中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

线性代数自修辅导

程嘉杰　整理

USTC, 96 JinZhai Road, Hefei,
Anhui, P.R.China, 230026
中国安徽省合肥市金寨路 96 号
中国科学技术大学

文件网址：home.ustc.edu.cn/∼jiajie
编写日期：2022 年 1 月 10 日

Contents

前言

本资料主要是线性代数课程的重点习题汇编，兼有公式题型梳理和概念理解，并对真题进行试解

第一章　基本概念

第 1 节　向量

既有大小, 又有方向的量。表示 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$.

注 : 零向量

零向量与任何向量共线、共面、正交。

性质 1.1.1: 运算法则

加法：平行四边形法则 / 三角形法则
减法: $\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b})$

数乘: $\lambda\vec{a}\left\{\ |\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|\quad \text{方向}\begin{cases}\text{与}\vec{a}\text{ 同向}, & \lambda>0\text{ 时}\\ \text{与}\vec{a}\text{ 反向}, & \lambda<0\text{ 时}\end{cases}\right.$

▶ 运算律：(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$；(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$；(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$；(5) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；(6)$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$；(7) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；(8) $1\vec{a}=\vec{a}$

定理 1.1.1: 共线共面的表述

$$\vec{a},\vec{b}\text{ 共线 }\Leftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\text{ 不全为零, 使得}\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}.$$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{ 共面 }\Leftrightarrow \exists\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R},\text{ 不全为零, 使得}\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}.$$

第 2 节　线性相关、线性组合

对 n 个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$, 若存在不全为零的 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, 使得

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0},$$

则称 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ 线性相关. 否则, 称 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ 线性无关.

若 $\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$, 则称 $\vec{a}$ 是 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ 的线性组合,
或者 $\vec{a}$ 可由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ 线性表示.

注

设 $n\geqslant 2$, 则 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中有一个向量是其余向量的线性组合

第 3 节　坐标系

在平面中任取定点 O 和两个不共线的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$,

都有一一对应点 $P \longleftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 \longleftrightarrow$ 实数对 (x_0, y_0)

$$[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2] \text{ —坐标系（点 } O \text{ 和向量 } \vec{e}_1, \vec{e}_2\text{）}$$

定理 1.3.1: 坐标系可以表示向量

在平面中任取定点 O 和两个不共线的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, 都有一一对应点 $P \longleftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 \longleftrightarrow$ 实数对 (x_0, y_0)

$$[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2] \text{ —坐标系}$$

在空间中任取定点 O 和三个不共面的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, 都有一一对应点 $P \longleftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3 \longleftrightarrow$ 实数组 (x_0, y_0, z_0)

$[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ 称为直角坐标系 $\begin{cases} \vec{e}_i \perp \vec{e}_j, (\text{若} i \neq j) \\ \text{笛卡尔坐标系} \begin{cases} |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1 \\ \text{仿射坐标系：} \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ 不共面} \end{cases} \end{cases}$ 给坐标定义加法和数乘:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \\ \lambda z_1 \end{pmatrix}$$

向量的线性运算转换为坐标的线性运算. 其中零向量为$(0, 0, 0)$, $-\alpha = (-a_1, -a_2, -a_3)$

定理 1.3.2: 数组向量空间

考虑集合 $\mathbb{R}^3 := \{\alpha = (a_1, a_2, a_3)\} \mid a_i \in \mathbb{R}\}$，则 $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 3 维数组向量空间
考虑集合 $\mathbb{R}^n := \{\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\} \mid a_i \in \mathbb{R}\}$. 定义加法和数乘

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

因为满足八条运算律， 其中零向量$0 = (0, 0, \ldots, 0)$, 负向量 $-\alpha = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$. 则有: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot) - \mathbb{R}$ 上的 n 维数组向量空间

第 4 节 复数

定理 1.4.1: 环

设 R 是一个非空集合. 若在 R 上可定义两种运算 $+: R\times R\longrightarrow R$ 和 $\times: R\times R\longrightarrow R$, 满足 (1) $a+b=b+a$; (2) $(a+b)+c=a+(b+c)$; (3) $\exists 0\in R$, s.t. $0+a=a$; (4) $\exists -a\in R$, s.t. $a+(-a)=0$; (5) $(a+b)c=ac+bc$; (6) $a(b+c)=ab+ac$; (7) $(ab)c=a(bc)$; (8) $\exists 1\in R$, s.t. $1a=a$。 对任意的$a,b,c\in R$ 成立, 则称$(R,+,\times)$ 是一个环

$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{Z}_n$ 都是环.

定理 1.4.2: 域

设 $(F,+,\times)$ 是一个环, 且 $1\neq 0$. 若满足

$$\begin{cases} ab=ba, \quad (\forall a,b\in F) \\ \forall a\neq 0, \exists a^{-1}\in F, \text{ s.t. } aa^{-1}=1=a^{-1}a \end{cases}$$

则称 F 是一个域.

$\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 是域, 无限域; 当p 为素数时, $\mathbb{Z}_p$ 是域, 有限域

定理 1.4.3: 线性空间

设 V 是一个非空集合, F 是一个域. 若可定义两种运算 $+: V\times V\longrightarrow V$ 和 $\cdot: F\times V\longrightarrow V$, 满足 (1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; (2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$; (3) $\exists 0\in V$, s.t. $0+\alpha=\alpha$; (4) $\exists -\alpha\in V$, s.t. $\alpha+(-\alpha)=0$; (5) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$; 6 $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$; 7) $(\lambda\mu)\alpha=\lambda(\mu\alpha)$; (8) $1\alpha=\alpha$。对任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in V,\lambda,\mu\in F$ 成立, 则称 $(V,+,\cdot)$ 是一个 F 上的线性空间.

定理 1.4.4: F-代数

设 F 是域, A 是非空集合. 若可定义运算 $+: A\times A\longrightarrow A$, $\times: A\times A\longrightarrow A$, $\cdot: F\times A\longrightarrow A$, 满足

$$\begin{cases} (A,+,\times) \text{ 是环} \\ (A,+,\cdot) \text{ 是} F \text{ 上的线性空间} \\ \lambda(\alpha\beta)=(\lambda\alpha)\beta=\alpha(\lambda\beta), \quad (\forall\lambda\in F,\forall\alpha,\beta\in A) \end{cases}$$

则称 $(A,+,\times,\cdot)$ 是一个 F 上的代数, 或 F-代数.
设 A 是 F-代数, 且 A 中每个非零元在 A 中恒有逆元, 则称 A 是 F 上的可除代数.

第 5 节 解析几何

参考数学分析相关内容

第 6 节　线性方程组、Gauß 消元法

定理 1.6.1: 线性方程组初等变换

(1) 交换两个方程;
(2) 某个方程乘一个非零常数;
(3) 某个方程乘一非零常数加到另一个方程中.

例如：求解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$，采取增广矩阵的形式：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & -7 & -7 & -15 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \quad \therefore \text{方程组无解。}$$

例 1.6.1: 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$ 令$x_3 = t_1, x_4 = t_2, x_5 = t_3$, 得$x_1 = t_1 + t_2 + 5t_3, x_2 = -2t_1 - 2t_2 - 6t_3$ 得到原方程的解，其中 $t_1, t_2, t_3 \in F$. 写成向量形式是:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_3$$

注

把作为基准行消去的那列移到最上方，并归一化

$$\text{对一般的线性方程组}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

我们总可以对它实施一系列的初等变换, 最终得到一个等价的阶梯形方程组

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad\qquad c_{2j_2}x_{j2}+\cdots\cdots\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rj_r}x_{jr}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0. \end{cases}$$

其中 $2\leqslant j_2<j_3<\cdots<j_r\leqslant n,\quad c_{11},c_{2j_2},\cdots,c_{rj_r}$ 均非零.
则 (1) 当 $d_{r+1}\neq 0$ 时, 方程组无解.
(2) 当 $d_{r+1}=0$ 时, (i) 若 $r=n$, 则方程组有唯一解; (ii) 若 $r<n$, 则方程组有无穷多解, 有 $n-r$ 个参变量.

第二章　矩阵算法

第 1 节　定义和运算

由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

称为一个 $m\times n$ 的矩阵，记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

- ▶ 当$a_{ij}\in\mathbb{F}$ 时, 称A 为$\mathbb{F}$ 上的矩阵（如实矩阵, 复矩阵）
- ▶$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与$B=(b_{ij})_{k\times l}$ 相等 $\Leftrightarrow \begin{cases} m=k\&n=l \\ a_{ij}=b_{ij}(\forall i,j) \end{cases}$

注：特殊的矩阵

(1) n 维行向量：$1\times n$ 的矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$；$n$ 维列向量：$n\times 1$ 的矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

(2) 方阵：行列数相等，即 $n\times n$ 矩阵

(3) 单位矩阵：对角元是 1 , 其他元素都是 0 的 n 阶方阵, 记作 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{I}^{(n)}$

(4) 数量矩阵：对角元是 a, 其他元素都是 0 的方阵, 记作 aI.(或者叫纯量阵)

(5) 对角阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$

(6) 对称：$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ij}=a_{ji}(\forall 1\leqslant i,j\leqslant n)$；反对称：$a_{ij}=-a_{ji}$(主对角线元全为零)

(7) 上三角矩阵：矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 满足$a_{ij}=0$ 对所有$i>j$ 成立, $m\geqslant n$, 有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ * & a_{22} & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & & & \ddots & a_{nn} \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} m\leqslant n, \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{mm} & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

(8) 上三角矩阵：矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 满足$a_{ij}=0$ 对所有$i<j$ 成立, $m\geqslant n$, 有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & a_{nn} \\ \vdots & & & & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix} m\leqslant n\text{ 时} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \ddots & & & & & \vdots \\ * & * & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & * & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(9) 若矩阵 A 的元素都是整数、有理数、实数、复数、多项式等, 则 A 分别称为整数矩阵、有理数矩阵、实矩阵、复矩阵、多项式矩阵等. 一般地, 若 $\boldsymbol{A}$ 的元素都取自某个数域 F, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为数域 F 上的矩阵. 数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵的全体, 记作 $F^{m\times n}$.

性质 2.1.1: 矩阵加法、数乘

(A1) $A+B=B+A$

(A2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(A3) $\exists 0$, s.t. $A+0=A$

(A4) $\exists -A$, s.t. $A+(-A)=0$

(D1) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

(D2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

(M1) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

(M2) $1A=A$

注 : 任意矩阵都可以写成以下两种形式

(1) $\forall A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\exists$ 对称阵B, 反对称阵C, s.t. $A=B+C$

(2) 记 $E_{ij}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&1&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}$一基本矩阵, 则 $\forall A=(a_{ij})_{m\times n}$,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&a_{12}&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i1}^{m}E_{11}+a_{12}E_{12}+\cdots+a_{1n}E_{1n}+\cdots+a_{m1}E_{m1}+a_{m2}E_{m2}+\cdots+a_{mn}E_{mn}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$$

1　矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{pmatrix}_{n\times s}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}&\cdots\cdots\cdots&\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{ks}\\ \vdots&a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{in}b_{nj}&\vdots\\ \sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{k1}&\cdots\cdots\cdots&\sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{ks}\end{pmatrix}_{m\times s}$$

性质 2.1.2: 乘法运算律

(1) $(AB)C=A(BC)$; (2) $IA=AI=A$; (3) $(A+B)C=AC+BC$; (4) $A(B+C)=AC+AC$; (5) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$

定理 2.1.1: 矩阵的幂次方

设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 定义 A 的非负整数次幂 $\begin{cases} A^0 := I_n \\ A^1 := A \\ A^{k+1} := A^k A, (k=1,2,\cdots) \end{cases}$

对 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $f(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_tx^t$, 记 $f(A):=c_0I_n+c_1A+\ldots+c_tA^t$ – A 的多项式

例 2.1.1: 常用矩阵乘积

(i) $E_{ij}E_{kl}=\delta_{ik}E_{jl}$

(ii) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_ib_i$

(iii) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}$

2 矩阵的共轭、转置、迹

共轭: $\bar{A} := \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$ **转置:** $A^{\mathrm{T}} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

矩阵的迹: $\mathrm{tr}(A) := a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

性质 2.1.3: 共轭、转置、迹的性质

(1) $\bar{\bar{A}}=A$	(1') $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$	(1") $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(A)$ $\quad$ $\mathrm{tr}(\bar{A})=\overline{\mathrm{tr}(A)}$
(2) $\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}$	(2') $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$	(2") $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$
(3) $\overline{\lambda A}=\bar{\lambda}\bar{A}$	(3') $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$	(3") $\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\,\mathrm{tr}(A)$
(4) $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$	(4') $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$	(4') $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$

例 2.1.2

(1) 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 满足 $\mathrm{tr}\left(A\bar{A}^{\mathrm{T}}\right)=0$. 证明: $A=0$

解答： $AA^T=(b_{ij})_{m\times m}$,

$$0=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\right)=\sum_{i=1}^{m}b_{ii}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{a_{ij}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2,\quad a_{ij}=0\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

(2) 证明: 不存在 n 阶复方阵 A,B, 满足 $AB-BA=I_n$(说明迹不相等)

3 矩阵的分块

例如 $\left(\begin{array}{c|cc|cc} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}\right)$，若 $\boldsymbol{A}_{ij}=O$ 对所有 $i\neq j$ 成立, 则称 A 为准对角矩阵，如 $\begin{pmatrix}\alpha^T & 0\\ I & \beta\end{pmatrix}$

若 $\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{O}$ 对所有 $i>j$ 成立, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为准上三角形矩阵. 若 $\boldsymbol{A}_{ij}=O$ 对所有 $i<j$ 成立, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为准下三角形矩阵. 准上三角形矩阵和准下三角形矩阵

更一般地, 由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 列上的元素依次排列组成的 $r\times s$ 矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵, 记作

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_r\\ j_1j_2\cdots j_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_s}\\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_s}\end{pmatrix}$$

性质 2.1.4

(I) 加法 $$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s}\\ A_{21} & \cdots & A_{2s}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{r1} & \cdots & A_{rs}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s}\\ B_{21} & \cdots & B_{2s}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{r1} & \cdots & B_{rs}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11}\cdots A_{1s}+B_{1s}\\ A_{21}+B_{21}\cdots A_{2s}+B_{2s}\\ \vdots\\ \vdots\\ A_{r1}+B_{r1}\cdots A_{rs}+B_{rs}\end{pmatrix}$$

(II) 数乘 $$\lambda\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1s}\\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda A_{r1} & \lambda A_{r2} & \cdots & \lambda A_{rs}\end{pmatrix}$$

(III) 乘法：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times l}$. 将 A 和 B 做如下分块

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array}\\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}\end{pmatrix}\begin{array}{c} m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_r\end{array}\end{array},\ B=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t \end{array}\\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st}\end{pmatrix}\begin{array}{c} n_1\\ n_2\\ \vdots\\ n_s\end{array}\end{array},$$

其中 $m_1+m_2+\cdots+m_r=m, n_1+n_2+\cdots+n_s=n, l_1+l_2+\cdots+l_t=l.$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t \end{array}\\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t}\\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt}\end{pmatrix}\begin{array}{c} m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_r\end{array}\end{array}$$

则 $AB=C=A_{p1}$ 中 $C_{pq}=A_{pq}B_{1q}+A_{p2}B_{2q}+\cdots+A_{ps}B_{sq}=\sum_{k=1}^{s}A_{pk}B_{kq}$

(IV) 其他性质：(1) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{r\times s}$, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij})_{r\times s}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$, 则 $\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$;

(3) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$, 则 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{C}_{ij})_{r\times t}$, 其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$;

(4) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}_{ji}^{\mathrm{T}}\right)_{s\times r}$;

(5) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$ 是复方阵, 则 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\overline{\boldsymbol{A}_{ij}}\right)_{r\times s}$;

(6) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times r}$ 且每个 $\boldsymbol{A}_{ii}$ 都是方阵, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}_{ii})$;

(7) 当 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 都可逆时, $(\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_r))^{-1}=\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{A}_1^{-1},\cdots,\boldsymbol{A}_r^{-1}\right)$

证明 : 两个 n 阶上 (下) 三角方阵的乘积仍是上 (下) 三角方阵

对一般的 $m\times n$ 矩阵 A 和 $n\times m$ 矩阵 B, 结论也成立

解答： 设 $m>n$, $A=\begin{pmatrix} A_1\\ 0\end{pmatrix}$, $B=(B_1B_2)$ $\Rightarrow AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

由于 A_1B_1 是上三角矩阵，故结论成立

注

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s\end{pmatrix}$$

▶不同的分块，得到不同的效果

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

第 2 节　行列式

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 记 A 的行列式为 $|A|, \det(A)$, 或 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

定理 2.2.1: 行列式的计算

定义 $n=1$ 时, $\det(A)=a_{11}$;　　$n\geqslant 2$ 时,

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}(\text{行列互换})=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}$$

注：余子式

A 的某个 k 阶子矩阵的行列式称为 A 的 k 阶子式, 删去子式所在的行与列所得矩阵的行列式称为该子式的余子式

$|A|$ 关于 a_{ij} 的余子式:

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式。

性质 2.2.1

$$n=2\text{ 时},\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$n=3$ 时,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

例 2.2.1: 对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n-1+\frac{(n+2)(n-1)}{2}} a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n} = (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}} a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}$$

性质 2.2.2: 行列式的性质

(1) 交换方阵 $\boldsymbol{A}$ 的某两行（或两列）, 得到的方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\det(\boldsymbol{B})=-\det(\boldsymbol{A})$

(2) 将方阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行乘以常数 λ, 得到的方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\det(\boldsymbol{B})=\lambda\det(\boldsymbol{A})$

(3) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行是两个向量之和, 则 $\det(\boldsymbol{A})$ 可拆成两个行列式之和

(4) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 有某两行成比例, 则 $\det(\boldsymbol{A})=0$. 特别地, 若 $\boldsymbol{A}$ 有两行相同则其行列式为零.

(5) 将方阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行的常数倍加到另一行, 得到的方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\det(\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{A})$

性质 2.2.3: 行列式 det(A) 看成向量组函数 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

(A) 反对称性: 互换两个变量的位置, 行列式变号, 即

$$\det(\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots)=-\det(\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots).$$

(B) 多重线性: 行列式关于每行是线性的, 即

$$\det(\cdots,\lambda\boldsymbol{\alpha}_i+\mu\boldsymbol{\beta}_i,\cdots)=\lambda\det(\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots)+\mu\det(\cdots,\boldsymbol{\beta}_i,\cdots),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_i$ 是任意 n 维行向量, λ, μ 是任意常数.
(C) 规范性: 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是单位坐标向量, 即 e_i 为第 i 个分量为 1 , 其余分量为 0 的 n 维行向量. 则有

$$\det\left(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\right) = 1.$$

例 2.2.2: 奇数阶反对称行列式为 0

$$A^T = -A \qquad |A| = (-1)^n \left|A^T\right| = (-1)^n |A|$$

$$|A| = -|A| \text{奇数阶，如} \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

1 Laplace 展开

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $|A|$ 关于 a_{ij} 的余子式为 M_{ij}, 则

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

定理 2.2.2

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, A_{ij} 为 $\det(A)$ 中 a_{ij} 的代数余子式. 则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = \begin{cases} \det(A), \text{ 当} k = i \text{ 时} \\ 0, \quad \text{当} k \neq i \text{ 时} \end{cases}, \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ij} = \begin{cases} \det(A), \text{ 当} k = j \text{ 时} \\ 0, \qquad\qquad \text{当} k \neq j \text{ 时} \end{cases}$$

定理 2.2.3: Cramer 法则

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式 $\det(A) \neq 0$, 则有唯一解

$$x_j = \frac{\det\left(A_j\right)}{\det(A)}, \quad (j = 1, 2 \cdots n)$$

其中 A_j 是将 A 的第 j 列换成 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 后所得的矩阵.

例 2.2.3: 齐次线性方程组有非零阶，则系数行列式为 0

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 2a & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 若$\exists B \neq C$, s.t. $AB = AC$, 说明非零解构成矩阵$B - C$，$|A| = 0, a = -\dfrac{6}{7}$

注 : Laplace 展开式给出分块矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

2 排列

设 $s = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是一个排列.
满足 $i < j$, 而 $a_i > a_j$ 的 (a_i, a_j) 称为 s 的一个逆序; 满足 $i < j$, 且 $a_i < a_j$ 的 (a_i, a_j) 称为 s 的一个正序. s 中所有逆序的个数称为逆序数, 记为 $\tau(s)$.

若 $\tau(s)$ 为奇数, 则称 s 为奇排列; 若 $\tau(s)$ 为偶数, 则称 s 为偶排列.

