1) 由 Hamilton 原理确定粒子的轨迹：粒子空间位置随时间的变化

作用量仍然写为 Lagrange 函数对时间的积分:

$$S[\vec{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x},\dot{\vec{x}})dt$$

Euler-Lagrange 方程为:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}$$

相对论下，粒子的正则动量定义为

$$\vec{p} \triangleq \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$$

由此，Euler-Lagrange 方程也可写为

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}$$

粒子的能量定义为

$$\mathcal{E} \triangleq \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\cdot\vec{v} - L = \vec{p}\cdot\vec{v} - L$$

若 L 不显含时间 t ，则 $\mathcal{E}$ 是运动常数。

(2) 由 Hamilton 原理确定粒子的世界线。

此提法更方便将运动方程直接写为协变的形式，从而自动满足相对性原理。我们需要引入一个刻画世界线的参数 λ ，以代替原来时间的作用，这样世界线就可以表示为:

$$x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$$

我们要求时间 t 是参数 λ 的单调增函数。当以 λ 为参数描述世界线时，作用量写为：

$$S[x(\lambda)]=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_\lambda\left(x,\frac{dx}{d\lambda}\right)d\lambda$$

由于 S 为标量, 因此要求 L_λ 是标量。由此作用量取驻值就给出 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial x^\alpha}=\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L_\lambda}{\partial\left(dx^\alpha/d\lambda\right)}$$

由于 L_λ 为标量, 因此, Euler-Lagrange 方程具有明显协变的形式, 即是自动符合于相对性原理的。当以 λ 为参数描述世界线时，由于

$$S=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_\lambda\left(x,\frac{dx}{d\lambda}\right)d\lambda=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\lambda}{dt}L_\lambda\left(x,\frac{dx}{d\lambda}\right)dt$$

因而 L_λ 与通常的 Lagrange 函数 L_λ 之间的关系是:

$$L=\frac{d\lambda}{dt}L_\lambda\left(x,\frac{dx}{d\lambda}\right)$$

【第一种参数】将参数选为可能世界线固有时 τ。此情形下，作用量表示为：

$$S[x(\tau)]=\int_{P_1}^{P_2} L_0(x,dx/d\tau)d\tau=\int_{P_1}^{P_2} L_0(x,u)d\tau$$

时空平移下的不变性意味着 L_0 不显含 x^α 。因此, L_0 只能是由 4-速度构造的标量。由 4-速度 u^α 所能构造出的唯一独立的标量是 $u^\alpha u_\alpha=-c^2$ 。因此, L_0 只能是某个常数。从而

$$S=L_0\int_{P_1}^{P_2}d\tau$$

由于

$$L=\frac{d\tau}{dt}L_0=\frac{L_0}{\gamma}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}L_0$$

当 $v/c\to 0$ 时

$$L=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}L_0\approx\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)L_0$$

若要求在 $v/c\to 0$ 时回到非相对论 Lagrange 函数，L_0 只能取

$$L_0=-mc^2$$

这样就得到了相对论自由粒子的作用量:

$$S[x(\tau)]=-mc^2\int_{P_1}^{P_2}d\tau$$

注: 第一种参数

自由粒子的通常 Lagrange 函数为

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

粒子的正则动量为

$$\vec{p}\triangleq\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

粒子的能量义为

$$\mathcal{E}\triangleq\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\cdot\vec{v}-L=\vec{p}\cdot\vec{v}-L=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

【第二种参数】将参数选为实际世界线的固有时 τ。此情形下，作用量表示为:

$$S[x(\tau)]=\int_{\tau_1}^{\tau_2}L_\tau(x,u)d\tau$$

Euler-Lagrange 方程：如果真实世界线在 $x^\alpha(\tau)$ 点有一个偏离 $\delta x^\alpha(\tau)$，则

$$\delta u^\alpha=\frac{d}{d\tau}\left(\delta x^\alpha\right)$$

而作用量的改变为

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha+\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\delta u^\alpha\right)d\tau\\&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\left(\frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\right)\delta x^\alpha+\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\delta x^\alpha\right)\right]d\tau\\&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\left(\frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\right)\delta x^\alpha\right]d\tau+\left(\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\delta x^\alpha\right)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}\Big]_{\text{边界项}}\end{aligned}$$

若对任意变分 δx^α 都有 $\delta S=0$，就给出了 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha}=0$$

- 由于 L_τ 为标量，因而，该方程是明显协变的。
- 定义 x^α 的正则共轭 4-动量

$$\pi_\alpha\triangleq\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}$$

Euler-Lagrange 方程也可写为

$$\frac{d\pi_\alpha}{d\tau}=\frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha}$$

例 4.4.1

【例】证明自由粒子的运动方程可由如下作用量得到:

$$S=\int_{\tau_1}^{\tau_2}L_\tau d\tau,\quad L_\tau=\frac{1}{2}mu^\mu u_\mu$$

【证明】L_τ 不显含时空坐标，因而：

$$\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha} = mu_\alpha, \quad \frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(mu_\alpha) = 0$$

由于此乃真实世界线满足的方程，故 u^α 就是粒子的 4-速度。

例 4.4.2

【例】证明自由粒子的运动方程可由如下作用量得到：

$$S = -mc\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{-dx^\mu dx_\mu} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L_\tau d\tau, \quad L_\tau = -mc\sqrt{-u^\mu u_\mu}$$

【证明】L_τ 不显含时空坐标，因而 Euler-Lagrange 方程为：

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha} = \frac{d}{d\tau}\frac{mcu_\alpha}{\sqrt{-u^\mu u_\mu}} = 0$$

由于这是真实世界线满足的方程，因而有

$$u^\mu u_\mu = -c^2$$

所以运动方程就写为了

$$\frac{d}{d\tau}(mu_\alpha) = 0$$

3 电磁场中带电粒子

将带电粒子在给定电磁场中的作用量写为

$$S[x] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L_\tau d\tau = S_{\mathrm{p}}[x] + S_{\mathrm{emp}}[x], \quad L_\tau = L_{\mathrm{p}} + L_{\mathrm{emp}}$$

这里仍以真实世界线的固有时 τ 作为参数。其中

$$S_{\mathrm{p}}[x] = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{-u^\mu u_\mu}d\tau$$

而 S_{emp} 是描述电磁作用的作用量:

$$S_{\mathrm{emp}}[x] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L_{\mathrm{emp}}\, d\tau$$

要过 L_{pf} 或 L 是 4-标量。

注: 用什么场描述电磁作用?

对于给定电磁场中运动的带电粒子，其动力学方程为

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = eF^{\alpha\beta}u_\beta$$

比方程中出现的相关四维张量有 m、e、u^{α}、$F^{\alpha\beta}$ 。据此能够构造出的独立 4-标量有

$$u^{\mu}u_{\mu}, F^{\mu v}F_{\mu v}, \varepsilon^{\mu v\alpha\beta}F_{\mu v}F_{\alpha\beta} \quad F^{\mu v}u_{\mu}u_{v}$$

中间两项并不反映带电粒子与场的作用，最后一项则为零。因此，上述候选者中有效的 4-标量只有 $u^{\mu}u_{\mu}$ ，而它实际上给出了带电粒子的作用量

$$S_p[x] = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{-u^{\mu}u_{\mu}}d\tau$$

为了反映带电粒子与电磁场之间的相互作用，用规范势 $A^{\mu}(x)$ 代替 Maxwell 张量描述电磁场，这样，就可以构造出描述相互作用的四维标量: $u^{\mu}A_{\mu}$ 因此，电磁场中带电粒子的 Lagrange 函数的候选形式为

$$L_{\tau} = L_{\mathrm{p}} + L_{\mathrm{emp}} = -mc\sqrt{-u^{\mu}u_{\mu}} + au^{\mu}A_{\mu}$$

其中，a 是粒子与电磁场的耦合常数。

确定耦合常数 a 由于

$$\frac{\partial L_{\tau}}{\partial x^{\alpha}} = au^{\beta}\partial_{\alpha}A_{\beta}, \frac{\partial L_{\tau}}{\partial u^{\alpha}} = \frac{mcu_{\alpha}}{\sqrt{-u^{\mu}u_{\mu}}} + aA_{\alpha} = mu_{\alpha} + aA_{\alpha}$$

因此

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_{\tau}}{\partial u^{\alpha}} = \frac{d}{d\tau}(mu_{\alpha}) + a\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \frac{d}{d\tau}(mu_{\alpha}) + au^{\beta}\partial_{\beta}A_{\alpha}$$

Euler-Lagrange 方程写为

$$\frac{d}{d\tau}(mu_{\alpha}) = a\left(\partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\alpha}\right)u^{\beta} = aF_{\alpha\beta}u^{\beta}$$

将其与 Lorentz 方程比较, 就得到 $a = e$。

以真实世界线的固有时 τ 为参数，Lagrange 函数为

$$L_{\tau} = -mc\sqrt{-u^{\mu}u_{\mu}} + eu^{\alpha}A_{\alpha}$$

以相应各可能世界线的固有时 τ 为参数，Lagrange 函数有

$$L_0 = -mc^2 + e\gamma(\vec{v}\cdot\vec{A} - \varphi)$$

以时间 t 为参数，(通常) Lagrange 函数为

$$L = \frac{d\tau}{dt}L_0 = \frac{1}{\gamma}L_0 = -\frac{mc^2}{\gamma} + e(\vec{v}\cdot\vec{A} - \varphi)$$

(1) 带电粒子在电磁场中的 Lagrange 函数依赖于规范的选择，在如下规范变换下

$$A_{\alpha} \quad \to \quad \tilde{A}_{\alpha} = A_{\alpha} + \partial_{\alpha}\psi$$

Lagrange 函数变为

$$\tilde{L}_{\tau} = -mc\sqrt{-u^{\alpha}u_{\alpha}} + eu^{\alpha}\tilde{A}_{\alpha} = L_{\tau} + eu^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi$$

$$\Rightarrow \tilde{L}_{\tau} = L_{\tau} + e\frac{d\psi}{d\tau}$$

因此，带电粒子的运动方程具有规范不变性。这一点也可从 Lorentz 方程中只出现了规范不变的量 E、B 得到。

(2) 由于

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e(\vec{v}\cdot\vec{A}-\varphi)$$

因此，带电粒子在电磁场中的正则动量为

$$\vec{P}\triangleq\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\vec{A}$$

$$\vec{P}=\vec{p}+e\vec{A}$$

对于在电磁场中运动的带电粒子而言，其正则动量 $\boldsymbol{P}$ 不等于机械动量 p ，而是要附加一项外场中的电磁动量 qA 。

(3) 带电粒子在电磁场中的 Hamilton 量定义为

$$\begin{aligned} H=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\cdot\vec{v}-L=\vec{P}\cdot\vec{v}-L &= (\vec{p}+e\vec{A})\cdot\vec{v}+\frac{mc^2}{\gamma}-e(\vec{v}\cdot\vec{A}-\varphi) \\ =\vec{p}\cdot\vec{v}+\frac{mc^2}{\gamma}+e\varphi &= \vec{p}\cdot\frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}}+\frac{m^2c^4}{\mathcal{E}}+e\varphi \\ =\mathcal{E}+e\varphi &= \sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4}+e\varphi \end{aligned}$$

因此，将 Hamilton 量用正则变量表示出来，为

$$H=\sqrt{(\vec{P}-e\vec{A})^2c^2+m^2c^4}+e\varphi$$

在非相对论极限下

$$H\approx mc^2+\frac{(\vec{P}-e\vec{A})^2}{2m}+e\varphi\to\frac{(\vec{P}-e\vec{A})^2}{2m}+e\varphi$$

过渡到量子力学时，需要将粒子的正则动量 (而非机械动量) 代换为厄米算符

$$\vec{P}\to-i\hbar\nabla$$

描述微观带电粒子在电磁场中运动的动力学方程是如下形式的 Schrödinger (薛定谔) 方程:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla-\frac{ie\vec{A}}{\hbar}\right)^2+e\varphi\right]\psi$$

第 5 节 Noether 定理

1 Poincaré 变换

一般的 Poincaré 变换为

$$x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{v}x^{\nu}+a^{\mu}$$

无穷小 Poincaré 变换为

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+\Omega^{\mu}{}_{v}x^{\nu}+a^{\mu},\quad \Omega_{\mu v}=-\Omega_{v\mu}$$

其中，10 个参数 $\Omega_{\mu\nu}$ 和 a^{μ} 均趋于零。因此

$$\delta x^{\mu}=x'^{\mu}-x^{\mu}=\Omega^{\mu}{}_{v}x^{\nu}+a^{\mu}$$

由 $\Omega_{\mu\nu}$ 的反对称性，易得

$$\partial_{\mu}\delta x^{\mu}=0$$

2 场的变换

四维的标量场、矢量场、二阶张量场在 Poincaré 变换下如下变换

$$\left\{\begin{aligned} \Phi'\left(x'\right) &= \Phi(x) \\ A'^{\mu}\left(x'\right) &= \Lambda^{\mu}{}_{v} A^{v}(x) \\ F'^{\mu\nu}\left(x'\right) &= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{v}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}(x) \end{aligned}\right. \quad \leftrightarrow \varphi_a'\left(x'\right) = M_a{}^{b} \varphi_b(x)$$

为方便计，定义场 φ_a 的两种变分：

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{全变分:} & \bar{\delta}\varphi_a \triangleq \varphi_a'\left(x'\right) - \varphi_a(x) \\ \text{形式变分:} & \delta\varphi_a \triangleq \varphi_a'(x) - \varphi_a(x) \end{array}\right.$$

标量场的全变分: $\bar{\delta}\Phi(x) = \Phi'\left(x'\right) - \Phi(x) = 0$

- 矢量场的全变分：$\bar{\delta}A^{\mu}(x) = \Omega^{\mu}_{v} A^{v}(x)$

$$\bar{\delta}A^{\mu}(x) = A^{\mu\mu}\left(x'\right) - A^{\mu}(x) = \left(\delta^{\mu}_{v} + \Omega^{\mu}_{v}\right) A^{v}(x) - A^{\mu}(x)$$

-二阶张量场的全变分 : $\bar{\delta}F^{\mu v}(x) = \Omega^{\mu}{}_{\alpha} F^{\alpha v}(x) + \Omega^{v}{}_{\beta} F^{\mu\beta}(x)$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}F^{\mu v}(x) &= F^{\mu v}\left(x'\right) - F^{\mu v}(x) \\ &= \left(\delta^{\mu}_{\alpha} + \Omega^{\mu}_{\alpha}\right)\left(\delta^{v}{}_{\beta} + \Omega^{v}_{\beta}\right) F^{\alpha\beta}(x) - F^{\mu v}(x) \end{aligned}$$

矢量场的形式变分定义为

$$\begin{aligned} \delta A_{\alpha}(x) &\triangleq A_{\alpha}'(x) - A_{\alpha}(x) \\ &= A_{\alpha}'(x) - A_{\alpha}'\left(x'\right) + A_{\alpha}'\left(x'\right) - A_{\alpha}(x) \\ &= A_{\alpha}'(x) - A_{\alpha}'(x + \delta x) + \bar{\delta}A_{\alpha}(x) \\ &= -\delta x_{v} \partial^{v} A_{\alpha}'(x) + \bar{\delta}A_{\alpha}(x) \\ &= -\delta x_{v} \partial^{v} A_{\alpha}(x) + \bar{\delta}A_{\alpha}(x) \\ \delta A_{\alpha}(x) &= -\delta x_{v} \partial^{v} A_{\alpha}(x) + \Omega_{\alpha\beta} A^{\beta}(x) \end{aligned}$$

3 Lagrange 密度

在 Poincaré 变换下，Lagrange 密度 $\mathcal{L}$ 的变分定义为

$$\delta\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x) = \mathcal{L}\left(\varphi'\left(x'\right), \partial'\varphi'\left(x'\right), x'\right) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x)$$

- 由于时空平移 $x' = x + a$ 下，场是不变的:

$$\varphi_a'\left(x'\right) = \varphi_a(x)$$

因此，如果 $\delta\mathcal{L} = 0$ ，则有

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x + a) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x)$$

即仅当 $\mathcal{L}$ 不明显依赖于时空坐标 x 时, 它于是平移不变的。

下面仅针对矢量场的情形讨论，并假设 $\mathcal{L}$ 在 Poincaré 变换下是不变的 (这也就意味着 $\mathcal{L}$ 不显含 x)。我们将由 $\mathcal{L}$ 满足的此对称性导出相应的守恒流以及守恒荷。设 $A^\alpha(x)$ 是真实的场。

- 矢量场 A^α 的 Lagrange 密度的变分可以写为:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}\left(A'\left(x'\right),\partial' A'\left(x'\right),x'\right)-\mathcal{L}(A(x),\partial A(x),x)\\&=\left[\mathcal{L}\left(A'\left(x'\right),\partial' A'\left(x'\right),x'\right)-\mathcal{L}\left(A'(x),\partial A'(x),x\right)\right]\\&+\left[\mathcal{L}\left(A'(x),\partial A'(x),x\right)-\mathcal{L}(A(x),\partial A(x),x)\right]\\&=\delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha}\delta A_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\alpha\right)}\partial_\mu\left(\delta A_\alpha\right)\end{aligned}$$

- 利用 Leibniz 法则以及 $\partial_\mu\left(\delta x^\mu\right)=0$ ，得到

$$\delta\mathcal{L}=\partial_\mu\left(\mathcal{L}\delta x^\mu+\Pi^{\mu\alpha}\delta A_\alpha\right)+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha}-\partial_\mu\Pi^{\mu\alpha}\right)\delta A_\alpha$$

如果 A^α 为真实的场，即其满足 Euler-Lagrange 方程，则

$$\delta\mathcal{L}=\partial_\mu\left(\mathcal{L}\delta x^\mu+\Pi^{\mu\alpha}\delta A_\alpha\right)$$

- 前面我们得到了矢量场的形式变分

$$\delta A_\alpha(x)=-\delta x_v\partial^v A_\alpha(x)+\Omega_{\alpha\beta}A^\beta(x)$$

将其代入上面 $\delta\mathcal{L}$ 的表达式，右边括号中的项表示为了:

$$\mathcal{L}\delta x^\mu+\Pi^{\mu\alpha}\delta A_\alpha=\left(g^{\mu v}\mathcal{L}-\Pi^{\mu\alpha}\partial^v A_\alpha\right)\delta x_v+\Pi^{\mu\alpha}\Omega_{\alpha\beta}A^\beta$$

定理 4.5.1: 正则能量-动量张量

定义场的正则能量-动量张量

$$\tilde{T}^{\mu\nu}=g^{\mu v}\mathcal{L}-\Pi^{\mu\alpha}\partial^v A_\alpha$$

从而

$$\mathcal{L}\delta x^\mu+\Pi^{\mu\alpha}\delta A_\alpha=\tilde{T}^{\mu v}\delta x_v+\Pi^{\mu\alpha}\Omega_{\alpha\beta}A^\beta$$

利用无穷小 Poincar é 变换

$$\delta x_v=\Omega_{v\beta}x^\beta+a_v$$

可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\delta x^\mu+\Pi^{\mu\alpha}\delta A_\alpha&=\tilde{T}^{\mu v}a_v+\Omega_{\alpha\beta}\left(x^\beta\tilde{T}^{\mu\alpha}+\Pi^{\mu\alpha}A^\beta\right)\\&=\tilde{T}^{\mu v}a_v-\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\left[\left(x^\alpha\tilde{T}^{\mu\beta}-x^\beta\tilde{T}^{\mu\alpha}\right)-\left(\Pi^{\mu\alpha}A^\beta-\Pi^{\mu\beta}A^\alpha\right)\right]\end{aligned}$$

定义场的正则角动量密度张量

$$\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}=\left(x^\alpha\tilde{T}^{\mu\beta}-x^\beta\tilde{T}^{\mu\alpha}\right)-\left(\Pi^{\mu\alpha}A^\beta-\Pi^{\mu\beta}A^\alpha\right)$$

它关于后两个指标 α 和 β 交换是反对称的，即:

$$\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}=-\tilde{M}^{\mu\beta\alpha}$$

这样前面的结果就简写为了

$$\mathscr{L}\delta x^\mu + \Pi^{\mu\alpha}\delta A_\alpha = \tilde{T}^{\mu v}a_v - \frac{1}{2}\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}$$

而 $\mathscr{L}$ 的变分则写为了

$$\delta\mathscr{L} = a_\nu\partial_\mu\tilde{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\partial_\mu\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}$$

4 Noether 定理

若 $\mathscr{L}$ 在时空平移下不变, 则存在四个守恒流:

$$\partial_\mu\tilde{T}^{\mu v} = 0, \quad \tilde{T}^{\mu v} \triangleq g^{\mu v}\mathscr{L} - \Pi^{\mu\alpha}\partial^v A_\alpha$$

相应地就有四个守恒荷, 称为场的 4-动量, 即

$$\frac{d\tilde{P}^\mu}{dt} = 0, \quad \tilde{P}^\mu \triangleq \frac{1}{c}\int \tilde{T}^{0\mu}d^3x$$

若$\mathscr{L}$ 在 Lorentz 变换下不变, 则存在六个守恒流:

$$\partial_\mu\tilde{M}^{\mu\alpha\beta} = 0, \quad \tilde{M}^{\mu\alpha\beta} \triangleq \left(x^\alpha\tilde{T}^{\mu\beta} - x^\beta\tilde{T}^{\mu\alpha}\right) - \left(\Pi^{\mu\alpha}A^\beta - \Pi^{\mu\beta}A^\alpha\right)$$

相应地就有六个守恒荷, 称为场的 4-角动量, 即

$$\frac{d\tilde{L}^{\alpha\beta}}{dt} = 0, \quad \tilde{L}^{\alpha\beta} \triangleq \frac{1}{c}\int \tilde{M}^{0\alpha\beta}d^3x$$

下面考察自由的 Maxwell 场，其 Lagrange 密度为

$$\mathscr{L}_{\text{em}}(A, \partial A) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

由于 $\mathscr{L}_{\text{em}}$ 在 Poincaré 变换下是不变的，故存在 10 个守恒流电磁场的正则能量-动量张量 (4) 以及角动量密度张量 (6) ：

$$\begin{cases} \tilde{T}^{\mu v}_{\text{em}} = g^{\mu v}\mathscr{L}_{\text{em}} - \Pi^{\mu\alpha}\partial^v A_\alpha, \text{ where } \Pi^{\mu\alpha} = -F^{\mu\alpha}/\mu_0 \\ \tilde{M}^{\mu\alpha\beta}_{\text{em}} = \left(x^\alpha\tilde{T}^{\mu\beta}_{\text{em}} - x^\beta\tilde{T}^{\mu\alpha}_{\text{em}}\right) - \left(\Pi^{\mu\alpha}A^\beta - \Pi^{\mu\beta}A^\alpha\right) \end{cases}$$

相应地就有 10 个守恒荷 —— 电磁场的 4-动量和 4-角动量张量:

$$\tilde{G}^v \triangleq \frac{1}{c}\int \tilde{T}^{0v}d^3x, \quad \tilde{L}^{\alpha\beta}_{\text{em}} \triangleq \frac{1}{c}\int \tilde{M}^{0\alpha\beta}_{\text{em}}d^3x$$

电磁场的正则能量-动量张量为

$$\tilde{T}^{\mu v}_{\text{em}} = g^{\mu v}\mathscr{L}_{\text{em}} + \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}\partial^v A_\alpha$$

(1) 与之前给出的结果不一致

$$T^{\mu v}_{\text{em}} = g^{\mu v}\mathscr{L}_{\text{em}} - \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^v$$

(2) 不是规范不变的 (3) 不对称

$$\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}_{\text{em}} = \left(x^\alpha\tilde{T}^{\mu\beta}_{\text{em}} - x^\beta\tilde{T}^{\mu\alpha}_{\text{em}}\right) + \left(\frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\alpha}A^\beta - F^{\mu\beta}A^\alpha\right)\right)$$

5 对称化

设三阶张量 $V^{\alpha\mu\nu}$ 关于前两个指标反对称

$$V^{\alpha\mu v}=-V^{\mu\alpha\nu}$$

则重新定义的能量-动量张量

$$T^{\mu v}=\tilde{T}^{\mu v}+\partial_{\alpha}V^{\alpha\mu v}$$

满芨:

$$\partial_{\mu}\left(T^{\mu v}-\tilde{T}^{\mu v}\right)=\partial_{\mu}\partial_{\alpha}V^{\alpha\mu v}=0$$

$$\int\left(T^{0v}-\tilde{T}^{0v}\right)d^{3}x=\int\partial_{\rho}V^{\rho0v}d^{3}x=\int\partial_{i}V^{i0v}d^{3}x=\oint V^{i0v}d\sigma_{i}=0$$

因此，$T^{\mu v}$ 仍然是守恒流，而相应地守恒荷则与之前相同:

$$\partial_{\mu}T^{\mu v}=0,\quad P^{v}\triangleq\frac{1}{=}\int T^{0v}d^{3}x=\tilde{P}^{v}$$

对于电磁场的正则能量-动量张量:

$$\tilde{T}_{\text{em}}^{\mu v}=g^{\mu v}\mathcal{L}_{\text{em}}+\frac{1}{\mu_{0}}F^{\mu\alpha}\partial^{v}A_{\alpha}$$

田

$$\begin{aligned}
F^{\mu\alpha}\partial^{v}A_{\alpha}&=g^{v\beta}F^{\mu\alpha}\partial_{\beta}A_{\alpha}\\
&=-g^{v\beta}F^{\mu\alpha}\left(\partial_{\alpha}A_{\beta}-\partial_{\beta}A_{\alpha}\right)+g^{v\beta}F^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}A_{\beta}\\
&=-g^{v\beta}F^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}+\partial_{\alpha}\left(g^{v\beta}F^{\mu\alpha}A_{\beta}\right)-\left(\partial_{\alpha}F^{\mu\alpha}\right)g^{v\beta}A_{\beta}\\
&=-F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{v}-\partial_{\alpha}\left(F^{\alpha\mu}A^{v}\right)+\left(\partial_{\alpha}F^{\alpha\mu}\right)A^{v}
\end{aligned}$$

大此

$$\tilde{T}_{\text{em}}^{\mu v}=g^{\mu v}\mathcal{L}_{\text{em}}-\frac{1}{\mu_{0}}F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{v}-\frac{1}{\mu_{0}}\partial_{\alpha}\left(F^{\alpha\mu}A^{v}\right)$$

重新定义能量-动量张量:

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu}=\tilde{T}_{\text{em}}^{\mu v}+\partial_{\alpha}V^{\alpha\mu\nu},\quad V^{\alpha\mu\nu}=\frac{1}{\mu_{0}}F^{\alpha\mu}A^{v}=-V^{\mu\alpha\nu}$$

得到

$$T_{\text{em}}^{\mu v}=g^{\mu v}\mathcal{L}_{\text{em}}-\frac{1}{\mu_{0}}F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{v}$$

新的能量一动量张量 (1) 关于 μ 和 v 对称，（2）规范不变，(3) 并且与之前的结果一致。

重新定义电磁场的角动量密度张量:

$$M_{\text{em}}^{\mu\alpha\beta}\triangleq x^{\alpha}T_{\text{em}}^{\mu\beta}-x^{\beta}T_{\text{em}}^{\mu\alpha}$$

其中:

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu}\triangleq\tilde{T}_{\text{em}}^{\mu v}+\partial_{\alpha}V^{\alpha\mu\nu},\quad V^{\alpha\mu\nu}\triangleq\frac{1}{\mu_{0}}F^{\alpha\mu}A^{v}=-V^{\mu\alpha\nu}$$

(1) 新的角动量密度张量写为了标准的形式。（2）而且, 它给出了六个守恒流, 相应地就有六个守恒荷:

$$\partial_{\mu}M_{\text{em}}^{\mu\alpha\beta}=0,\quad L_{\text{em}}^{\alpha\beta}\triangleq\int M_{\text{em}}^{0\alpha\beta}d^{3}x$$

由于:

$$\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}=\left(x^{\alpha}\tilde{T}_{\mathrm{em}}^{\mu\beta}-x^{\beta}\tilde{T}_{\mathrm{em}}^{\mu\alpha}\right)+\left(V^{\mu\alpha\beta}-V^{\mu\beta\alpha}\right),\quad T_{\mathrm{em}}^{\mu v}=\tilde{T}_{\mathrm{em}}^{\mu v}+\partial_{\alpha}V^{\alpha\mu v}$$

因而，新、旧角动量密度张量之差为

$$\begin{aligned}M_{\mathrm{em}}^{\mu\alpha\beta}-\tilde{M}_{\mathrm{em}}^{\mu\alpha\beta}&=x^{\alpha}\left(T_{\mathrm{em}}^{\mu\beta}-\tilde{T}_{\mathrm{em}}^{\mu\beta}\right)-x^{\beta}\left(T_{\mathrm{em}}^{\mu\alpha}-\tilde{T}_{\mathrm{em}}^{\mu\alpha}\right)-\left(V^{\mu\alpha\beta}-V^{\mu\beta\alpha}\right)\\&=x^{\alpha}\partial_{\rho}V^{\rho\mu\beta}-x^{\beta}\partial_{\rho}V^{\rho\mu\alpha}-\left(V^{\mu\alpha\beta}-V^{\mu\beta\alpha}\right)\\&=\partial_{\rho}\left(x^{\alpha}V^{\rho\mu\beta}-x^{\beta}V^{\rho\mu\alpha}\right)-\left(V^{\alpha\mu\beta}-V^{\beta\mu\alpha}\right)-\left(V^{\mu\alpha\beta}-V^{\mu\beta\alpha}\right)\\&=\partial_{\rho}\left(x^{\alpha}V^{\mu\rho\beta}-x^{\beta}V^{\mu\rho\alpha}\right)\end{aligned}$$

即有 $M^{\mu\alpha\beta}-\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}=\partial_{\rho}\phi^{\rho\mu\alpha\beta},\quad \phi^{\rho\mu\alpha\beta}\triangleq x^{\alpha}V^{\mu\rho\beta}-x^{\beta}V^{\mu\rho\alpha}$ 由于 $V^{\mu\rho\beta}$ 关于前两个指标反对称，因此，$\phi^{\rho\mu\alpha\beta}$ 关于前两个指标 $\rho\leftrightarrow\mu$ 也是反对称的。实际上，由其定义不难看出，$\phi^{\rho\mu\alpha\beta}$ 关于后两个指标 $\alpha\leftrightarrow\beta$ 也是反对称的，即有

$$\phi^{\rho\mu\alpha\beta}=-\phi^{\mu\rho\alpha\beta}=-\phi^{\rho\mu\beta\alpha}$$

这意味着

$$\partial_{\mu}\partial_{\rho}\phi^{\rho\mu\alpha\beta}=0$$

从而也可给出

$$\partial_{\mu}M^{\mu\alpha\beta}=0=\partial_{\mu}\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}$$

由于:

$$M^{\mu\alpha\beta}-\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}=\partial_{\rho}\phi^{\rho\mu\alpha\beta},\quad \phi^{\rho\mu\alpha\beta}=-\phi^{\mu\rho\alpha\beta}=-\phi^{\rho\mu\beta\alpha}$$

因而，新、旧角动量张量之差为

$$\begin{aligned}L^{\alpha\beta}-\tilde{L}^{\alpha\beta}&=\frac{1}{c}\int\left(M^{0\alpha\beta}-\tilde{M}^{0\alpha\beta}\right)d^{3}x=\frac{1}{c}\int\partial_{\rho}\phi^{\rho0\alpha\beta}d^{3}x\\&=\frac{1}{c}\int\partial_{i}\phi^{i0\alpha\beta}d^{3}x=\frac{1}{c}\oint\phi^{i0\alpha\beta}d\sigma_{i}=0\end{aligned}$$

即有

$$L^{\alpha\beta}=\tilde{L}^{\alpha\beta}$$

6 规范不变、电荷守恒

- Lagrange 密度可以相差一个四维散度，即

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi,\partial\varphi,x)=\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi,x)+\partial_{\mu}C^{\mu}(\varphi,x)\leftrightarrow\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi,x)$$

此变换称为 $\mathcal{L}$ 的规范变换。

- 如果在某个变换下，$\mathcal{L}$ 仅仅相差一个四维散度，则称 $\mathcal{L}$ 在该变换下是规范不变的。由电磁作用联系的带电粒子系统，其完整的作用量为:

$$S\left[A,x_{n}\right]=\frac{1}{c}\int\mathcal{L}_{\mathrm{em}}d^{4}x+\frac{1}{c}\int\mathcal{L}_{\mathrm{emp}}\,d^{4}x-\sum_{n}m_{n}c\int\sqrt{-u_{n}^{\alpha}u_{n\alpha}}d\tau_{n}$$

其中，τ_{n} 是带电粒子 e_{n} 真实世界线的固有时，而

$$\mathcal{L}_{\mathrm{em}}=-\frac{1}{4\mu_{0}}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta},\quad\mathcal{L}_{\mathrm{emp}}=A_{\alpha}j^{\alpha}$$

事实上，利用 Dirac $-\delta$ 函数，S 最后一项也可以用 Lagrange 密度表示出来。目前，我们只关心一点: 场 A^α 只出现在 $\mathscr{L}_{\text{em}}$ 和 $\mathscr{L}_{\text{emp}}$ 中。

- 考察电磁势的规范变换:

$$A_\alpha(x) \to \tilde{A}_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \psi(x)$$

- 在该规范变换下，"电磁场 + 带电粒子" 系统的 Lagrange 密度的改变为：

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} = \delta\mathscr{L}_{\text{emp}} &= \delta\left(A_\alpha j^\alpha\right) = \left(\tilde{A}_\alpha - A_\alpha\right) j^\alpha = j^\alpha \partial_\alpha \psi \\ &= \partial_\alpha\left(\psi j^\alpha\right) - \psi \partial_\alpha j^\alpha\end{aligned}$$

Lagrange 密度的规范不变性意味着电荷守恒。

第五章 静电场

第 1 节 静电场基本规律

1 基本方程

静电场中

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \times \vec{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

-E 和 B 是解耦的。

- 静电场是有源无旋场，静磁场是无源有旋场。

2 静电势

E 可以用静电势描述电场 $\partial_t \vec{A} = 0$：

$$\vec{E}(\bar{x}) = -\nabla\varphi(\bar{x})$$

由电场确定电势:

$$\varphi(\vec{x}) = -\int_P^{\bar{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

其中 P 为参考点。对于局域八布电荷, 通常约定无穷远处为电势零点:

$$\varphi(\vec{x}) = -\int_\infty^{\bar{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\bar{x}}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电磁势满足的方程

$$\left\{\begin{array}{l}\Box\varphi + \partial_t L = -\rho/\varepsilon_0 \\ \Box\vec{A} - \nabla L = -\mu_0\vec{j}\end{array}\right. \quad \text{其中} \left\{\begin{array}{l}\Box \triangleq \nabla^2 - c^{-2}\partial_t^2 \\ L \triangleq \nabla\cdot\vec{A} + c^{-2}\partial_t\varphi\end{array}\right.$$

对于静态场，方程写为

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0, \quad \nabla^2\vec{A} - \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) = -\mu_0\vec{j}$$

注: 静电场基本方程

φ 和 A 是解耦的。
静电势满足的基本方程是 Poisson 方程

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$$

在没有电荷存在的区域，静电势满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\varphi = 0$$

3 介质中基本方程

介质中, 静电场的 Maxwell 方程组是

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0,\quad \nabla\times\vec{E} = 0,\quad \left(\vec{D} \triangleq \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)$$

静电场仍为无旋场，可用静电势描述:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

在介质交界面处，Maxwell 方程组表现为边值关系:

$$\hat{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0, \hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_0$$

为了确定电场，还需要知道本构关系。对简单介质有

$$\vec{D}(\vec{x}) = \varepsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x})$$

解答: 静电 Poisson 方程

将关系 $E = -\nabla\varphi$ 以及本构方程代入 Gauss 定律，得到简单介质中静电势满足的方程为

$$\nabla\cdot[\varepsilon(\vec{x})\nabla\varphi(\vec{x})] = -\rho_0(\vec{x})$$

- 对于分区均匀的简单介质:
(1）在每一种介质中静电势满足 Poisson 方程:

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = -\frac{\rho_0(\vec{x})}{\varepsilon}$$

(2）在介质交界面处静电势满足边值关系:

$$\varphi_2 = \varphi_1,\quad \left(\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)_S = \sigma_0$$

4 边值条件

由于静电平衡时, 导体内部电场为柰, 因此, 导体对于静电场具有行底的抗电性, 导体表面自动的成为静电场的边界。在导体表面, 场方程表现为边界冬件。

- 导体表面电场的边界条件 (其中 n 指向导体外)：

$$\hat{n}\times\vec{E}\Big|_S=0,\quad \hat{n}\cdot\vec{D}\Big|_S=\sigma_0$$

- 导体表面电势的边界条件:

$$\varphi|_S=\ \text{const.},\qquad \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S=-\sigma_0$$

5 静电能

静电场的能量称为静电能，为:

$$W=\int\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right)dV$$

其物理含义是：在维持电介质固定不动的情形下，将自由电荷从无穷远处无限缓慢地逐步移至给定位置的过程中一或者说电场从无到有无限缓慢地建立过程中, 外界抵抗静电力所做的功。

单位体积的静电能称为静电场的能量密度 w：

$$w=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}$$

1. 电荷表示的静电能：利用 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，静电能可以表示为

$$\begin{aligned}W=\frac{1}{2}\int dV\vec{D}\cdot\vec{E}&=-\frac{1}{2}\int dV\vec{D}\cdot\nabla\varphi\\&=\frac{1}{2}\int dV[\varphi\nabla\cdot\vec{D}-\nabla\cdot(\varphi\vec{D})]\\&=\frac{1}{2}\int dV\rho_0\varphi(-\frac{1}{2}\oint d\vec{\sigma}\cdot\varphi\vec{D})\end{aligned}$$

   而由于当 $r\to\infty$ 时有 $\varphi\sim 1/r$ 以及 $D\sim 1/r$，而 $S\sim r^2$，因此，上面的面积分为零。从而，静电能可以用自由电荷表示为

$$W=\frac{1}{2}\int\rho_0(\vec{x})\varphi(\vec{x})dV=\frac{1}{2}\int\varphi(\vec{x})dq_0$$

2. 导体系统的静电能：考察由若干导体与简单介质构成的孤立体系。设 Q_k 和 φ_k 分别是第 k 个导体的总电量和总电势，则

$$W=\frac{1}{2}\int_S\varphi(\bar{x})dq_0=\frac{1}{2}\sum_k\varphi_k\int_{S_k}dq_0$$

$$\Rightarrow W=\frac{1}{2}\sum_kQ_k\varphi_k$$

   静电平衡时，导体系统内各导体电量与电势满足线性关系

$$Q_i=\sum_jc_{ij}\varphi_j,\quad \varphi_i=\sum_jp_{ij}Q_j$$

   其中，c_{ij} 和 p_{ij} 分别为电容系数和电压系数。因而

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i,j}c_{ij}\varphi_i\varphi_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j}p_{ij}Q_iQ_j$$

例 5.1.1

【例】将点电荷 e 从无穷远处移至内外半径分别为 a 和 b、带电量为 Q 的导体球壳中心，试求此过程中外界抵抗静电力做的功。

【解】将点电荷视为半径 $r \to 0$ 的导体球，点电荷在自身处所激发的电势设为 φ_0 。点电荷在无穷远处时，系统的静电能为 (电荷 + 导体球壳的静电能)。

$$W_1 = \frac{1}{2}e\varphi_0 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

点电荷在球心处时，系统的静电能为（考虑球壳内部感应出 $-e$ 的电荷，外表面 $Q+e$ 电荷）

$$W_2 = \frac{1}{2}e\left(\varphi_0 + \frac{Q+e}{4\pi\varepsilon_0 b} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}\right) + \frac{1}{2}Q\frac{Q+e}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

因此，外界抵抗静电力做功等于静电能的增加:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{e}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q+e}{b} - \frac{e}{a}\right)$$

6 Maxwell 应力张量

任选一个将带电体包含在内、其不含其它电荷的区域 V ，则该带电体受到的电场力可以写为:

$$\vec{F} = \int \rho(\vec{x})\vec{E}(\vec{x})dV = \varepsilon_0\int(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}dV$$

由此可得（请自行推导）:

$$\vec{F} = \varepsilon_0\oint d\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}\right) = -\oint d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

其中，$\overleftrightarrow{T}$ 为动量量流密度张量

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0\vec{E}\vec{E} = w(\overleftrightarrow{I} - 2\hat{E}\hat{E})$$

T 的负值称为 Maxwell 应力张量。

$$\vec{F} = \oint d\vec{\sigma}\cdot w(2\hat{E}\hat{E} - \overleftrightarrow{I}) = -\oint d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

7 唯一性定理

【问题】对于某个给定区域 V ，区域内部的自由电荷已知。在边界 $S = \partial V$ 提何种条件可以保证区域 V 内电场的唯一性? - 设有两个解 φ' 和 φ'' 同时满足（1）区域内部的自由电荷分布: $\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi') = -\rho_0 = \nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi'')$ (2) 区域边界上合适的边界条件 - 二者之差 $\Phi = \varphi' - \varphi''$ 满足（1）区域内部无自由电荷分布: $\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\Phi) = 0$ (2) 区域边界上的齐次边界条件

利用 Green 第三公式

$$\begin{aligned}\int_V dV\varepsilon(\nabla\Phi)^2 &= \int_V dV[\varepsilon\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + \Phi\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\Phi)] \\ &= \int_V dV\nabla\cdot(\Phi\varepsilon\nabla\Phi) = \oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\Phi\varepsilon\nabla\Phi\end{aligned}$$

$$\int_V dV\varepsilon(\nabla\Phi)^2 = \oint_{\partial V} d\sigma\left(\Phi\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)$$

如果上式右边积分为零, 则能保证区域 V 内处处有 $\nabla\Phi = 0$, 即 V 内电场唯一。譬如

$$\Phi|_S = 0 \quad \text{or} \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S = 0 \quad \text{or} \quad \left(\Phi\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_S = 0 \quad \text{or} \quad \cdots$$

1. Dirichlet 边界条件：已知区域 V 内的自由电荷分布 $\rho_0(x \in V)$, 如果再给定区域边界 $S = \partial V$ 上每一点的电势:

   $$\varphi|_S = f(\vec{x} \in S) \quad \text{(Dirichlet 边界条件)}$$

   那么区域 V 内的电场以及电势就唯一确定了。

   - 为保证存在性，每一个导体边界上给定的电势必须为常数。- 给定边界上的电势，也就给定了边界上电场的切向分量。

2. Neumann 边界条件：已知区域 V 内的自由电荷分布 $\rho_0(\boldsymbol{x} \in V)$, 如果再给定区域边界 $S = \partial V$ 上每一点电势的法向导数:

   $$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = g(\vec{x} \in S) \quad \text{(Neumann 边界条件)}$$

   那么区域 V 内的电场唯一确定, 电势可相差任一常数。

   - 给定边界上电势的法向导数，相当于给定:

   $$E_n|_S = -g$$

3. 导体边界条件：对于区域边界均为导体表面的情形: 已知区域 V 内的自由电荷分布 $\rho_0(\boldsymbol{x} \in V)$, 如果再给定每一内乎体边界所带总电量 $Q_k(k = 1, 2, \ldots)$, 那么区域 V 内的电场唯一确定, 电势可相差任一常数。

   - 设内导体边界为 $S_k(k = 1, 2, \ldots)$ ，外导体边界为 S_0 。- 此处边界条件是各内导体边界上所带兑电量, 而非各内导体所带兑电量。边界闭曲面的法向 n 是是约定为指向区域 V 外部的, 因而此处 n 指向各导体内部