例如：$\tau(6,8,1,4,7,5,3,2,9) = 0+0+2+2+1+3+5+6+0 = 19, \tau(n, n-1, \cdots, 1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

3 行列式的完全展开式

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, S_n 为 $(1, 2, \cdots, n)$ 的所有排列构成的集合, 则

定理 2.2.4

$$\det(A) = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)\in S_n} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}$$

$$\det(A) = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)\in S_n} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n}$$

解答：计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n+n} n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \\ 0 & n-2 & & \\ n-1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{2n+\frac{(n+3)(n-2)}{2}} n! = (-1)^{\frac{(n+6)(n-1)}{2}} n!$$

定理 2.2.5: 公理化定义

设 det(, . . . ,, 是 $\mathbb{F}^n$ 上的 n 元函数. 则 $\det(,\ldots,) = \det(A) \Longleftrightarrow$ det(, . . . ,, 具有以下性质

(1) 多重线性性:

$$\det(\cdots, \lambda\alpha_i + \mu\beta_i, \cdots) = \lambda \det(\cdots, \alpha_i, \cdots) + \mu \det(\cdots, \beta_i, \cdots).$$

(2) 反对称性: $\det(\cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots) = -\det(\cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots)$.

(3) 规范性: $\det(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$, 其中 $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$.

注：行列式的几何意义

n 阶行列式代表着 n 阶多面体的有向体积：

(1) $n = 2$ 时, $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ 为以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为邻边的平行四边形的有向面积.

(2)

$$n = 3 \text{ 时}, \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3).$$

$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 是以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的平行六面体的有向体积.

(3) $n > 3$ 时, 类似定义 $\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix}$ 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为棱构成超平行多面体的有向体积.

4 行列式计算方法

I. 降阶法：按一行 (列) 展开或按 Laplace 定理展开, 将n 阶行列式降为较低阶又容易计算的行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(按照第一列展开)} \Rightarrow D_n=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

解答

设 $n\geqslant 2$, 计算 n 阶行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} x & & & & a_0 \\ -1 & x & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & x & a_{n-2} \\ & & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$. 将行列式按第 n 列展开得

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n+k}a_{k-1}M_{kn}+(x+a_{n-1})M_{nn},\quad (2\leqslant k\leqslant n)$$

$$M_{1n}=(-1)^{n-1},\quad M_{kn}=\begin{vmatrix} x & & & & & & & \\ -1 & x & & & & & & \\ & -1 & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & x & & & & \\ & & & & -1 & x & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & -1 & x \\ & & & & & & & -1 \end{vmatrix}=x^{k-1}(-1)^{n-k}$$

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n-1}a_{k-1}x^{k-1}+(x+a_{n-1})x^{n-1}=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$$

II. 三角法：化行列式为三角形是计算行列式的最基本思路. 通过观察行列式的特点, 利用行列式的性质将其作变形, 再将其化为三角形行列式. 给出两个例子：

$$D=\begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 5 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!$$

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\\3&4&5&\cdots&1&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}.$$

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\2&1&1&\cdots&1&1-n\\3&1&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&0&\cdots&0&-n\\2&0&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1+\frac{1}{n}r_i}\begin{vmatrix}1+\frac{1}{n}(1+\cdots+(n-1))&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&-n\\2&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&0&\cdots&0&0\\n-1&-n&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

III. **累加法：用于每行/每列之和为定值：**

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1&x_1&\cdots&x_1\\x_2&1+x_2&\cdots&x_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_n&x_n&\cdots&1+x_n\end{vmatrix}(\text{加到第一行})=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^n x_i&1+\sum_{i=1}^n x_i&\dots&1+\sum_{i=1}^n x_i\\x_2&1+x_2&\dots&x_2\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_n&x_n&\dots&1+x_n\end{vmatrix}$$

$$D_n=\left(1+\sum_{i=1}^n x_i\right)\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\x_2&1+x_2&\dots&x_2\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_n&x_n&\dots&1+x_n\end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^n x_i\right)\begin{vmatrix}1&0&\dots&0\\x_2&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_n&0&\dots&1\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^n x_i$$

例 2.2.4: 爪型行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1&1&1&\dots&1\\1&x_2&&&\\1&&x_3&&\\\dots&&&\dots&\\1&&&\dots&x_n\end{vmatrix}$$

将第一列元素依次减去第 i 列的 $\frac{1}{x_i}, i=2\ldots n$ 得:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-\frac{1}{x_2}-\ldots-\frac{1}{x_n} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 & & & \\ 0 & & x_3 & & \\ \ldots & & & \ldots & \\ 0 & & & \ldots & x_n \end{vmatrix}=\prod_{i=2}^{n}x_i\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$$

IV. 作差法：用于等差或者等比数列

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & \ldots & -2 & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & \ldots & n & n-1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(-2)^{n-2}(n-1)$$

V. 递推法：一般地, 递推方法是通过降阶等途径, 建立 n 阶行列式 D_n 和较它阶低的结构相同的行列式之间的关系, 并求得 D_n.

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & \ddots & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$$

$$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$$

解特征方程: $x^2=ax-bc$ ，得:

$$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}\quad x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$$

(i) $a^2-4bc=0, x=\frac{a}{2}$, 则$D_n=xD_{n-1}+x^n$. 依此递推, 得$D_n=(n+1)x^n=(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$

(ii) $a^2-4bc\neq 0$, $D_n=\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}=\frac{1}{a}\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}\right)^{n+1}\right]$

例 2.2.5: 重要的递推公式——Van der Monde 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-4} & x_2^{n-4} & \cdots & x_n^{n-4} \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ 0 & x_2^{n-3}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-3}(x_n-x_1) \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$D_n = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

VI. 加边法: 将n 阶行列式添上一行、一列, 变为$n+1$ 阶行列式再化简计算. 也称加边法.（是一种辅助算法）

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \dots & x_1x_n\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & \dots & x_2x_n\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & \dots & x_3x_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \dots & 1+x_n^2\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n\\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \dots & x_1x_n\\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & \dots & x_2x_n\\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & \dots & x_3x_n\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \dots & 1+x_n^2\end{vmatrix}$$

再将第 $i, i=2\dots n+1$ 都减去第一行的 x_i ，$i=1\dots n$ 倍，得:

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n\\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -x_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{vmatrix}$$

即又化成了爪型行列式，可得通式:

$$D_n=1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

VII. 拆开法:

例 2.2.6: 两三角型行列式

(A) 对角线上下相同：$D_n=\begin{vmatrix}x_1 & b & b & \cdots & b\\ b & x_2 & b & \cdots & b\\ b & b & x_3 & \cdots & b\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b & b & b & \cdots & x_n\end{vmatrix}$ 将第 $i, i=2\dots n$ 行都减去第一行得:

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1 & b & b & \dots & b\\ b-x_1 & x_2-b & 0 & \dots & 0\\ b-x_1 & 0 & x_3-b & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b-x_1 & 0 & 0 & \dots & x_n-b\end{vmatrix}$$

即化成了爪型行列式:

$$D_n=\left[\prod_{i=2}^{n}(x_i-b)\right]\times\left[x_1-b(b-x_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i-b}\right]$$

(B) 对角线上下不同 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \dots & a \\ b & x_2 & a & \dots & a \\ b & b & x_3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & x_n \end{vmatrix}$，采用拆开法:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \dots & a \\ b & x_2 & a & \dots & a \\ b & b & x_3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \dots & 0 \\ b & x_2 & a & \dots & 0 \\ b & b & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & x_n-b \end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-a & 0 & 0 & \cdots & a \\ b-a & x_2-a & 0 & \cdots & a \\ b-a & b-a & x_3-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}+(x_n-b)D_{n-1}$$

$$D_n=\frac{1}{a-b}\left[a\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)-b\prod_{j=1}^{n}(x_j-a)\right]$$

5　广义 Laplace 展开定理

定理 2.2.6: k 阶子式

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 在 A 中任取定 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$, 位于这些选定的行和列交点上的 k^2 个元素, 按照原来的次序所组成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $|A|$ 的一个 k 阶子式, 记为

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}.$$

在 A 中划去这 k 行 k 列后余下的元素, 按照原来 A 中的相对位置组成一个 $n-k$ 阶行列式, 称为 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的余子式, 记为 $A\begin{pmatrix} i_{k+1} & i_{k+2} & \cdots & i_n \\ j_{k+1} & j_{k+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix}$, 其中 $1\leqslant i_{k+1}<\cdots<i_n\leqslant$

n $1 \leqslant j_{k+1} < \cdots < j_n \leqslant n$.

称 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots j_k)} A\begin{pmatrix} i_{k+1} & i_{k+2} & \cdots & i_n \\ j_{k+1} & j_{k+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ 为 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式.

定理 2.2.7: 广义 Laplace 展开定理

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 任取定 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, 则

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} (-1)^s A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{k+1} & \cdots & i_n \\ j_{k+1} & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} (-1)^t A\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} j_{k+1} & \cdots & j_n \\ i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中

$$s = (i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)\,, t = (j_1+\cdots+j_k)+(i_1+\cdots+i_k)$$

定理 2.2.8: Binet-Cauchy 公式

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 则

(1) 当 $m > n$ 时, $|AB| = 0$.

(2) 当 $m = n$ 时, $|AB| = |A||B|$.

(3) 当 $m < n$ 时,

$$|AB| = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

例 2.2.7: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0 = 0$$

第 3 节　逆矩阵

定理 2.3.1

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 若存在 $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 使得

$$AB = BA = I_n$$

则称 A 为可逆的, 并称 B 为 A 的逆矩阵, 记为 A^{-1}

定理 2.3.2: 伴随矩阵

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, (n \geqslant 2)$. 称 n 阶方阵为 A 的伴随矩阵。

$$A^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 2.3.3

设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 则$A$ 可逆 $\iff \det(A) \neq 0$. 当A 可逆时, $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det(A)}$

性质 2.3.1

$$A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}, \text{可逆} \Rightarrow \begin{cases} (1) AB \text{ 可逆}, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \\ (2) A^{\mathrm{T}} \text{ 可逆}, \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}. \\ (3) \left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}. \end{cases}$$

例 2.3.1: 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 满足 $A^k = 0$. 求 $I - A$ 的逆

▶此类题核心在于凑单位阵，说明是逆矩阵。

$$\because I = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \Rightarrow (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

性质 2.3.2: 伴随矩阵

(1) $AA^* = A^*A = |A|I_n$

(2) A 可逆时, $\left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}$

(3) $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^* = (A^*)^{\mathrm{T}}$

(4) $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$

(5) 关于 $\operatorname{rank}(A^*)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}(A)=n &\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A^*)=n\\
\operatorname{rank}(A)=n-1 &\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A^*)=1\\
\operatorname{rank}(A)\leqslant n-2 &\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A^*)=0
\end{aligned}$$

(6) $(AB)^*=B^*A^*$

第 4 节 初等变换

▶三种初等变换矩阵

♣ 交换单位矩阵的第 i,j 行 (或交换第 i,j 列), 得到

$$S_{ij}=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & & 1 & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & 1 & & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

♣ 将单位矩阵的第 i 行 (或第 i 列) 乘以非零常数 λ, 得到

$$\boldsymbol{D}_i(\lambda)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \lambda & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

♣ 将单位矩阵第j 行的λ 倍加到第i 行 (或将第i 列的λ 倍加到第j 列), 得到:

$$\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & \lambda & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

性质 2.4.1: 初等方阵

(1) S_{ij} 为对称方阵, 且 $S_{ij}^{-1}=S_{ij}$;
(2) $\boldsymbol{D}_i(\lambda)$ 为对角方阵, 且 $\boldsymbol{D}_i(\lambda)^{-1}=D_i\left(\lambda^{-1}\right)$;
(3) $T_{ij}(\lambda)$ 为三角形方阵, 且 $T_{ij}(\lambda)^{-1}=T_{ij}(-\lambda)$.

证明 : 初等变换得到的矩阵

(1) 阶梯型矩阵 J: $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}$

(2) 对角阵 $\operatorname{diag}(I_r,O)$: $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\quad\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

定理 2.4.1: 可逆的等价条件

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则下列条件等价:
(1) A 是可逆矩阵.
(2) A 可经过一系列的初等行变换（或列变换）成为 I_n.
(3) 存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_t$, 使得 $A=P_1P_2\cdots P_t$.

▶求逆矩阵的方法:

$$(A\mid I_n)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(I_n\mid A^{-1}\right),\quad\left(\frac{A}{I_n}\right)\xrightarrow{\text{初等列变换}}\left(\frac{I_n}{A^{-1}}\right)$$

$$(A\mid B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(I_n\mid A^{-1}B\right),\quad\left(\frac{A}{B}\right)\xrightarrow{\text{初等列变换}}\left(\frac{I_n}{BA^{-1}}\right)$$

例 2.4.1: 利用广义初等变换求逆矩阵

考虑 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, 其中 A 为 m 阶可逆矩阵, D 为 n 阶方阵考虑 M 的逆和行列式.

$$\because\begin{pmatrix}I_m & 0\\ -CA^{-1} & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}I_m & 0\\ -CA^{-1} & I_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow|M|=|A|\left|D-CA^{-1}B\right|$$

$$\Rightarrow''\ |M|\neq 0\Leftrightarrow\left|D-CA^{-1}B\right|\neq 0''$$

$$\Rightarrow''\ M\text{ 可逆}\Leftrightarrow D-CA^{-1}B\text{ 可逆}''$$

(2) $\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_m & 0 \\ C & D & 0 & I_n \end{array}\right) \xrightarrow{\text{广义初等行变换}}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I_m & 0 & A^{-1}+A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \\ 0 & I_n & -\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \end{array}\right)$$

注：特殊情况

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

当 A,B,C,D 都 n 阶方阵, 且 $AC=CA$ 时

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$$

证明：设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times m}$. 证明: $|I_m-AB|=|I_n-BA|$

$\begin{pmatrix} I & O \\ B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ O & I-BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I-AB & O \\ B & I \end{pmatrix}$，两侧取行列式

可以类似证明：$m\geqslant n$, 则有 $|\lambda I_m-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda I_n-BA|$

▶重要计算公式: $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^\top & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1-\beta^\top A^{-1}\alpha \end{vmatrix} = |A|\left|1-\beta^\top-\alpha\right| = \left|A-\beta^\top\alpha\right|$

例 2.4.2

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} n & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ n & 2 & 3 & \cdots & 1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left|-A+\tfrac{(n+1)(n-1)}{2}\right| = (-1)^n n! + \tfrac{(n+1)(n-1)}{2}$$

第 5 节　秩、相抵

设 $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 若 A 可以通过有限次的初等变换成为 B, 则称 A 与 B 相抵

定理 2.5.1

$$\forall A \in \mathbb{F}^{m\times n}, \exists r, \text{ s.t. } A \overset{\text{相抵}}{\sim} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - A \text{ 的相抵标准形}, r - A \text{ 的秩}, \operatorname{rank}(A), r(A)$$

注

(1) 设 $m \leqslant n$，则集合 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 被“相抵”划分为 $m+1$ 个相抵等价类，代表元可取 $0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} I_m & 0 \end{pmatrix}$, 它们的秩分别为 $0, 1, 2, \cdots, m$.

(2) $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 可逆 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n \Leftrightarrow A \overset{\text{相抵}}{\sim} I_n$.

(3) 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $\operatorname{rank}(A) = m \to A$ 为行满秩；$\operatorname{rank}(A) = n \to A$ 为列满秩

►满秩分解：设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, \operatorname{rank}(A) = r$, 则 $\exists m \times r$ 的列满秩矩阵 B 和 $r \times n$ 的行满秩矩阵 C, s.t. $A = BC$.

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则" $AB = 0 \Rightarrow B = 0''$ $\Longleftrightarrow$ A 列满秩；"$CA = 0 \Rightarrow C = 0''$ $\Longleftrightarrow$ A 行满秩.

性质 2.5.1: 秩

(1) $\operatorname{rank}\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{rank}(A)$

(2) $A \in \mathbb{F}^{m\times n} \Rightarrow \forall m$ 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q, 都有

$$\operatorname{rank}(PA) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AQ).$$

(3) $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B))$

例 2.5.1

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}, a_i, b_j \text{ 不全为零，} \operatorname{rank}(A) = 1$$

性质 2.5.2: 两个相抵矩阵

(1) 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 若 $A \overset{\text{相}}{\sim} B$, 则 $\forall k$, A 的 k 阶子式全为零 $\Longleftrightarrow$ B 的 k 阶子式全为零

(2) 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $\operatorname{rank}(A) = r \Longleftrightarrow A$ 中至少有 1 个 r 阶子式不为零, 且所有的 $r+1$ 阶子式全为零.

1 求秩的方法

Step(1) 利用行、列初等变换求 A 的相抵标准形 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{rank}(A)=r$.

Step(2) $\operatorname{rank}(A)=r \Longleftrightarrow A$ 中至少有 1 个 r 阶子式不为零, 且所有的 $r+1$ 阶子式全为零.

Step(3) $A \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 阶梯型矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_1j_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_2j_2 & \cdots & * & \cdots & * \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_rj_r & * & \cdots & * \\ & & & & & & & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{rank}(A)=r$

例 2.5.2

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & -7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & -40 & -80 & 50 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & -28 & -56 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \therefore \operatorname{rank}(A)=2$$

性质 2.5.3: 分块矩阵的秩

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A_i) \leqslant \operatorname{rank}(A)$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$

$$\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$

由此可以得到:

(1) $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B) \leqslant \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix} \leqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}(D)$

(2) $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B) \leqslant \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \leqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}(C)$

证明

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$. 证明:

$$m + \operatorname{rank}(I_n - BA) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = n + \operatorname{rank}(I_m - AB)$$

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n - BA \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$$

定理 2.5.2: Frobenius 秩不等式

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}, C \in \mathbb{F}^{p\times q}$. 证明:

$$\operatorname{rank}(ABC) \leqslant \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \leqslant \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(ABC)$$

(1) 取 $B = I_n$, 则得到 Sylvester 秩不等式

$$\operatorname{rank}(AC) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C) \leqslant n + \operatorname{rank}(AC)$$

(2) 进一步, 若 $AC = 0$, 则有 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C) \leqslant n$.

证明

$$\begin{pmatrix} ABC & \\ & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & AB \\ & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B) \leqslant \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) + \operatorname{rank}(B)$$

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 满足 $A^2 = I$. 证明:

$$\operatorname{rank}(I + A) + \operatorname{rank}(I - A) = n$$

解答： 根据 Sylvester 秩不等式, 由于 $(I - A)(I + A) = O$，故不等式成立

2　秩和线性方程组的解

应用: 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, \operatorname{rank}(A) = r$. 考虑线性方程组

$$AX = \beta \qquad (*)$$

$(*)$ 有解 $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A\beta)$

$(*)$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A\beta) = n$

定理 2.5.3: Hamilton-Cayley

$\forall A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, A 是 $p_A(\lambda)=|\lambda I_n - A|$ 的根. 即: 设 $p_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$

$$=\lambda^n+\sigma_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\sigma_1\lambda+\sigma_0,$$

则 $p_A(A)=A^n+\sigma_{n-1}A^{n-1}+\cdots+\sigma_1 A+\sigma_0 I_n=0.$

第三章 线性空间

第 1 节 数组空间

$\mathbb{F}$ 上的n 维数组向量: $\longrightarrow \alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$a_i \in \mathbb{F} - \alpha$ 的第 i 个分量

$$\alpha=(a_1,\cdots,a_n) \text{ 与} \beta=(b_1,\cdots,b_n) \text{ 相等} \iff a_i=b_i, (i=1,2,\cdots,n)$$
$$\mathbb{F}^n := \{\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_i \in \mathbb{F}\}$$

定义 $\begin{aligned} \alpha+\beta &:= (a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n) \\ \lambda\alpha &:= (\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n) \end{aligned}$

$(\mathbb{F}^n,+,\cdot)$ 称为$\mathbb{F}$ 上的n 维数组向量空间

性质 3.1.1: 八大运算律

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$	(5) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$
(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	(6) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$
(3) $\exists 0=(0,\cdots,0)\in\mathbb{F}^n$, s.t. $\alpha+0=\alpha$	(7) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$
(4) $\exists \alpha'=(-a_1,\cdots,-a_n)\in\mathbb{F}^n$, s.t. $\alpha+\alpha'=0$	(8) $1\alpha=\alpha$

考虑齐次线性方程组 $(**)$ $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$

记V_A 为$(**)$ 的解集合. 则 $\begin{cases} V_A\subseteq\mathbb{F}^n, V_A\neq\varnothing \\ X,Y\in V_A\Rightarrow X+Y\in V_A \\ X\in V_A,\lambda\in\mathbb{F}\Rightarrow\lambda X\in V_A \end{cases}$

满足以上三个条件的集合称为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间. 称 V_A 为 $(**)$ 的解空间

定理 3.1.1: 子空间

设 $V\subseteq\mathbb{F}^n$, 满足 $\begin{cases} V\neq\varnothing \\ \alpha,\beta\in V\Rightarrow\alpha+\beta\in V, \\ \alpha\in V,\lambda\in\mathbb{F}\Rightarrow\lambda\alpha\in V \end{cases}$ 则称 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间

例 3.1.1: 不同生成的子空间

- 任意取定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{F}^n$,

$$V=\{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k\mid\lambda_i\in\mathbb{F}\}$$

是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间, 称为由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 生成的子空间. 记作 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\rangle$, 或 $V(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$, 或 $\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$.

- 任意取定 $S\subseteq\mathbb{F}^n, S\neq\varnothing$,

$$V(S):=\{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k\mid k\in\mathbb{Z}_{>0},\lambda_i\in\mathbb{F},\alpha_i\in S\}$$

是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间, 称为由 S 生成的子空间.

第 2 节　线性相关

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{F}^n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{F}$. 称向量

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$$

为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个线性组合 (线性表示).

注 : 自然基

记 $e_1=(1,0,\cdots,0),e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$. 则 $\forall\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{F}^n$, 有 $\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$, 且表示唯一.

1 判断线性相关的方法

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 为 $\mathbb{F}^n$ 中列向量. 记 $A=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)$

(1) β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合

$$\Longleftrightarrow \exists\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}, \text{s.t. } \beta=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}\Longleftrightarrow AX=\beta \text{ 有解}$$

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关

$$\Longleftrightarrow \exists\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}\neq 0, \text{s.t. } \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow AX=0 \text{ 有非零解}$$

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow AX=0$ 只有零解

性质 3.2.1: 不同组线性相关性

▶部分组：设 $\Gamma:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为一向量组.
(1) 若存在 Γ 的部分组 Γ_1, 使得 Γ_1 线性相关, 则 Γ 也线性相关.
(2) 若 Γ 线性无关, 则 Γ 的任意部分组 Γ_1 也线性无关.

▶加长向量组：设 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ti})\in\mathbb{F}^t,\beta_i=(a_{1i},\cdots,a_{ti},a_{t+1,i},\cdots,a_{ni})\in\mathbb{F}^n$, $i=1,2,\cdots,m$. 则
(1) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 也线性无关.
(2) 若 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性相关, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 也线性相关.

例 3.2.1: 向量组组合的相关性

(1) 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 考虑向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的线性相关性.

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & 1\\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1\end{pmatrix}$$

转化为 $\begin{pmatrix}1 & & 1\\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，欲判断此方程有无零解，$\det=2\neq 0$ 故只有零解。

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的线性无关

(2) 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. 考虑向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 的线性相关性.

相当于判断方程 $\begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$ 有无零解，由于 $\det = 0$ 故有无穷解

$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1$ 线性相关

第 3 节　极大无关组

定理 3.3.1: Γ' 为 Γ 的一个极大线性无关组

设 $\Gamma: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为一向量组, Γ' 为 Γ 的一个部分组. 若满足:
(1) Γ' 线性无关.
(2) 从 Γ 中任意添加一个向量至 Γ' (如果还有的话), 所得的新的部分组都线性相关.

例 3.3.1

考虑向量组 $\Gamma: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 则 Γ 线性相关, 而

Γ 的部分组 $\begin{cases} \Gamma_1: \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \\ \Gamma_2: \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 \\ \Gamma_3: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \\ \Gamma_4: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{cases}$ 都线性无关, 它们都是 Γ 的极大线性无关组.

定理 3.3.2: 等价向量组

如果向量组 $\Gamma_1: \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 中每一个向量都可由向量组 $\Gamma_2: \beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性表示, 则称 Γ_1 可由 Γ_2 线性表示 (或 Γ_1 是 Γ_2 的线性组合). 如果 Γ_1 和 Γ_2 可以相互线性表示, 则称 Γ_1 与 Γ_2 等价.

注

(1) $\forall 1\leqslant i\leqslant s, \alpha_i$ 可由 Γ_2 线性表示 $\Rightarrow \alpha_i=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{1i}\\ \lambda_{2i}\\ \vdots\\ \lambda_{ti}\end{pmatrix}, \forall 1\leqslant i\leqslant s$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1s}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_{t1} & \lambda_{t2} & \cdots & \lambda_{ts}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \Gamma_1 \text{ 可由} \Gamma_2 \text{ 线性表示} \iff \exists T\in F^{t\times s}, \text{s.t. } (\alpha_1\cdots\alpha_s)=(\beta_1\cdots\beta_t)T$$

(2) Γ_1 可由Γ_1 线性表示. (3) $\left.\begin{array}{r}\Gamma_1 \text{ 可由}\Gamma_2 \text{ 线性表示}\\ \Gamma_2 \text{ 可由}\Gamma_3 \text{ 线性表示}\end{array}\right\}\Rightarrow \Gamma_1$ 可由 Γ_3 线性表示

(4) 向量组之间的等价是一个等价关系.

例 3.3.2: 极大无关组的系列命题

(A) $\left.\begin{array}{r}\alpha_1,\cdots,\alpha_r \text{ 线性无关}\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta \text{ 线性相关}\end{array}\right\}\Rightarrow \beta$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示, 且表示唯一

(B) 任意一个向量组都与它的极大线性无关组等价

(C) 一个向量组的任意两个极大线性无关组都是等价的.

(D) $\left.\begin{array}{r}\alpha_1,\cdots,\alpha_s \text{ 可由}\beta_1,\cdots,\beta_t \text{ 线性表示}\\ s>t\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

(E) $\left.\begin{array}{r}\alpha_1,\cdots,\alpha_s \text{ 可由}\beta_1,\cdots,\beta_t \text{ 线性表示}\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_s \text{ 线性无关}\end{array}\right\}\Rightarrow s\leqslant t$

(F) 两个线性无关的等价向量组必含有相同个数的向量

(G) 一个向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量.

定理 3.3.3: 向量组的秩

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为向量组的秩, 记作 $\text{rank}\,(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$, 或 $r\,(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

注

(1)

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \text{ 线性无关} \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m,$$
$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \text{ 线性相关} \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m.$$

(2)

$$\begin{aligned}&\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \text{ 可由}\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \text{ 线性表示}\\ &\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\leqslant\operatorname{rank}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s),\\ &\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \text{ 与}\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \text{ 等价}\\ &\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\operatorname{rank}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s).\end{aligned}$$

举例：记 $\Gamma_1:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

$$\Gamma_2:\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

则 Γ_1 与 Γ_2 等价, 所以 $\operatorname{rank}(\Gamma_1)=\operatorname{rank}(\Gamma_2)$. 又因为它们都包含 3 个向量, 所以 Γ_1 与 Γ_2 同时线性相关或线性无关.

1 求极大无关组的方法

▶方法一：逐个排查，设 $\Gamma:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$

Step(1) 若 $\alpha_1\neq 0$, 取 $\Gamma_1:\alpha_1$.

Step(2) 考察 $\alpha_2:\begin{cases}\alpha_2 \text{ 可以由}\Gamma_1 \text{ 线性表示, 取}\Gamma_2=\Gamma_1,\\ \alpha_2 \text{ 不能由}\Gamma_1 \text{ 线性表示, 取}\Gamma_2:\Gamma_1,\alpha_2.\end{cases}$

Step(3) 考察 $\alpha_3:\begin{cases}\alpha_3 \text{ 可以由}\Gamma_2 \text{ 线性表示, 取}\Gamma_3=\Gamma_2,\\ \alpha_3 \text{ 不能由}\Gamma_2 \text{ 线性表示, 取}\Gamma_3:\Gamma_2,\alpha_3.\end{cases}$

……

Step(m) 考察 $\alpha_m:\begin{cases}\alpha_m \text{ 可以由}\Gamma_{m-1} \text{ 线性表示, 取}\Gamma_m=\Gamma_{m-1},\\ \alpha_m \text{ 不能由}\Gamma_{m-1} \text{ 线性表示, 取}\Gamma_m:\Gamma_{m-1},\alpha_m\end{cases}$

则 Γ_m 是 Γ 的一个极大线性无关组

例 3.3.3

求 Γ 的一个极大线性无关组

$$\begin{aligned}\Gamma:\alpha_1=(1,-1,2,4),\quad \alpha_2=(0,3,1,2),\quad \alpha_3=(3,0,7,14),\\ \alpha_4=(1,-1,2,0),\quad \alpha_5=(2,1,5,6)\end{aligned}$$

解答： $\alpha_1 \neq 0$, 取 $\Gamma_1 : \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$不能由$\alpha_1$线性表示，取$\Gamma_2 = \alpha_1, \alpha_2$
设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \alpha_3, \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1 \Rightarrow \Gamma_3 = \Gamma_2$
设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \alpha_4, \Rightarrow x_1, x_2$无解 $\Rightarrow \Gamma_4 = \Gamma_2, \alpha_4$
设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \alpha_4 x_4 = \alpha_5, \Rightarrow x_1 = x_2 = x_4 = 1 \Rightarrow \Gamma_4 = \Gamma_4$，所以一个极大无关组是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

▶ 初等行变换法 (好处是能写出所有极大无关组)

将 α_i 写成列向量的形式, 记 $A = (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)$

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{阶梯型矩阵} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_1j_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_2j_2 & \cdots & * & \cdots & * \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_rj_r & * & \cdots & * \\ & & & & & & & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

其中 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant m, b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{rj_r} \neq 0$, 则 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 为 Γ 的一个极大线性无关组.

例 3.3.4

$\Gamma : \alpha_1 = (1, 1, 1, 3), \quad \alpha_2 = (1, 3, -5, -1)\ \alpha_3 = (3, 2, -1, 4-p), \quad \alpha_4 = (4, 1, 6, p+8)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 4p & p+8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 2p-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & & -1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 2p-3 \end{pmatrix}$$

$p = \dfrac{3}{2}$ 时，四个向量线性相关，

2　行秩、列秩

$$\forall A \in \mathbb{F}^{m\times n}, A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & u_m \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \mathbb{F}^n \text{ 中向量组}\Gamma_1 : u_1, u_2, \cdots, u_m. \text{ 称 rank}(\Gamma_1) \text{ 为} A \text{ 的行秩.} \\ \mathbb{F}^m \text{ 中向量组}\Gamma_2 : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n. \text{ 称 rank}(\Gamma_2) \text{ 为} A \text{ 的列秩.} \end{cases}$$

定理 3.3.4

矩阵的行秩与列秩相等, 都等于矩阵的秩.

证明：设$A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 证明: $\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

解答： 取等号时，两个矩阵的向量刚好错开；其他情况都有重合的向量，故取小于号

3 矩阵的相抵与向量组的等价

设 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 则

$$A \overset{\text{相抵}}{\sim} B \iff A \xrightarrow{\text{有限次的初等变换}} B$$

$\iff \exists$ 初等矩阵 $P_1, \cdots, P_s, Q_1, \cdots, Q_t$, s.t. $P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = B$

$\iff \exists$ 可逆矩阵 P, Q, s.t. $PAQ = B$

$\iff \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = r$, 此时 A, B 的相抵标准形都为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

设 $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}^n$. 则 $\Gamma : \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 与 $\Gamma' : \beta_1, \cdots, \beta_t$ 等价 $\iff$ Γ 与 Γ' 可以相互线性表示

例 3.3.5: 能不能相互线性表示

考虑 $\Gamma_1 : \alpha_1 = (1, 0, -1, -2), \alpha_2 = (2, 1, 0, -1), \alpha_3 = (1, 3, 5, 8)$;

$$\Gamma_2 : \beta_1 = (0, 2, 4, 7), \beta_2 = (1, 1, 1, 1), \beta_3 = (2, 4, 6, 9). \text{ 则}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 4 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 8 & 7 & 1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Γ_2 可由 Γ_1 线性表示, 而 Γ_1 不可由 Γ_2 线性表示. $\therefore$ Γ_1 与 Γ_2 不等价. 此时 $\operatorname{rank}\Gamma_1 = 3 > 2 = \operatorname{rank}\Gamma_2$.

取 $\Gamma_2' : \beta_1' = (0, 2, 5, 7), \beta_2, \beta_3$. 则

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1' & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 5 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 8 & 7 & 1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} u_1 & u_2 & u_3 & v_1' & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

此时 $\operatorname{rank}\Gamma_1 = \operatorname{rank}\Gamma_2' = 3$, 而 $\operatorname{rank}(u_1, u_2, u_3, v_1', v_2, v_3) = 4$, $\therefore$ Γ_1 与 Γ_2' 不等价.

事实上, Γ_2' 不可由 Γ_1 线性表示, Γ_1 也不可由 Γ_2' 线性表示.

第 4 节 基、维数

定理 3.4.1

对 $\mathbb{F}^n$ 中任意的非零子空间 V, 存在 $1 \leqslant r \leqslant n$ 及线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, s.t. $V = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \rangle$.

设 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 V 中一有序向量组, 满足: $\forall \alpha \in V$ 都可以唯一地表示成

$$\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 V 的一组基, $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 下的坐标. 此时称 V 的维数为 r, 记为 $\dim V = r$.

注

当 $\dim V = r$ 时, V 中任意 r 个线性无关的有序向量组都可以作为 V 的一组基.

例 3.4.1: 更改基

$\mathbb{F}^n$ 中, $\Gamma_1 : e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$,

$e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$,

$\cdots\cdots$,

$e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关,

且$\forall \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n, \alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$.

$\therefore \Gamma_1$ 是$\mathbb{F}^n$ 的一组基, $\dim \mathbb{F}^n = n$.α 在Γ_1 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

注意到$\Gamma_2 : e_1' = (1, 0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$,

$e_2' = (1, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$,

$\cdots\cdots$,

$e_n' = (1, 1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关, $\therefore \Gamma_2$ 也是$\mathbb{F}^n$ 的一组基.

$\alpha = a_1 e_1' + a_2 (e_2' - e_1') + \cdots + a_n (e_n' - e_{n-1}')$

$= (a_1 - a_2) e_1' + (a_2 - a_3) e_2' + \cdots + (a_{n-1} - a_n) e_{n-1}' + a_n e_n'$

α 在Γ_2 下的坐标为 $(a_1 - a_2, a_2 - a_3, \cdots, a_{n-1} - a_n, a_n)$.

1　过渡矩阵

$$\eta=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\cdots & \alpha_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{坐标变换:}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}$$

定理 3.4.2

T 称为由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的过渡矩阵
$\exists$ 可逆矩阵 $T\in\mathbb{F}^{m\times m}$, s.t. $(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)T$

例 3.4.2

$$(e_1'e_2'\cdots e_n')=\begin{pmatrix}e_1 & e_2\cdots e_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=(e_1e_2\cdots e_n)T$$

$$\because T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&&&\\&1&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&-1\\&&&&1\end{pmatrix}\quad\therefore\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_{n-1}\\y_n\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-a_2\\a_2-a_3\\\vdots\\a_{n-1}-a_n\\a_n\end{pmatrix}$$

性质 3.4.1: 等价叙述

(1) A 的行 (列) 向量构成 $\mathbb{F}^n$ 的一组基；(2) A 满秩, 即: $\mathrm{rank}(A)=n$；(3) A 可逆；(4) $\det(A)\neq 0$

例 3.4.3: 过渡矩阵

设 $\Gamma:\alpha_1=(1,0,-1),\alpha_2=(2,1,1),\alpha_3=(1,1,1);\Gamma':\beta_1=(0,1,1),\beta_2=(-1,1,0),\beta_3=(1,2,1)$
是 $\mathbb{F}^3$ 的两组基求 Γ 到 Γ' 的过渡矩阵 T.

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} T$$

$$T = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

定理 3.4.3

设 V 是 $\mathbb{F}^n$ 的线性子空间，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是 V 的一组基，$\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是 V 中向量，且有 $(\beta_1, \cdots, \beta_m) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)T$. 则

$$\beta_1, \cdots, \beta_m \text{ 也是} V \text{ 的基} \Longleftrightarrow T \text{ 可逆}.$$

例 3.4.4: 坐标变换

(1) 设 $\Gamma : \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{F}^3$ 的一组基. 求向量 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 在 Γ 下的坐标.

解答： $\beta = (b_1, b_2, b_3)^T$ 相当于在自然基的坐标，

$$\beta = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

在 Γ 下的坐标: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

(2) 设 $\Gamma' : \eta_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{F}^3$ 的另一组基，

已知 β 在 Γ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 求 β 在 Γ' 下的坐标.

解答：

$$\beta=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1e_2e_3\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\eta_1\eta_2\eta_3)\,C^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

(3) 已知向量 ξ 在 Γ 和 Γ' 下的坐标相同, 求 ξ.

解答： $(A-C)\xi=0,\xi$ 为满足该方程的解

定理 3.4.4: 扩充基

设 V 是 $\mathbb{F}^n$ 的 m 维子空间, $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是 V 的一组基. 则存在 $\mathbb{F}^n$ 中向量 $\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$, s.t. $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基.

设U,V 为$\mathbb{F}^n$ 的子空间, 且$U\subseteq V$. 若还满足 $\dim U=\dim V$, 则$U=V$

第 5 节　线性方程组解的结构

1　解的存在性和唯一性

$$\text{考虑}(*)\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

$$\text{记}A=(a_{ij})_{m\times n},\quad\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},\quad\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

(1) 有解:

$$\iff\exists c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathbb{F},\ \text{s.t. }c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=\beta$$
$$\iff\ \text{向量组}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{ 与向量组}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\text{ 等价}$$
$$\iff\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)$$

(2) 有唯一解：

$$\iff \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ 线性无关}$$
$$\iff \operatorname{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = n$$

定理 3.5.1

(1) $(*)$ 有解 $\iff \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid \beta)$
(2) $(*)$ 有唯一解 $\iff \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid \beta) = n$

注：齐次方程非零解条件

$$\text{齐次方程 } (**) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + +a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \text{有非零解} \iff \operatorname{rank}(A) < n$$

2 解空间、解的结构

记 V_A是$(**)$ 的解空间. 它是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间. V_A 中的一组基称为 $(**)$ 的一个基础解系.

$$\text{例如：}\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 11 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 + x_4 = 2x_2 + x_3, \\ x_4 = 11x_2 + 5x_3. \end{cases}$ 取 $x_2 = t_1, x_3 = t_2$,

$$\text{通解为} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9t_1 - 4t_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ 11t_1 + 5t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, (t_1, t_2 \in \mathbb{F})$$

记 $\xi_1 = (-9, 1, 0, 11)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (-4, 0, 1, 5)^{\mathrm{T}}$ ， $\left.\begin{matrix} V_A =< \xi_1, \xi_2 > \\ \xi_1, \xi_2 \text{ 线性无关} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \xi_1, \xi_2$ 是 V_A 的一组基, $\dim V_A = 2$.

定理 3.5.2

$$V_A \text{ 是} \mathbb{F}^n \text{ 的子空间}, \dim V_A = n - \operatorname{rank}(A)$$

证明 : $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}, AB=0 \Rightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B) \leqslant n$

$$AB=0 \Rightarrow A(\beta_1,\cdots\beta_n)=0 \quad \Rightarrow \beta_i \in V_A, i=1,\cdots,n$$
$$\operatorname{rank} B \leqslant \dim V_A = n-\operatorname{rank}(A) \Rightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B) \leqslant n$$

证明：设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}, \operatorname{rank}(A^n)=\operatorname{rank}(A^{n+1})$

设 $x \in V_{A^{n+1}} \backslash V_A$, $\quad A^{n+1}x=0$ 假设 $A^n x \neq 0$，故 $x, Ax, \cdots, A^n x$ 线性无关，是 n 维数组空间 $\mathbb{F}^n$ 中 $n+1$ 个向量，矛盾！$A^n x=0$，二者解空间相同

例 3.5.1: 已知 $A \in \mathbb{F}^{(n-1)\times n}, \operatorname{rank}(A)=n-1$. 求 $AX=0$ 的基础解系.

$n-1$ 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵为 A, 把 A 划去第 j 列得到的 $n-1$ 阶子式记作 D_j, 令

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} D_1 \\ -D_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}D_n \end{pmatrix}$$

如果 $\boldsymbol{\eta}\neq 0$, 那么 B 有一个 $n-1$ 阶子式不为 0 。从而 $\operatorname{rank}(B)\geqslant n-1$ 。又由于 B 只有 $n-1$ 行, 因此 $\operatorname{rank}(B)=n-1$ 。从而齐次线性方程组的解空间 W 的维数为

$$\dim W = n-\operatorname{rank}(B)=n-(n-1)=1.$$

由于 $\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{D}_1,-\boldsymbol{D}_2,\cdots,(-1)^{n-1}\boldsymbol{D}_n)'$ 是原齐次线性方程组的一个非零解，因此 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{W}$ 的一个基, 即 $\boldsymbol{\eta}$ 是原齐次线性方程组的一个基础解系。

例 3.5.2: 已知 $\eta_1=(1,2,3,2,1), \eta_2=(1,3,2,1,2)\in\mathbb{F}^5$. 求一矩阵 A, 使得 η_1,η_2 是 $AX=0$ 的基础解系.

设 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=0$ 是方程组 $AX=O$ 的任意一条方程, 则其满足

$$\begin{cases} a_1+2a_2+3a_3+2a_4+a_5=0, \\ a_1+3a_2+2a_3+a_4+2a_5=0, \end{cases}$$

将上述方程组看作关于 $a_1,a_2,\cdots,a_5$ 的齐次线性方程组, 其系数矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

其通解为

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

构成它的一个基础解系. 记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 rank $A = 3$, 矩阵 A 对应的齐次线性方程组的解空间维数为 $5 - \text{rank}\,\boldsymbol{A} = 2$,

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 是上述方程组的两个线性无关解, 因此构成该方程组的基础解系.