证明: 导体边界条件

内导体边界所带总电量可表示为:

$$Q_k = \oint_{S_k} d\vec{\sigma}\cdot\vec{D} = -\oint_{S_k} d\sigma\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$$

外导体边界内的总自由电荷量:

$$Q_0 + \sum_k Q_k = \oint_{S_0} d\vec{\sigma}\cdot\vec{D} = -\oint_{S_0} d\sigma\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$$

两解之差 Φ 满足:

$$\oint_{S_k} d\sigma\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) = 0 = \oint_{S_0} d\sigma\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\quad\right)$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\int_V dV\varepsilon(\nabla\Phi)^2 &= \oint_{\partial V} d\sigma\left(\Phi\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\\ &= \oint_{S_0} d\sigma\left(\Phi\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)+\sum_k\oint_{S_k} d\sigma\left(\Phi\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\end{aligned}$$

- 又由于静电平衡解要求各导体表面是等势面，即

$$\begin{cases}\varphi'|_{S_k}=c_k', & \varphi''|_{S_k}=c_k''\\ \varphi'|_{S_0}=c_0', & \varphi''|_{S_k}=c_0''\end{cases}\qquad \begin{cases}\Phi|_{S_k}=c_k'-c_k''\triangleq c_k\\ \Phi|_{S_0}=c_0'-c_0''\triangleq c_0\end{cases}$$

所以

$$\int_V dV\varepsilon(\nabla\Phi)^2=c_0\oint_{S_0} d\sigma\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)+\sum_k c_k\oint_{S_k} d\sigma\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)=0$$

4. 渐进条件：若区域 V 无限大，则外表面上的边界条件通常称为渐近条件。
   - 有限电荷: $\varphi\to 0$
   - 有限电荷 + 均匀外场: $\varphi\to-\vec{E}_0\cdot\vec{x}$
   - 有限电荷 + 无限长线电荷 : $\varphi\to-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln s$
   - 有限电荷 + 无限长线电荷 + 均匀外场: $\varphi\to-\vec{E}_0\cdot\vec{x}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln s$

注: 渐进条件

具体问题中, 该渐近条件可能可以更加精细一些。
有时为确定解, 还需用到诸如单值、有界性等条件。

8 静电势的一般解

真空中位于原点的点电荷 e 的电势满足方程:

$$\nabla^2\varphi(\vec{x})=-\frac{e}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{x})$$

在 ∞ 处，$\varphi\to 0$ 。该方程的解是唯一的，为:

$$\varphi(\vec{x})=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r},\quad r\triangleq|\vec{x}|$$

点电荷 e 激发的电场为:

$$\vec{E}(\vec{x})=-\nabla\varphi(\vec{x})=\frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\qquad(\text{Coulomb 定律})$$

- 利用叠加原理，真空中局域电荷分布 $\rho(x)$ 激发的电势为:

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\frac{\rho(\vec{x}')}{\boldsymbol{\mathscr{r}}},\quad \boldsymbol{\vec{\mathscr{r}}}\triangleq\vec{x}-\vec{x}'$$

注: 静电势的一般解

此式中已经把无穷远点取为电势零点。
使用此式的前提是要求空间中所有电荷分布都已经事先给定。

第 2 节 多极展开

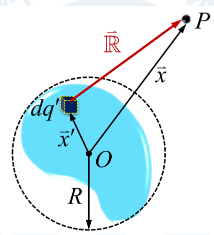
其电势的严格解前面已经得到，为

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq'}{\mathscr{r}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

- 为了获得近似解，通常首先需要在系统中寻找一个小量，然后按该小量做 Taylor 展开。

- 假设电荷分布在半径为 R 的球内。场点到球心的距离很远时将坐标原点选为球心 (或电荷所处区域内任一点)，则 R/r 或者 $\varepsilon=r'/r$ 就提供了这样一个小量。

1 $\mathscr{r}$ 的展开



$$\frac{1}{\mathscr{r}}=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=e^{-\vec{x}'\cdot\nabla}\frac{1}{r}=\frac{1}{r}-\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{2!}\vec{x}'\vec{x}':\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots$$

在远处，展开式的每一项比起前一项都小一个因子

$$\vec{x}'\cdot\nabla\sim\varepsilon=\frac{r'}{r}\ll 1$$

即是说，后面的项是更高阶小量。

$$\because \vec{I}:\nabla\nabla\frac{1}{r}=\nabla^2\frac{1}{r}=0,\qquad \text{when } \vec{r}\neq 0$$

因此，$1/\mathscr{r}$ 的 Taylor 展开式也可以写为

$$\frac{1}{\mathscr{r}}=\frac{1}{r}-\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{6}\left(3\vec{x}'\vec{x}'-r'^2\vec{I}\right):\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots,\qquad \left(r'\triangleq|\vec{x}'|\right)$$

注

与 $x'\boldsymbol{x}'$ 相比, 张量 $3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'-r'^2$ 不个又对称、而且无迹。

$$\operatorname{tr}\left(3\vec{x}'\vec{x}'-r'^2\vec{I}\right)=3\vec{x}'\cdot\vec{x}'-r'^2\operatorname{tr}\vec{I}=3\vec{x}'\cdot\vec{x}'-3r'^2=0$$

将 $1/\mathfrak{r}$ 的展开式代入电势的表达式，得到电势的展开:

$$\varphi(\bar{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int dq'\frac{1}{r}-\int \bar{x}'dq'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{6}\int\left(3\bar{x}'\bar{x}'-r'^2\vec{I}\right)dq':\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots\right]$$

我们将上式各项中对源的积分简记为

$$Q=\int dq'\to\sum q_k'$$
$$\vec{p}\triangleq\int \bar{x}'dq'\to\sum q_k'\vec{x}_k'$$
$$\vec{D}\triangleq\int\left(3\vec{x}'\bar{x}'-r'^2\vec{I}\right)dq'\to\sum q_k'\left(3\vec{x}_k'\vec{x}_k'-r_k'^2\vec{I}\right)$$

这样电势就可以写为:

$$\varphi(\bar{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}-\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{6}\vec{D}:\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots\right)=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\cdots$$

2 电单极场

电 极矩即是带电体的总电量:

$$Q=\int dq'\to\sum q_k'$$

如果电单极矩不为零，则远处电势的主要贡献为

$$\varphi(\vec{x})\approx\varphi^{(0)}(\vec{x})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},\quad(r>>R)$$

而电场的主要贡献则为

$$\vec{E}(\vec{x})=-\nabla\varphi(\vec{x})=\frac{Q\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\quad(r>>R)$$

3 电偶极场

电偶极矩定义为:

$$\vec{p}\triangleq\int\bar{x}'dq'\to\sum q_k'\bar{x}_k'$$

如果 $Q=0$，而 $\boldsymbol{p}\neq 0$，则远处电势的主要贡献为:

$$\varphi\approx\varphi^{(1)}=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\frac{1}{r}$$
$$\varphi\varphi(\vec{x})=\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad(r>>R)$$

而电偶极电场为

$$\vec{E}(\bar{x})=-\nabla\varphi(\bar{x})=\frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\quad(r>>R)$$

性质 5.2.1: 电偶极场的性质

叠加原理

$$\int_{A+B} \vec{x}' dq' = \int_A \vec{x}' dq' + \int_B \vec{x}' dq' \Rightarrow \vec{p}_{A+B} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$$

- 一般而言，$\boldsymbol{p}$ 与原点选择有关（除非 $Q=0$）

【注】整体呈电中性的带电沐, 内部正、负电荷兑量孰量异号 $(Q_+ + Q_- = 0)$。若定义正、负电荷各自的有效中茨为:

$$\vec{x}_+ \triangleq \frac{1}{Q_+}\int \vec{x}' dq'_+, \quad \vec{x}_- \triangleq \frac{1}{Q_-}\int \vec{x}' dq'_-$$

则电偶极矩可以写为:

$$\vec{p} = Q_+\vec{x}_+ + Q_-\vec{x}_- = Q_+\left(\vec{x}_+ - \vec{x}_-\right)$$

- 若电荷分布关于坐标原点对称，则其电偶极矩为零:

$$\rho(\vec{x}) = \rho(-\vec{x}) \Rightarrow \vec{p} = 0$$

【证明】对称性意味着在反演变换下，电偶极矩分量不变:

$$p'_x = p_x, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z$$

而 p 作为矢量，其分量应如下变换:

$$p'_x = -p_x, \quad p'_y = -p_y, \quad p'_z = -p_z$$

所以 $\boldsymbol{p} = 0$。只有相对于原点不对称的电荷分布才可能有非零的电偶极矩矢量。

如果电荷分布关于 $z=0$ 平面对称，则其电偶极矩沿着对称平面法向的分量为零:

$$\rho(x,y,z) = \rho(x,y,-z) \Rightarrow p_z = 0$$

如果 z 轴是电荷分布的 n 次对称轴 (或旋转对称轴)，则其电偶极矩平行于 z 轴:

$$\rho(x,y,z) = \rho\left(x',y',z\right) \Rightarrow \vec{p} = p\hat{z}$$

其中:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \theta_n \triangleq \frac{2\pi}{n}$$

证明: 设 V 是将所有电荷都包含进来的任一球体，证明 $\vec{p}=-3\varepsilon_0\int_V dV\vec{E}(\vec{x})$

$$
\begin{aligned}
\int_V dV\vec{E}(\vec{x}) &= \int_V dV\int_V dV'\frac{\rho\left(\vec{x}'\right)\vec{\mathscr{r}}}{4\pi\varepsilon_0\mathscr{r}^3}\\
&=-\int_V dV'\int_V dV\frac{\rho\left(\vec{x}'\right)\left(-\vec{\mathscr{r}}\right)}{4\pi\varepsilon_0\mathscr{r}^3}\\
&=-\int_V dV'\frac{\rho\left(\vec{x}'\right)\vec{x}'}{3\varepsilon_0}\\
\vec{p}&=-3\varepsilon_0\int_V dV\vec{E}(\vec{x})
\end{aligned}
$$

4 电四极场

电四极矩定义为:

$$
\ddot{D}\triangleq\int\left(3\vec{x}'\vec{x}'-r'^2\vec{I}\right)dq'\to\sum q_k'\left(3\vec{x}_k'\vec{x}_k'-r_k'^2\vec{I}\right)
$$

- 叠加原理

$$
\vec{D}_{A+B}=\vec{D}_A+\vec{D}_B
$$

- 通常 $\boldsymbol{D}$ 与原点选择有关 (除非 $Q=0=\boldsymbol{p}$)

D 是对称、无迹张量:

$$
D_{ij}=D_{ji},\quad D_{ii}=D_{11}+D_{22}+D_{33}=0
$$

电四极矩张量只有五个独立分量。

- 总可以找到一个坐标系 (主轴系)，使得电四极矩张量的分量矩阵具有对角的形式，即

$$
D=\operatorname{diag}\left\{D_1,\quad D_2,\quad D_3\right\},\quad D_1+D_2+D_3=0
$$

- 如果体系的电荷分布具有球对称性，则其电四极矩为零:

$$
\rho(\vec{x})=\rho(r)\Rightarrow\vec{D}=0
$$

【证明】球对称性意味着在主轴系下，其分量矩阵正比于单位矩阵；而无迹意味着三个对角元只能等于零。只有偏离球对称的电荷分布, 于可能有非零的电四极矩。

- 如果电荷分布关于 $z=0$ 平面对称，则 z 轴为主轴之一:

$$
\rho(x,y,z)=\rho(x,y,-z)\Rightarrow D=\begin{pmatrix}D_{11}&D_{12}&0\\D_{12}&D_{22}&0\\0&0&D_{33}\end{pmatrix}
$$

【证明】考察坐标变换 $x_i'=\lambda_{ij}x_j$ ，其中 $\lambda=\operatorname{diag}\{1,1,-1\}$ 。对称性意味着 $D_{ij}'=D_{ij}$ 。而张量分量的变化规律又意味着

$$
\left\{\begin{array}{l}D_{13}'=\lambda_{1k}\lambda_{3l}D_{kl}=\lambda_{11}\lambda_{33}D_{13}=-D_{13}\\D_{23}'=\lambda_{2k}\lambda_{3l}D_{kl}=\lambda_{22}\lambda_{33}D_{23}=-D_{23}\end{array}\right.
$$

所以 $D_{13}=D_{23}=0$ 。

- 如果 z 轴是电荷分布的 n 次对称轴，则 z 轴为主轴之一，即

$$D=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}$$

O 如果 z 轴是电荷分布的 $n \geq 3$ 次对称轴，则 z 轴为主轴之一，且过原点、垂直于 z 轴的任一轴皆为主轴，即

$$D=\begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \text{ and } D_1=D_2=-\frac{1}{2}D_3$$

例 5.2.1: 边长为 a 的正方形四个顶点处正负相间放置四个等量异号点电荷，试计算其电四极矩。

【解】总电量以及电偶极矩为零。如图建主轴系，由于

$$\vec{r}_1=\frac{a}{\sqrt{2}}\hat{x}=-\vec{r}_3, \quad \vec{r}_2=\frac{a}{\sqrt{2}}\hat{y}=-\vec{r}_4$$

因此

$$\vec{D}=2e\left(3\vec{r}_1\vec{r}_1-\frac{a^2}{2}\vec{I}\right)-2e\left(3\vec{r}_2\vec{r}_2-\frac{a^2}{2}\vec{I}\right)=6e\left(\vec{r}_1\vec{r}_1-\vec{r}_2\vec{r}_2\right)$$

$$\vec{D}=3ea^2(\hat{x}\hat{x}-\hat{y}\hat{y})$$

例 5.2.2

【例】均匀带电的椭球体，带电总量为 Q ，三个半轴长分别为 a_1、a_2、a_3 。求其相对于中心的电四极矩。【解】椭球体积及电荷分布体密度分别为

$$V=\frac{4\pi a_1a_2a_3}{3}, \quad \rho=\frac{3Q}{4\pi a_1a_2a_3}$$

建立以椭球的几何主轴为坐标轴的 (主轴) 坐标系，则

$$D_1=\rho\int\left(3x_1^2-r^2\right)dV=\rho\int\left(2x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)dV$$

做变量代换 : $x_i=a_ix_i'$ ，上式写为

$$D_1=\frac{3Q}{4\pi}\int_{r'\leq 1}\left(2a_1^2x_1'^2-a_2^2x_2'^2-a_3^2x_3'^2\right)dV'$$

由于

$$\int_{r'\leq 1}x_1'^2dV'=\int_{r'\leq 1}x_2'^2dV'=\int_{r'\leq 1}x_3'^2dV'=\frac{1}{3}\int_{r'\leq 1}r'^2dV'=\frac{4\pi}{15}$$

因此

$$\begin{cases} D_1=\frac{1}{5}Q\left(2a_1^2-a_2^2-a_3^2\right) \\ D_2=\frac{1}{5}Q\left(2a_2^2-a_3^2-a_1^2\right) \\ D_3=\frac{1}{5}Q\left(2a_3^2-a_1^2-a_2^2\right) \end{cases}$$

对于旋转椭球: $a_1 = a_2 = a$,$a_3 = b$,有

$$D_1 = D_2 = \frac{1}{5}Q\left(a^2 - b^2\right) = -\frac{1}{2}D_3, \quad D_3 = \frac{2}{5}Q\left(b^2 - a^2\right)$$

扁椭球 $(a > b) : D_3 < 0$;长椭球 $(a < b) : D_3 > 0$

1. 电四极电势:由于:

$$\begin{cases} \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{x}}{r^3} \\ \nabla\nabla\frac{1}{r} = -\nabla\frac{\vec{x}}{r^3} = -\frac{1}{r^3}\nabla\vec{x} - \left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\vec{r} = \frac{3\hat{r}\hat{r} - \vec{I}}{r^3}, \quad (r \neq 0) \end{cases}$$

因此,如果 $Q = 0 = \boldsymbol{p}$,则远处电势的主要贡献为:

$$\varphi(\vec{x}) \approx \varphi^{(2)} = \frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\vec{D} : \nabla\nabla\frac{1}{r} = \frac{\hat{r}\cdot\vec{D}\cdot\hat{r}}{8\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad (r \gg>)$$

这里用到 D 是无迹张量,从而

$$\vec{D} : \vec{I} = \operatorname{tr}\vec{D} = 0$$

2. 电四极电场:利用 Leibniz 法则

$$\begin{aligned} -\nabla\frac{\vec{x}\cdot\vec{D}\cdot\vec{x}}{r^5} &= -\left(\nabla\frac{1}{r^5}\right)\vec{x}\cdot\vec{D}\cdot\vec{x} - \frac{1}{r^5}\nabla(\vec{x}\cdot\vec{D}\cdot\vec{x}) \\ &= -\left(-\frac{5\vec{x}}{r^7}\right)\vec{x}\cdot\vec{D}\cdot\vec{x} - \frac{1}{r^5}(\vec{D}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{D}) \\ &= 5\frac{(\hat{r}\cdot\vec{D}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^4} - 2\frac{\vec{D}\cdot\hat{r}}{r^4} \end{aligned}$$

因此,如果 $Q = 0 = \boldsymbol{p}$,则远处电场的主要贡献为:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\varphi(\vec{x}) = \frac{5(\hat{r}\cdot\vec{D}\cdot\hat{r})\hat{r} - 2\vec{D}\cdot\hat{r}}{8\pi\varepsilon_0 r^4}, \quad (r >> R)$$

【例】均匀带电的椭球体,带电总量为 Q,三个半轴长分 为 a,a,b。求其在远处电势的主要贡献及主要修正。【解】主要贡献来自电单极子 Q,而由于电偶极矩为零,主要修正为电四极子项。利用

$$D_3 = \frac{2}{5}Q\left(b^2 - a^2\right), \quad D_1 = D_2 = -\frac{1}{2}D_3$$

亦即

$$\vec{D} = -\frac{1}{2}D_3\left(\hat{x}_1\hat{x}_1 + \hat{x}_2\hat{x}_2\right) + D_3\hat{x}_3\hat{x}_3 = \frac{1}{2}D_3\left(3\hat{x}_3\hat{x}_3 - \vec{I}\right)$$

采用球坐标系,得到

$$\hat{r}\cdot\vec{D}\cdot\hat{r} = \frac{1}{2}D_3\left(3\hat{r}\cdot\hat{x}_3\hat{x}_3\cdot\hat{r} - \hat{r}\cdot\vec{I}\cdot\hat{r}\right) = \frac{1}{2}D_3\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

将主要修正项考虑进来,远处电势为

$$\varphi(\bar{x}) \approx \varphi^{(0)}(\bar{x}) + \varphi^{(2)}(\bar{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\hat{r}\cdot\vec{D}\cdot\hat{r}}{8\pi\varepsilon_0 r^3}$$

将前面的结论代入，就得到

$$\varphi(\bar{x}) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q\left(b^2-a^2\right)}{40\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

【思考】请自行写出远处电场的主要贡献及对其的主要修正：

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{3Q\left(b^2-a^2\right)}{80\pi\varepsilon_0 r^4}[(1+3\cos 2\theta)\hat{r} + (2\sin 2\theta)\hat{\theta}]$$

5 外电场中小带电体

任一空间坐标的函数可如下泰勒展开：

$$f\left(\vec{x}+\vec{x}'\right) = e^{\vec{x}'\cdot\nabla} f(\vec{x}) = \left[1+\vec{x}'\cdot\nabla+\frac{1}{2!}\vec{x}'\vec{x}':\nabla\nabla+\cdots\right] f(\vec{x})$$

如果在点 x 处 f 满足

$$\nabla^2 f(\vec{x}) = \vec{I}:\nabla\nabla f(\vec{x}) = 0$$

则其泰勒展开可写为

$$f\left(\vec{x}+\vec{x}'\right) = \left[1+\vec{x}'\cdot\nabla+\frac{1}{6}\left(3\vec{x}'\vec{x}'-r'^2\vec{I}\right):\nabla\nabla+\cdots\right] f(\vec{x})$$

而其对 $dq' = \rho\left(\boldsymbol{x}'\right)dq'$ 积分则可表示为

$$\int f\left(\vec{x}+\vec{x}'\right)dq' = \left(Q+\vec{p}\cdot\nabla+\frac{1}{6}\ddot{D}:\nabla\nabla+\cdots\right) f(\bar{x})$$

1. 小带电体的电势能：小带电体在外场中的电势能为

   $$U = \int \varphi_e\left(\vec{x}+\vec{x}'\right)dq'$$

   如果在带电体内并无激发外场的电荷，从而

   $$\nabla^2\varphi_e(\vec{x}) = 0$$

   那么，利用前面的结论就得到：

   $$\begin{aligned} U &= U^{(0)}+U^{(1)}+U^{(2)}+\cdots \\ &= Q\varphi_e(\vec{x})+\vec{p}\cdot\nabla\varphi_e(\vec{x})+\frac{1}{6}\vec{D}:\nabla\nabla\varphi_e(\vec{x})+\cdots \\ &= Q\varphi_e(\vec{x})-\vec{p}\cdot\vec{E}_e(\vec{x})-\frac{1}{6}\vec{D}:\nabla\vec{E}_e(\vec{x})+\cdots \end{aligned}$$

2. 小带电体在外场中受到的静电力为

   $$\vec{F} = \int \vec{E}_e\left(\vec{x}+\vec{x}'\right)dq'$$

   如果在带电体内部并无激发外场的电荷，从而

   $$\nabla^2\vec{E}_e(\bar{x}) = -\nabla^2\left[\nabla\varphi_e(\bar{x})\right] = -\nabla\left[\nabla^2\varphi_e(\bar{x})\right] = 0$$

   那么，利用前面的结论就得到：

   $$\begin{aligned} \vec{F} &= Q\vec{E}_e(\vec{x})+\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_e(\bar{x})+\frac{1}{6}\vec{D}:\nabla\nabla\vec{E}_e(\bar{x})+\cdots \\ &= -\nabla U^{(0)}(\bar{x})-\nabla U^{(1)}(\vec{x})-\nabla U^{(2)}(\bar{x})+\cdots \end{aligned}$$