定理 3.5.3

记W 为$(*)$ 的解集合, V_A 为$(**)$ 的解集合. 则

$$W = \eta_0 + V_A := \{\eta_0 + \xi \mid \xi \in V_A\}. \text{ 其中}\eta_0 \text{ 为}(*) \text{ 的一个特解}$$

注

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 为 V_A 的一组基. 则

(1) $W = \{\eta_0 + t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + \cdots + t_{n-r}\xi_{n-r} \mid t_1, t_2, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{F}\}$

(2) $\eta_0, \eta_0 + \xi_1, \eta_0 + \xi_2, \cdots, \eta_0 + \xi_{n-r}$ 是 W 的一个极大线性无关组, rank$(W) = n - r + 1$.

例 3.5.3: 解非齐次方程

考虑 $(\star)$ $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

等价于 $\begin{cases} x_1+x_4=-2+2x_2+x_3, \\ \qquad x_4=-10+11x_2+5x_3. \end{cases}$ 取 $x_2=x_3=0$, 得 $(\star)$ 的一个特解 $\eta_0=\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$.

$\because$ $(\star)$ 对应的齐次线性方程组 $(\star\star)$ 有基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$\therefore$ $(\star)$ 的通解为 $\eta_0+t_1\xi_1+t_2\xi_2=\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, (t_1,t_2\in\mathbb{F})$

例 3.5.4: 基的寻找

设一个 4 元线性方程组的系数矩阵为 $A, \operatorname{rank}(A)=3$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的三个解, 其中 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, 5\alpha_2-2\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ 求这个线性方程组的通解.（特解 α_1+ 齐次通解）

解答： (1) 判断是否齐次 $\dim V_A=4-3=1$，由于给的；两个解无比例关系

(2) 求基：$5(\alpha_2-\alpha_1)-2(\alpha_3-\alpha_1)=(5\alpha_2-2\alpha_3)-3\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 & 6 & 9 & -4 \end{pmatrix}^{\top}=\eta$

非齐次通解为：$\alpha_1+\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

例 3.5.5: 秩的求解

已知 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1. \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解. 求 a,b 和方程组的通解.

解答： $n-r+1=3 \quad \Rightarrow \mathrm{rank}(A)=2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{array}\right) \to \text{无两行成比例，考虑解方程:}$$

$$\alpha_3=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1=-2, \lambda_2=1 \qquad b=-3, a=2$

第 6 节　一般线性空间

设 V 是一个非空集合, $\mathbb{F}$ 是一个数域. 定义两种运算 $V\times V \longrightarrow V \quad \mathbb{F}\times V \longrightarrow V \ (\alpha,\beta) \mapsto \alpha+\beta, \quad (\lambda,\alpha)\mapsto \lambda\alpha$, 称为加法与数乘. 若满足如下规则

性质 3.6.1: 线性空间

(A1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
(A2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
(A3) $\exists 0\in V$, s.t. $\alpha+0=\alpha$ (此时称 0 为零向量)
(A4) $\exists\zeta$, s.t. $\alpha+\zeta=0$ (此时称 ζ 为 α 的负向量, 记为 $-\alpha$)
(D1) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$
(D2) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$
(M1) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$
(M2) $1\alpha=\alpha \quad \forall\alpha,\beta,\gamma\in V, \forall\lambda,\mu\in\mathbb{F}$

注

(1) 零向量是唯一的；(2) 负向量是唯一的；(3) $0\cdot\alpha=0; \quad (-1)\cdot\alpha=-\alpha; \quad \lambda\cdot 0=0$;
(4) $\lambda\cdot\alpha=0 \Rightarrow \lambda=0$ 或 $\alpha=0$

则称 V 为 $\mathbb{F}$ 上线性空间，记作 $V(\mathbb{F})$ 或 V. 线性空间中的元素称为向量.

注

(1) V 中没有加长向量的概念.
(2) 在 V 中, 向量组 $\Gamma_2: \beta_1,\cdots,\beta_t$ 可由向量组 $\Gamma_1: \alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示 $\iff \exists T\in\mathbb{F}^{s\times t}$, s.t. $(\beta_1\cdots\beta_t)=(\alpha_1\cdots\alpha_s)T$.

例 3.6.1: 线性相关和互相表示

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

解答： 1 可以由 2,3 表示，2、3 线性无关，但是 4 不能由 2、3 表示，故不能由 123 表示

(1) 如果在 $(V,+,\cdot)$ 中, 有 n 个线性无关的向量, 但是没有 $n+1$ 个线性无关的向量, 则称 V 为 n 维的, 记作 $\dim V = n$. 如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量, 则称 V 为无限维的, $\dim V = \infty$.
(2) 当 $\dim V = n$ 时, 任意 n 个线性无关的有序向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为 V 的一组基. 此时, $\forall\beta\in V, \exists \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$, s.t. $\beta=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$.
称 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为 β 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标.

第 7 节 子空间的运算

设 $(V,+,\cdot)$ 是 $\mathbb{F}$ 上线性空间, W 是 V 的非空子集合. 若 W 对 V 中的加法和数乘也构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 则称 W 是 V 的线性子空间 (简称子空间).

注

(1) 设 W 是 $(V,+,\cdot)$ 的非空子集合, 则 W 是 $(V,+,\cdot)$ 的子空间 $\Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha,\beta\in W\Rightarrow\alpha+\beta\in W,\\ \lambda\in\mathbb{F},\alpha\in W\Rightarrow\lambda\alpha\in W.\end{cases}$

$$\Longleftrightarrow {''}\lambda,\mu\in\mathbb{F},\alpha,\beta\in W\Rightarrow\lambda\alpha+\mu\beta\in W{''}.$$

(2) 描述子空间时, 只需要描述子空间中的元素, 不需要描述加法和数乘.
(3) 子空间满足传递性.

例 3.7.1: 线性方程组空间

记 $V := \{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \mid a_1,\cdots,a_n,b\in\mathbb{F}\}$. 定义加法: $(a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b)\dot{+}(a_1'x_1+\cdots+a_n'x_n=b')$

$$:= ((a_1+a_1')x_1+\cdots+(a_n+a_n')x_n=b+b')$$

定义数乘: $\lambda\circ(a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b) := (\lambda a_1x_1+\cdots+\lambda a_nx_n=\lambda b)$ 则 $(V,\dot{+},\circ)$ 构成 $\mathbb{F}$ 上的一个线性空间. 记 $W := \{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0 \mid a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{F}\}$. 则 W 是 V 的子空间.

例 3.7.2: 函数空间

$$\mathbb{F}[x] := \{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid a_i\in\mathbb{F},n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\},$$

按通常的多项式的加法、数乘运算, 构成 $\mathbb{F}$ 上的一个线性空间.
注意到 $\forall n_0\in\mathbb{N}$, 都有 n_0 个线性无关向量 $1,x,x^2,\cdots,x^{n_0-1}$. 由 n_0 的任意性, 知 $\dim\mathbb{F}[x]=\infty$.

记 $\mathbb{F}_n[x] := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{F}\}$. 则 $\mathbb{F}_n[x]$ 是 $\mathbb{F}[x]$ 的子空间, 有一组基 $\Gamma_1 : 1, x, \cdots, x^n$, 自然基,
$\therefore \dim \mathbb{F}_n[x] = n + 1$.

$$\forall f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x], f(x) = (1 x \cdots x^n)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

$\therefore f(x)$ 在 Γ_1 下的坐标为 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$.
任取定 $a \in \mathbb{F}, \Gamma_2 : 1, x - a, \cdots, (x - a)^n$ 也是 $\mathbb{F}_n[x]$ 中线性无关向量组, $\therefore \Gamma_2$ 也是 $\mathbb{F}_n[x]$ 的一组基. 试求 $f(x)$ 在 Γ_2 下的坐标.

例 3.7.3: 矩阵空间

记 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 为 $\mathbb{F}$ 上所有 m 行, n 列的矩阵作成的集合, 按照矩阵的加法、数乘运算, 构成 $\mathbb{F}$ 上一个线性空间.
向量组 $E_{ij}(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$ 是 mn 个线性无关向量, 且 $\forall A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{F}^{m\times n}, A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$,
$\therefore \Gamma : E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, \cdots, E_{2n}, \cdots, E_{m1}, \cdots, E_{mn}$ 是 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 的一组基, $\dim \mathbb{F}^{m\times n} = mn$ 所有的上三角阵、下三角阵构成的集合都是 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 的子空间.
所有的对角阵、对称阵、反对称阵构成的集合都是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间. 可以考虑这些子空间的基、维数.

例 3.7.4: 判断

判断 S_1, S_2 是否是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间:
(1) $S_1 = \left\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0\right\}$. (加法、数乘封闭)
(2) $S_2 = \left\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 x_2 = 0\right\}$. (加法不封闭)

例 3.7.5

取定 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 考虑 $C(A) := \{X \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid AX = XA\}$.
(1) 证明 $C(A)$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.
(2) 取 $A = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不同. 求 $C(A)$ 的维数, 写出它的一组基.

解答：　设 $X\in C(A),Y\in C(A)$

$A(X+Y)=(Y+X)A\Rightarrow(x+Y)\in C(A)$ $A(\lambda X)=\lambda XA,\lambda X\in C(A)$ 故是子空间

$$
\begin{aligned}
& A=\operatorname{diag}\left(a_1\cdots,a_n\right),\quad B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}\in C(A)\\
& \Rightarrow AB=BA,\quad a_ib_{ij}=a_jb_j\\
& \Rightarrow b_{ij}=0(i\neq j),\\
& B=b_{11}t_{11}+\cdots+b_{nn}E_{nn}
\end{aligned}
$$

1　线性子空间交、和、直和

定理 3.7.1

W_1,W_2 是 V 的子空间 $\Rightarrow$ 交集 $W_1\cap W_2$ 也是 V 的子空间, 称为 W_1 与 W_2 的交.

W_1,W_2 是 V 的子空间 $\Rightarrow\{\alpha_1+\alpha_2\mid\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2\}$ 也是 V 的子空间, 称为 W_1 与 W_2 的和, 记为 W_1+W_2.

注

(1) W_1+W_2 是包含 $W_1\cup W_2$ 的 V 的最小子空间.

(2) 该结论可推广到有限多个子空间的情形.

(3) $<\alpha_1,\cdots,\alpha_s>+<\beta_1,\cdots,\beta_t>=<\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t>$.

例 3.7.6

考虑 $\mathbb{F}^4$ 的子空间 $W_1=<\alpha_1,\alpha_2>,W_2=<\beta_1,\beta_2>$,

其中 $\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=(1,1,0,0),\\ \alpha_2=(0,1,1,0),\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\beta_1=(1,2,3,4),\\ \beta_2=(0,1,2,2).\end{array}\right.$ 求 $W_1\cap W_2$ 和 W_1+W_2 的基和维数.

(1) $W_1+W_2=<\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2>$

$$
\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&2&1\\0&1&3&2\\0&0&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 是 W_1+W_2 的一组基, $\dim\left(W_1+W_2\right)=3$.

(2) $W_1 \cap W_2 = \{\gamma \mid \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{F},\ \text{s.t. } \gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2\}$ 解方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\beta_1 + x_4\beta_2 = 0 \quad (*)$ 得 $(*)$ 的通解为 $\begin{pmatrix} t \\ -t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{F}.\quad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{F}.$

$$\therefore W_1 \cap W_2 = \{t\alpha_1 - t\alpha_2 \mid t \in \mathbb{F}\} = \{t(\alpha_1 - \alpha_2) \mid t \in \mathbb{F}\}.$$

$\therefore \alpha_1 - \alpha_2$ 是 $W_1 \cap W_2$ 的一组基, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

定理 3.7.2: 维数公式

设 W_1, W_2 是 V 的子空间. 则

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

定理 3.7.3: 直和

设 W_1, W_2 是 $(V, +, \cdot)$ 的子空间. 对子空间 $W_1 + W_2$, 下列叙述等价:

(1) $\left.\begin{array}{l} \alpha_1, \cdots, \alpha_s \text{ 是} W_1 \text{ 的一组基} \\ \beta_1, \cdots, \beta_t \text{ 是} W_2 \text{ 的一组基} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 是 $W_1 + W_2$ 的一组基.

(2) $\forall \alpha \in W_1 + W_2, \exists \mid \alpha_1 \in W_1$ 和 $\alpha_2 \in W_2$, s.t. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. (即: $\alpha \in W_1 + W_2$ 的表示唯一)

(3) 0 的表示唯一.

满足上述等价条件的和称为直和, 记作 $W_1 \oplus W_2$. 若 $V = W_1 \oplus W_2$, 则称 W_1 为 W_2 的补空间. 此时, W_2 也是 W_1 的补空间.

(1) $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \iff W_1 \cap W_2 = 0$.

(2) 补空间必存在, 且一般不唯一.

例 3.7.7

设 $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\}$.

(1) 证明 W 是 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的子空间.

(2) 求 W 的维数, 并写出它的一组基.

(3) 写出 W 的一个补空间.

解答：(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in W \& \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda b & \lambda a \end{pmatrix} \in W$

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$

设 W 是 $(V, +, \cdot)$ 的子空间. $\forall v \in V$, 记 $v + W := \{v + w \mid w \in W\}$, 这是 V 的子集合. 考虑集合

$V/W := \{v+W \mid v\in V\}$, 易知 $v_1+W=v_2+W \iff v_1-v_2\in W$. 则
(1) $V/W\neq\varnothing$.
(2) 定义 V/W 上的加法 $(v_1+W)\dotplus(v_2+W):=(v_1+v_2)+W$.
(3) 定义 V/W 上的数乘 $\lambda\circ(v+W):=\lambda v+W$. 易验证 $(V/W,\dotplus,\circ)$ 构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 称为 V 的商空间.

$$V=W_1\oplus W_2\Rightarrow V/W_1\cong W_2$$

2　线性空间同构

设 V_1,V_2 是 $\mathbb{F}$ 上两个线性空间. 如果存在集合间的双射 $\varphi:V_1\longrightarrow V_2$, 满足 $\begin{cases}\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta),\\ \varphi(\lambda\alpha)=\lambda\varphi(\alpha),\quad(\forall\alpha,\beta\in V,\forall\lambda\in\mathbb{F})\end{cases}$
则称 V_1 与 V_2 同构, 记为 $V_1\cong V_2$. $\varphi\longrightarrow$ 同构映射特别地, 若 $V_1=V_2$, 则称 φ 是 V_1 的自同构映射.

注

(1) $\dim_{\mathbb{F}}V=n\Rightarrow V\cong\mathbb{F}^n$.
(2) $\varphi:V_1\longrightarrow V_2$ 是同构映射 $\Rightarrow\varphi^{-1}:V_2\longrightarrow V_1$ 也是同构映射.
(3) $\left.\begin{array}{l}\varphi:V_1\longrightarrow V_2\text{ 是同构映射}\\ \psi:V_2\longrightarrow V_3\text{ 是同构映射}\end{array}\right\}\Rightarrow\psi\varphi:V_1\longrightarrow V_3$ 也是同构映射.

性质 3.7.1

设 $\varphi:V_1\longrightarrow V_2$ 是同构映射. 则
(1) $\varphi(0_1)=0_2$, 其中 $0_1,0_2$ 分别是 V_1,V_2 中的零向量.
(2) $\varphi(-\alpha)=-\varphi(\alpha)$
(3) V_1 中向量组 Γ 线性相关 $\iff V_2$ 中向量组 $\varphi(\Gamma)$ 线性相关.
(4) Γ 是 V_1 的一组基 $\iff\varphi(\Gamma)$ 是 V_2 的一组基.

对于有限空间，$V_1\cong V_2\iff\dim V_1=\dim V_2$.

第四章 线性变换

第 1 节 $\mathbb{F}^n$ 上线性变换的定义

$\forall A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 可定义 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的一个线性映射 $\varphi_A:\ \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 当 $m=n$ 时, 称 φ_A 为 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换. 记 $L(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$ 为 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的线性映射全体组成的集合. 记 $L(\mathbb{F}^n)$ 为 $\mathbb{F}^n$ 上所有线性变换组成的集合.

注

(1) $\forall \varphi_A \in L(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$, 有

$$\begin{aligned}&\varphi_A(X+X') = A(X+X') = AX + AX' = \varphi_A(X) + \varphi_A(X')\\&\varphi_A(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda\varphi_A(X)\end{aligned}$$

即: φ_A 保持线性运算.

(2) 反之, 对任意的集合上的映射 $\varphi:\ \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$, 若 φ 保持线性运算, 则设 $\varphi(e_1) = \alpha_1,\cdots,\varphi(e_n) = \alpha_n$. 记 $A = (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) \in F^{m\times n}$. $\forall X \in \mathbb{F}^n, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ 则 $\varphi(X) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + \cdots + x_n\varphi(e_n) = (\varphi(e_1)\varphi(e_2)\cdots\varphi(e_n))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX$. 即 $\varphi = \varphi_A$, 保持线性运算的映射只能是 φ_A 这种形式.

例 4.1.1: 几个线性映射

在 $L(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$ 中, 取 $A=0$, 得 $\varphi_A = \mathcal{O}: \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$, 零映射.

$$X \longmapsto 0$$

在 $L(\mathbb{F}^n)$ 中,
(1) 取 $A=I_n$, 得 $\varphi_A=\mathcal{E}:\mathbb{F}^n\longrightarrow\mathbb{F}^n$, 恒等变换. $X\longmapsto X$
(2) 取 $A=\lambda_0 I_n$, 得 $\varphi_A:\mathbb{F}^n\longrightarrow\mathbb{F}^n$, 伸缩变换 (数乘变换). $X\longmapsto\lambda_0 X$
(3) 取 A 为可逆方阵, 则 φ_A 是 $\mathbb{F}^n$ 上的同构映射, $\varphi_A^{-1}=\varphi_{A^{-1}}$.

例 4.1.2

当 $n>m$ 时, 取 $A=\begin{pmatrix} I_m \\ 0\end{pmatrix}$, 得 $\varphi_A=\iota:\mathbb{F}^m\longrightarrow\mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}^m$ 在 $\mathbb{F}^n$ 上的嵌入.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

取 $B=\begin{pmatrix} I_m & 0\end{pmatrix}$, 得 $\varphi_B=\pi:\mathbb{F}^n\longrightarrow\mathbb{F}^m$, $\mathbb{F}^n$ 在 $\mathbb{F}^m$ 上的投射 (投影).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m\end{pmatrix}$$

性质 4.1.1

设 $\varphi_A\in L(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$, 则
(1) $\varphi_A(0)=0$.
(2) $\varphi_A(-X)=-\varphi_A(X)$.
(3) φ_A 保持线性组合:

$$Y=\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_sX_s\Rightarrow\varphi_A(Y)=\lambda_1\varphi_A(X_1)+\cdots+\lambda_s\varphi_A(X_s).$$

(4) $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 在 $\mathbb{F}^n$ 中线性相关 $\Rightarrow\varphi_A(X_1),\varphi_A(X_2),\cdots,\varphi_A(X_s)$ 在 $\mathbb{F}^m$ 中线性相关.

例 4.1.3: 反射、旋转、平移

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$$

设 φ 是绕原点逆时针旋转 θ 角的变换, 则 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & \psi: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

把直线映射为曲线, 它们都不是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换. 平移变换 $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 没有把 0 映射到 $0, \therefore$ 也它也不是线性变换.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + a \\ x_2 + b \end{pmatrix}$$

注 : 线性映射的核和像

设 $\varphi \in L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. 考虑 $\mathbb{F}^n$ 的子集合 $\operatorname{Ker}\varphi := \{X \in \mathbb{F}^n \mid \varphi(X) = 0\}$ 和 $\mathbb{F}^m$ 的子集合 $\operatorname{Im}\varphi := \{\varphi(X) \mid X \in \mathbb{F}^n\}$.

(1) $\operatorname{Ker}\varphi$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间; $\operatorname{Im}\varphi$ 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间.

(2) φ 是单射 $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = 0$, φ 是满射 $\Longleftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{F}^m$, φ 是同构 $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = 0 \,\&\, \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{F}^m$,

(3) 设 $\varphi = \varphi_A$, 则 $\operatorname{Ker}\varphi_A = V_A$, 设 $A = (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$, 则 $\operatorname{Im}\varphi_A = <\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n>$, $\dim\operatorname{Ker}\varphi_A + \dim\operatorname{Im}\varphi_A = n = \dim\mathbb{F}^n$

(4) 存在线性空间同构 $\mathbb{F}^n / \operatorname{Ker}\varphi_A \cong \operatorname{Im}\varphi_A$.

(5) 利用集合间的双射

$$\Phi : \mathbb{F}^{m\times n} \longleftrightarrow L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$$

构造 $L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 上的线性空间结构.

第 2 节　一般线性空间的线性变换

设 V, V' 为 $\mathbb{F}$ 上线性空间. 若映射 $\mathcal{A} : V \longrightarrow V'$ 满足 $\begin{cases} \mathcal{A}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathcal{A}(\alpha_1) + \mathcal{A}(\alpha_2), \\ \mathcal{A}(\lambda\alpha) = \lambda\mathcal{A}(\alpha), \quad (\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}), \end{cases}$ 则称 $\mathcal{A}$ 为 V 到 V' 的一个线性映射.

记 $L(V, V')$ 为 V 到 V' 的线性映射全体组成的集合. 当 $V = V'$ 时, 线性映射 $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ 称为 V 上的线性变换.

记 $L(V)$ 为 V 上所有线性变换组成的集合.

例 4.2.1

(1) $\forall V, V'$, 有 $\mathcal{O}: V \longrightarrow V'$, 零映射.

$$\alpha \longmapsto 0$$

$$\mathcal{E}: V \longrightarrow V, \text{ 恒等变换 (单位变换).}$$

$$\alpha \longmapsto \alpha$$

取定 $\lambda_0 \in \mathbb{F}$, 得 $\mathcal{A}: V \longrightarrow V$, 数乘变换.

$$\alpha \longmapsto \lambda_0 \alpha$$

(2) $\forall W \subseteq V$, 子空间, 有线性映射 inc: $W \hookrightarrow V$, 嵌入.

$$\alpha \longmapsto \alpha$$

(3) 取定 $P \in \mathbb{F}^{s\times m}, Q \in F^{n\times t}$, 则 $\mathcal{A}: \mathbb{F}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{F}^{s\times t}$ 是线性映射.

$$X \longmapsto PXQ$$

特别地, 若 $s = m$ 且 $n = t$, 则 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 上的线性变换.

1 线性变换的矩阵

设 $\dim V = n$, 取定 V 中一组基 $\Gamma: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

$$\dim V' = m. \quad V' \quad \Gamma': \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m.$$

此时可定义集合上的双射 $\quad \Phi: L(V, V') \longrightarrow \mathbb{F}^{m\times n}$

$$\begin{aligned}\forall \mathcal{A} \in L(V, V'), \mathcal{A}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) &= (\mathcal{A}(\alpha_1)\mathcal{A}(\alpha_2)\cdots\mathcal{A}(\alpha_n)) \\ &= (\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} = (\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)A\end{aligned}$$

称 A 为 $\mathcal{A}$ 在基 Γ 和 Γ' 下的矩阵. 此时, $\forall \xi \in V$, 设 $\xi = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则 $\mathcal{A}(\xi) = \mathcal{A}(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 为 $\mathcal{A}(\xi)$ 在 Γ' 下的坐标.

定理 4.2.1

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 是 V' 中任意 n 个向量. 则存在唯一的线性映射 $\mathcal{A}: V \longrightarrow V'$, s.t. $\mathcal{A}(\alpha_i) = \gamma_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$.

注

(1) $\mathcal{A}$ 由 V 中基元素的像 $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \cdots, \mathcal{A}(\alpha_n)$ 唯一确定. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Longleftrightarrow \mathcal{A}(\alpha_i) = \mathcal{B}(\alpha_i), (\forall i)$.

(2) $\mathcal{A}$ 满射 $\Longleftrightarrow < \mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \cdots, \mathcal{A}(\alpha_n) >= V$, $\mathcal{A}$ 单射 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \cdots, \mathcal{A}(\alpha_n)$ 线性无关

$$\Longleftrightarrow \dim < \mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \cdots, \mathcal{A}(\alpha_n) >= n.$$

定理 4.2.2: 相抵意味着同一个线性变换

$A \overset{\text{相抵}}{\sim} B \Longleftrightarrow A, B$ 是同一个线性映射$\mathcal{A}: V \longrightarrow V'$ 在不同基下的矩阵

$\forall \mathcal{A} \in L(V, V')$, 存在 V 的基 $\Gamma_1: \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 V' 的基 $\Gamma_1': \beta_1, \cdots, \beta_m$, 使得 $\mathcal{A}$ 在 Γ_1 和 Γ_1' 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{即} \begin{cases} \mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i, & (1 \leqslant i \leqslant r) \\ \mathcal{A}(\alpha_i) = 0. & (r+1 \leqslant i \leqslant n) \end{cases}$$

定理 4.2.3

设 $A, B \in F^{n \times n}. A \overset{\text{相似}}{\sim} B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists$ 可逆矩阵 P, s.t. $B = P^{-1}AP$

设 $A, B \in F^{n \times n}$. 则 $A \overset{\text{相似}}{\sim} B \Longleftrightarrow \exists \mathcal{A} \in L(V), \dim V = n$, s.t. A, B 是 $\mathcal{A}$ 在 V 的不同基下的矩阵.

注

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) \\ |B| = |A| \\ \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A) \end{cases}$$

第 3 节 特征值、特征向量

$$A \in \mathbb{F}^{n\times n} \text{ 可 (相似) 对角化} \Longleftrightarrow A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A^{\text{相似}} \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \in L(V) \text{ 可对角化} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists V \text{ 的一组基 } \Gamma, \text{s.t. } \mathcal{A} \text{ 在 } \Gamma \text{ 下的矩阵为} \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}$$

定理 4.3.1

设 $\mathcal{A} \in L(V)$. 若存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和非零向量 $\xi \in V$, 满足 $\mathcal{A}(\xi) = \lambda\xi$, 则称 λ 为 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, ξ 为 $\mathcal{A}$ 的属于 λ 的特征向量.

注

(1) λ 由 ξ 唯一确定, 而 ξ 不能被 λ 唯一确定.
(2) 记 $V_\lambda := \{\xi \in V \mid \mathcal{A}(\xi) = \lambda\xi\} = \{\mathcal{A}$ 的属于 λ 的特征向量 $\} \cup \{0\}$. 则 V_λ 是 V 的子空间, 称为属于 λ 的特征子空间.

性质 4.3.1

设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$, λ 为一变量, 则

$$p_A(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 $\mathbb{F}$ 上的 n 次多项式, 称为 A 的特征多项式.

1 求特征值、特征向量的方法

Step(1) 取定 V 中一组基 $\Gamma : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 写出 $\mathcal{A}$ 在 Γ 下的矩阵 A

Step(2) 求出 $|\lambda I_n - A|$ 在 $\mathbb{F}$ 中全部的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 它们是 $\mathcal{A}$ 的全部特征值.

Step(3) 对每个 λ_i, 解方程组 $(\lambda_i I_n - A)\,X = 0$, 得一基础解系 $\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} c_{1t} \\ c_{2t} \\ \vdots \\ c_{nt} \end{pmatrix}$,

则 $\xi_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \xi_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1t} \\ \vdots \\ c_{nt} \end{pmatrix}$ 为 V_{λ_i} 的一组基.

定理 4.3.2

特征多项式是相似不变量

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 若存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 以及非零向量 $X \in \mathbb{F}^n$, s.t. $AX = \lambda X$, 则称 λ 为 A 的一个特征值, X 为 A 的属于 λ 的特征向量.

例 4.3.1

求 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的全部特征值和特征向量.

解答： $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$ $\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ (二重).

(1) 解方程组 $(-I_3 - A)\,X = 0$, 得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\therefore$ A 的属于 -1 的特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(0 \neq k_1 \in \mathbb{F})$.

(2) 解方程组 $(I_3 - A)\,X = 0$, 得基础解系 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\therefore$ A 的属于 1 的特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(k_2, k_3 \in \mathbb{F}$, 不封

性质 4.3.2

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值（有可能相同）. 则
(1) $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
(2) $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

注

$$A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ 可逆} \Longleftrightarrow A \text{ 的} n \text{ 个特征值都不为零.}$$

注

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, \lambda_0$ 为 A 的特征值. 则
(1) λ_0^k 为 A^k 的特征值.
(2) $\lambda_0^2 - \lambda_0 + 2$ 为 $A^2 - A + I_n$ 的特征值.
(3) 若 A 可逆, 则 $\frac{1}{\lambda_0}$ 是 A^{-1} 的特征值.
(4) 若 $\lambda_0 \neq 0$, 则 $\frac{1}{\lambda_0}\det(A)$ 为 A^* 的特征值.
(5) λ_0 也是 A^{T} 的特征值.

▶ 求 λ_0 的两种途径: $\begin{cases} \text{利用} AX = \lambda_0 X. \\ \text{利用} |\lambda_0 I_n - A| = 0. \end{cases}$

性质 4.3.3

(1) 由 $|\lambda I_n - AB| = |\lambda I_n - BA|$, 可知 $p_{AB}(\lambda) = p_{BA}(\lambda)$, 即: AB 与 BA 有完全相同的特征值 (包括重数).
(2) 当 $m \geqslant n$ 时, 由 $|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|$, 可知 AB 与 BA 有完全相同的非零特征值 (包括重数).

证明

考虑 $A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 b_3 \end{pmatrix}$ 则 A 的特征值为 $0, 0, \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$

第 4 节 矩阵的相似对角化

定理 4.4.1

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则 A 相似于对角阵 $\Longleftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.
设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则属于 A 的不同特征值的特征向量线性无关.
$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow$ A 相似于对角阵

定理 4.4.2

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, \lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的互不相同的特征值, $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{im_i}$ 是 A 的属于 λ_i 的线性无关的特征向量, 则向量组 $\xi_{11}, \cdots, \xi_{1m_1}, \xi_{21}, \cdots, \xi_{2m_2}, \cdots, \xi_{s1}, \cdots, \xi_{sm_s}$ 也线性无关

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则 A 可相似对角化 $\Longleftrightarrow \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_s} = n$

$$\Longleftrightarrow \mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

设 $\mathcal{A} \in L(V), \dim V = n$, 则 $\mathcal{A}$ 可相似对角化 $\Longleftrightarrow \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_s} = \dim V$

$$\Longleftrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

1 几何、代数重数

(1) 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则 $\dim V_{\lambda_i} - \lambda_i$ 的几何重数（解空间的维数）. (2) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \lambda_1, \cdots, \lambda_s \text{ 互不相同.}$$

$n_i - \lambda_i$ 的代数重数（特征值的幂次）

定理 4.4.3: 几何重数小于代数重数

$\forall 1 \leqslant i \leqslant s$, 都有 $\dim V_{\lambda_i} \leqslant n_i$

定理 4.4.4: 相似对角化的要求

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则 A 可相似对角化 $\Longleftrightarrow \dim V_{\lambda_i} = n_i, (\forall 1 \leqslant i \leqslant s)$

例 4.4.1: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. 证明: $\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵.

证明：设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 分别对应 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n$, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i = \lambda_i \boldsymbol{X}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{B}\lambda_i\boldsymbol{X}_i = \lambda_i(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

这说明 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}_i$ 也是属于 λ_i 的特征向量, 由于 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互异, 因此 λ_i 的特征子空间

$$V_{\lambda_i} = \{k\boldsymbol{X}_i \mid k \in \mathbb{R}\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i \in V_{\lambda_i} \Longrightarrow \exists \mu_i \in \mathbb{R}$, 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i = \mu_i \boldsymbol{X}_i$, 这说明 $\boldsymbol{X}_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 至此, 我们得到了 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{B}$ 可对角化. 事实上, 我们有：记 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \cdots & \boldsymbol{X}_n \end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{P}^{-1}A\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

例 4.4.2

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 满足 $A^2 = A$. 证明: $A \overset{\text{相似}}{\sim} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 r 为 A 的秩

解答：

$$(A-I)A = 0, \Rightarrow \operatorname{rank}(A-I) + \operatorname{rank}(A) = n$$

$$\begin{cases} (A - I_n)\,\alpha_i = 0 & \Rightarrow \quad A\alpha_i = \alpha_i, r\text{个属于 1 的特征向量} \\ A\beta_j = 0 & \Rightarrow \quad n - r\text{个属于 0 的特征向量} \end{cases}$$

$$\alpha_1, \ldots \alpha_r, \beta_1, \ldots \beta_{n-r}\text{线性无关}$$

$$AT = A\left(\alpha_1, \ldots \alpha_r, \beta_1, \ldots \beta_{n-r}\right) = T\begin{pmatrix} I_r & \\ & O \end{pmatrix}$$

还可以说明:

$A^2 = kA.\ A \overset{\text{相似}}{\sim} \begin{pmatrix} kI_r & \\ & O \end{pmatrix}$ $\quad (A-3I)(A+I) = O.\ A \overset{\text{相似}}{\sim} \begin{pmatrix} 3I_r & \\ & -I_{n-r} \end{pmatrix}$

例 4.4.3

设 $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, 满足 $B \neq 0, C \neq 0$, 而 $B^{\mathrm{T}}C = 0$.

(1) 求 $A = BC^{\mathrm{T}}$ 的全部特征值.

(2) 判断 A 能否相似对角化.

解答：

$$p_A(\lambda) = \left|\lambda \operatorname{In}_n - BC^{\top}\right| = \lambda^{n-1}\left(\lambda - B^{\top}C\right) = \lambda^n$$

所以所有特征值为 0，且代数重数为 n，但是 A 的几何重数是 $\dim V_A = n - \operatorname{rank}(A)$ 秩不能为 0，故不能相似对角化

定理 4.4.5

复数域：$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 都相似于一个上三角阵.

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值. 则 $A \overset{\text{相似}}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

例 4.4.4

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量. 求 x 和 y 应满足的条件.

解答： 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\varphi_A(\lambda)$ 有 3 个实根 (计重数), 则由?? 知, $\boldsymbol{A}$ 必实相似于上三角阵, 反之, $\boldsymbol{A}$ 不实相似于上三角阵, 故 $\varphi_A(\lambda)$ 必有 1 个实根, 2 个共轭虚根, 即 $\boldsymbol{A}$ 在复数域上有 3 个不同的特征值, 从而其在复数域上相似于对角矩阵.

2. 设 $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. 已知 A 在 $\mathbb{R}$ 上不相似于上三角阵. 问：A 在 $\mathbb{C}$ 上是否相似于对角阵?

解答：

$$\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda - 1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

显然 $\lambda = 1$ 与 $\lambda = 2$ 的特征向量线性无关, 因此只需存在 2 个线性无关的属于 $\lambda = 1$ 的特征向量, 即 $\lambda = 1$ 的特征子空间 V_1 的维数 $\dim V_1 = 2 \Longrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 3 - 2 = 1$, 即

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow x = -y.$$

第 5 节 Jordan 标准形

设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, $0 \neq \xi \in V$. ξ 是 $\mathcal{A}$ 的属于 λ 的根向量 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists k$, s.t. $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k(\xi) = 0$

注

(1) ξ 是 $\mathcal{A}$ 的属于 λ 的特征向量 $\Rightarrow \xi$ 是 $\mathcal{A}$ 的属于 λ 的根向量. 反之未必!
(2) $\forall$ 根向量 $\xi, \exists m$, s.t. $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m(\xi)=0$, 而 $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m-1}(\xi)\neq 0$. 称 ξ 为 n 次根向量.

记 $R_{\lambda_i}(\mathcal{A}) := \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{n_i} = \{\xi\in V \mid (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{n_i}(\xi)=0\}$, 称为 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_i 的根子空间.

定理 4.5.1

$$
\begin{aligned}
&R_{\lambda_i}(\mathcal{A}) = \left\{\xi\in V \mid \exists k, \text{ s.t. } (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^k(\xi)=0\right\}\\
&=\{\mathcal{A}\text{ 的属于}\lambda_i\text{ 的根向量}\}\cup\{0\}.\\
&\dim R_{\lambda_i}(\mathcal{A})=n_i
\end{aligned}
$$

$$\text{存在子空间的直和分解} V = R_{\lambda_1}(\mathcal{A})\oplus R_{\lambda_2}(\mathcal{A})\oplus\cdots\oplus R_{\lambda_s}(\mathcal{A}).$$

(1) $R_{\lambda_i}(\mathcal{A})$ 是 V 的 $\mathcal{A}$ 不变子空间.

(2) 取 $R_{\lambda_i}(\mathcal{A})$ 的一组基 $\Gamma_i : \xi_{i1},\cdots,\xi_{in_i}$, 设 $\mathcal{A}|_{R_{\lambda_i}(\mathcal{A})}$ 在 Γ_i 下的矩阵为 $A_i\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}$. 则 Γ : $\xi_{11},\cdots,\xi_{1n_1},\xi_{21},\cdots,\xi_{2n_2},\cdots,\xi_{s1},\cdots,\xi_{sn_s}$ 为 V 的一组基,

$$\text{且}A\text{ 在}\Gamma\text{ 下的矩阵为}\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}.$$

$$\text{(3) 可调整}\Gamma_i, \text{ s.t. } \mathcal{A}|_{R_{\lambda_i}(\mathcal{A})}\text{ 在}\Gamma_i\text{ 下的矩阵为}A_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}$$

(4) $R_{\lambda_i}(\mathcal{A}) = W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_t$

第五章 Euclid 空间

第 1 节 标准正交基

定理 5.1.1: Euclid 空间

设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 若有映射 $(,) : V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$,, 满足 $\alpha,\beta\longmapsto(\alpha,\beta)$
(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
(2) $(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$
(3) $(\lambda\alpha,\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$

注：满足双线性性

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{m}\mu_j\beta_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\mu_j\left(\alpha_i,\beta_j\right)$$

(4) $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$, 且等号成立 $\Longleftrightarrow \alpha=0$.

则称 (α,β) 为 α 与 β 的内积, 称 $(V,(,),$ 为 Euclid 空间, 简称欧氏空间

性质 5.1.1: 模/范数

设 $(V,(,),$ 为欧氏空间. $\forall\alpha,\beta\in V$, 定义 α 的长度 (模, 范数) 为 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$.

定义 α 与 β 的夹角为 $<\alpha,\beta>=\arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$.

若 $(\alpha,\beta)=0$, 则称 α 与 β 相互正交 (垂直), 记为 $\alpha\perp\beta$.

注

(1) $|(\alpha,\beta)|\leqslant\sqrt{(\alpha,\alpha)}\sqrt{(\beta,\beta)}$. 等号成立 $\Longleftrightarrow \alpha,\beta$ 线性相关 (Cauchy-Schwarz 不等式).

(2) 0 与 α 的夹角不定义.

(3) $|\alpha|=0\Longleftrightarrow\alpha=0$. $|\alpha|=1\longrightarrow$ 单位向量. $\forall 0\neq\alpha\in V$, $\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ 一把 α" 单位化".

例 5.1.1: 几个欧氏空间举例

(1)　取 $V=\mathbb{R}^n,\forall\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, 定义 $(\alpha,\beta):=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta$.

此时 $|\alpha|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2},<\alpha,\beta>=\arccos\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}$

(2)　取 $V=\mathbb{R}^n$. 取定 $A\in M_n(\mathbb{R})$, 可逆.

$$\text{定义}(,):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}.$$
$$X,\quad Y\longmapsto X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AY=(AX)^{\mathrm{T}}(AY)$$

则 $(\mathbb{R}^n,(,))$, 是欧氏空间.

(3)　取 $V=\mathbb{R}^{n\times m}.\forall A,B\in V$, 定义 $(A,B):=\operatorname{tr}(AB^{\mathrm{T}})$. 则 $(\mathbb{R}^{n\times m},(,))$, 是欧氏空间.

(4)　取 $V=\mathbb{R}_n[x]=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]\mid\deg f(x)\leqslant n\}$.

(i) 取定互不相等的 $c_1,c_2,\cdots,c_{n+1}\in\mathbb{R}$. $\forall f(x),g(x)\in\mathbb{R}_n[x]$, 定义 $(f(x),g(x))_1:=\sum_{i=1}^{n+1}f(c_i)g(c_i)$. 则 $(\mathbb{R}_n[x],(,)_1)$ 是欧氏空间.

(ii) 取定 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. $\forall f(x), g(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, 定义 $(f(x), g(x))_2 := \int_a^b f(x)g(x)dx$. 则 $(\mathbb{R}_n[x], (,)_2)$ 也是欧氏空间.

注

注意到 $(x,x)_1 = \sum_{i=1}^{n+1} c_i^2$, 而 $(x,x)_2 = \int_a^b x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3} \therefore (,)_1 \neq (,)_2, (\mathbb{R}_n[x], (,)_1)$ 与 $(\mathbb{R}_n[x], (,)_2)$ 是两个不同的欧氏空间

$$\text{非空集合}V \xrightarrow{\text{加法}+,\ \text{数乘}\cdot} \text{线性空间} \xrightarrow{\text{内积}(,)} \text{欧氏空间}V$$

1 Gram 矩阵

任意给定欧氏空间 V 和 V 中一组基 $\Gamma : \alpha_1, \cdots, \alpha_n$. $\forall u, v \in V$, 设 $u = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则

$$(u,v) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i, \sum_{j=1}^n b_j\alpha_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_ib_j(\alpha_i, \alpha_j)$$

记 $G = (g_{ij})_{n\times n}$, 其中 $g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$. 则

$$(u,v) = (a_1 \cdots a_n)\, G \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称 G 为 $(,)$ 在 Γ 下的度量矩阵, 也称为 Gram 方阵.