3. 小带电体在外场中受到的静电力矩 (相对于 O' 点) 为

$$\vec{\tau}=\int \vec{x}'\times\vec{E}_e\left(\vec{x}+\vec{x}'\right)dq'$$

将 $E_e\left(x+x'\right)$ 按照 x' 做泰勒展开，保留至线性项，得到

$$\begin{aligned}\vec{\tau}&\approx\int \vec{x}'\times\vec{E}_e(\vec{x})dq'+\int \vec{x}'\times\left[\vec{x}'\cdot\nabla\vec{E}_e(\vec{x})\right]dq'\\&=\int \vec{x}'dq'\times\vec{E}_e(\vec{x})+\left(\int \vec{x}'\vec{x}'dq'\cdot\nabla\right)\times\vec{E}_e(\bar{x})\end{aligned}$$

因此

$$\vec{\tau}\approx\vec{p}\times\vec{E}_e(\vec{x})+\frac{1}{3}(\vec{D}\cdot\nabla)\times\vec{E}_e(\vec{x})$$

6 多极展开的数学工具

1. Legendre 多项式 $P_l(x)$ 的一般表达式由 Rodriguez 式给出

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l,\quad x\in[-1,1]$$

其中, $l=0,1,2,\ldots$ 。P_{2n} 为偶函数，P_{2n+1} 为奇函数。前面几项为:

$$\begin{aligned}P_0(x)&=1,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\\P_1(x)&=x,\quad P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)\end{aligned}$$

Legendre 多项式的几个重要性质正交性

$$\int_{-1}^{1}dxP_l(x)P_{l'}(x)=\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

- 完备性

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(x)P_l\left(x'\right)=\delta\left(x-x'\right)$$

生成函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}t^lP_l(x),\quad |x|\leq 1,0<t<1$$

2. 缔合 Legendre 多项式定义为

$$P_l^m(x)=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x),\quad x\in[-1,1]$$

其中, $l=0,1,2,\ldots$, 而 $m=0,1,2,\ldots,l$ 。前面几项为: $P_0^0=1$ $P_1^0=x$ $P_1^1=-\sqrt{1-x^2}$ $P_2^0=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$ $P_2^1=-3x\sqrt{1-x^2}$ $P_2^2=3\left(1-x^2\right)$

3. 球谐函数的定义为

$$\begin{cases}Y_{lm}(\Omega)=Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}\\Y_{l,-m}(\Omega)=Y_{l,-m}(\theta,\phi)=(-1)^mY_{lm}^*(\Omega)\end{cases}$$

其中, $l=0,1,2,\ldots$, 而 $m=0,1,2,\ldots,l$ 。当 $m=0$ 时

$$Y_{00}(\Omega)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_{l0}(\Omega)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$$

注: 球谐函数的举例

$$\begin{aligned}
Y_{10}(\Omega) &= \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\theta & &\to \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\tfrac{z}{r}\\
Y_{1\pm1}(\Omega) &= \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} & &\to \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\tfrac{x\pm iy}{r}\\
Y_{20}(\Omega) &= \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right) & &\to \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}\tfrac{3z^2-r^2}{r^2}\\
Y_{2\pm1}(\Omega) &= \mp\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} & &\to \mp\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\tfrac{z(x\pm iy)}{r^2}\\
Y_{2\pm2}(\Omega) &= \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi} & &\to \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\tfrac{(x\pm iy)^2}{r^2}
\end{aligned}$$

球谐函数的几个重要性质: 正交性

$$\int Y_{lm}^*(\Omega)Y_{l'm'}(\Omega)d\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

完备性

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*\left(\Omega'\right)Y_{lm}(\Omega)=\delta\left(\cos\theta-\cos\theta'\right)\delta\left(\phi-\phi'\right)$$

球谐函数与 Legendre 多项式

$$P_l\left(\hat{r}\cdot\hat{r}'\right)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*\left(\theta',\phi'\right)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

其中，(θ,ϕ) 和 (θ',ϕ') 分别为 r 和 r' 的极角与方位角

$$\hat{r}\cdot\hat{r}'=\cos\alpha=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right)$$

4. 电势的球谐函数展开 (球外): 假设电荷分布在半径为 R 的球内。设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 分别为球外和球内一点，由于 $r'/r<1$，因而

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathfrak{r}}=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}&=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\hat{r}\cdot\hat{r}'+r'^2}}\\
&=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l\left(\hat{r}\cdot\hat{r}'\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mathfrak{r}}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\left(\frac{r'}{r}\right)^l\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*\left(\Omega'\right)Y_{lm}(\Omega)$$

将 $1/\mathfrak{r}$ 的展开式电势的表达式，得到

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{x})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq'}{\mathfrak{r}}\\
&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{Y_{lm}(\Omega)}{r^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l}\int r^{ll}Y_{lm}^*\left(\Omega'\right)dq'
\end{aligned}$$

球内电荷在球外任一点激发的电势可以写为

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l}B_{lm}Y_{lm}(\Omega)$$

其中,

$$B_{lm}=\frac{4\pi}{2l+1}\int r^{ll}Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right)dq'$$

如果电荷分布具有绕着极轴的转动对称性，即

$$\rho(\vec{x})=\rho(r,\theta)$$

则电势也不会依赖于方位角 ϕ ，从而

$$\varphi(\vec{x})=\varphi(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}B_{l0}Y_{l0}(\Omega)$$

其中

$$B_{l0}=\frac{4\pi}{2l+1}\int r'^{l}Y_{l0}^{*}\left(\Omega'\right)dq',\quad Y_{l0}(\Omega)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$$

因此，此情形下球外电势可以表示为:

$$\varphi(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}},\quad B_l=\int r'^{l}P_l\left(\cos\theta'\right)dq'$$

5. 电势的球谐函数展开（球内）：如果电荷分布在半径为 R 的球外。设 x 和 x' 分别为球内和球外一点，由于 $r/r'<1$ ，因而

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathfrak{r}}=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}&=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\hat{r}\cdot\hat{r}'+r'^2}}\\&=\frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^{l}P_l\left(\hat{r}\cdot\hat{r}'\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mathfrak{r}}=\frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\left(\frac{r}{r'}\right)^{l}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right)Y_{lm}(\Omega)$$

将 $1/\mathfrak{r}$ 的展开式电势的表达式，得到

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{x})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq'}{\mathfrak{r}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}r^{l}Y_{lm}(\Omega)\sum_{m=-l}^{l}\int\frac{Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right)}{r^{l+1}}dq'\end{aligned}$$

球外电荷在球内任一点激发的电势可以写为

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}r^{l}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_{lm}(\Omega)$$

其中,

$$A_{lm}=\frac{4\pi}{2l+1}\int\frac{Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right)}{r^{l+1}}dq'$$

如果电荷分布具有绕着极轴的转动对称性，即

$$\rho(\vec{x})=\rho(r,\theta)$$

则电势也不会依赖于方位角 ϕ ，从而

$$\varphi(\bar{x})=\varphi(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}r^l A_{l0}Y_{l0}(\Omega)$$

其中

$$A_{l0}=\frac{4\pi}{2l+1}\int\frac{Y_{l0}^*(\Omega')}{r'^{l+1}}dq',\quad Y_{l0}(\Omega)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$$

因此，此情形下球内电势可以表示为:

$$\varphi(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta),\quad A_l=\int\frac{P_l(\cos\theta')}{r'^{l+1}}dq'$$

【例】中心在原点、半径为 R 的球面上有面电荷分布，已知球面上的电势为:

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\cos\theta\cos\phi$$

试求全空间的电势。

$$Y_{2\pm1}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$$

【例】球面上的电势可以表示为 (其中，$a_\pm$ 为常数) ：

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\cos\theta\cos\phi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(a_+Y_{2,1}+a_-Y_{2,-1}\right)$$

由唯一性定理，不妨将电势 φ_1 (球内) 和 φ_2 (球外) 写为:

$$\varphi_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}r^2\left(A_+Y_{2,1}+A_-Y_{2,-1}\right),\quad \varphi_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(B_+Y_{2,1}+B_-Y_{2,-1}\right)$$

由 $r=R$ 时的边界条件可得 (利用球谐函数的正交性)

$$A_\pm=a_\pm/R^3,\quad B_\pm=R^2a_\pm$$

因此

$$\varphi_1=\frac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\sin\theta\cos\theta\cos\phi,\quad \varphi_2=\frac{QR^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta\cos\phi$$

【思考】试利用多极展开方法计算球对称电荷分布 $\rho=\rho(r)$ 在空间各点激发的电势。【思考】求球面上的面电荷分布 $\sigma=\sigma_0\cos\theta$ 在空间各点激发的电势。【思考】已知电荷仅分布于半径为 R 的球面上，且球面上电势为 $V=V_0\cos(3\theta)$ 。试求球面上的电荷分布。【思考】试求均匀带电圆环在空间各点激发的电势。

第 3 节 Green 函数

讨论边值问题的求解: 给定区域 V 内的电荷分布以及边界 ∂V 上的合适边界条件，试问区域 V 内的电场如何分布?

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi(\vec{x})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x}), & \vec{x}\in V\\ \text{区域边界}S=\partial V\ \text{上满足 Dirichlet 或 Neumann 边条}\end{cases}$$

可通过求解同一区域 V 内的 Green 函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 来得到前面问题的解。其定义是

$$\begin{cases}\nabla^2G(\vec{x},\vec{x}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}'), & \vec{x},\vec{x}'\in V\\ \text{区域边界}S\ \text{上满足合适的 Dirichlet 或 Neumann 边条}\end{cases}$$

定理 5.3.1: Green 函数

$G\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\prime}\right)$ 表示: 在合适的边界条件下, 当点 $x^{\prime}$ 处有一个单位正电荷时, 在点 x 处的电势

$$\varphi(\boldsymbol{x})=G\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\prime}\right)$$

利用 Green 第二公式:

$$\int_{V} d V^{\prime}\left[\Phi \nabla^{\prime 2} \Psi-\Psi \nabla^{\prime 2} \Phi\right]=\oint_{\partial V} d \bar{\sigma}^{\prime} \cdot\left[\Phi \nabla^{\prime} \Psi-\Psi \nabla^{\prime} \Phi\right]$$

在其中令 $\Phi=\varphi\left(\boldsymbol{x}^{\prime}\right)$ 及 $\Psi=G\left(\boldsymbol{x}^{\prime}, \boldsymbol{x}\right)$ ，略作化简就得到:

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{x})= & \int_{V} \rho\left(\bar{x}^{\prime}\right) G\left(\bar{x}^{\prime}, \vec{x}\right) d V^{\prime} \\
& +\varepsilon_{0} \oint_{\partial V}\left[\frac{\partial \varphi\left(\bar{x}^{\prime}\right)}{\partial n^{\prime}} G\left(\bar{x}^{\prime}, \vec{x}\right)-\varphi\left(\vec{x}^{\prime}\right) \frac{\partial G\left(\bar{x}^{\prime}, \bar{x}\right)}{\partial n^{\prime}}\right] d \sigma^{\prime}
\end{aligned}$$

体积分不止包含 V 内部电荷对电势的贡南, 面积分也未必就是 ∂V 上面电荷对电势的贡献。

1 Green 函数分类

1. 第一类 (Dirichlet) Green 函数满足如下边界条件:

$$G_{D}\left(\vec{x}_{S}, \vec{x}^{\prime}\right)=0, \quad\left(\vec{x}_{S} \in \partial V, \vec{x}^{\prime} \in V\right)$$

利用前面的结论，对于第一类边值问题

$$\left\{\begin{array}{l}
\nabla^{2} \varphi(\vec{x})=-\frac{1}{\varepsilon_{0}} \rho(\vec{x}), \quad\left(\vec{x}, \vec{x}^{\prime} \in V\right) \\
\varphi\left(\vec{x}_{S}\right)=\varphi_{S}\left(\vec{x}_{S}\right), \quad\left(\vec{x}_{S} \in \partial V\right)
\end{array}\right.$$

其解用 Green 函数表示为

$$\varphi(\bar{x})=\int_{V} \rho\left(\bar{x}^{\prime}\right) G_{D}\left(\bar{x}^{\prime}, \bar{x}\right) d V^{\prime}-\varepsilon_{0} \oint_{\partial V} \varphi\left(\bar{x}^{\prime}\right) \frac{\partial G_{D}\left(\bar{x}^{\prime}, \bar{x}\right)}{\partial n^{\prime}} d \sigma^{\prime}$$

2. 第二类 (Neumann) Green 函数满足如下边界条件:

$$\frac{\partial}{\partial n} G_{N}\left(\vec{x}_{S}, \vec{x}^{\prime}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_{0} S}, \quad\left(\vec{x}_{S} \in \partial V, \vec{x}^{\prime} \in V\right)$$

利用前面的结论，对于第一类边值问题

$$\left\{\begin{array}{l}
\nabla^{2} \varphi(\bar{x})=-\frac{1}{\varepsilon_{0}} \rho(\bar{x}), \quad\left(\vec{x}, \vec{x}^{\prime} \in V\right) \\
\frac{\partial}{\partial n} \varphi\left(\vec{x}_{S}\right)=g\left(\vec{x}_{S}\right), \quad\left(\vec{x}_{S} \in \partial V\right)
\end{array}\right.$$

其解用 Green 函数表示为

$$\varphi(\bar{x})=\int_{V} \rho\left(\bar{x}^{\prime}\right) G_{N}\left(\bar{x}^{\prime}, \bar{x}\right) d V^{\prime}+\varepsilon_{0} \oint_{\partial V} \frac{\partial \varphi\left(\bar{x}^{\prime}\right)}{\partial n^{\prime}} G_{N}\left(\bar{x}^{\prime}, \bar{x}\right) d \sigma^{\prime}+\langle\varphi\rangle_{\partial V}$$

2 物理含义

此后只讨论第一类格林函数，不再写下标"D"。据其定义

$$\begin{cases}\nabla^2 G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0} \delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\right), & \left(\vec{x}, \vec{x}' \in V\right) \\ G\left(\vec{x}_S, \vec{x}'\right)=0, & \left(\vec{x}_S \in \partial V, \vec{x}' \in V\right)\end{cases}$$

注

$G\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\right)$ 表示: 接地导体壳内 x' 处放置一个单位点电荷时, 壳内 x 处的电势。

利用 Green 第二公式:

$$\int_V\left(\varphi \nabla^2 \psi-\psi \nabla^2 \varphi\right) d V=\oint_{\partial V}\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}-\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d \sigma$$

在其中令 $\varphi=G\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1'\right)$ 及 $\psi=G\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2'\right)$，则上式右边为零。由于

$$\nabla^2 \varphi=-\frac{1}{\varepsilon_0} \delta\left(\vec{x}-\vec{x}_1'\right), \quad \nabla^2 \psi=-\frac{1}{\varepsilon_0} \delta\left(\vec{x}-\vec{x}_2'\right)$$

因而

$$G\left(\vec{x}_1', \vec{x}_2'\right)=G\left(\vec{x}_2', \vec{x}_1'\right) \Leftrightarrow G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right)=G\left(\vec{x}', \vec{x}\right)$$

Green 函数总可以写为如下形式：$G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right)=\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}+F\left(\vec{x}, \vec{x}'\right), \quad$ where $\quad \nabla^2 F\left(\vec{x}, \vec{x}'\right)=0$ 因而，第一类边值问题的解就写为了:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) & =\int_V \rho\left(\vec{x}'\right) G_D\left(\vec{x}', \vec{x}\right) d V'-\varepsilon_0 \oint_{\partial V} \varphi\left(\vec{x}'\right) \frac{\partial G_D\left(\vec{x}', \vec{x}\right)}{\partial n'} d \sigma' \\ & =\int_V \frac{\rho\left(\vec{x}'\right) d V'}{4 \pi \varepsilon_0 \mathbb{R}}+\int_V \rho\left(\vec{x}'\right) F\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) d V'-\varepsilon_0 \oint_{\partial V} \varphi\left(\vec{x}'\right) \frac{\partial G\left(\vec{x}', \vec{x}\right)}{\partial n'} d \sigma'\end{aligned}$$

第一项表示 V 内部的电荷对电势的贡献, 第二、三项表示 ∂V 上/外的电荷对电势的贡献。

【例】若 V 取全空间，则 G 就是单位点电荷激发的电势，因而

$$G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right)=\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 \mathbb{R}}$$

由此得到，局域电荷分布激发的电势为

$$\varphi(\vec{x})=\int_V \frac{\rho\left(\vec{x}'\right) d V'}{4 \pi \varepsilon_0 \mathbb{R}}$$

3 上半空间的 Green 函数

利用电像法，上半空间的 Green 函数可以写为

$$G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right)=\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathbb{R}}-\frac{1}{\mathbb{R}_1}\right)$$

当 $z'=0$ 时

$$\mathbb{R}=\mathbb{R}_1 \equiv R=\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+z^2}$$

由于边界上外法向指向 z 轴负方向，因而

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial G_D}{\partial n'}\bigg|_{z'=0} = \varepsilon_0 \frac{\partial G_D}{\partial z'}\bigg|_{z'=0} = \frac{z}{2\pi R^3}$$

上半空间第一类边值问题的解为

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z'>0}\rho\left(\bar{x}'\right)\left(\frac{1}{\mathbb{R}} - \frac{1}{\mathbb{R}_1}\right)dV' + \frac{z}{2\pi}\int_{z'=0}\frac{\varphi}{R^3}d\sigma'$$

若上半空间并无电荷分布，则上式中的体积分为零，而面积分表示（1）xy 平面上的面电荷，以及（2）下半空间的电荷在上半空间激发的电势。

【例】半径为 a 的圆周将无限导体平板切割为彼此绝缘的两部分，圆内电势为 V_0，圆外电势为零。求上半空间的电势分布，给出远处 $(r >> a)$ 电势的主要贡献以及主要修正。

【解】采用柱坐标。由对称性可知，电势并不依赖于方位角 ϕ 又由于上半空间并无电荷，故

$$\varphi(s,\phi) = \frac{z}{2\pi}\int_{z'=0}\frac{\varphi}{R^3}d\sigma' = \frac{V_0 z}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^a\frac{s'ds'}{R^3}$$

其中

$$R = \sqrt{\left(s - s'\cos\phi'\right)^2 + \left(0 - s'\sin\phi'\right)^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + s'^2 - 2ss'\cos\phi'}$$

为求远处电势的近似解，令 $\varepsilon = s'/r << 1$ 及 $\lambda = s/r$，从而

$$R = r\sqrt{1+\Delta}, \quad \text{where} \quad \Delta = \varepsilon^2 - 2\lambda\varepsilon\cos\phi'$$

首先按照小量 Δ 做展开，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^3} &= \frac{1}{r^3}(1+\Delta)^{-3/2} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3}{2}\Delta + \frac{15}{8}\Delta^2 - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{r^3}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\varepsilon^2 - 2\varepsilon\lambda\cos\phi'\right) + \frac{15}{8}\left(\varepsilon^2 - 2\varepsilon\lambda\cos\phi'\right)^2 - \cdots\right]\end{aligned}$$

保留至小量 ε 的二级项，给出

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^3} &\approx \frac{1}{r^3}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\varepsilon^2 - 2\varepsilon\lambda\cos\phi'\right) + \frac{15}{8}\left(-2\varepsilon\lambda\cos\phi'\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{r^3}\left[1 + \varepsilon\cdot 3\lambda\cos\phi' + \varepsilon^2\cdot\frac{3}{2}\left(5\lambda^2\cos^2\phi' - 1\right)\right]\end{aligned}$$

零阶项给出电势的主要贡献。而由于一阶项对 ϕ' 的积八为零, 因而主要修正项由二阶项给出。

将前面的结果，即

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{r^3}\left[1 + 3\frac{s'}{r}\lambda\cos\phi' + \frac{s'^2}{r^2}\frac{3}{2}\left(5\lambda^2\cos^2\phi' - 1\right)\right]$$

代入电势的表达式，得到

$$\varphi = \frac{V_0 z}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^a\frac{s'ds'}{R^3} = \frac{V_0 z}{2\pi r^3}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}a^2 + \frac{V_0 z}{2\pi r^3}\cdot 3\pi\left(\frac{5}{2}\lambda^2 - 1\right)\cdot\frac{a^4}{4r^2}$$

即有

$$\varphi \approx \frac{V_0 a^2 z}{2r^3}\left[1 + \frac{3}{8}\left(\frac{5s^2}{r^2} - 2\right)\frac{a^2}{r^2}\right]$$

4 球外空间的 Green 函数

利用电像法，球外空间的 Green 函数可以写为

$$G(\bar{x},\bar{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathbb{R}}-\frac{a/r'}{\mathbb{R}_1}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathbb{R}}-\frac{1}{\mathbb{R}_2}\right)$$

其中

$$\mathbb{R}=|\vec{x}-\bar{x}'|=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}$$
$$\mathbb{R}_1=|\vec{x}-\bar{x}''|=\sqrt{r^2+\left(a^2/r'\right)^2-2\left(a^2r/r'\right)\cos\alpha}$$
$$\mathbb{R}_2=\frac{r'}{a}|\vec{x}-\bar{x}''|=\sqrt{\left(rr'/a\right)^2+a^2-2rr'\cos\alpha}$$
$$\cos\alpha=\hat{r}\cdot\hat{r}'=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$$

当 $r'=a$ 时

$$\mathbb{R}=\mathbb{R}_2\equiv R=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\alpha}$$

由于边界上外法向指向球内，因而

$$-\varepsilon_0\frac{\partial G}{\partial n'}\bigg|_{r'=a}=\varepsilon_0\frac{\partial G}{\partial r'}\bigg|_{r'=a}=\frac{r^2-a^2}{4\pi aR^3}$$

球外第一类边值问题的解为

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r'>a}\rho(\bar{x}')\left(\frac{1}{\mathbb{R}}-\frac{1}{\mathbb{R}_2}\right)dV'+\frac{r^2-a^2}{4\pi a}\int_{r'=a}\frac{\varphi}{R^3}d\sigma'$$