取定 V 中一组基 Γ, 则有集合上的双射 V 上的内积结构 $\xleftrightarrow{1-1}$ $\mathbb{R}$ 上 n 阶实对称、正定矩阵 $//(,) \longmapsto$,

性质 5.1.2

设 $\Gamma' : \beta_1, \cdots, \beta_n$ 是 V 的另一组基, $(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)T$. 记 $\tilde{G} = (\tilde{g}_{ij})_{n\times n}$ 为内积在基 Γ' 下的度量矩阵. 则有 $\tilde{G} = T^{\mathrm{T}}GT$.
设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. $A \overset{\text{相合合同}}{\sim} B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists$ 可逆 $T \in M_n(\mathbb{R})$, s.t. $B = T^{\mathrm{T}}AT$

注

(1) 同一个内积在不同基下的度量矩阵是相合的. (2) 相合是一种等价关系.

第 2 节 标准正交基

设 V 是 n 维欧氏空间. 则 V 中向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, (\alpha_i \neq 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant s) \xrightarrow{\alpha_i \perp \alpha_j, (\forall i \neq j)}$ 正交向量组 $s = n \longrightarrow$ 正交基 $\xrightarrow{|\alpha_i|=1}$ 标准正交基

定理 5.2.1: Gram-Schmidt 方法

从 n 维欧氏空间 V 的任意一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 出发, 都可以得到一组标准正交基.

注

(1) Gram-Schmidt 正交化方法的几何意义.
(2) 从证明过程可看出

$$(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n) = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)\, T,$$

其中 T 是一个主对角线元素为正数的上三角阵.
(3) 任意度量矩阵 G 都可分解为

$$G = T^{\mathrm{T}} T$$

其中 T 是一个主对角线元素为正数的上三角阵.

定理 5.2.2

n 维欧氏空间中, 任意一个正交向量组都可以扩充成一组正交基.

例 5.2.1: 构造正交基

设 $\alpha_1 = (1,1,1,2), \alpha_2 = (1,2,3,-3)$ 为 $\mathbb{R}^4$ 中一个正交向量组. 求 $\mathbb{R}^4$ 中向量 α_3, α_4, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 成为 $\mathbb{R}^4$ 中的一组正交基

解答：

方法 1: 设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3,x_4)$. 由 $(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3)=0$, 知

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

$(1,-2,1,0)$ 为方程组的解, $\therefore$ 可取 $\alpha_3=(1,-2,1,0)$.

(2) 设 $\alpha_4=(x_1,x_2,x_3,x_4)$. 由 $(\alpha_1,\alpha_4)=(\alpha_2,\alpha_4)=(\alpha_3,\alpha_4)=0$, 知

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3-3x_4=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$$

$(-25,-4,17,6)$ 为方程组的解, $\therefore$ 可取 $\alpha_4=(-25,-4,17,6)$.

方法 2: (1) 求 $\begin{cases} (\alpha_1,\alpha_3)=0 \\ (\alpha_2,\alpha_3)=0 \end{cases}$ 的基础解系, 得 ξ_1,ξ_2. 则 ξ_1 与 α_1,α_2 正交. 记 $\alpha_3=\xi_1$. (2) 将 ξ_2 作 Gram-Schmidt 正交化, 得

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \xi_2-(\xi_2,\alpha_1)\,\alpha_1-(\xi_2,\alpha_2)\,\alpha_2-(\xi_2,\alpha_3)\,\alpha_3 \\ &= \xi_2-(\xi_2,\alpha_3)\,\alpha_3. \end{aligned}$$

例 5.2.2: 从 Gram 矩阵出发求标准正交基

设 $(V,+,\cdot,(,))$, 是 3 维欧氏空间, 内积 (,, 在 V 的基 $\Gamma:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的度量矩阵为

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

求 V 的一组标准正交基 (用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示).

解答：

$$\eta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,\eta_1)\eta_1=\alpha_2-0=\alpha_2,\quad \eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{\alpha_2}{\sqrt{10}}$$

$$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,\eta_1)\eta_1-(\alpha_3,\eta_2)\eta_2=\alpha_3-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2$$

$$\Rightarrow \eta_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2+\alpha_3}{\sqrt{\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{5}&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{5}\\1\end{pmatrix}}}=\frac{\sqrt{15}}{3}(-\alpha_1+\alpha_3)+\frac{\sqrt{15}}{15}\alpha_2$$

其中，$\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{5}&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{5}\\1\end{pmatrix}=\frac{3}{5}$

例 5.2.3

给定 $\mathbb{R}_3[x]$ 的内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx.$$

求 $\mathbb{R}_3[x]$ 的一组标准正交基.

解：对基 $1,x,x^2,x^3$ 做 Gram-Schmidt 正交化，

$$|1|^2=\int_{-1}^{1}1^2\,\mathrm{d}x=2$$

因此 $|1|=\sqrt{2}$, 即 $e_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$. 由

$$|x|^2=\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

因此 $|x|=\sqrt{\frac{2}{3}}$, 即 $e_2=\sqrt{\frac{3}{2}}x$. 由

$$\begin{aligned}&x^2-(x^2,e_1)e_1-(x^2,e_2)e_2\\&=x^2-\left(\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\sqrt{\frac{1}{2}}-\left(\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{\frac{3}{2}}x\,\mathrm{d}x\right)\sqrt{\frac{3}{2}}x\\&=x^2-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

又因

$$\left|x^2-\frac{1}{3}\right|^2=\int_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{45}$$

因此 $|x^2-\frac{1}{3}|=\sqrt{\frac{8}{45}}$, 有 $e_3=\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$, 由

$$
\begin{aligned}
&x^3-\left(x^3,e_1\right)e_1-\left(x^3,e_2\right)e_2-\left(x^3,e_3\right)e_3\\
&=x^3-\left(\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\sqrt{\frac{1}{2}}-\left(\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{\frac{3}{2}}x\,\mathrm{d}x\right)\sqrt{\frac{3}{2}}x-\left(\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x\right)\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\\
&=x^3-\frac{3}{5}x
\end{aligned}
$$

又因

$$\left|x^3-\frac{3}{5}x\right|^2=\int_{-1}^{1}\left(x^6-\frac{6}{5}x^4+\frac{9}{25}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{175}$$

因此 $|x^3-\frac{3}{5}x|=\sqrt{\frac{8}{175}}$, 有

$$e_4=\sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)$$

因此

$$e_1=\sqrt{\frac{1}{2}},e_2=\sqrt{\frac{3}{2}}x,e_3=\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right),e_4=\sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)$$

为 $\mathbb{R}_3[x]$ 的一组标准正交基.

1 正交矩阵

设$T=M_n(\mathbb{R})$. 若T 满足$T^{\mathrm{T}}T=I_n$, 则称T 为正交矩阵,

性质 5.2.1

(1) 已知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的标准正交基, $(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)T$. 则 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 也是 V 的标准正交基 $\Longleftrightarrow$ T 是正交矩阵.

(2) $\forall A\in M_n(\mathbb{R})$, 设 $A=(\eta_1\cdots\eta_n)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$.

则 A 为正交矩阵 $\Rightarrow\begin{cases}\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\text{ 为}\mathbb{R}^n\text{ 的一组标准正交基.}\\ \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\text{ 为}\mathbb{R}^n\text{ 的一组标准正交基.}\end{cases}$

(3) I_n 为正交矩阵;

A,B 为 n 阶正交矩阵 $\Rightarrow AB$ 也为 n 阶正交矩阵.

A 为正交矩阵 $\Rightarrow A$ 可逆, 且 A^{-1} 也为正交矩阵.

注

设 $A\in M_n(\mathbb{R})$, 可逆. 则有矩阵的分解

$$A=QT$$

其中 $Q,T\in M_n(\mathbb{R}),Q$ 为正交矩阵, T 为上三角阵, 满足 $t_{ii}>0,(1\leqslant i\leqslant n)$, 且分解唯一.

考虑正交变换在正交基下对应的矩阵设 $\mathcal{A}\in L(V),\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的标准正交基

$$\left.\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{A}\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right) &= \left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)A\\ \text{设}A &= \left(\eta_1\eta_2\cdots\eta_n\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \mathcal{A}\left(\alpha_i\right)=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)\eta_i$$

(1) 若 $\mathcal{A}$ 为正交变换, 则 $\delta_{ij}=\left(\mathcal{A}\left(\alpha_i\right),\mathcal{A}\left(\alpha_j\right)\right)=\eta_i^{\mathrm{T}}\eta_j\Rightarrow A^{\mathrm{T}}A=I_n\Rightarrow A$ 为正交矩阵.

(2) A 为正交矩阵 $\Rightarrow A^{\mathrm{T}}A=I_n\Rightarrow\left(\mathcal{A}\left(\alpha_i\right),\mathcal{A}\left(\alpha_j\right)\right)=\eta_i^{\mathrm{T}}\eta_j=\delta_{ij}\Rightarrow\mathcal{A}\left(\alpha_1\right),\mathcal{A}\left(\alpha_2\right),\cdots,\mathcal{A}\left(\alpha_n\right)$ 为 V 的标准正交基 $\Rightarrow\mathcal{A}$ 为正交变换.

定理 5.2.3

设 $\mathcal{A}\in L(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 是正交变换 $\Longleftrightarrow\mathcal{A}$ 在 V 的任意标准正交基下对应的矩阵为正交矩阵. $\Longleftrightarrow\mathcal{A}$ 在 V 的某一标准正交基下对应的矩阵为正交矩阵.

注

$\mathcal{E}$ 正交变换

$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 正交变换 $\Rightarrow\mathcal{AB}$ 正交变换 $\mathcal{A}$ 正交变换 $\Rightarrow\mathcal{A}^{-1}$ 正交变换

性质 5.2.2

$\mathcal{A}$ 为第一类正交变换 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}|A|=1$; $\mathcal{A}$ 为第二类正交变换 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}|A|=-1$

$\mathbb{R}^2$ 中的第一类正交变换只有旋转; $\mathbb{R}^2$ 中的第二类正交变换只有反射.

性质 5.2.3

设 A 为 n 阶正交矩阵, 则

(1) A 在 $\mathbb{C}$ 上的 n 个特征值都满足 $|\lambda_0|=1$. 特别地, 若 λ_0 为 A 的实特征值, 则 $\lambda_0=1$ 或 -1.

(2) 若 $|A|=1$, 且 n 为奇数, 则 A 有特征值 1 ; 若 $|A|=-1$, 且 n 为奇数, 则 A 有特征值 -1.

2 对称变换

定理 5.2.4

设 $\mathcal{A}\in L(V)$. 若 $\forall\alpha,\beta\in V$, 都有

$$(\mathcal{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathcal{A}(\beta))$$

则称 $\mathcal{A}$ 是 V 中对称变换.

考虑对称变换在标准正交基下对应的矩阵设 $\mathcal{A}\in L(V),\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的标准正交基

$$\left.\begin{aligned}\Rightarrow\quad \mathcal{A}\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)&=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)A\\ \text{设}A=\left(\eta_1\eta_2\cdots\eta_n\right)&=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\mathcal{A}\left(\alpha_i\right)=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)\eta_i$$

$$\text{(1) 若 }\mathcal{A}\text{ 为对称变换, 则}\quad\left.\begin{aligned}\left(\mathcal{A}\left(\alpha_i\right),\alpha_j\right)&=\eta_i^{\mathrm{T}}e_j=a_{ji}\\ \left(\alpha_i,\mathcal{A}\left(\alpha_j\right)\right)&=e_i^{\mathrm{T}}\eta_j=a_{ij}\end{aligned}\right\}\Rightarrow A\text{ 实对称矩阵}$$

(2) 若 A 为实对称矩阵, 则 $\forall \alpha=\sum_{i=1}^{n} x_{i} \alpha_{i}, \beta=\sum_{j=1}^{n} y_{j} \alpha_{j}$, 由 $a_{ij}=a_{ji} \Rightarrow\left(\alpha_{i}, \mathcal{A}\left(\alpha_{j}\right)\right)=\left(\mathcal{A}\left(\alpha_{i}\right), \alpha_{j}\right), \forall i, j$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow(\mathcal{A}(\alpha), \beta) &=\left(\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i} \alpha_{i}\right), \sum_{j=1}^{n} y_{j} \alpha_{j}\right) \\
&=\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i} \mathcal{A}\left(\alpha_{i}\right), \sum_{j=1}^{n} y_{j} \alpha_{j}\right) \\
&=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i} y_{j}\left(\mathcal{A}\left(\alpha_{i}\right), \alpha_{j}\right) \\
&=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i} y_{j}\left(\alpha_{i}, \mathcal{A}\left(\alpha_{j}\right)\right) \\
&=\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i} \alpha_{i}, \sum_{j=1}^{n} y_{j} \mathcal{A}\left(\alpha_{j}\right)\right) \\
&=\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i} \alpha_{i}, \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{j} \alpha_{j}\right)\right) \\
&=(\alpha, \mathcal{A}(\beta)),
\end{aligned}
$$

$\therefore \mathcal{A}$ 为对称变换.

定理 5.2.5

设 $\mathcal{A} \in L(V)$, 则
$\mathcal{A}$ 是对称变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在 V 的任意标准正交基下对应的矩阵为对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在 V 的某一标准正交基下对应的矩阵为对称矩阵.

定理 5.2.6: 变换和正交性

$\mathcal{A}$ 是 V 中对称变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交
A 实对称方阵 $\Longleftrightarrow$ A 的属于不同特征值的特征向量相互正交.

性质 5.2.4

1、A 为 n 阶实对称方阵 $\Rightarrow$ A 有 n 个实特征值
2、设 A 为 n 阶实对称方阵, 则存在 n 阶正交矩阵 T, s.t. $T^{-1}AT$ 为对角阵

注

(1) A 实对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ A 可正交相似对角化.
(2) 设 $(V,(\,,))$ 欧氏空间, $\mathcal{A} \in L(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 是对称变换 $\Longleftrightarrow \exists V$ 中标准正交基 Γ, s.t. $\mathcal{A}$ 在 Γ 下的矩阵为对角阵

$\mathcal{A}$ 正交相似对角化的步骤:

Step(1) 先求出 A 的 n 个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

Step(2) 分情况讨论:

情况 (i) 若 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 则求出每个特征值对应的一个特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$. 可知 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 两两正交. 取 $\eta_i=\frac{\xi_i}{|\xi_i|}$, 则 η_i 仍是 A 的属于 λ_i 的特征向量, 且为单位向量.

$$\therefore \exists \text{ 正交矩阵 } T=(\eta_1\eta_2\cdots\eta_n), \text{ s.t. } T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

情况 (ii) 若 A 有 m 个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,(m<n)$. 则在每个 V_{λ_i} 中各取一组标准正交基 $\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{i,r_i}$. 取 $T=(\eta_{11},\cdots,\eta_{1,r_1},\eta_{21},\cdots,\eta_{2,r_2},\cdots,\eta_{m1},\cdots,\eta_{m,r_m})$,

$$\text{则 } T \text{ 为正交矩阵, 且 } T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&\lambda_1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&\lambda_m&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&\lambda_m\end{pmatrix}$$

例 5.2.4

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-2&2\\4&2&1\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵

解答： $p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -4\\ -2 & \lambda+2 & -2\\ -4 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda+3)^2$，$\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=-3$ (二重).

解方程组 $(6I-A)X=0$, 得特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. 单位化, 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

解方程组 $(-3I-A)X=0$, 得特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

标准正交化, 得 $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\eta_3=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$.

取 $T=(\eta_1\eta_2\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$

$$\text{则}T\text{ 为正交矩阵, 且}T^{-1}AT=\begin{pmatrix}6 & & \\ & -3 & \\ & & -3\end{pmatrix}$$

第 3 节　同构和子空间的正交补

第 4 节　Euclid 空间的线性变换

取定 n 维欧氏空间 $(V,(,))$,

定理 5.4.1

设 $\mathcal{A}\in L(V)$. 下列叙述等价

(1) $(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\beta))=(\alpha,\beta),\forall\alpha,\beta\in V$;

(2) $|\mathcal{A}(\alpha)|=|\alpha|,\forall\alpha\in V$;

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的标准正交基 $\Rightarrow\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_n)$ 也是 V 的标准正交基.

注

(1) 满足定理中等价条件的 $\mathcal{A}$ 称为 V 的正交变换.

(2) $\mathcal{A}$ 是正交变换 $\Rightarrow\mathcal{A}$ 保持向量间的夹角. 反之未必!

第 5 节　酉空间

第 6 节　正交群 $SO(n)$、对称性

第六章　　实二次型

第 1 节　双线性函数

定理 6.1.1: 线性函数

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $\varphi: V \longrightarrow \mathbb{F}$ 是集合间的映射.

φ 是 V 上的线性函数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta) \\ \varphi(\lambda\alpha)=\lambda\varphi(\alpha) \end{cases}, (\forall \alpha, \beta, \lambda)$

记 $L(V, \mathbb{F})$ 为 V 上所有线性函数构成的集合.

注

取定 V 中一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 则有集合间的双射

$$\begin{aligned} L(V, \mathbb{F}) &\xrightarrow{\Phi} \mathbb{F}^n \\ \varphi &\longmapsto \left(\varphi\left(\alpha_1\right), \cdots, \varphi\left(\alpha_n\right)\right)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

定理 6.1.2: 双线性函数

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ 是集合间的映射.

φ 是 V 上的双线性函数

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \leftrightharpoons\left(\lambda_1 \alpha_1+\lambda_2 \alpha_2, \beta\right)=\lambda_1 \varphi\left(\alpha_1, \beta\right)+\lambda_2 \varphi\left(\alpha_2, \beta\right) \\ \varphi\left(\alpha, \mu_1 \beta_1+\mu_2 \beta_2\right)=\mu_1 \varphi\left(\alpha, \beta_1\right)+\mu_2 \varphi\left(\alpha, \beta_2\right) \end{cases}$$

$$\forall \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{F}.$$

记 $L_2(V, \mathbb{F})$ 为 V 上所有双线性函数构成的集合.

注

$V \times V$ 也是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 但是 φ 不是线性映射!

事实上, φ 可看作 $V \otimes_{\mathbb{F}} V \longrightarrow \mathbb{F}$ 的线性映射.

取定 V 中一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 则有集合间的双射

$$L_2(V, \mathbb{F}) \xrightarrow{\Phi} M_n(\mathbb{F})\ \varphi \quad \longmapsto \quad A=\begin{pmatrix} \varphi\left(\alpha_1, \alpha_1\right) & \cdots & \varphi\left(\alpha_1, \alpha_n\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi\left(\alpha_n, \alpha_1\right) & \cdots & \varphi\left(\alpha_n, \alpha_n\right) \end{pmatrix}$$

称 A 为 φ 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵.

定理 6.1.3: 对称双线性函数

φ 是 V 上的对称双线性函数 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\varphi \text{ 是} V \text{ 上的双线性函数,}\\ \varphi(\alpha,\beta)=\varphi(\beta,\alpha).\end{cases}$

记 $L_2^+(V,\mathbb{F})$ 为 V 上所有对称双线性函数构成的集合.

注

取定 V 中一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 则有集合间的双射 $L_2^+(V,\mathbb{F})\xrightarrow{\Phi}\{\mathbb{F}\text{ 上 } n \text{ 阶对称矩阵 }\}$

例 6.1.1

(1) 设 V 是欧氏空间, 则 V 上的内积 $(,):V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$, 就是 V 上的一个双线性函数, 与 $(,)$ 对应的矩阵就是度量矩阵.

(2) 设 $A,B\in M_n(\mathbb{F})$, 则 A 与 B 相合 $\Longleftrightarrow\exists\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 和 V 上双线性函数 φ, s.t. A,B 是 φ 在 V 的两组基下的矩阵.

(3) 设 V 是欧氏空间, 则 V 上的内积 $(,):V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$, 就是 V 上的一个对称双线性函数.

定理 6.1.4

对 V 上对称双线性函数 φ, 定义 $Q_\varphi:V\longrightarrow\mathbb{F}$.

$$\alpha\longmapsto\varphi(\alpha,\alpha)$$

称 Q_φ 为由 φ 决定的二次型函数.

注

(1) φ 不是线性函数!
(2) 显然, Q_φ 由 φ 唯一确定. 另一方面, 由 $\varphi(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=\varphi(\alpha,\alpha)+2\varphi(\alpha,\beta)+\varphi(\beta,\beta)$, 知 $\varphi(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\left(Q_\varphi(\alpha+\beta)-Q_\varphi(\alpha)-Q_\varphi(\beta)\right)$, φ 也由 Q_φ 确定.

设 $\Gamma:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 中一组基, 对称双线性函数 φ 在 Φ 下对应的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 则 $\forall u\in V, u=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, 记 $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, 有 $Q_\varphi(u)=\varphi(u,u)=X^{\mathrm{T}}AX=\Sigma_{i=1}^n\Sigma_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j,\quad(a_{ij}=a_{ji})$.

►称 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n\Sigma_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ 为 $\mathbb{F}$ 上一个 n 元二次型. A 称为二次型的矩阵, 也记为 A_f.

注

对 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V, 我们有以下相关研究对象 (1) V 上的对称双线性函数；(2) V 上的二次型函数；(3) $\mathbb{F}$ 上 n 元二次型；(4) $\mathbb{F}$ 上 n 阶对称矩阵。这些对象本质是同一个数学对象的不同表现形式.

定理 6.1.5: 对称双线性函数基本定理及推论

φ 为 V 上对称双线性函数 $\Rightarrow \exists V$ 的一组基 Γ, s.t. φ 在 Γ 下的矩阵为对角阵.
于是得到：★ 对称矩阵总是相合于对角阵.

第 2 节　二次型的标准形

1　配方法

定理 6.2.1

$$Q\left(x_1, \cdots, x_n\right)=\sum_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \left(a_{ij}=a_{ji}\right)$$

称为 $\mathbb{R}$ 上的 n 元二次型, 简称二次型.　$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 称为 $Q\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ 的矩阵.

设 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_n$ 是两组未定元. 关系式

$$(\star)\left\{\begin{aligned} x_1 &= p_{11} y_1+\cdots+p_{1n} y_n \\ x_2 &= p_{21} y_1+\cdots+p_{2n} y_n, \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= p_{n1} y_1+\cdots+p_{nn} y_n, \end{aligned}\right. \qquad \left(p_{ij} \in \mathbb{R}\right)$$

称为由 $x_1, \cdots, x_n$ 到 $y_1, \cdots, y_n$ 的一个线性替换. 当 P 可逆时, 称 $(\star)$ 式为非退化的线性替换.

定理 6.2.2

任一实二次型都可通过非退化的线性替换变成平方和的形式.

$$b_1 y_1^2+b_2 y_2^2+\cdots+b_n y_n^2 \longrightarrow Q\left(x_1, \cdots, x_n\right) \text{ 的标准形}$$

例 6.2.1

用配平方法将二次型化为标准形, 并求相应的可逆线性变换.

$$Q\left(x_1, x_2, x_3\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1 x_2+x_1 x_3+x_2 x_3$$

$$
\begin{aligned}
Q\left(x_{1}, x_{2}, x_{3}\right) &= \left(x_{1}^{2}+x_{1} x_{2}+x_{1} x_{3}\right)+x_{2}^{2}+x_{3}^{2}+x_{2} x_{3} \\
&=\left(x_{1}+\frac{1}{2} x_{2}+\frac{1}{2} x_{3}\right)^{2}-\frac{1}{4} x_{2}^{2}-\frac{1}{4} x_{3}^{2}-\frac{1}{2} x_{2} x_{3}+x_{2}^{2}+x_{3}^{2}+x_{2} x_{3} \\
&=\left(x_{1}+\frac{1}{2} x_{2}+\frac{1}{2} x_{3}\right)^{2}+\frac{3}{4} x_{2}^{2}+\frac{3}{4} x_{3}^{2}+\frac{1}{2} x_{2} x_{3}
\end{aligned}
$$

令 $\left\{\begin{array}{l} y_{1}=x_{1}+\frac{1}{2} x_{2}+\frac{1}{2} x_{3} \\ y_{2}=x_{2} \\ y_{3}=x_{3} \end{array}\right.$

$$
\begin{aligned}
& Q\left(x_{1}, x_{2}, x_{3}\right) \\
=& y_{1}^{2}+\frac{3}{4} y_{2}^{2}+\frac{3}{4} y_{3}^{2}+\frac{1}{2} y_{2} y_{3} \\
=& y_{1}^{2}+\frac{3}{4}\left(y_{2}^{2}+\frac{2}{3} y_{2} y_{3}\right)+\frac{3}{4} y_{3}^{2} \\
=& y_{1}^{2}+\frac{3}{4}\left(y_{2}+\frac{1}{3} y_{3}\right)^{2}-\frac{1}{12} y_{3}^{2}+\frac{3}{4} y_{3}^{2} \\
=& y_{1}^{2}+\frac{3}{4}\left(y_{2}+\frac{1}{3} y_{3}\right)^{2}+\frac{2}{3} y_{3}^{2}
\end{aligned}
$$

令 $\left\{\begin{array}{l} z_{1}=y_{1} \\ z_{2}=y_{2}+\frac{1}{3} y_{3}, \\ z_{3}=y_{3} \end{array}\right.$ 则 $Q\left(x_{1}, x_{2}, x_{3}\right)=z_{1}^{2}+\frac{3}{4} z_{2}^{2}+\frac{2}{3} z_{3}^{2}$.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_{1} \\ z_{2} \\ z_{3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1} \\ y_{2} \\ y_{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

所做的非退化线性替换为 $\begin{pmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} z_{1} \\ z_{2} \\ z_{3} \end{pmatrix}$ 其中 $P=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例 6.2.2

用配平方法将二次型化为标准形, 并求相应的可逆线性变换

$$
Q\left(x_{1}, x_{2}, x_{3}, x_{4}\right)=x_{1} x_{2}+x_{2} x_{3}+x_{3} x_{4}+x_{4} x_{1}
$$

令$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$

$$\begin{aligned} & Q(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ = & y_1^2 - y_2^2 + (y_1 - y_2) y_3 + y_3 y_4 + y_4 (y_1 + y_2) \\ = & \left(y_1^2 + y_1 y_3 + y_1 y_4\right) - y_2^2 - y_2 y_3 + y_2 y_4 + y_3 y_4 \\ = & \left(y_1 + \frac{1}{2} y_3 + \frac{1}{2} y_4\right)^2 - \frac{1}{4} y_3^2 - \frac{1}{4} y_4^2 - \frac{1}{2} y_3 y_4 - y_2^2 - y_2 y_3 + y_2 y_4 + y_3 y_4 \end{aligned}$$

令$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2} y_3 + \frac{1}{2} y_4 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \\ z_4 = y_4 \end{cases}$，则

$$\begin{aligned} & Q(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ = & z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_3 + z_2 z_4 - \frac{1}{4} z_3^2 - \frac{1}{4} z_4^2 + \frac{1}{2} z_3 z_4 \\ = & z_1^2 - \left(z_2 + \frac{1}{2} z_3 - \frac{1}{2} z_4\right)^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} u_1 = z_1 \\ u_2 = z_2 + \frac{1}{2} z_3 - \frac{1}{2} z_4, \\ u_3 = z_3 \\ u_4 = z_4 \end{cases}$ 则 $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = u_1^2 - u_2^2$ 所做的非退化线性替换为

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

定理 6.2.3

设 A 为实对称矩阵, 则存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$, s.t.

$$
P_s^{\mathrm{T}} \cdots P_2^{\mathrm{T}} P_1^{\mathrm{T}} A P_1 P_2 \cdots P_s = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}
$$

2 初等变换法

对 A 做成对的初等行、列变换（必须一次行 + 一次列交替进行），可得

$$
\begin{pmatrix} A \\ \hline I_n \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} P^{\mathrm{T}} A P \\ \hline I_n P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \\ \hline & P & \end{pmatrix}
$$

$$
(A \mid I_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (P^{\mathrm{T}} A P \mid P^{\mathrm{T}} I_n) = \left(\begin{array}{ccc|c} * & & & \\ & \ddots & & P^{\mathrm{T}} \\ & & * & \end{array}\right)
$$

例 6.2.3

$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3$

$$\begin{pmatrix} A \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2c_1\to c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2\to c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是原二次型的标准形为 $\tilde{Q}(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2-2y_3^2.$；$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例 6.2.4

$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2\to c_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\to r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1\to r_3]{-\frac{1}{2}r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-c_1\to c_3]{-\frac{1}{2}c_1\to c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2c_2\to c_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{D},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right), \quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3　正交变换法

Step(1) 写出二次型的矩阵 A

Step(2) 求出 A 的特征值，得 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

Step(3) 求出对应的特征向量

Step(4) 将特征向量作施密特正交变换，得到正交的特征向量

Step(5) 将正交的特征向量单位化

Step(6) 将这些单位化向量排成矩阵，得到正交矩阵 P

注：化标准形的方法

$$\text{化} Q\left(x_1, \cdots, x_n\right) \text{ 为标准形的方法} \begin{cases} (1) \text{ 配平方法} \\ (2) \text{ 初等变换法} \\ (3) \text{ 正交变换法} \end{cases}$$

第 3 节　二次型的唯一性

定理 6.3.1: 惯性定理

任意实二次型都可通过非退化线性替换变成规范形.

$$y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_r^2 \quad \text{是} Q\left(x_1, \cdots, x_n\right) \text{ 的规范形}$$

规范形是唯一的.

注

$Q\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ 正惯性指数 s；负惯性指数 $r-s$；符号差 $2s-r$

例 6.3.1

(1) 考虑所有的 n 阶实对称矩阵. 在相合下有? 个等价类：考虑秩从 0 取到 n，正负惯性指数不大于秩，则共计 $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$；复数域只有正惯性指数，则有 $(n+1)$ 个

(2) 求 A 在相合下的规范形, 以及所用的非退化的线性替换. $A = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$, $\quad P =$

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 判断下列矩阵在 $\mathbb{C}$ 上是否相抵、相似, 在 $\mathbb{R}$ 上是否相合?

$$A=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

解答： $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(C)=3$；$A$ 特征值为 1,-1,2，B 特征值为 1,1,-2，C 特征值为-2,$\pm\sqrt{13}$；A,B 正惯性指数为 2，C 正惯性指数为 1。所以：三个都不相似，相抵（A，B，C），相合（A，B）。

第 4 节　正定二次型

定理 6.4.1: 正定

实二次型 $Q\left(x_1,\cdots,x_n\right)$ 称为正定的, 若对任意非零的 $\left(c_1,\cdots,c_n\right)\in\mathbb{R}^n$, 都有 $Q\left(c_1,\cdots,c_n\right)>0$. 实对称矩阵 A 称为正定的, 若二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 正定. (简记为 $A>0$)

注

$b_1x_1^2+\cdots+b_nx_n^2$ 正定 $\Longleftrightarrow b_i>0,(1\leqslant i\leqslant n)$;
非退化的线性替换保持二次型的正定性

注 : 正定等价命题

$Q\left(x_1,\cdots,x_n\right)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定:
$\Longleftrightarrow$ 它的正惯性指数为 n $\Longleftrightarrow$ 它的规范形为 I_n $\Longleftrightarrow$ A 的 n 个特征值都是正实数

定理 6.4.2: 正定的推论

$$A\text{ 正定}\Longleftrightarrow\exists\text{ 可逆矩阵}P,\text{ s.t. }A=P^{\mathrm{T}}P$$

$$A\text{ 正定}\Rightarrow\begin{cases}|A|>0\\ A^{-1}\text{ 正定}\end{cases}$$

$$Q\left(x_1,\cdots,x_n\right)=X^{\mathrm{T}}AX\text{ 正定}\Longleftrightarrow A\text{ 的顺序主子式皆大于零.}$$

注

$$A\text{ 的}k\text{ 阶顺序主子式}A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}$$

或者：$Q(x_1,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Longleftrightarrow$ A 的任意主子式$A\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_k\\i_1i_2\cdots i_k\end{pmatrix}>0.$

性质 6.4.1

(1) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定 $\Rightarrow\begin{cases}a_{ii}>0,(\forall i)\\\exists a_{kk},\ \text{s.t. }|a_{kk}|>|a_{ij}|,(\forall i\neq j)\end{cases}$

(2) 设 $M=\begin{pmatrix}A&C\\C^{\mathrm{T}}&B\end{pmatrix}$, 为实对称矩阵. 则 M 正定 $\Rightarrow A,B$ 都正定.

若 $M=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$, 为实对称矩阵. 则 M 正定 $\Longleftrightarrow A,B$ 都正定.

(3)A 正定: $\Longleftrightarrow$ A 的正惯性指数为 n.
$\Longleftrightarrow$ A 的 n 个特征值比为正实数.
$\Longleftrightarrow$ A 的规范形为 I_n.
$\Longleftrightarrow\exists$ 可逆矩阵 P, s.t. $A=P^{\mathrm{T}}P$.
$\Longleftrightarrow$ A 的 n 个顺序主子式全大于零.
$\Longleftrightarrow$ A 的主子式全大于零.

例 6.4.1

设有 n 元二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数, 试问: 当 $a_1,\cdots,a_n$ 满足何种条件时, $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型?

由对称性, 不妨设 $x_1\neq 0$. 显然, 我们有 $Q(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 等号成立当且仅当

$$x_1+a_1x_2=x_2+a_2x_3=\cdots=x_n+a_nx_1=0$$

$$x_1+a_1(-a_2)x_3=x_1+a_1(-a_2)(-a_3)x_4=\cdots=x_1(1-(-1)^na_1a_2\cdots a_n)=0$$

$$\Longrightarrow 1-(-1)^na_1a_2\cdots a_n=0$$

所以：$1-(-1)^na_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时, $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.

定理 6.4.3: 非正定

设 $Q(x_1,\cdots,x_n)$ 为一实二次型. 若对任意非零的 $(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{R}^n$, 都有 $Q(c_1,\cdots,c_n)<0$, 则称 $Q(x_1,\cdots,x_n)$ 为负定的.

$$\begin{aligned} &Q(c_1,\cdots,c_n)\geqslant 0 \quad \text{半正定的.}\\ &Q(c_1,\cdots,c_n)\leqslant 0 \quad \text{半负定的.}\end{aligned}$$

若 $Q(x_1,\cdots,x_n)$ 既不是半正定, 也不是半负定, 则称它为不定的.

证明

二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 负定的充分必要条件是 A 的奇数阶顺序主子式全小于零, 偶数阶顺序主子式全大于零.

解答： 因为 A 负定当且仅当 $-A$ 是正定，也就是 $-A$ 的任一 k 阶 (顺序) 主子式 $|-A_k|$ 大于零。利用行列式的性质每行提 -1 出来，即 $(-1)^k|A_k|>0$ 。

设 $\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n\end{pmatrix}$ 为 Q 的标准形, 则 $\begin{cases} Q \text{ 正定} \Longleftrightarrow b_i>0\\ Q \text{ 负定} \Longleftrightarrow b_i<0\\ Q \text{ 半正定} \Longleftrightarrow b_i\geqslant 0\\ Q \text{ 半负定} \Longleftrightarrow b_i\leqslant 0\\ Q \text{ 不定} \Longleftrightarrow b_i \text{ 中既存在正数,}\\ \qquad\qquad\quad \text{也存在负数}\end{cases}$

性质 6.4.2: 实对称阵

等价叙述:

(1) A 半正定.

(2) $\exists P\in M_n(\mathbb{R})$, s.t. $A=P^{\mathrm{T}}P$.

(3) A 的各阶主子式全大于等于零.

(4) $\forall t\in\mathbb{R}_{>0}, A+tI_n$ 正定.

(5) A 的所有特征值皆大于等于零.

(6) A 的规范形为 $\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

性质:

1. 实对称矩阵 A 的不同特征值对应的特征向量是正交的；
2. n 阶实对称矩阵 A 必可相似对角化，且对角阵上的元素即为特征值；
3. 若 A 有 k 重特征值 λ 则必有 k 个线性无关特征向量或者说 $r(\lambda E-A)=n-k$;
4. A 的秩等于非零特征值的个数；
5. n 阶实对称矩阵 A 有 n 个特征值的话 (含重根)，若 $r(A)<n$ ，则有 $n-r(A)$ 个零特征值；
6. A 的特征值均为实数，特征向量均为实向量。

第 5 节　二次曲线

二次曲线的一般方程形式

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

定理 6.5.1: 等距变换

映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 称为等距变换, 若满足

$$|\mathcal{A}(X)-\mathcal{A}(Y)|=|X-Y|,\quad (\forall X,Y\in\mathbb{R}^n)$$

▶平移变换：取定 $X_0\in\mathbb{R}^n$, 则 $\mathcal{P}_{X_0}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 为平移变换.

$$Y\longmapsto Y+X_0$$

注

(1) 平移是等距变换, 但不是线性变换. (2) $\mathcal{P}_{X_0}\mathcal{P}_{X_1}=\mathcal{P}_{X_1}\mathcal{P}_{X_0}=\mathcal{P}_{X_0}+X_1$. (3) $(\mathcal{P}_{X_0})^{-1}=\mathcal{P}-X_0$.

证明 : 等距变换

(1) $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 都是等距变换 $\Rightarrow\mathcal{B}\mathcal{A}$ 也是等距变换.

(2) $\mathcal{A}$ 正交变换 $\Longleftrightarrow\begin{cases}\mathcal{A}\text{ 等距变换}\\ \mathcal{A}(0)=0\end{cases}$

(3) 任一等距变换可唯一分解为一个正交变换与一个平移变换的合成.

(4) 等距变换可逆.

因为：设 A 为实对称矩阵, 则

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&\beta\\ \beta^{\mathrm{T}}&c\end{pmatrix}\leqslant\operatorname{rank}(A)+1\Longleftrightarrow\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\beta)$$

定理 6.5.2: 二次超曲面的度量分类定理

设 A 为实对称矩阵, 则 $\begin{pmatrix}A&\beta\\ \beta^{\mathrm{T}}&c\end{pmatrix}$ 有以下三种情形

(1) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&\beta\\ \beta^{\mathrm{T}}&c\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)$. 此时存在正交矩阵 T 及 $\delta\in\mathbb{R}^n$, s.t.

$$\begin{pmatrix}T^{\mathrm{T}}&0\\ \delta^{\mathrm{T}}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\beta\\ \beta^{\mathrm{T}}&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T&\delta\\ 0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\ddots&&\\&&\lambda_n&\\&&&0\end{pmatrix}.$$

(2) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&\beta\\ \beta^{\mathrm{T}}&c\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+1$. 此时存在正交矩阵 T 及 $\delta\in\mathbb{R}^n$, s.t.

$$\begin{pmatrix}T^{\mathrm{T}}&0\\ \delta^{\mathrm{T}}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\beta\\ \beta^{\mathrm{T}}&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T&\delta\\ 0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\ddots&&\\&&\lambda_n&\\&&&c_1\end{pmatrix},\text{ 其中 }c_1\neq0.$$

(3) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + 2$. 此时存在正交矩阵 T 及 $\delta \in \mathbb{R}^n$,s.t.

$$\begin{pmatrix} T^{\mathrm{T}} & 0 \\ \delta^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_s & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & c_1 \\ & & & & & & c_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{其中 } c_1 \neq 0.$$

例 6.5.1: 判断二次曲线类型

考虑二次曲线 $4x^2 + 8xy + 4y^2 + 13x + 3y + 4 = 0$

$$\text{记}A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{则}p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -4 \\ -4 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 8)$$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 0$.

解方程组 $(8I - A)X = 0$, 得属于 8 的特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 单位化, 得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

解方程组 $-AX = 0$, 得属于 0 的特征向量 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 单位化, 得 $\eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

$\therefore \exists$ 正交矩阵 $P = (\eta_1 \eta_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, s.t. $P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 8 & \\ & 0 \end{pmatrix}$.

做线性替换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $(\star)$ 化为 $8\left(x'\right)^2 + 8\sqrt{2}x' + 5\sqrt{2}y' + 4 = 0$.

▶接下来去掉一次项:

$$\text{配方, 得}8\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 5\sqrt{2}y' = 0 \quad (\star\star). \text{ 令} \begin{cases} \tilde{x} = x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tilde{y} = y' \end{cases}$$

$$\text{方程}(\star\star)\text{ 化为}8\tilde{x}^2 + 5\sqrt{2}\tilde{y} = 0, \text{即}\tilde{y} = -\frac{4\sqrt{2}}{5}\tilde{x}^2, \text{为抛物线.}$$

性质 6.5.1: 二次曲面的分类

二次曲面

- 椭球面型—— 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
- 双曲面型
  - 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
  - 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
- 抛物面型
  - 椭圆抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$
  - 双曲抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$
- 锥面—— 二次锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{{y^2}^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
- 柱面
  - 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
  - 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
  - 抛物柱面：$y^2=2px$

第七章 中国科大线性代数历年考题选解

第 1 节 2019-2020 年线性代数 B1 秋季期末

1. ($4 \times 6 = 24$ 分) 填空题. (1) 设三维向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta = 2$, 则 $\beta\alpha^T$ 的特征值为

解答： 若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}, m \geq n$，根据 $|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|$
所以有，$\left|\lambda I_3 - \beta\alpha^T\right| = \lambda^{3-1}\left(\lambda - \alpha^T\beta\right) = \lambda^2(\lambda - 2)$, 所以特征值为 0 和 2 .