将上式右边第一项的体积区域改为 $r'<a$, 第二项的 r^2-a^2 改为 a^2-r^2, 就是球内第一类边值问题的解。

【例】半径为 a 的导体球壳被切成两半，彼此绝缘，分别加上电势 $\pm V_0$ 。证明远处的电场为偶极子场，并给出电偶极矩的表达式。

【解】球外的电势为

$$\varphi(r,\theta)=\frac{V_0\left(r^2-a^2\right)}{4\pi a}\cdot a^2\cdot\int_0^{2\pi}d\phi'\left[\int_0^{\pi/2}\sin\theta'd\theta'-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta'd\theta'\right]\frac{1}{R^3}$$

当 $r>>a$ 时，保留至 a/r 的二阶小量，有

$$\frac{a\left(r^2-a^2\right)}{R^3}=\frac{a\left(r^2-a^2\right)}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\alpha\right)^{3/2}}\approx\frac{a}{r}\left(1+\frac{3a}{r}\cos\alpha\right)$$

其中

$$\cos\alpha=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$$

易见：一阶小量的积分相互抵消，而对二阶小量的积分有贡献的只有 $\cos\alpha$ 的第一项。

因此

$$\varphi(r,\theta)\approx\frac{3V_0a^2}{4\pi r^2}\cdot 2\pi\cdot\left[\int_0^{\pi/2}d\theta'-\int_{\pi/2}^{\pi}d\theta'\right]\left(\cos\theta\sin\theta'\cos\theta'\right)$$

积分给出

$$\varphi(r,\theta)\approx\frac{3V_0a^2}{2r^2}\cos\theta,\quad(r\gg a)$$

或者将其写为

$$\varphi \approx \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad (r \gg a)$$

其中

$$\vec{p} \triangleq 6\pi\varepsilon_0 a^2 V_0 \hat{z}$$

【背景】量子力学中，被限制在区域 V 内运动的粒子，其定态解 $\psi(\boldsymbol{x})$ 满足如下条件:

$$\begin{cases} \nabla^2\psi_n(\vec{x}) = -\lambda_n\psi_n(\vec{x}), & (\vec{x}\in V) \\ \psi_n(\vec{x}_S) = 0, & (\vec{x}_S \in \partial V) \end{cases}$$

其中，待定常数 λ_n 称为本征值 (它与能量本征值成正比)，而 $\psi_n(x)$ 则称为本征函数。可以证明: λ_n 只能取分离的正实数数值，且归一化的本征矢是完备的，即

$$\int_V |\psi\psi_n(\bar{x})|^2\, d^3x = 1, \quad \sum_n \psi_n^*(\bar{x}')\,\psi_n(\bar{x}) = \delta^3(\vec{x}-\bar{x}')$$

【思考】区域 V 内的第一类 Green 函数可以用本征函数展开为

$$G(\bar{x},\bar{x}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_n \frac{\psi_n^*(\bar{x}')\,\psi_n(\bar{x})}{\lambda_n}$$

【思考】在边长为 a 的立方体表面上设计一个面电荷分布，使其在立方体外激发的电场与置于立方体中心的点电荷 Q 激发的电场相同。

第 4 节 分离变量法

讨论利用分离变量方法求解 Laplace 方程 $\nabla^2\varphi = 0$ ，设 φ 满足合适的边界条件。分离变量法的要点是 D 根据边界条件的对称性，选择合适坐标系，这样电势写为

$$\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3)$$

D 寻找 Laplace 方程的如下形式的解，将偏微分方程的求解转化为常微分方程的求解:

$$\varphi(u_1,u_2,u_3) = F(u_1)\,G(u_2)\,H(u_3)$$

此种形式的解构成了正交完备函数系，Laplace 方程的一般解可以写为其线性组合。合适的边界条件可唯一确定组合系数，从而得到问题的解。

设 $\{\psi_n(x)\}$ 区间 $[a,b]$ 上的正交完备函数系。正交归一是指:

$$\int_a^b \psi_n^*(x)\psi_m(x)dx = \delta_{nm}$$

完备是指任一行为良好的函数 $f(x)$ 可以表示为其线性组合:

$$f(x) = \sum_n C_n\psi_n(x), \quad C_n = \int_a^b \psi_n^*(x)f(x)dx$$

经常将完备性条件表示为:

$$\sum_n \psi_n^*(x')\,\psi_n(x) = \delta(x-x')$$

- 对于正交完备系的一个常用的伎俩:

$$\sum_n a_n \psi_n(x) = \sum_n b_n \psi_n(x) \Leftrightarrow a_n = b_n$$

【例】下面的函数构成了区间 $[0,a]$ 上正交归一的完备函数系:

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\right\} = \left\{\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}, \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}, \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}, \cdots\right\}$$

满足

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}dx = \frac{a}{2}\delta_{nm}, \quad \sum_n \sin\frac{n\pi x'}{a}\sin\frac{n\pi x}{a} = \frac{a}{2}\delta\left(x-x'\right)$$

1 直角坐标系的一般解

直角坐标系中，Laplace 方程写为:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

按照分离变量法的精神，我们尝试求如下形式的解:

$$\varphi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

对此种形式的解，Laplace 方程化简为:

$$\frac{\nabla^2\varphi}{\varphi} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

上式成立的充要条件是: 求和的三项各自均为常数, 分别记为 α^2、β^2 和 γ^2; 并且力离参数满足 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ 。因此, 一个偏微方方程转化为了三个常微分方程。

三个常微分方程为:

$$X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + \beta^2 Y(y) = 0, \quad Z''(z) + \gamma^2 Z(z) = 0$$

每个方程有两个独立解，一般解是其线性组合。譬如:

$$\begin{cases} \alpha^2 > 0 & \Rightarrow X_\alpha \sim \{\cosh\alpha x, \sinh\alpha x\} \sim \{e^{\alpha x}, e^{-\alpha x}\} \\ \alpha^2 = -a^2 < 0 & \Rightarrow X_\alpha \sim \{\cos ax, \sin ax\} \\ \alpha^2 = 0 & \Rightarrow \quad X_\alpha \sim \{1, x\} \end{cases}$$

对一组确定参数 α、β 和 γ、Laplace 方程的解为: $\varphi_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) = X_\alpha(x)Y_\beta(y)Z_\gamma(z)$ where $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$

Laplace 方程的一般解为:

$$\varphi(x,y,z) = \sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma X_\alpha(x)Y_\beta(y)Z_\gamma(z)\delta\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$$

- 离参数 α、β 和 γ 可实、可虚。- 利用边界条件确定参数 α、β 和 γ 的类型及取值范围, 并确定组合系数的数值。【注】在具体问题中确定万离参数与组合系数时, 可能会用到解需要满足的其他条件, 如单值性、有界性

【例】尺寸为 $a \times b \times c$ 的长方形盒子，上表面 $(z=c)$ 维持电势为 $V(x,y)$ ，其余五个面电势维持为零。试求盒内的电势分布。【解】边界条件为 (1) $\varphi(0,y,z)=0$ ；(2) $\varphi(0,y,z)=0$; (3) $\varphi(x,0,z)=0$; (4) $\varphi(x,b,z)=0$; (5) $\varphi(x,y,0)=0$; (6) $\varphi(x,y,c)=V(x,y)$ 。**设** $\varphi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$ **，则盒内电势满足**

$$\frac{\nabla^2\varphi}{\varphi}=\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

$$\begin{cases} X=A_\alpha\cos\alpha x+B_\alpha\sin\alpha x \\ Y=C_\beta\cos\beta y+D_\beta\sin\beta y \\ Z=E_\gamma\cosh\gamma z+F_\gamma\sinh\gamma z \end{cases}$$

(1) (3) (5) $\Rightarrow A_\alpha=C_\alpha=E_\alpha=0$ (2) $\Rightarrow \alpha a=m\pi, m=1,2,\ldots$ (4) $\Longrightarrow \beta b=n\pi, n=1,2,\ldots$

符合于齐次边界条件的一般解为

$$\varphi=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\frac{\sinh(\gamma_{mn}z)}{\sinh(\gamma_{mn}c)},\left(\gamma_{mn}\triangleq\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\right)$$

利用边界条件 (6)**，得到**

$$V(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\Rightarrow A_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a dx\int_0^b dyV(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

如果 $V(x,y)=V_0$, **则**

$$\begin{aligned} A_{mn}&=\frac{4V_0}{ab}\int_0^a\sin\frac{m\pi x}{a}dx\int_0^b\sin\frac{n\pi y}{b}dy \\ &=\frac{4V_0}{ab}\cdot\frac{a}{m\pi}[1-(-1)^m]\cdot\frac{b}{n\pi}[1-(-1)^n] \end{aligned}$$

从而，仅当 m□n **均为奇数时才有** $A_{mn}\neq 0$ **，此时**

$$A_{mn}=\frac{16V_0}{mn\pi^2},\quad m,n=1,3,5,\cdots$$

因此，盒内电势为

$$\varphi(x,y)=\frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{m,n=1,3,5,\cdots}\frac{1}{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\frac{\sinh(\gamma_{mn}z)}{\sinh(\gamma_{mn}c)}$$

对于立方体，内部电势分布为

$$\varphi=\sum_{m,n\text{ odd}}\varphi_{mn},\quad \varphi_{mn}\triangleq\frac{16V_0}{mn\pi^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}\frac{\sinh(\gamma_{mn}z)}{\sinh(\gamma_{mn}a)}$$

因此，立方体中心的电势（严格解为 $\varphi_0=V_0/6$□WHY？**）为**

$$\varphi_0=\sum_{m,n\text{ odd}}V_{mn},\quad V_{mn}\triangleq\frac{16V_0}{mn\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\frac{\sinh(\gamma_{mn}a/2)}{\sinh(\gamma_{mn}a)}$$

将其与严格解对比，所得结果的相对误差为

$$\begin{aligned} &\varphi_0\approx V_{11} &&\to 4\% \\ &\varphi_0\approx V_{11}+(V_{13}+V_{31}) &&\to 0.3\% \\ &\varphi_0\approx V_{11}+(V_{13}+V_{31})+(V_{15}+V_{51}+V_{33}) &&\to 0.02\% \end{aligned}$$

考察上表面中线上各点的电势（严格解为 V_0）：

$$\varphi\left(x, y=\frac{a}{2}, z=a\right)=\sum_{m,n \text{ odd}} \varphi_{mn}, \quad \varphi_{mn} \triangleq \frac{16V_0}{mn\pi^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\varphi \approx \sum_{m,n \text{ odd}} \varphi_{mn}, \quad m+n=2,4,6,\cdots,30, \quad (\text{共120 项}\Big)$$

【思考】由导体板围成的无限长长方形管子，四块导体板彼此绝缘，其中三板维持电势为零，另一板维持电势为常数 V_0。试求管内的电势。

2 柱坐标系的一般解

设静电势与 z 坐标无关，从而 Laplace 方程在柱坐标系中写为

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)+\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0$$

按照分离变量法的精神，我们尝试求如下形式的解:

$$\varphi(s,\phi)=R(s)\Phi(\phi)$$

对此种形式的解，Laplace 方程化简为：

$$s^2\frac{\nabla^2\varphi}{\varphi}=\frac{s}{R}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dR}{ds}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0$$

两个常微分方程为:

$$s\frac{d}{ds}\left(s\frac{dR}{ds}\right)=m^2R, \quad \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2\Phi$$

其解为

$$\begin{cases} m\neq 0 \Rightarrow & \Rightarrow\sim\{s^m, \quad s^{-m}\}, \quad \Phi\sim\{\cos m\phi, \quad \sin m\phi\} \\ m=0\Rightarrow R\sim\left\{\ 1, \quad \ln s\ \right\}, & \Phi\sim\{1, \quad \phi\} \end{cases}$$

其中 m 可取实数或虚数。一般解为

$$\begin{aligned}\varphi(s,\phi)=&\left(A_0+B_0\ln s\right)\left(C_0+D_0\phi\right)\\ &+\sum_{m\neq 0}\left(A_m s^m+B_m s^{-m}\right)\left(C_m\cos m\phi+D_m\sin m\phi\right)\end{aligned}$$

【例】半径为 a 的无限长导体圆柱置于均匀外电场 E_0 中，E_0 垂直于圆柱轴线。导体圆柱单位长度所带电量为 λ，柱外为真空。试求柱外空间的静电势分布。

【解】本问题中 $\phi\in[0,2\pi]$，因此电势的单值性要求一般解为:

$$\varphi(s,\phi)=A_0+B_0\ln s+\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m s^m+B_m s^{-m}\right)\left(C_m\cos m\phi+D_m\sin m\phi\right)$$

用以定解的边界条件包含: 圆柱单位长度的电量 λ 以及圆柱表面等势；此外电势还满足如下渐近条件：$\varphi\to-\vec{E}_0\cdot\vec{x}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln s=-E_0 s\cos\phi-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln s, \quad \text{when} \quad s\to\infty$ 不妨设柱外电势为：

$$\varphi=-E_0 s\cos\phi-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln s+\frac{b}{s}\cos\phi$$

此形式的解自动满足" 圆柱表面等势" 之外的求他定界条件。

由于圆柱表面等势，因而

$$\varphi_{s=a}=-E_0 a\cos\phi-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln a+\frac{B}{a}\cos\phi=\text{ const.}$$

上式对任意 ϕ 都成立，要求

$$B=E_0 a^2$$

因此，柱外电势为

$$\begin{aligned}\varphi&=-E_0 s\cos\phi-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln s+\frac{E_0 a^2}{s}\cos\phi\\&=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln s-\left(1-\frac{a^2}{s^2}\right)\vec{E}_0\cdot\vec{x}\end{aligned}$$

【思考】半径为 R 的无限长圆柱体表面上分布有面电荷密度：

$$\sigma(\phi)=\sigma_0\sin 5\phi$$

其中 σ_0 为常数。试求空间的电势分布。【思考】求如图所示的无限长管子内部的电势。

3 球坐标系的一般解

球坐标系中，Laplace 方程写为：

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0$$

按照分离变量法的精神，我们尝试求如下形式的解：

$$\varphi(r,\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

对此种形式的解，Laplace 方程化简为：

$$r^2\frac{\nabla^2\varphi}{\varphi}=\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\Bigg]=0$$

径向函数 $R(r)$ 满足方程:

$$\frac{d}{dR}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=l(l+1)R$$

其一般解为:

$$R(r)=A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}$$

方位角函数 $\Phi(\phi)$ 满足方程:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2\Phi=0$$

其一般解为：

$$\Phi(\phi)=C_m\cos m\phi+D_m\sin m\phi,\quad m=0,1,2,\cdots$$

此处已假设 $\phi\in[0,2\pi]$，故解的曾值性对 m 的取值提出了限制。

- 极角函数 $\Theta(\theta)$ 满足所谓缔合勒让德 (Legendre) 方程:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0$$

其满足" 在 $0\le\theta\le\pi$ 内有限" 的独立解为:

$$\Theta(\theta)=P_l^m(\cos\theta),\quad (l=0,1,2,\cdots,\quad m=0,1,2,\cdots,l)$$

角分布函数 $Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ 满足方程:

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+l(l+1)\sin^2\theta=0$$

其满足“单值、有限”的独立解为球谐函数:

$$Y(\Omega)=Y_l^m(\Omega),\quad (l=0,1,2,\cdots,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l)$$

在球坐标系中，Laplace 方程满足"　值、有限" 的一般解为:

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l^m(\cos\theta)\left(C_m\cos m\phi+D_m\sin m\phi\right)$$

也可将其利用球谐函数写为:

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l+\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

对于具有轴对称性的问题，取对称轴为 z 轴，则静电势不依赖于方位角 ϕ，此情形下 Laplace 方程通解的一般形式简化为:

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

【例】半径为 R、相对介电常数为 ε 的介质球置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，球外为真空。试求空间电势和电场分布。

【解】设球内、外的电势分别为 φ_1、φ_2。用以定解的条件包含:（1）边值关系，(2) φ_1 的有限性，及 (3) φ_2 的渐近条件:

$$\varphi_2\to -E_0 r\cos\theta=-E_0 rP_1(\cos\theta)\quad \text{when}\quad r\to\infty$$

不妨将球内、外的电势分别取为:

$$\begin{cases}\varphi_1=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)=A\frac{r}{R}\cos\theta\\ \varphi_2=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)=-E_0 r\cos\theta+B\frac{R^2}{r^2}\cos\theta\end{cases}$$

将其代入边值关系

$$\varphi_1=\varphi_2,\quad \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial r},\quad \text{when}\quad r=R$$

得至

$$A=-E_0R+B,\quad \varepsilon A=-E_0R-2B$$

$$A = -\frac{3}{\varepsilon+2}E_0 R, \quad B = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}E_0 R$$

因此，球内、外的电势为

$$\varphi_1 = -\frac{3}{\varepsilon+2}E_0 r\cos\theta, \quad \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{a^3 E_0}{r^2}\cos\theta$$

或将其写为

$$\varphi_1 = -\frac{3}{\varepsilon+2}\vec{E}_0\cdot\vec{r}, \quad \varphi_2 = -\vec{E}_0\cdot\vec{r} + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{a^3}{r^3}\vec{E}_0\cdot\vec{r}$$

介质球内的电场为

$$\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{3}{\varepsilon+2}\vec{E}_0$$

介质球的极化强度为

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}_1 = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{E}_1 = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}3\varepsilon_0\vec{E}_0$$

介质球的总电偶极矩为

$$\vec{p} = \frac{4\pi a^3}{3}\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_0, \quad \text{where} \quad \alpha = 4\pi a^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$$

介左球内的电场为

$$\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{3}{\varepsilon+2}\vec{E}_0$$

介质球的极化强度为

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}_1 = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{E}_1 = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}3\varepsilon_0\vec{E}_0$$

介质球的总电偶极矩为

$$\vec{p} = \frac{4\pi a^3}{3}\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_0, \text{where } \alpha = 4\pi a^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$$

利用 p ，介质球外的电势和电场可以写为

$$\varphi_2 = -\vec{E}_0\cdot\vec{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad \vec{E}_2 = -\nabla\varphi_2 = \vec{E}_0 + \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

【例】将半径为 R 、相对介电常数为 ε 的小介质球从无穷远处移至外场 $E_0(x)$ 中。试求此过程外界做功。【方法一】小介质在外场中均匀极化，其所受静电力为

$$\vec{F} \approx \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_0, \quad \text{where} \quad \vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_0 = 4\pi\varepsilon_0 a^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\vec{E}_0$$

外界做功为

$$\begin{aligned}
A = -\int_\infty^{\vec{x}}\vec{F}\cdot d\vec{l} &\approx -\int_\infty^{\vec{x}}\left(\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_0\right)\cdot d\vec{l} = -\alpha\varepsilon_0\int_\infty^{\vec{x}}\left(\vec{E}_0\cdot\nabla\vec{E}_0\right)\cdot d\vec{l} \\
&= -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0\int_\infty^{\vec{x}}\left(\nabla E_0^2\right)\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0\left[E_0^2(\vec{x}) - E_0^2(\infty)\right]
\end{aligned}$$

$$A = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0 E_0^2(\vec{x})$$

【方法二】设 ρ_0 是激发外场 (φ_0⊠$\boldsymbol{E}_0$) 的外部电荷密度。介质球到达最终位置处时，总电势设为 φ ，介质球内部及表面的极化电荷密度设为 ρ'⊠ρ' 激发的电势记为 φ' 。外界做功等于静电能的增量:

$$\begin{aligned} A=\Delta W=W_2-W_1&=\frac{1}{2}\int\rho_0\varphi dV-\frac{1}{2}\int\rho_0\varphi_0 dV\\ &=\frac{1}{2}\int\rho_0\varphi' dV\\ &=\frac{1}{2}\int\rho'\varphi_0 dV\\ &=-\frac{1}{2}\int\left(\varphi_0\nabla\cdot\vec{P}\right)dV \end{aligned}$$

因此，利用分部积分给出

$$A=-\frac{1}{2}\int\nabla\cdot\left(\varphi_0\vec{P}\right)dV+\frac{1}{2}\int\left(\vec{P}\cdot\nabla\varphi_0\right)dV=0-\frac{1}{2}\int\vec{P}\cdot\vec{E}_0 dV$$

对于小介质球，在其所处区域，E_0 几乎均匀，介质球几乎是均匀极化的，因而

$$A\approx\left(-\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}_0\right)V$$

由此得到

$$A\approx-\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E}_0=-\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0E_0^2(\vec{x})$$

【思考】设电荷仅分布于半径为 R 的球面上，球面上的电势为

$$V=V_0\cos 3\theta$$

其中 V_0 为常数。试求（1）空间的电势分布；（2）球面上的面电荷分布。【思考】内、外半径分别为 a 和 b、相对介电常数为 ε 的均匀介质球壳置于均匀外电场 E_0 中。试求球壳内的电场分布以及球壳的电偶极矩。

第六章 静磁场

第 1 节 基本规律

静磁场的基本方程是:

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x})=0,\quad\nabla\times\vec{B}(\vec{x})=\mu_0\vec{j}(\vec{x})$$

其中, 电流满足稳恒条件

$$\nabla\cdot\vec{j}(\vec{x})=0$$

静磁场是无源有旋场。

- 边值关系

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0,\quad\hat{n}\times\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=\mu_0\vec{K}$$

也可将其写为

$$\vec{B}_2-\vec{B}_1=\mu_0\vec{K}\times\hat{n}$$

1 Biot-Savart 定理

利用 Helmholtz 定理，局域电流分布激发的磁场为

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= -\nabla\left[\frac{1}{4\pi}\int dV'\frac{\nabla'\cdot\vec{B}\left(\vec{x}'\right)}{\mathbb{R}}\right]+\nabla\times\left[\frac{1}{4\pi}\int dV'\frac{\nabla'\times\vec{B}\left(\vec{x}'\right)}{\mathbb{R}}\right]\\ &= \nabla\left|\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\frac{\vec{j}\left(\vec{x}'\right)}{\mathbb{R}}\right]\right.\end{aligned}$$

由此就给出了 BSL 定律:

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{x}'\right)\times\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}dV'$$

或者将其写为: $\vec{B}(\bar{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{d\vec{I}'\times\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$, where $d\vec{I}'=\vec{j}\left(\vec{x}'\right)dV', \vec{K}\left(\vec{x}'\right)d\vec{\sigma}'$ or $\vec{I}d\vec{l'}$

2 对称性

由于 $\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 为极矢量，因而由 BSL 定律或 Ampere 定律可知: 磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 为轴矢量。

$$x_i'=\lambda_{ij}x_j\Rightarrow B_i'=\det\lambda\cdot\lambda_{ij}B_j,\quad \text{where } \lambda\in O(3)$$

取 $\lambda=\operatorname{diag}\{1,1,-1\}$ ，则

$$\left(B_1',B_2',B_3'\right)=\left(-B_1,-B_2,B_3\right)$$

若电流分布关于 $x-y$ 平面对称，即必有

$$\left(B_1',B_2',B_3'\right)=\left(B_1,B_2,B_3\right),\quad \text{when}\quad z=0$$

因此，对称平面上有 $B_1=B_2=0$ 。即电流分布对称平面上的 B 只有法向分量。

例 6.1.1: 密绕螺线管

【例】试求截面均匀的无限长密绕螺线管的磁感应强度。设单位长度线圈的下数为 n ，每纣线圈中的电流强度为 I 。

【解】由对称性知，柱坐标系下

$$\vec{B}=B(s,\phi,z)\hat{z}$$

只需计算 xy 平面上任一点处的磁感应强度即可:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint\frac{\vec{K}\times\vec{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^3}d\sigma$$

其中，面电流密度 $\boldsymbol{K}=n\boldsymbol{I}$ 。计算时只需保留被积函数中平行于 z 轴的分量即可。

由于 $Kd\sigma=Kdzd\boldsymbol{l}$ $\begin{aligned}d\vec{l}\times\vec{\mathbb{R}}&=d\vec{l}\times(-z\hat{z}-\vec{R})\\&=\vec{R}\times d\vec{R}+z\hat{z}\times d\vec{l}\end{aligned}$，因此

$$\vec{B}=\frac{\mu_0K}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\oint_C\frac{d\vec{l}\times\vec{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^3}=\frac{\mu_0K}{4\pi}\oint_{C_0}\vec{R}\times d\vec{R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 K}{2\pi}\oint_{C_0}\frac{\vec{R}\times d\vec{R}}{R^2}$$

约定逆时针转动 (即绕着 z 轴转动) 为正

$$\frac{\vec{R}\times d\vec{R}}{R^2}=\hat{z}d\theta$$
$$\vec{B}=\hat{z}\frac{\mu_0 K}{2\pi}\oint_{C_0}d\theta$$

上式中的积分为闭曲线 C_0 相对于 P 点所张的平面角: (1) 若 P 点在 C_0 内部, 其值为 2π;
(2) 若 P 点在 C_0 外部, 其值为零。
对于无限长密绕螺线管，螺线管外部的磁场为零；内部的磁场是均匀的，磁埳方向与电流方向满足右手法则。即有

$$\vec{B}_{内}=(\mu_0 K)\,\hat{z}=(\mu_0 nI)\,\hat{z},\quad \vec{B}_{外}=0$$

【另解】由对称性，空间每一点的 B 都平行于 z 轴。而根据 BSL 定律，$\boldsymbol{B}$ 的 z 分量为:

$$B=\hat{z}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\iint\frac{\vec{K}\times\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}d\sigma'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint\frac{(\hat{z}\times\vec{K})\cdot\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}d\sigma'$$

由于

$$(\hat{z}\times\vec{K})d\sigma'=(\hat{z}\times\vec{K})dz'dl'=K\left(\hat{z}dz'\times d\vec{l'}\right)=-Kd\vec{\sigma}'$$

因而

$$B=\frac{\mu_0 K}{4\pi}\iint\frac{-\hat{\mathbb{R}}\cdot d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}^2}=\frac{\mu_0 K}{4\pi}\iint d\Omega$$

其中，$d\Omega$ 是面元 $d\boldsymbol{\sigma}'$ 相对于场点 $\boldsymbol{x}$ 所张立体角元，因而

$$\vec{B}_{内}=(\mu_0 K)\,\hat{z},\quad \vec{B}_{外}=0$$

3 Maxwell 应力张量

由此可得（请自行推导）:

$$\vec{F}=\frac{1}{\mu_0}\oint d\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{B}\vec{B}-\frac{1}{2}B^2\vec{I}\right)=-\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{T}$$

其中，T 为静磁场的动量流密度张量

$$\vec{T}=\frac{B^2}{2\mu_0}\vec{I}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}=w(\vec{I}-2\hat{B}\hat{B})$$

T 的负值称为静磁场的 Maxwell 应力张量。

$$\vec{F}=\oint d\vec{\sigma}\cdot w(2\hat{B}\hat{B}-\vec{I})=-\oint d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

第 2 节 磁矢势

由于磁场 $\boldsymbol{B}$ 的散度在全空间任一点处皆为零，故其可以表示为某个矢量场 A 的旋度，该矢量场 A 就称为磁矢势。对于静磁场，相应的 A 称为静磁矢势。其定义是:

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\quad \text{or}\quad \oint_{\partial\Sigma} d\vec{l}\cdot\vec{A}=\int_{\Sigma} d\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

- 不确定性

$$\vec{A}'(\vec{x})=\vec{A}(\vec{x})+\nabla\psi(\vec{x})$$

- 总可以选择磁矢势，使其满足 Coulomb 规范各件 $\nabla\cdot\vec{A}=0$

在 Coulomb 规范下, 磁矢势由如下两式所定义:

$$\nabla\times\vec{A}=\vec{B},\quad \nabla\cdot\vec{A}=0$$

在面电流两侧，磁矢势连续，即有

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{A}_2-\vec{A}_1\right)=0,\quad \hat{n}\times\left(\vec{A}_2-\vec{A}_1\right)=0\Rightarrow\vec{A}_2=\vec{A}_1$$

在前面给出 BSL 定律的过程中，我们实际上已经得到了局域电流的磁矢势:

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{d\vec{I}'}{\mathbb{R}},\quad where\quad d\vec{I}'=\vec{j}\left(\vec{x}'\right)dV',\vec{K}\left(\vec{x}'\right)d\sigma' or \vec{I}d\vec{l}'$$

【思者】请证明上式给出的 A 确实满足 Coulomb 规范条件。【思　】请直接由 Helmholtz 定理给出 A 的表达式。

在 Coulomb 规范下，电流元激发的磁矢势与电流元平行:

$$d\vec{A}(\bar{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{I}'}{\mathfrak{r}}$$

由 A 的定义可知，磁矢势为极矢量。在电流八布对称平面上, A 的法向八量为零。

定理 6.2.1: 磁矢势方程

静磁场方程亦可用磁矢势表示出来。为此，将 $B=\nabla\times A$ 代入 Ampere 定律，得到

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\mu_0\vec{j}\longrightarrow\nabla^2\vec{A}-\nabla(\nabla\cdot\vec{A})=-\mu_0\vec{j}$$

在 Coulomb 规范下, 磁矢势满足 Poisson 方程

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{j}$$

由此，也可直接给出局域电流激发的 A 的表达式。在面电流两侧，A 的方程表现为边值关系:

$$\vec{A}_1=\vec{A}_2,\quad \vec{n}\times\left(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1\right)=\mu_0\vec{K}$$

【例】无限长均匀柱电流【解】由 Ampere 定律可得

$$\vec{B}=\begin{cases}\frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\hat{\phi}, & s<a\\ \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}, & s>a\end{cases}$$

由对称性知

$$\vec{A} = A(s)\hat{z}$$

由 A 的定义知

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \nabla \times [A(s)\hat{z}] \\ &= [\nabla A(s)] \times \hat{z} = \frac{dA}{ds}\hat{s} \times \hat{z} = -\frac{dA}{ds}\hat{\phi}\end{aligned}$$

将磁场的表达式代入，柱内、外的磁矢势 A_1 和 A_2 分别满足

$$\frac{dA_1}{ds} = -\frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}, \quad \frac{dA_2}{ds} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

积分得到

$$A_1 = -\frac{\mu_0 I s^2}{4\pi a^2} + C_1, \quad A_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{S}{a} + C_2$$

不妨取 $C_1 = 0$，而由 $s \to a$ 时 $A_1 = A_2$ 得到

$$C_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

因此

$$\vec{A} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I s^2}{4\pi a^2}\hat{z}, & s < a \\ -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1 + 2\ln\frac{s}{a}\right)\hat{z}, & s > a \end{cases}$$

第 3 节 介质中的静磁场

介质中, 静磁场的 Maxwell 方程组是

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0, \quad \left(\vec{H} \triangleq \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)$$

静磁场仍为无源场, 可用磁矢势描述:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

在介质交界面处，Maxwell 方程组表现为边值关系：

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0, \quad \hat{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{K}_0$$

为了确定磁场，还需要知道本构关系。对简单介质有

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x})$$

第 4 节 静磁能

静磁场的能量称为静磁能，为:

$$W = \int \left(\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}\right) dV$$

其物理含义是：在维持磁介质固定不动的情形下，无限缓慢地建立传导电流的过程中——或者说磁场从无到有无限缓慢地建立过程中, 卜界抵抗涡旋电场力所做的功。单位体积的静磁能称为静磁场的能量密度 w :

$$w=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{B^2}{2\mu_0}-\frac{1}{2}\vec{M}\cdot\vec{B}$$

利用 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ ，静磁能可以表示为

$$\begin{aligned}
W=\frac{1}{2}\int dV\vec{B}\cdot\vec{H}&=\frac{1}{2}\int dV(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}\\
&=\frac{1}{2}\int dV[\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+(\nabla\times\vec{H})\cdot\vec{A}]\\
&=\frac{1}{2}\oint d\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\frac{1}{2}\int dV\vec{j}_0\cdot\vec{A}
\end{aligned}$$

而由于当 $r\to\infty$ 时有 $\boldsymbol{A}\sim 1/r$ 以及 $\boldsymbol{H}\sim 1/r^2$ ，而 $S\sim r^2$ ，因此，上面的面积分为零。从而，静磁能可以用传导电流表示为

$$W=\frac{1}{2}\int\vec{j}_0\cdot\vec{A}dV=\frac{1}{2}\int\vec{A}\cdot d\vec{I}_0$$

设空间中的传导电流密度为 $j(x)=j_1(x)+j_2(x)$ ，磁矢势为 $A(x)=\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x})$ 。利用前面的结果，总磁能可以写为

$$\begin{aligned}
W\left[\vec{j}_1+\vec{j}_2\right]&=W_1\left[\vec{j}_1\right]+W_2\left[\vec{j}_2\right]+W_{12}\left[\vec{j}_1,\vec{j}_2\right]\\
&=\frac{1}{2}\int\vec{j}_1\cdot\vec{A}_1dV+\frac{1}{2}\int\vec{j}_2\cdot\vec{A}_2dV\\
&+\left(\frac{1}{2}\int\vec{j}_1\cdot\vec{A}_2dV+\frac{1}{2}\int\vec{j}_2\cdot\vec{A}_1dV\right)
\end{aligned}$$

其中, W_1 和 W_2 分别是电流分布 $\boldsymbol{j}_1$ 和 $\boldsymbol{j}_2$ 的自能，而 W_{12} 则是二者之间的互能。

将磁矢势用电流表示出来后，不难证明

$$\int\vec{j}_1\cdot\vec{A}_2dV=\int\vec{j}_2\cdot\vec{A}_1dV$$

因而，互能又可以写为

$$W_{12}=\int\vec{j}_1\cdot\vec{A}_2dV$$

当以 $\boldsymbol{j}_1$ 为研究对象，而视 $\boldsymbol{j}_2$ 为外部电流时，将 W_{12} 称为 $\boldsymbol{j}_1$ 处在外磁场中的磁能。一般地，电流 $j(x)$ 处在外磁场 A_e 中的磁能可以写为

$$W_{外}=\int\vec{j}(\vec{x})\cdot\vec{A}_e(\vec{x})dV=\int\vec{A}_e\cdot d\vec{I}_0$$

考察由若干载流线圈与简单介质构成的孤立体系。设 I_k 是线圈 C_k 的电流强度，而 Φ_k 则是穿过其的磁通量，则总磁能为

$$W=\frac{1}{2}\int\vec{A}\cdot d\vec{I}_0=\frac{1}{2}\sum_k I_k\oint_{C_k}\vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$\Rightarrow W=\frac{1}{2}\sum_k I_k\Phi_k$ 由于穿过线圈 k 的磁通量与各线圈电流满足线性关系

$$\Phi_i=\sum_j L_{ij}I_j,\quad L_{ij}=L_{ji}$$

L_{ij} 称为感应系数(对角元与非对角元分别称为自感系数和互感系数)。因而

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i,j}L_{ij}I_iI_j$$

两个载流线圈构成的系统，以 L_1 和 L_2 表示自感系数，M 表示二者的互感系数，则系统的磁能表示为

$$W=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2$$

互能 $W_{12}=MI_1I_2$ 也称为线圈 1 处在(线圈 2 激发的)外磁场中的磁能。由于 MI_2 是线圈 2 激发的磁场穿过线圈 1 的磁通量，因此不难看出，一般地，某个线圈处在外磁场中的磁能可以表示为

$$W_{外}=I\Phi_e=I\iint_{\Sigma}\vec{B}_e\cdot d\vec{\sigma}$$

另一个角度看待愚线圈系统的磁能两线圈系统的磁能也可理解为如下过程中外界做的功：第一步: 在 ∞ 处分别建立电流 I_1 和 I_2。外界需要抵抗各自的感生电动势做功:

$$A_0=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2$$

第二步: 维持电流 I_1 和 I_2 不变，并维持线圈 2 在 ∞ 处不动，将线圈 1 移至给定位置。外界无需做功。第三步: 维持电流 I_1 和 I_2 不变，并维持线圈 1 在最终位置不动将线圈 2 移至给定位置。外界需要抵抗什么力做功? 做多少功?

- 为了维持线圈 1 电流不变，与线卷 1 外接的电源需要抵抗感生电动势做功:

$$A_{1感}=\int_0^{\infty}I_1\frac{d\Phi_{12}}{dt}dt=I_1\int_0^{MI_2}d\Phi_{12}$$
$$A_{1咸}=MI_1I_2$$

- 为了维持线圈 2 电流不变, 与线圈 2 外接的电源需要抵抗动生电动势做功:

$$A_{2动}=\int_0^{\infty}I_2\frac{d\Phi_{21}}{dt}dt=I_2\int_0^{MI_1}d\Phi_{21}$$
$$A_{2动}=MI_1I_2$$

为了移动线圈 2，作用于线圈 2 上的外界机械力需抵抗安培力做功:

$$A_{2安}=-\int\vec{F}_{2安}\cdot d\vec{l}_2=-I_2\int_0^{MI_1}d\Phi_{21}$$
$$A_{2安}=-MI_1I_2$$

【注】此结论可如下得到：考察线圈 2 上任一小段电流元, 抵抗作用于其上的安培力需消耗功率:

$$-\left(I_2d\vec{l}_2\times\vec{B}_1\right)\cdot\vec{v}=I_2d\vec{l}_2\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}_1\right)=I_2\Delta\varepsilon_2\text{ 动}$$

即等于该电流元上动生电动势消耗的功率, 也即等于抵抗其上动生电动势所需消耗功率的负值:

$$A_{2安}=-A_{2动}=-MI_1I_2$$

在维持电流 I_1 和 I_2 不变，并维持线圈 1 不动情形下，将线圈 2 移至给定位置外界需要: 抵抗线圈 1 上的感生电动势做功 $A_{1撼=MI_1I_2}$ 抵抗线圈 2 上的动生电动势做功 $A_{2动}=MI_1I_2$ 抵抗线圈 2 上的安培力

做功 $A_{2\text{安}}=-MI_1I_2$ 【注】抵抗咸应电动势做功所消耗能量由电源提供, 抵抗安培力做功所消耗的能量由外部机械力提供。

维持电流不变的情形下在外场 $\boldsymbol{B}_e$ 中移动线圈，外界抵抗安培力所做的功称为线圈在外场中的 (力学) 势能。其数值等于载流线圈在外场中的磁能之负值，即有

$$U=-W_{\text{外}}=-I\Phi_e=-I\iint_{\Sigma}\vec{B}_e\cdot d\vec{\sigma}=-\int\vec{j}\cdot\vec{A}_e dV$$

- 安培力与势能的关系:

$$\vec{F}=-\nabla U \quad \text{or} \quad U(\vec{r})\triangleq-\int_P^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

第 5 节 静磁场多极展开

1 局域电流

下面给出关于局域电流分布的两个推论，其中的体积分皆是在将所有电流包含在内的任一指定区域 V 内进行的。由连续性方程 $\nabla\boldsymbol{j}(t,x)=-\partial_t\rho(t,\boldsymbol{x})$ 可得:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\vec{j}\vec{x})&=(\nabla\cdot\vec{j})\vec{x}+\vec{j}\cdot\nabla\vec{x}=-\left(\partial_t\rho\right)\vec{x}+\vec{j}\\ \Rightarrow\int dV\vec{j}&=\int dV\left(\partial_t\rho\right)\vec{x}+\int dV\nabla\cdot(\vec{j}\vec{x})\\ &=\frac{d}{dt}\int dV\rho\vec{x}+\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{j}\vec{x}\end{aligned}$$

由于边界上电流为零，所以就得到:

$$\int dV\vec{j}=\dot{\vec{p}}, \quad \text{where } \vec{p}=\int dV\rho\vec{x}=\int\vec{x}dq$$

- 由连续性方程$\nabla\boldsymbol{j}(t,x)=-\partial_t\rho(t,x)$ 亦可得:

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(\vec{j}\vec{x})=(\nabla\cdot\vec{j})\vec{x}\vec{x}+(\vec{j}\cdot\nabla\vec{x})\vec{x}+\vec{x}(\vec{j}\cdot\nabla\vec{x})\\ &=-\left(\partial_t\rho\right)\vec{x}\vec{x}+\vec{j}\vec{x}+\vec{x}\bar{j}\\ &\Rightarrow\int dV\vec{j}\vec{x}=\frac{1}{2}\int dV(\vec{j}\vec{x}-\vec{x})+\frac{1}{2}\int dV(\vec{j}\bar{x}+\vec{x}\bar{j})\\ &=\frac{1}{2}\int dV(\vec{j}\bar{x}-\vec{x}\bar{j})\cdot\vec{I}+\frac{1}{2}\int dV\frac{\partial\rho}{\partial t}\bar{x}\vec{x}+\frac{1}{2}\int dV\nabla\cdot(\vec{j}\bar{x}\bar{x})\\ &=\frac{1}{2}\int dV(\bar{j}\bar{x}-\bar{x}\bar{j})\cdot\hat{x}_k\hat{x}_k+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int dV\rho\bar{x}\bar{x}+\frac{1}{2}\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{j}\vec{x}x\end{aligned}$$

最后一项面积分为零。而利用" 就近点乘、叉乘" 法则就得到

$$\begin{aligned}\int dV\vec{j}\vec{x}=&\underline{\tfrac{1}{2}\int dV(\vec{x}\times\vec{j})\times\hat{x}_k\hat{x}_k}\\ &+\frac{1}{6}\frac{d}{dt}\int dV\rho\left(3\vec{x}\vec{x}-r^2\vec{I}\right)+\frac{1}{6}\frac{d}{dt}\int dV\rho r^2\vec{I}\end{aligned}$$

定义

$$\vec{m}\triangleq\frac{1}{2}\int dV(\vec{x}\times\vec{j}), \quad \vec{D}\triangleq\int dV\rho\left(3\vec{x}\vec{x}-r^2\vec{I}\right), \quad g\triangleq\int dV\rho r^2$$

我们的结论就可以简写为

$$\int dV\vec{j}\vec{x}=\vec{m}\times\vec{I}+\frac{1}{6}\dot{\vec{D}}+\frac{1}{6}\dot{g}\vec{I}$$

对于任親局域电流么布有:

$$\int dV\vec{j}=\dot{\vec{p}},\quad \int dV\vec{j}\vec{x}=\vec{m}\times\vec{I}+\frac{1}{6}\dot{\vec{D}}+\frac{1}{6}\dot{g}\vec{I}$$

其中, p 和 D 八别为电偶极矩和电四极矩, 而

$$\vec{m}\triangleq\frac{1}{2}\int dV(\vec{x}\times\vec{j}),\quad g\triangleq\int r^2dq$$

积八区域 V 为包含所有电流的任一给定区域。对于稳恒电流 $(\nabla j=0)$, 我们有

$$\int dV\vec{j}=0,\quad \int dV\vec{j}\vec{x}=\vec{m}\times\vec{I}$$

亦即

$$\int d\vec{I}=0,\quad \int(d\vec{I})\vec{x}=\vec{m}\times\vec{I},\quad \text{where}\quad d\vec{I}=\vec{j}dV,\vec{K}d\sigma\text{ or Id}$$

2 磁偶极矩

电流分布的磁偶极矩定义为: $\vec{m}\triangleq\frac{1}{2}\int\vec{x}\times d\vec{I},\quad \text{where}\quad d\vec{I}=\vec{j}dV,\vec{K}d\sigma\text{ or }\vec{I}dl=Id\vec{l}$叠加原理 m 与原点选择无关【证明】设电流元 $d\boldsymbol{I}$ 相对于 O_1 和 O_2 的位矢分别为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $x_2=x_1-a$ ，则有

$$\vec{m}_1=\frac{1}{2}\int\vec{x}_1\times d\vec{I}=\frac{1}{2}\int\vec{x}_2\times d\vec{I}+\frac{1}{2}\int\vec{a}\times d\vec{I}$$
$$\vec{m}_1=\vec{m}_2+\frac{1}{2}\vec{a}\times\int d\vec{I}=\vec{m}_2$$

【例】半径为 a 、均匀带有电量 Q 的球壳绕某直径以常角速度 ω 转动。试计算磁偶极矩以及磁矢势和磁场的分布。【解】电流面密度为

$$\vec{K}=\frac{Q}{4\pi a^2}\vec{\omega}\times\vec{x}$$

$$\begin{aligned}\vec{m}&=\frac{1}{2}\oint_{r=a}(\vec{x}\times\vec{K})d\sigma=\frac{Qa^2}{8\pi}\oint_{r=a}\hat{r}\times(\vec{\omega}\times\hat{r})d\Omega\\&=\frac{Qa^2}{8\pi}\oint_{r=a}(\vec{\omega}-\vec{\omega}\cdot\hat{r}\hat{r})d\Omega\\&=\frac{Q}{8\pi}\left(\omega_k\oint d\Omega-\omega_i\oint_i n_kd\Omega\right)\hat{x}_k,\quad \text{where}\quad \hat{r}=n_k\hat{x}_k\end{aligned}$$

利用

$$\oint d\Omega=4\pi,\quad \oint n_in_kd\Omega=\frac{4\pi}{3}\delta_{ik}$$

得云 |

$$\vec{m}=\frac{Q}{8\pi}\left(\omega_k\cdot4\pi-\omega_i\cdot\frac{4\pi}{3}\delta_{ik}\right)\hat{x}_k=\frac{Qa^2}{3}\omega_k\hat{x}_k$$

即磁偶极矩沿着角速度的方向，为

$$\vec{m}=\frac{1}{3}Qa^2\vec{\omega}$$

磁矢势

$$\vec{K}\left(\vec{x}'\right)d\sigma' = \frac{Q}{4\pi a^2}\vec{\omega}\times\vec{x}d\sigma' = \frac{Q}{4\pi a}\vec{\omega}\times d\vec{\sigma}' = \frac{3}{4\pi a^3}\vec{m}\times d\vec{\sigma}'$$

将其代入磁矢势的表达式，得到

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{r'=a}\frac{\vec{K}\left(\vec{x}'\right)d\sigma'}{\mathbb{R}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{3}{4\pi a^3}\vec{m}\times\oint_{r'=a}\frac{d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}}$$

利用高斯定理给出

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{3\mu_0}{4\pi a^3}\vec{m}\times\left[\frac{1}{4\pi}\int_{r'\le a}\left(\nabla'\frac{1}{\mathbb{R}}\right)dV'\right] = \frac{3\mu_0}{4\pi a^3}\vec{m}\times\left[\frac{1}{4\pi}\int_{r'\le a}\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}dV'\right]$$

类比均匀带电球体，右边方括号中的项是电荷密度为” $\rho=\varepsilon_0$” 的均匀带电球体在 x 处激发的“电场”，其值为

$$\frac{1}{4\pi}\int_{r'\le a}\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}dV' = \begin{cases}\frac{1}{3}\vec{x}, & r<a\\ \frac{a^3\vec{x}}{3r^3}, & r>a\end{cases}$$

$$\vec{A}(\bar{x}) = \begin{cases}\frac{\mu_0}{4\pi a^3}\vec{m}\times\vec{x}, & r<a\\ \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\vec{m}\times\vec{x}, & r>a\end{cases}$$

磁感应强度由于

$$\begin{cases}\nabla\times(\vec{m}\times\bar{x}) = 2\vec{m}\\ \nabla\times\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{r^3} = \frac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}}{r^3}, & (r\neq 0)\end{cases}$$

因此，由磁矢势求旋度就得到磁感应强度:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \begin{cases}\frac{\mu_0\vec{m}}{2\pi a^3}, & r<a\\ \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}], & r>a\end{cases}$$

1. 载流线圈:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}I\oint_C\vec{x}\times d\vec{l}$$

设 Σ 是以 C 为边界的任一曲面，则也可将 m 写为

$$\begin{aligned}\vec{m} &= -\frac{1}{2}I\oint_C d\vec{l}\times\vec{x}\\ &= -\frac{1}{2}I\int_\Sigma(d\vec{\sigma}\times\nabla)\times\vec{x}\\ &= -\frac{1}{2}I\int_\Sigma[(\nabla\vec{x})\cdot d\vec{\sigma}-(\nabla\cdot\vec{x})d\vec{\sigma}]\end{aligned}$$

从而

$$\vec{m} = I\vec{\Sigma}, \quad \text{where} \quad \vec{\Sigma}\triangleq\int_\Sigma d\vec{\sigma}$$

求图示载流线圈的磁偶极矩。

$$\vec{m} = Ia^2(\hat{x}+\hat{z})$$

带电粒子系统的电流体密度为

$$\vec{j}(t,\vec{x})=\sum_n e_n\vec{v}_n(t)\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)$$

因而其 t 时刻的轨道磁矩可以写为

$$\vec{m}_L(t)=\frac{1}{2}\int dV\vec{x}\times\vec{j}(t,\vec{x})=\frac{1}{2}\sum_n e_n\int dV\vec{x}\times\vec{v}_n(t)\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)$$

即有

$$\vec{m}_L=\frac{1}{2}\sum_n e_n\vec{x}_n\times\vec{v}_n=\sum_n\frac{e_n}{2m_n}\vec{x}_n\times m_n\vec{v}_n=\sum_n\frac{e_n}{2m_n}\vec{L}_n$$

其中，$\boldsymbol{L}_n$ 是粒子 n 的轨道角动量。

如果各粒子具有相同的荷质比，即

$$\frac{e_n}{m_n}=\frac{e}{m}=\text{ const .}$$

则粒子系统的轨道磁矩 $\boldsymbol{m}_L$ 与轨道角动量 $\boldsymbol{L}$ 之间满足关系

$$\vec{m}_L=\frac{e}{2m}\vec{L}=g\frac{e}{2m}\vec{L}$$

其中的 g 称为 Lande $g-$ 因子。此处 $g=1$ 。

如果各粒子具有相同的荷质比，即

$$\frac{e_n}{m_n}=\frac{e}{m}=\text{ const .}$$

则粒子系统的轨道磁矩 $\boldsymbol{m}_L$ 与轨道角动量 $\boldsymbol{L}$ 之间满足关系

$$\vec{m}_L=\frac{e}{2m}\vec{L}=g\frac{e}{2m}\vec{L}$$

其中的 g 称为 Lande $g-$ 因子。此处 $g=1$ 。

对于电子, μ 子, 实验测量值分别为

$$g_{\text{electron}}=2.002319304374\pm0.000000000008$$
$$g_{\text{muon}}=2.0023318404\pm0.0000000030$$

与理论计　给出的结果完美吻合。电子 g-因子的精度相当于测量地月距离时仅有 1.5 mm 的误差。

考察小区域电流在远处的磁场。将坐标原点选在电流所在区域任一点 (或将电流包含在内的某个球面的中心)。磁矢势为

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{x}'\right)}{\mathbb{R}}dV'$$

由于

$$\frac{1}{\mathbb{R}}=e^{-\vec{x}'\cdot\nabla}\frac{1}{r}\approx\frac{1}{r}-\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r}=\frac{1}{r}+\frac{\vec{x}'\cdot\vec{x}}{r^3}$$

- 因此，远处的磁势近似为

$$\vec{A}(\vec{x})\approx\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\int\vec{j}\left(\vec{x}'\right)dV'+\frac{1}{r^3}\int\vec{j}\left(\vec{x}'\right)\vec{x}'dV'\cdot\vec{x}\right]$$

利用前面关于局域稳恒电流的结论，得到

$$\vec{A}(\vec{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\int \vec{j}\left(\vec{x}'\right)\vec{x}dV'\right]\cdot\vec{x} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\vec{m}\times\vec{I})\cdot\vec{x} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\vec{m}\times(\vec{I}\cdot\vec{x})$$

因此，

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\vec{m}\times\vec{x}, \quad (r\gg R)$$

而远处的磁场则为

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla\times\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}], \quad (r\gg R)$$

下面讨论小载流导体在给定外磁场中的磁能、力学势能以及其受到的力和力矩。假设在小电流系统所处区域, 并天无激发外磁场的其他电流，从而

$$\nabla\times\vec{B}_e(\vec{x}) = 0$$

小载流导体在外场中的磁能为

$$\begin{aligned}
W_{外} &= \int \vec{j}\left(\vec{x}'\right)\cdot\vec{A}_e\left(\vec{x}+\vec{x}'\right)dV' \\
&= \int \vec{j}\left(\vec{x}'\right)\cdot\left[\vec{A}_e(\vec{x})+\vec{x}'\cdot\nabla\vec{A}_e(\vec{x})\right]dV' \\
&= \left[\int \vec{j}\left(\vec{x}'\right)dV'\right]\cdot\vec{A}_e(\vec{x}) + \left\{\left[\int \vec{j}\left(\vec{x}'\right)\vec{x}'dV'\right]\cdot\nabla\right\}\cdot\vec{A}_e(\vec{x}) \\
&= 0+[(\vec{m}\times\vec{I})\cdot\nabla]\cdot\vec{A}_e(\vec{x}) \\
&= [\vec{m}\times(\vec{I}\cdot\nabla)]\cdot\vec{A}_e(\vec{x})
\end{aligned}$$

因此，

$$W_{外} = (\vec{m}\times\nabla)\cdot\vec{A}_e = \vec{m}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}_e\right)$$

即小载流导体在外场中的磁能为

$$W_{外} = \vec{m}\cdot\vec{B}_e$$

$$U = -\vec{m}\cdot\vec{B}_e$$

其含义是：在维持电流不变的情形下移动载流导体, 外界抵抗 Ampere 力所做的功。而载流导体所受 Ampere 力为:

$$\vec{F} = -\nabla U = \vec{m}\cdot\nabla\vec{B}_e$$

小载流导体在外磁场中受到的 Ampere 力也可直接利用定义给出:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \int \vec{j}\left(\vec{x}'\right)\times\vec{B}_e\left(\vec{x}+\vec{x}'\right)dV' \\
&= \int \vec{j}\left(\vec{x}'\right)\times\left[\vec{B}_e(\vec{x})+\vec{x}'\cdot\nabla\vec{B}_e(\vec{x})\right]dV' \\
&= \left[\int \vec{j}\left(\vec{x}'\right)dV'\right]\times\vec{B}_e(\vec{x}) + \left\{\left[\int \vec{j}\left(\vec{x}'\right)\vec{x}'dV'\right]\cdot\nabla\right\}\times\vec{B}_e(\vec{x}) \\
&= 0+[(\vec{m}\times\vec{I})\cdot\nabla]\times\vec{B}_e(\vec{x}) \\
&= [\vec{m}\times(\vec{I}\cdot\nabla)]\times\vec{B}_e(\vec{x})
\end{aligned}$$

因此得到

$$\vec{F}=(\vec{m}\times\nabla)\times\vec{B}_e(\vec{x})=\left(\nabla\vec{B}_e\right)\cdot\vec{m}-\left(\nabla\cdot\vec{B}_e\right)\vec{m}$$

由于磁场无源，且假设在载流导体所在区域没有外部电流，故

$$\vec{F}=\vec{m}\cdot\nabla\vec{B}_e$$

- 对于小载流线圈，由于 $m=I\Sigma$，从而其在外磁场所受力为

$$\vec{F}=I\vec{\Sigma}\cdot\nabla\vec{B}_e=I\nabla\left(\vec{B}_e\cdot\vec{\Sigma}\right)$$

亦即

$$\vec{F}=I\nabla\Phi_e$$

Ampere 力指向磁通量增加最快的方向。上式实际上对于一般的载流线圈也是严格成立的。

小载流导体在外磁场中受到的 Ampere 力矩 (相对于 O' 点) 为

$$\begin{aligned}\vec{\tau}&=\int\vec{x}'\times\left[\vec{j}\left(\vec{x}'\right)\times\vec{B}_e\left(\vec{x}+\vec{x}'\right)\right]dV'\\&\approx\int\vec{x}'\times\left[\vec{j}\left(\vec{x}'\right)\times\vec{B}_e(\vec{x})\right]dV'\\&=\left[\int\vec{j}\left(\vec{x}'\right)\vec{x}'dV'\right]\cdot\vec{B}_e(\vec{x})-\left[\int\vec{x}'\cdot\vec{j}\left(\vec{x}'\right)dV'\right]\vec{B}_e(\vec{x})\end{aligned}$$

最后一个积分实际上等于零，因而

$$\vec{\tau}=\vec{m}\times\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{B}_e(\vec{x})$$

即有

$$\vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B}_e(\vec{x})$$

养于 $xj(x)$ 积分为零的证明【方法一】

$$\begin{aligned}\int\vec{x}\cdot\vec{j}dV&=\mathrm{tr}\left(\int\vec{x}dV\right)=\mathrm{tr}\left(\int\frac{\vec{x}\vec{j}+\vec{j}\vec{x}}{2}dV\right)+\mathrm{tr}\left(\int\frac{\vec{x}\vec{j}-\vec{j}\vec{x}}{2}dV\right)\\&=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\int\nabla\cdot(\vec{j}\vec{x}\vec{x})dV\right]=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{j}\vec{x}\vec{x})=0\end{aligned}$$

【方法二】

$$\nabla\cdot\left(\vec{j}r^2\right)=(\nabla\cdot\vec{j})r^2+\vec{j}\cdot\nabla r^2=0+2\vec{j}\cdot\vec{x}$$

$$\int\vec{x}\cdot\vec{j}dV=\frac{1}{2}\int\nabla\cdot\left(\vec{j}r^2\right)dV=\frac{1}{2}\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{j}r^2=0$$

3 磁标势

空间中有介质 (末灵简单) 时, 静磁场的基本方程是

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x})=0,\quad\nabla\times\vec{H}(\vec{x})=\vec{j}_0(\vec{x}),\quad\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

- 如果全空间皆无传导电流 (例如永磁体)，则

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{x})=0,\quad\forall\vec{x}$$

此情形下，H 矢量可以用标量势 ψ 描述，称为磁标势:

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\nabla\psi(\vec{x})$$

如果穴间中有传导电流, 尽管在挖去传导电流的区域 V 内 $\boldsymbol{H}$ 无旋，但是，为了能用单值磁标势描述场，我们还应要求 V 是单侔诵的

下面以载流线圈激发的磁场为例，说明用磁标势描述传导电流激发的磁场的可能性及其条件。设空间中无介质。由 BSL 定律知，载流线圈激发的 **H** 矢量为

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} = \frac{I}{4\pi}\oint_C d\vec{l}' \times \frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$$

利用 Stokes 定理可得:

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{x}) &= \frac{I}{4\pi}\int_\Sigma (d\vec{\sigma}' \times \nabla') \times \frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} \\ &= \frac{I}{4\pi}\int_\Sigma \left[\left(\nabla' \frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}\right) \cdot d\vec{\sigma}' - \left(\nabla' \cdot \frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}\right) d\vec{\sigma}'\right]\end{aligned}$$

由此得到

$$\vec{H}(\vec{x}) = \nabla\left[\frac{I}{4\pi}\int_\Sigma \frac{-\hat{\mathbb{R}} \cdot d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}^2}\right] + I\int_\Sigma \delta\left(\vec{x} - \vec{x}'\right) d\vec{\sigma}'$$

如果场点 x 不在所选曲面 Σ 上，则上式第二个积分为零，此时 **H** 矢量可以用标量势描述:

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\nabla\psi(\vec{x}), \quad \psi(\vec{x}) \triangleq -\frac{I}{4\pi}\Omega(\vec{x})$$

其中，$\Omega(x)$ 是曲面 Σ 相对于场点 x 所张立体角:

$$\Omega(\vec{x}) = \int_\Sigma \frac{-\hat{\mathbb{R}} \cdot d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}^2}$$

全空间挖夨以载流线圈为边界的曲面后, 1 乃是一个单连通区域。

为了用磁标势描述传导电流激发的 H 矢量, 解域 V 应是不包含传电流的单连通区域。曲面 Σ 相对于场点 x 所张立体角:

$$\Omega(\vec{x}) = \int_\Sigma \frac{-\hat{\mathbb{R}} \cdot d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}^2}$$

磁标势:

$$\psi(\vec{x}) \triangleq -\frac{I}{4\pi}\Omega(\vec{x})$$

H 夻量与磁感应强度:

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\nabla\psi(\vec{x}), \quad \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0\vec{H} = -\mu_0\nabla\psi(\vec{x})$$

【例】圆环电流轴线上的磁场。【解】取以圆环为边界的球冠计算立体角:

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= -\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta \\ &= -2\pi\left(1 - \cos\theta_0\right) \\ &= -2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)\end{aligned}$$

由于对称轴上的 B 平行于对称轴，因而

$$\vec{B}(z)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\Omega}{dz}\hat{z}=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{z}$$

【例】小载流线圈在远处的场。【解】载流线圈所围曲面相对于场点 x 的立体角为

$$\Omega(\vec{x})=-\int_{\Sigma}\frac{\hat{\mathbb{R}}\cdot d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}^2}$$

由于

$$r\gg R\Rightarrow\overrightarrow{\mathbb{R}}=\vec{x}-\vec{x}'\approx\vec{x}=r\hat{r}$$

大而

$$\Omega(\bar{x})\approx-\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\int_{\Sigma}d\vec{\sigma}'=-\frac{\vec{\Sigma}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

所以磁标势为

$$\psi(\bar{x})=-\frac{I}{4\pi}\Omega(\bar{x})=\frac{\vec{m}\cdot\hat{r}}{4\pi r^2},\quad(r\gg R)$$

而磁感应强度则为

$$\vec{B}(\bar{x})=-\mu_0\nabla\psi(\bar{x})=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\bar{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\bar{m}],\quad(r\gg R)$$

如果介 的磁化状态 (即 $\boldsymbol{M}$) 已知，则磁化电流分布为

$$\vec{j}'=\nabla\times\vec{M},\quad\vec{K}'=\hat{n}\times\left(\vec{M}_2-\vec{M}_1\right)$$

而磁化电流激发的场满足方程

$$\nabla\times\vec{H}=0,\quad\nabla\cdot\vec{B}=0,\quad\text{where}\quad\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

- 利用 H 矢量的定义，将其改写为

$$\nabla\times\vec{H}=0,\quad\nabla\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M}\triangleq\rho^*$$

在介质界面上，场方程写为边值关系：

$$\hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=0,\quad\hat{n}\cdot\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\hat{n}\cdot\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)\triangleq\sigma^*$$

如果介 的磁化状态 (即 $\boldsymbol{M}$) 已知，则磁化电流分布为

$$\vec{j}'=\nabla\times\vec{M},\quad\vec{K}'=\hat{n}\times\left(\vec{M}_2-\vec{M}_1\right)$$

而磁化电流激发的场满足方程

$$\nabla\times\vec{H}=0,\quad\nabla\cdot\vec{B}=0,\quad\text{where}\quad\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

- 利用 H 矢量的定义，将其改写为

$$\nabla\times\vec{H}=0,\quad\nabla\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M}\triangleq\rho^*$$

在介质界面上，场方程写为边值关系：

$$\hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=0,\quad \hat{n}\cdot\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\hat{n}\cdot\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)\triangleq\sigma^*$$

【例】厚为 d 的无限大磁介质板被均匀磁化，试求磁化电流产生的磁场 B 。已知磁化强度为

$$\vec{M}=M(\hat{y}\sin\theta+\hat{z}\cos\theta)$$

电流观点

$$\vec{M}=M(\hat{y}\sin\theta+\hat{z}\cos\theta)$$

$$\begin{cases}\vec{K'}_{\text{上}}=\vec{M}\times(+\hat{z})=(+M\sin\theta)\hat{x}\\ \vec{K'}_{\text{下}}=\vec{M}\times(-\hat{z})=(-M\sin\theta)\hat{x}\end{cases}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{2}\mu_0\vec{K'}_{\text{上}}\times(-\hat{z})+\frac{1}{2}\mu_0\vec{K'}_{\text{下}}\times(+\hat{z})=(\mu_0M\sin\theta)\,\hat{y}$$

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}=(-M\cos\theta)\hat{z}$$

$$\vec{M}=M(\hat{y}\sin\theta+\hat{z}\cos\theta)$$

$$\begin{cases}\sigma^*_{\text{上}}=\vec{M}\cdot(+\hat{z})=+M\cos\theta=+\sigma^*\\ \sigma^*_{\text{下}}=\vec{M}\cdot(-\hat{z})=-M\cos\theta=-\sigma^*\end{cases}$$

$$\vec{H}=-\sigma^*\hat{z}=(-M\cos\theta)\hat{z}$$

$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=(\mu_0M\sin\theta)\,\hat{y}$$

【例】求半径为 R 、均匀磁化介质球产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 。已知

$$\vec{M}=M\hat{z}$$

$$\vec{K'}=\vec{M}\times\hat{r}=(M\sin\theta)\hat{\phi}\quad \sigma^*=\vec{M}\cdot\hat{r}=M\cos\theta$$

【解】球内、球外的磁标势 ψ_1 和 ψ_2 均满足 Laplace 方程，而在界面处则满足边值关系:

$$\psi_1=\psi_2,\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r}-\frac{\partial\psi_2}{\partial r}=\vec{M}\cdot\hat{r}=M\cos\theta,\quad \text{when } r=R$$

由对称性，Laplace 方程在球坐标系下的一般解为

$$\psi=\sum_{l=0}^{\infty}\left(a_lr^l+\frac{b_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

根据边值关系的特点，不妨设

$$\psi_1=A\frac{r}{R}\cos\theta,\quad \psi_2=A\frac{R^2}{r^2}\cos\theta$$

如此磁标势自动连续，而由第二个边值关系易得

$$A=\frac{1}{3}MR$$

将 A 代入磁标势的表达式，得到

$$\psi_1=\frac{\vec{M}\cdot\vec{x}}{3},\quad \psi_2=\frac{\vec{M}\cdot\vec{x}}{3}\frac{R^3}{r^3}=\frac{\vec{m}\cdot\vec{x}}{4\pi r^3},\quad \text{where } \vec{m}\triangleq\frac{4\pi R^3}{3}\vec{M}$$

其中，$\boldsymbol{m}$ 是介质球的总磁矩。H 矢量为

$$\vec{H}_1=-\nabla\psi_1=-\frac{1}{3}\vec{M},\quad \vec{H}_2=-\nabla\psi_2=\frac{1}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}]$$

磁感应强度为

$$\vec{B}_1=\mu_0\left(\vec{H}_1+\vec{M}\right)=\frac{2}{3}\mu_0\vec{M},\quad \vec{B}_2=\mu_0\vec{H}_2=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}]$$

$$\vec{H}=\begin{cases}-\frac{1}{3}\vec{M}, & r<a\\ \frac{1}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}], & r>a\end{cases}\quad \vec{B}=\begin{cases}\frac{2}{3}\mu_0\vec{M}, & r<a\\ \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}], & r>a\end{cases}$$

【思考】求内外半径分别为 a 和 b 的均匀磁化介质球壳产生的磁场 B 。已知磁化强度为 M 。

当空间中分布有简单介质时，在不含传导电流的区域，磁场满足方程 $\nabla\times\vec{H}=0,\quad \nabla\cdot\vec{B}=0$, where $\vec{B}(\vec{x})=\mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x})$ - 利用本构关系，在均匀介质内部，**H** 矢量满足方程:

$$\nabla\times\vec{H}=0,\quad \nabla\cdot\vec{H}=0$$

在介质界面上，场方程写为边值关系:

$$\hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=0,\quad \hat{n}\cdot\left(\mu_2\vec{H}_2-\mu_1\vec{H}_1\right)=0$$

在不含传导电流的单连通区域 V 内，**H** 矢量可用磁标势描述:

$$\vec{H}(\vec{x})=-\nabla\psi(\vec{x}),\quad \vec{x}\in V$$

- 在均匀介质内，磁标势满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\psi=0$$

在介质界面上，ψ 满足边值关系:

$$\psi_1=\psi_2,\quad \mu_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n}$$

一旦求解出磁标势，**H** 矢量就知道了，而磁感应强度则为:

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

【例】内、外半径分别为 a 和 b 的无限长磁介质柱壳处在均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，$\boldsymbol{B}_0$ 垂直于柱壳轴线 (设为 z 轴)。已知介质的相对磁导率为 $\mu_\circ$ 。试求空腔内的磁场。【解】本问题中 $\phi\in[0,2\pi]$ ，故磁标势的单值性要求一般解为:

$$\psi(s,\phi)=a_0+b_0\ln s+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m s^m+b_m s^{-m}\right)\left(c_m\cos m\phi+d_m\sin m\phi\right)$$

设壳内、壳中、壳外的磁标势分别为 ψ_1、ψ_2 和 ψ_3 。用以定解的边界条件包含 (1) 边值关系 (2) ψ_1 的有限性，及 (3) ψ_3 的渐近条件:

$$\psi_3\to-\vec{H}_0\cdot\vec{x}=-H_0 s\cos\phi,\quad \text{when}\quad s\to\infty$$

【解】本问题中 $\phi \in [0, 2\pi]$ ，故磁标势的单值性要求一般解为:

$$\psi(s,\phi) = a_0 + b_0 \ln s + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m s^m + b_m s^{-m}\right)\left(c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi\right)$$

设壳内、壳中、壳外的磁标势分别为 ψ_1、ψ_2 和 ψ_3 。用以定解的边界条件包含 (1) 边值关系 (2) ψ_1 的有限性，及 (3) ψ_3 的渐近条件:

$$\psi_3 \to -\vec{H}_0 \cdot \vec{x} = -H_0 s \cos\phi, \quad \text{when} \quad s \to \infty$$

由此可得:

$$A = -\frac{4\mu H_0 a}{(\mu+1)^2 - (\mu-1)^2 a^2/b^2}$$

因而，壳内的磁标势为:

$$\psi_1 = A\frac{S}{a}\cos\phi = \frac{A}{a}x$$

而壳内的磁感应强度为:

$$\vec{B}_1 = -\mu_0 \nabla\psi_1 = -\frac{\mu_0 A}{a}\hat{x}$$

将系数 A 的表达式代入，并注意到 $\boldsymbol{B}_0 = \mu_0 \boldsymbol{H}_0$ ，因而有:

$$\vec{B}_1 = \frac{4\mu}{(\mu+1)^2 - (\mu-1)^2 a^2/b^2}\vec{B}_0$$

若 $\mu >> 1$, 则

$$\vec{B}_1 \approx \frac{1}{1 - a^2/b^2}\frac{4\vec{B}_0}{\mu}$$

进一步，若 $b >> a$ ，则

$$\vec{B}_1 \approx \frac{4}{\mu}\vec{B}_0 \ll \vec{B}_0$$

磁导率越大、壳壁越厚，屏敉效果越好。

第七章　电磁波的传播

第 1 节　自由空间中的电磁波

自由空间中, 电磁场满足齐次 MaxWell 方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, & \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}, & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

两个旋度方程可看作电磁场关于时间的一阶微分方程，已知 $\boldsymbol{E}(0,x)$ 和 $\boldsymbol{B}(0,\boldsymbol{x})$ ，此二方程足以唯一确定 $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x})$ 。两个散度方程可视为对场的约束 (无散条件)。若 $E(0,x)$ 和 $\boldsymbol{B}(0,\boldsymbol{x})$ 散度为零，则两个旋度方程保证了:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}(0,\vec{x}) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B}(0,\vec{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}(t,\vec{x}) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B}(t,\vec{x}) = 0 \end{cases}$$

1 波动方程

用 ∂_t 作用于 Faraday 定律上，得到

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla\times\left(-\partial_t\vec{B}\right)=-\partial_t(\nabla\times\vec{B})=-\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2\vec{E}$$

而由于于无散条件，我们有

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$$

所以，E 满足方程

$$\nabla^2\vec{E}=\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2\vec{E}$$

若用 ∂_t 作用于 Ampere-Maxwell 定律上，类似可得到

$$\nabla^2\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2\vec{B}$$

自由空间中, 电磁场的每一个胄卡尔忿量都满足波动方程。

自由空间中，电场、磁场形式上可以分离：$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, & \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, & \text{电波云方程}+\text{无散条件}\end{cases}$ 其中 c 为真空中的光速:

$$c\triangleq\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

但不能代替 Maxwell 方程，还需要考虑电场与磁场的联系:

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

求解自由空间中电磁场的基本方程可以 为

$$\nabla^2\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad\nabla\cdot\vec{E}=0,\quad\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

给定 $t=0$ 时刻的 $\boldsymbol{E}$ (无散) 和 $\partial_t\boldsymbol{E}$，波动方程就足以确定 $\boldsymbol{E}(t,x)$，而由 Faraday 定律又可确定 $\boldsymbol{B}(t,x)$ 。$\vec{E}(0,\vec{x})$ and $\vec{B}(0,\vec{x})\Rightarrow\vec{E}(0,\vec{x})$ and $\partial_t\vec{E}(0,\vec{x})$ 自由空间中电磁场的基本方程也可写为:

$$\nabla^2\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad\nabla\cdot\vec{B}=0,\quad\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

【例】如果自由空间的电磁场只依赖于一个空间坐标 z，即

$$\vec{E}=\vec{E}(t,z),\quad\vec{B}=\vec{B}(t,z)$$

试确定电磁场的一般表达式。波云方程对解的限制电场满足波动方程

$$0=\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{E}$$

引入新变量 $\xi=z+ct$ 和 $\eta=z-ct$，方程简化为

$$4\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

【结论 1】波动方程有两个独立的平面行波解:

$$\vec{E}_+(z,t)=\vec{f}(z+ct),\quad \vec{E}_-(z,t)=\vec{g}(z-ct)$$

其中 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 是两个任意矢量函数: $f(z+ct)$: 沿着 z 轴负向以速度 c 传播; 在平面 $z+ct=\text{const.}$ 上 f 取相同的值; $g(z-ct)$: 沿着 z 轴正向以速度 c 传播; 在平面 $z-ct=\text{const.}$ 上 g 取相同的值; 【结论 2】波动方程的一般解为:

$$\vec{E}(z,t)=\vec{f}(z+ct)+\vec{g}(z-ct)$$

无散条件对电场的限制由于

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

因此，对于每一个独立的平面行波解，电场的 z 分量至多只是一个常数，不妨设其为零。【结论 3】两个独立平面行波解的电场均与传播方向垂直，谓之横电 (TE)，即有

$$\vec{E}_+(z,t)=\vec{f}_\perp(z+ct),\quad \vec{E}_-(z,t)=\vec{g}_\perp(z-ct)$$

与电场联系的磁场由 Faraday 定律可得分别与 $E_\pm$ 相伴的 $B_\pm$ 满足:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\begin{array}{c}\vec{B}_+(z,t)\\ \vec{B}_-(z,t)\end{array}\right\}=-\hat{z}\times\frac{\partial}{\partial z}\left\{\begin{array}{c}\vec{E}_+(z,t)\\ \vec{E}_-(z,t)\end{array}\right\}=-\hat{z}\times\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\begin{array}{c}+\vec{E}_+(z,t)\\ -\vec{E}_-(z,t)\end{array}\right\}$$

由此确定的 $\boldsymbol{B}_\pm$ 可相差一个与时间 t 无关的任意函数，不妨取该任意函数为零。【结论 4】与电场的两个独立解对应的磁场分别为:

$$c\vec{B}_+(z,t)=-\hat{z}\times\vec{E}_+(z,t),\quad c\vec{B}_-(z,t)=+\hat{z}\times\vec{E}_-(z,t)$$

即每个平面行波解的磁场与传播方向垂直，谓之横磁 (TM)。

横电磁波每一个独立的平面行波解 $(\boldsymbol{E}_+,\boldsymbol{B}_+)$ 和 $(\boldsymbol{E}_-,\boldsymbol{B}_-)$，电场与磁场均与传播方向垂直，这样的电磁场称为横电磁波(TEM): $\left(\vec{E}_+,\quad c\vec{B}_+=-\hat{z}\times\vec{E}_+,-\hat{z}\right)$ 两两垂直且构成右手系; $\left(\vec{E}_-,\quad c\vec{B}_-=+\hat{z}\times\vec{E}_-,+\hat{z}\right)$ 两两垂直且构成右手系; 一般解为两个沿着相反方向传播的波的叠加

$$\vec{E}=\vec{E}_++\vec{E}_-,\quad c\vec{B}=c\vec{B}_++c\vec{B}_-=-\hat{z}\times\vec{E}_++\hat{z}\times\vec{E}_-$$

该解多少具有驻波的特性，而且电磁场一般并不正交。

2 平面行波解

沿着波矢量 k 的方向传播的平面电磁波为:

$$\vec{E}(t,\vec{x})=\vec{E}_\perp(\phi),\quad c\vec{B}(t,\vec{x})=\hat{k}\times\vec{E}(\phi)$$

其中, 无量纲函数 ϕ 称为波的相位:

$$\phi\triangleq\vec{k}\cdot\vec{x}-kct$$

- ($\boldsymbol{E}$⊠$\boldsymbol{B}$⊠$\boldsymbol{k}$) 两两正交、构成右手系、且 $E=cB$:

$$\vec{k}\cdot\vec{E}=\vec{k}\cdot\vec{B}=\vec{E}\cdot\vec{B}=0,\quad c\vec{B}=\hat{k}\times\vec{E}$$

- 在任一特定时刻，等相位面 ($\phi=$ const.) 上 E 和 B 皆均匀。- 单色平面波传播的速度为真空中的光速 c。

相速度等于等相位面上相应点的传播速度

$$\phi(t,\vec{x})=\vec{k}\cdot\vec{x}-kct=\vec{k}\cdot(\vec{x}-c\hat{k}t)\triangleq\vec{k}\cdot\vec{x}_0$$
$$\vec{x}=\vec{x}_0+ct\hat{k}\quad\Rightarrow\vec{v}_p=\frac{d\vec{x}}{dt}=c\hat{k}$$

【方法二】由于

$$\phi(t,\vec{x})=\vec{k}\cdot\vec{x}-kct=\text{ const .}$$
$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\nabla\phi+\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$
$$\frac{d\phi}{dt}=\vec{k}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}-kc=0$$
$$v_p=\hat{k}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}=c$$

2. 平面电磁波的力学性质能量定客

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2+c^2B^2\right)=\varepsilon_0E^2$$

由于 $E=cB$, 因此, 平面电磁波的电场和磁场能量密度相同。能流密度

$$\vec{S}=\tfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=c^2\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$$
$$\vec{S}=c\varepsilon_0E^2\hat{k}=wc\hat{k}$$

平面电磁波的能流方向就是波传播的方向。

$$\vec{g}=\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}=\tfrac{\vec{S}}{c^2}$$
$$\vec{g}=\tfrac{w}{c}\hat{k}$$

平面电磁波动量密度矢量沿着波矢量的方向。云量流密库张是

$$\begin{aligned}\vec{T}&=w\vec{I}-\varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E}+c^2\vec{B}\vec{B}\right)\\&=w\vec{I}-w(\hat{E}\hat{E}+\hat{B}\hat{B})\\\overleftrightarrow{T}&=w\hat{k}\hat{k}\end{aligned}$$

单频率的平面电磁波称为亘色平面波定义与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直的两个单位矢量:

$$\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2=0,\quad\hat{e}_1\times\hat{e}_2=\hat{k}$$

则单色平面波的电场可表示为

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{E}(t,\vec{x})=E_1\hat{e}_1+E_2\hat{e}_2=A_1\cos\left(\phi+\delta_1\right)\hat{e}_1+A_2\cos\left(\phi+\delta_2\right)\hat{e}_2\\c\vec{B}(t,\vec{x})=\hat{k}\times\vec{E}(t,\vec{x})\end{array}\right.$$

其中 $\phi=\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t,\quad\omega=kc$

利用

$$E_1=A_1\cos\left(\phi+\delta_1\right),\quad E_2=A_2\cos\left(\phi+\delta_2\right)$$

可得

$$\begin{cases} \frac{E_1}{A_1}\sin\delta_2 - \frac{E_2}{A_2}\sin\delta_1 = \cos\phi\sin(\delta_2-\delta_1) \\ \frac{E_1}{A_1}\cos\delta_2 - \frac{E_2}{A_2}\cos\delta_1 = \sin\phi\sin(\delta_2-\delta_1) \end{cases}$$

两式平方求和得到（其中 $\delta=\delta_2-\delta_1$）:

$$\left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2+\left(\frac{E_2}{A_2}\right)^2-2\frac{E_1}{A_1}\frac{E_2}{A_2}\cos\delta=\sin^2\delta$$

利用

$$E_1=A_1\cos(\phi+\delta_1)\,,\quad E_2=A_2\cos(\phi+\delta_2)$$

可得

$$\begin{cases} \frac{E_1}{A_1}\sin\delta_2 - \frac{E_2}{A_2}\sin\delta_1 = \cos\phi\sin(\delta_2-\delta_1) \\ \frac{E_1}{A_1}\cos\delta_2 - \frac{E_2}{A_2}\cos\delta_1 = \sin\phi\sin(\delta_2-\delta_1) \end{cases}$$

两式平方求和得到（其中 $\delta=\delta_2-\delta_1$）:

$$\left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2+\left(\frac{E_2}{A_2}\right)^2-2\frac{E_1}{A_1}\frac{E_2}{A_2}\cos\delta=\sin^2\delta$$

线偏振: $\sin\delta=0$ 。电场矢尖的轨迹方程为

$$\frac{E_1}{A_1}=\pm\frac{E_2}{A_2}$$

圆偏振: $\cos\delta=0$ 且 $A_1=A_2\equiv A$ 。电场矢尖的轨迹方程为

$$E_1^2+E_2^2=A^2$$

椭圆偏振：其他情形。

考察原点处电场矢尖的轨迹。不妨设 $\delta_1=0$，从而 $\delta=\delta_2$，因此

$$E_1=A_1\cos\omega t,\quad E_2=A_2\cos(\omega t-\delta)$$

在 $t=0$ 时刻，有

$$(E_1,E_2)=(A_1,A_2\cos\delta)\,,\quad \left(\dot{E}_1,\dot{E}_2\right)=(0,\omega A_2\sin\delta)$$

右旋椭圆偏振：$\sin\delta>0$ 。左旋椭圆偏振: $\sin\delta<0$ 。对于圆偏振，（1）右旋圆偏振（RCP）: $\sin\delta=+1$（2）左旋圆偏振（LCP）: $\sin\delta=-1$

定义单色平面波的偏振度

$$\tilde{R}\triangleq\frac{A_2}{A_1}e^{i\delta}=\frac{A_2}{A_1}e^{i(\delta_2-\delta_1)}$$

线偏振: $\mathrm{Im}\,\tilde{R}=0$ 椭圆偏振: $\mathrm{Im}\,\tilde{R}\neq 0$ $\begin{cases}\text{右旋圆偏振: } \mathrm{Im}\,\tilde{R}>0\\ \text{左旋圆偏振: } \mathrm{Im}\,\tilde{R}<0\end{cases}$ 圆偏振 : $\tilde{R}=\pm i$ $\begin{cases}\text{右旋圆偏振(RCP) : } \tilde{R}=+i\\ \text{左旋圆偏振(LCP) : } \tilde{R}=-i\end{cases}$

定义单色平面波的偏振度

$$\tilde{R}\triangleq\frac{A_2}{A_1}e^{i\delta}=\frac{A_2}{A_1}e^{i(\delta_2-\delta_1)}$$

线偏振: $\mathrm{Im}\,\tilde{R}=0$ 椭圆偏振: $\mathrm{Im}\,\tilde{R}\neq 0$ $\begin{cases}\text{右旋圆偏振: } \mathrm{Im}\,\tilde{R}>0\\ \text{左旋圆偏振: } \mathrm{Im}\,\tilde{R}<0\end{cases}$ 圆偏振 : $\tilde{R}=\pm i$ $\begin{cases}\text{右旋圆偏振(RCP) : } \tilde{R}=+i\\ \text{左旋圆偏振(LCP) : } \tilde{R}=-i\end{cases}$

圆偏振基定义圆偏振 (复) 基矢量 $\begin{cases} \hat{e}_+ \triangleq \frac{\hat{e}_1+i\hat{e}_2}{\sqrt{2}} & \text{(右旋圆偏振基矢)} \\ \hat{e}_- \triangleq \frac{\hat{e}_1-i\hat{e}_2}{\sqrt{2}} & \text{(左旋圆偏振基矢)} \end{cases}$ 圆偏振基满足

$$\hat{e}_- = \hat{e}_+^*, \quad \hat{e}_\pm^* \cdot \hat{e}_\pm = 1, \quad \hat{e}_\pm^* \cdot \hat{e}_\mp = 0$$

- 单色平面波也可视为左旋和右旋偏振波的叠加：

$$\vec{E} = (E_+\hat{e}_+ + E_-\hat{e}_-)\, e^{i\phi}, \quad E_\pm = \hat{e}_\pm^* \cdot \vec{E}_0$$

【例】自由空间的电磁波，其电场的复表示如下，试写出真实的电场和磁场（其中的 k 与 ω 均大于零）：

$$\vec{E} = \frac{A}{2}(\hat{x}+i\hat{y})e^{i(kz-\omega t)} + \frac{A}{2}(\hat{x}+i\hat{y})e^{i(kz+\omega t)} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

($\boldsymbol{E}_1$ 为沿正 z 轴正向传播的 RCP, $\boldsymbol{E}_2$ 为沿着负 Z 轴传播的 LCP)【解】由于

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = A(\hat{x}+i\hat{y})e^{ikz}\cos\omega t \\ c\vec{B} = \hat{z}\times\vec{E}_1 - \hat{z}\times\vec{E}_2 = -A(\hat{x}+i\hat{y})e^{ikz}\sin\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\vec{E} = A(\hat{x}\cos kz - \hat{y}\sin kz)\cos\omega t \\ \mathrm{Re}(c\vec{B}) = -A(\hat{x}\cos kz - \hat{y}\sin kz)\sin\omega t \end{cases}$$

【例】自由空间的电磁波，其电场的复表示如下，试写出真实的电场和磁场 (其中的 k 与 ω 均大于零) :

$$\vec{E} = \frac{A}{2}(\hat{x}+i\hat{y})e^{i(kz-\omega t)} + \frac{A}{2}(\hat{x}-i\hat{y})e^{i(kz+\omega t)} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

(E_1 为沿正 z 轴正向传播的 RCP, E_2 为沿着负 z 轴传播的 RCP)【解】由于

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = A(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)e^{ikz} \\ c\vec{B} = \hat{z}\times\vec{E}_1 - \hat{z}\times\vec{E}_2 = -iA(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)e^{ikz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\vec{E} = A(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)\cos kz \\ \mathrm{Re}(c\vec{B}) = A(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)\sin kz \end{cases}$$

复数表述的优点理由 1：复数描述与真实场一一对应：

$$\vec{E}_{01}e^{i\left(\vec{k}_1\cdot\vec{x}-\omega_1 t\right)} = \vec{E}_{02}e^{i\left(\vec{k}_2\cdot\vec{x}-\omega_2 t\right)} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{E}_{01} = \vec{E}_{02} \\ \vec{k}_1 = \vec{k}_2 \\ \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

理由 2 : (设左式对任意的 t 和 x 都成立)

$$\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = \vec{E}_{01}e^{i\left(\vec{k}_1\cdot\vec{x}-\omega_1 t\right)} + \vec{E}_{02}e^{i\left(\vec{k}_2\cdot\vec{x}-\omega_2 t\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{E}_0 = \vec{E}_{01} + \vec{E}_{02} \\ \vec{k} = \vec{k}_1 = \vec{k}_2 \\ \omega = \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

第 2 节　绝缘介质中的电磁波

第 3 节　导电介质中的电磁波

第 4 节　电磁波在绝缘介质表面反射与折射

第 5 节　电磁波在导电介质表面反射与折射

第 6 节　谐振腔和波导管

定理 7.6.1: 费马定理

No three positive integers a, b and c satisfy the equation $a^n + b^n = c^n$ for any integer greater than two.

证明: Theorem 7.6.1

The proof is easy, but too large to fit in this box.

例 7.6.1

123

解答

12321

性质 7.6.1

12321

注

12321