(2) 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, I 为单位矩阵. 若 A 的特征值为 $1, 2, 3, 4$, 则 $|B^{-1} - I| =$

解答： 据相似矩阵特性，B 的特征值为$1, 2, 3, 4$, 则B^{-1} 的特征值为$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, $\left|B^{-1} - I\right| = 0$

(3) 已知矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a + b =$

解答： $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)[(\lambda - 1)(\lambda - a) - 2] \Rightarrow b = -2, a = 0, \quad a + b = -2$

(4) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$

解答： A 是第三类初等矩阵, 根据性质逆矩阵是 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 且 $\operatorname{rank} A = 2$, 则 $a =$

解答： 设A 的三个列向量分别为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 显然$\alpha_1$ 与α_3 线性无关, 又A 的秩为2

$$\alpha_2 = \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_3$$

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = -3 \\ 5\lambda + 3\mu = 0 \end{cases}$$

$$a = -9 + 15 = \lambda + \mu = 6.$$

(6) 设三阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$, 且 $a_{11} = a_{12} = a_{13}$, 则 $a_{11} =$

解答：

$$A^{*}=|A|\cdot A^{-1}=A^{T}$$

▶此处重点在于讨论!!!

(1) $\det(A)=0$ 时, $a_{11}=a_{12}=a_{13}=0$,

(2) $\det(A)\neq 0$ 时，$|A^{*}|=|A|^{n-1}=|A|^{2}=|A^{T}|=|A|\Rightarrow|A|=1$

$$\Rightarrow A^{-1}=A^{T}, AA^{T}=I, a_{11}^{2}+a_{12}^{2}+a_{13}^{2}=1$$

$a_{11}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. 综上, $a_{11}=0$ 或 $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. (5 ×4 = 20 分) 判断题. (1) $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 是否相似? 是否相合?

(2) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, $AB=I_m$, 则 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B$ 是否成立?

(3) $a_{ij}=\frac{i}{j}, i,j=1,\cdots,n$, 二次型 $f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^{2}$ 的符号差是否为 n ?

(4) 设方阵 A 的每行元素之和都为 1 , 那么 A^{5} 的每行元素之和是否为 1 ?

解答：

(1) 由于 $\operatorname{tr}(A)\neq\operatorname{tr}(B)$, 故不相似,. 对 A 进行合同变换得 $C=P^{T}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，二者正惯性指数均为 2 , 负惯性指数均为 0 , 故相合（▶相合要求秩和正负惯性指数相同）

注：相似、相合、相抵的判定方法

相抵: 秩相同
相合: 秩相同, 正负惯性指数相同
相似: 特征矩阵等价，秩相同, 特征多项式相同, 进而有相同的行列式和迹

(2) $m=\operatorname{rank}(AB)\leq\operatorname{rank}(A)\leq m$，故 A,B 秩相等

(3) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^{T}A^{T}Ax$$

$\because\operatorname{rank}\left(A^{T}A\right)=\operatorname{rank}(A)=1$ 因此二次型的规范形为 $\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}$，符号差为 1

(4) 是的:

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n a_{1i}\\\sum_{i=1}^n a_{2i}\\\vdots\\\sum_{i=1}^n a_{ni}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\Longrightarrow A^5\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=A^4\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

3. (56 分) 计算及证明题. (1) (8 分) 设 3 阶实对称正交方阵 A 非负定, $|A|=-1$, 且 $(1,1,1)^T$ 为 -1 的特征向量. 求 A.

解答： 根据实对称正交矩阵, 所以 A 的特征值为 -1 或 1,

$\because |A|=-1$, 且 A 非负定, 故 A 的三个特征值为 $1,1,-1$

$$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P^T$$

$$A=P\left(I+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\right)P^T=I+P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}P^T$$

$$=I+\begin{pmatrix}*&*&\frac{1}{\sqrt3}\\ *&*&\frac{1}{\sqrt3}\\ *&*&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}*&*&*\\ *&*&*\\ \frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac13&-\frac23&-\frac23\\-\frac23&\frac13&-\frac23\\-\frac23&-\frac23&\frac13\end{pmatrix}$$

(2) (8 分) 令 $A=\begin{pmatrix}1&\frac12&0\\\frac12&1&-\frac12\\\frac12&\frac12&\frac12\end{pmatrix}$, $\alpha=(3,-1,2)^T$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}|A^n\alpha|$.

解答：

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-\frac12&0\\-\frac12&\lambda-1&\frac12\\-\frac12&-\frac12&\lambda-\frac12\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\left(\lambda-\frac12\right)$$

$$\therefore \lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\frac12$$

$$\lambda=1,(I-A)x=0,\Rightarrow x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=\frac12,\left(\frac12I-A\right)x=0\Rightarrow x_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$\because Ax_1 = x_1, \quad Ax_2 = \dfrac{x_2}{2}$

$$A^n a = A^n\left(2x_1 + x_2\right) = 2x_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n x_2 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|A^n a\right| = 2\sqrt{2}$$

(3) (8 分) 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换, $n>1, \alpha\in V$. 设 $T^n\alpha=0$, 但是 $T^{n-1}\alpha\neq 0$.

(a) 证明: 向量组 $\alpha, T\alpha, \cdots, T^{n-1}\alpha$ 线性无关. (b) 证明: T 不能对角化.

解答：

(a) 设 $k_1\alpha + k_2T\alpha + \cdots + k_nT^{n-1}\alpha = 0, k_i\in\mathbb{F}$

$$T^{n-1}\left(k_1\alpha + k_2T\alpha + \cdots + k_nT^{n-1}\alpha\right) = 0$$
$$\Rightarrow k_1T^{n-1}\alpha + k_2T^n\alpha + \cdots + k_nT^{2n-2}\alpha = 0$$

由于 $T^{n-1}\alpha \ngeqslant 0$, 而 $T^m\alpha = 0, m\geqslant n$，得到 $k_i=0$，故向量组 $\alpha, T\alpha, \cdots, T^{n-1}\alpha$ 线性无关

(b) 对基进行线性变换得到过渡矩阵:

$$T\left(a, Ta, \cdots, T^{n-1}a\right) = \left(a, Ta, \cdots, T^{n-1}a\right)\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$，特征值为 $0, Tx=0$, 所以 $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 不存在 n 个线性无关的特征向量, 故 T 不能对角化.

(4) (6 分) 设 $K=\{c_1+c_2x+c_3\cos x \mid c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\}$ 在通常的函数加法和数乘下构成线性空间. 定义内积 $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 从 $1, x, \cos x$ 出发, 构造 K 的一个标准正交基.

解答：

因为: $\begin{cases} \langle 1,x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x\ \mathrm{d}x = 0 \\ \langle 1,\cos x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\ \mathrm{d}x = 0 \\ \langle x,\cos x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\ \mathrm{d}x = 0 \end{cases}$ 故两两正交，各自模长为: $\begin{cases} \langle 1,1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1\ \mathrm{d}x = 2\pi \\ \langle x,x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\ \mathrm{d}x = \frac{2\pi^3}{3} \\ \langle \cos x,\cos x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \pi \end{cases}$

一个标准正交基为: $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_2 = \dfrac{x}{\pi\sqrt{\frac{2\pi}{3}}}, e_3 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$

(5) (8 分) 设 $A=\begin{pmatrix}10&1&2&3&3\\1&10&2&1&0\\2&2&10&3&x\\3&1&3&10&x\\3&0&x&x&10\end{pmatrix}$, 证明: 当 $|x|<3$ 时, $|A|<10^5$.

解答: 此题给出三种方法:

方法 (1): 分块矩阵部分化为零元: 设 $A=\begin{pmatrix}A_4&\alpha\\\alpha^T&10\end{pmatrix}$, 其中 $\alpha=(3,0,x,x)^T$，由于 A 正定, 故其各阶顺序主子式大于 0 , A_4 正定（$\alpha^TA_4\alpha>0$），接着得到部分零元

$$\begin{pmatrix}I_4&O\\-\alpha^TA_4^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_4&\alpha\\\alpha^T&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_4&\alpha\\O&10-\alpha^TA_4^{-1}\alpha\end{pmatrix}$$

两边取行列式,

$$|A|=|A_4|\left(10-\alpha^TA_4^{-1}\alpha\right)<10\cdot|A_4|<10^2\,|A_3|<\cdots<10^5$$

方法 (2): 采取已知关系：$|A|\leqslant a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$，说明等号无法取到（仅存在对角元取等)。

方法 (3): 根据行列式和迹的关系：$|A|\leq\left(\frac{1}{5}\operatorname{tr}(A)\right)^5=10^5$，等号无法取到（特征值不等）

(6) (8 分) 设 t 为参数, 讨论二次曲面的类型: $x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+x_3-10=0$.

解答:

$$\Rightarrow(2x_1+x_2)^2-3\left(x_1-\frac{x_3}{3}\right)^2+\left(t+\frac{1}{3}\right)x_3^2+x_3-10=0$$

(i) $t=-\frac{1}{3}$，$y_1^2-3y_2^2+y_3-10=0$, 为双曲抛物面

(ii) $t\neq-\frac{1}{3}$，以 $t=-\frac{43}{120}$ 分界:

$$y_1^2-y_2^2+\left(t+\frac{1}{3}\right)y_3^2=\frac{120t+43}{12t+4}$$

- 当 $t>-\frac{1}{3}$ 时, $-\frac{43}{120}<t<-\frac{1}{3}$ 时, 为单叶双曲面.

-当 $t=-\frac{43}{120}$ 时, 为二次锥面. -当 $t<-\frac{43}{120}$ 时, 为双叶双曲面.

(7) (10 分) 设 K 是次数小于 3 的实系数多项式在通常的数乘及加法运算下构成的线性空间. (a) 证明: $1,x+2,x^2+x+3$ 是 K 的一个基. (b) 求线性变换 $Tf:=f''-f$ 在这个基下的矩阵. (c) 求 T 的特征向量.

解答:

(a) $k_1\cdot1+k_2(x+2)+k_3\left(x^2+x+3\right)=0\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$，故线性无关，形成一个基

(b) $f''-f=(-1,-x-2,-x^2-x-1)=(1,x+2,x^2+x+3)\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(c) 过渡矩阵：$T=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，求特征值得到 $\lambda=-1,\quad(-I-A)x=0$

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

故 T 的特征向量为 $c_1+c_2(x+2),c_1,c_2$ 不全为零

第 2 节 2019-2020 年线性代数 B1 春季期末

1. (4 分 $\times 6=24$ 分) 填空题.

(1) 已知实系数线性方程组 $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=6\\x_1+ax_2+2x_3=9\\2x_1-x_2+3x_3=3\end{cases}$ 有唯一解, 则 a 满足的条件是

解答： 对于非齐次线性方程组唯一解，要求秩为 n，即 $|A|\neq 0,\Rightarrow a\neq -\dfrac{9}{11}$

(2) 已知 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$, 那么 $A^3=$.

解答： 掌握递推和拆分：$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(123)$，$A^3=A\cdot 14^2=\begin{pmatrix}196&392&1188\\392&784&2376\\1188&2376&3564\end{pmatrix}$

(3) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}^4$ 线性无关, 则线性子空间 $V=\operatorname{span}\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\}$ 的维数是

解答： 寻找极大无关组，维数是 2：$V=\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3\}$

(4) 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}y&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $x=,y=$

解答： 线性变换矩阵是相似的，相似下特征多项式为不变量，进而迹相同，

(5) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 按原顺序 Schmidt 正交化得到的标准正交基为

解答： $e_1=\alpha_1, e_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2, e_3=\dfrac{\alpha_3-\alpha_1}{\|\alpha_3-\alpha_1\|}=\alpha_3-\alpha_1$

(6) 若实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2tx_2x_3$ 正定, 则参数 t 满足

解答：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 6 \end{vmatrix}>0, |A|>0$$

$$\begin{cases} 12-t^2>0 \\ -t^2+2t+4>0 \end{cases} \Rightarrow 1-\sqrt{5}<t<1+\sqrt{5}$$

2. (5 分 $\times 4=20$ 分) 判断题.

(1) 已知向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关且可以由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表示, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

(2) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似.

(3) 数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶正交阵的行向量组或列向量组都构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

(4) 记 V 是所有 3 阶实方阵全体构成的集合, 它在记作加法和数乘下构成一个 9 维实线性空间, 那么 V 中对称方阵全体构成它的一个 6 维子空间.

解答：

(1) 正确

(2) 错误。$\operatorname{rank}(I-A)=1\neq\operatorname{rank}(I-I_2)=0$ 故不相似

(3) 正确。设 $AA^\top=A^\top A=I$，将其行列分块 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1^\top \\ \vdots \\ \alpha_n^\top \end{pmatrix}=(\beta_1\cdots\beta_n)$，其中 $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}^{n\times 1}$，

因为是正交矩阵，所以有 $\alpha_i^\top\alpha_j=\delta_ij=\beta_i^\top\beta_j(\forall i,j)$，故其行列向量均为一组标准正交基

(4) 正确。$E_{ij}+E_{ji}(1\leqslant i<j\leqslant 3)$ 这六个元素为对称方阵标准正交基

3. (12 分) 设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A, 满足 $\operatorname{rank}A=3$. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的 3 个解, 其中 $\alpha_1=(1,-2,-3,4)^T, 5\alpha_2-2\alpha_3=(2,0,2,0)^T$.

(1) 证明: 这个线性方程组是非齐次的. (2) 求出这个线性方程组的通解.

解答：

(1) 若是齐次方程组，则解空间维数是 $n-\operatorname{rank}(A)=1$, 但是已经出现了两个线性无关的解，说明矛盾，则是非齐次方程组

(2) 求基：$5\left(\alpha_2-\alpha_1\right)-2\left(\alpha_3-\alpha_1\right)=\left(5\alpha_2-2\alpha_3\right)-3\alpha_1=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 9 & -4\end{pmatrix}^{\top}=\eta$

非齐次通解为：$\alpha_1+\eta=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\6\\9\\-4\end{pmatrix}$

4. (14 分) 用初等变换法求矩阵 A 的逆与行列式, 其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\-1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n\\-1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\-1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n\\-1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0\end{pmatrix}$.

解答： 通过初等变换得到上三角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\0 & 2 & 2\times 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n\\0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$$

因此行列式为 $n\,!$.

通过初等变换求得逆矩阵为

(i) n 为奇数

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \cdots & 1 & -1\\\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\-\frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & -\frac{2}{n-1}\\\frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$$

(ii) n 为偶数

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & -\frac{2}{n-1} \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

5. (14 分) $\mathbb{R}^3$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\alpha_1=(2,3,5)^T,\alpha_2=(0,1,2)^T,\alpha_3=(1,0,0)^T$ 分别映为 $\beta_1=(1,2,0)^T,\beta_2=(2,4,-1)^T,\beta_3=(3,0,5)^T$. 求:

(1) $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 A. (2) $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵 B.

解答：

$$(1)\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 9 & -5 \\ -10 & -23 & 15 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(2)\qquad (e_1,e_2,e_3)T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\quad T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=(T^{-1})^{-1}AT^{-1}=TAT^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 9 & -5 \\ -10 & -23 & 15 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -20 & 11 \\ 0 & -16 & 10 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix}$$

6. (16 分) 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出相应的正交变换矩阵. (2) 判断 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

解答：

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $|\lambda I-A|=(\lambda-5)^2(\lambda+4)\Rightarrow\lambda_1=5(2\text{ 重}),\lambda_2=-4(1\text{ 重})$

$$(i)\lambda=5,\quad \eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$，正交化是关键一步

$$\beta_2=\eta_2-(\eta_2,e_1)\,e_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$$

$$(ii)\lambda=4,\quad \eta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\quad e_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{2\sqrt{2}}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(5,\quad 5,\quad -4)$$

(2) $\tilde{Q}\,(x_1,x_2,x_3)\Big|_{x=Py}=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2=1$ 　表示单叶双曲面

第 3 节　2020-2021 年线性代数 B1 秋季期末

1. (5 分 $\times 5=25$ 分) 填空题.

(1) 方阵 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$ 的特征值是

解答： 根据特征多项式

$$|\lambda I-A|=\left(\lambda^2-3\right)(\lambda-2)$$

所以特征值为 $\pm\sqrt{3},2$.

(2) 3 阶实对称矩阵组成的集合恰有个相合等价类.

解答： n 阶实对称矩阵相合等价类的个数: $\binom{n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$，故有 10 个

因为每个实对称矩阵必唯一的相合于 $\begin{pmatrix}I_r&&\\&-I_s&\\&&O\end{pmatrix}$，问题等价于 $a+b+c=n$ 有多少组非负整数解, 即 $A+B+C=n+3$ 有多多组正整数解，

(3) 实二次型 $Q\,(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\left(x_i-x_j\right)^2$ 的正惯性指数等于

解答： 实对称矩阵的正惯性指数就是它的正特征值个数, 二次型对应矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}|\lambda I-A|&=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&1&1\\1&\lambda-3&1&1\\1&1&\lambda-3&1\\1&1&1&\lambda-3\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\lambda&1&1&1\\\lambda&\lambda-3&1&1\\\lambda&1&\lambda-3&1\\\lambda&1&1&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&\lambda-4&0&0\\1&0&\lambda-4&0\\1&0&0&\lambda-4\end{vmatrix}\\&=\lambda(\lambda-4)^3\end{aligned}$$

故为 3

(4) 设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\\x_3\end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中任意的向量, 则 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵是

解答： $\begin{pmatrix}x_1\\0\\x_3\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)T=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(5) 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧式空间 V 上的线性变换: $\mathscr{A}(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\gamma)\gamma$, 其中 γ 是 V 中给定的单位向量, 则 $\mathscr{A}$ 的 n 个特征值为

解答： 将 γ 扼充为 V 的标准正交基 $\gamma,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$, 则

$$\mathscr{A}(\gamma)=\gamma-2(\gamma,\gamma)\gamma=-\gamma,\mathscr{A}(\gamma_i)=\gamma_i-2(\gamma_i,\gamma)\gamma=\gamma_i,i=2,3,\cdots,n$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\gamma,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 下的矩阵为 $A=\operatorname{diag}(-1,1,\cdots,1)$,
从而它的特征值为 -1(1 重), 1($n-1$ 重). 说明 $\mathscr{A}$ 是第二类正交变换.

2. (5 分 $\times 5=25$ 分) 判断题.

(1) n 维线性空间 V 中同一个线性变换在两组不同的基下的矩阵彼此相合.

(2) 任何一个 n 阶实方阵都实相似于上三角矩阵.

(3) 每一个正交矩阵都正交相似于对角矩阵.

(4) 设 A, B 都是 n 阶实方阵, 若 A 可逆, 则 AB 与 BA 相似.

(5) 设 A 是 n 阶实对称方阵, 若 A 的每一个顺序主子式都是非负的, 则 A 半正定.

解答：

(1) 错误. 同一个线性变换在两组不同的基下的矩阵彼此相似, 若要相合, 则需满足 $P^T = P^{-1}$. 即必为正交基.

(2) 错误。(已知任何一个 n 阶复方阵都复相似于上三角矩阵)

实相似指的是 $P^{-1}AP$ 中的矩阵 P 为实数方阵, 反例 (这个反例十分重要): $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\pm \mathrm{i}$, 若 A 可实相似于上三角矩阵, 则存在实方阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & * \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

左边为实数方阵. 而右边对角线上为复数. 矛盾，故 A 不可实相似于上三角矩阵.

(3) 错误，根据定理，实对称矩阵才能正交相似对角化，下面给出说明。

设 A 为正交矩阵, 若存在正交矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T$$

由此可知 A 为对称矩阵, 而正交矩阵不一定对称, 如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) 正确，根据 $B^{-1}(BA)B = AB$, 或者 $|\lambda I_n - AB| = |\lambda I_n - BA|$

(5) 错误。如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 各阶顺序主子式均为 0 , 但半负定.!! 所有主子式都非你才能推出半正定.

3. (12 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 将 $\alpha_1 = (2,3,5)^T, \alpha_2 = (0,1,2)^T, \alpha_3 = (1,0,0)^T$ 变换为 $\beta_1 = (1,2,0)^T, \beta_2 = (2,4,-1)^T, \beta_3 = (3,0,5)^T$. (1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵; (2) 求 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵.

解答： (1) $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

$$\Rightarrow B=A^{-1}AA=A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&0\\5&2&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&0\\0&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&9&-5\\-10&-23&-15\\-7&-16&13\end{pmatrix}$$

(2) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)T,\qquad T=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&0\\5&2&0\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}E&=\left(T^{-1}\right)^{-1}AT^{-1}=TAT^{-1}\\&=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&0\\5&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&-5\\-10&-23&-15\\-7&-16&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&-5&3\\1&-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-20&11\\0&-16&10\\5&-15&7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. (16 分) 设 V 是 3 维欧式空间, 由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 给出的度量矩阵 $=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&10&-2\\1&-2&2\end{pmatrix}$. 请由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 按现在的顺序进行 Schmidt 正交化给出一组标准正交基.

解答： 度量矩阵满足：$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=g_{ij}$

$$\eta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,\eta_1)\eta_1=\alpha_2-0=\alpha_2,\quad \eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{\alpha_2}{\sqrt{10}}$$

$$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,\eta_1)\eta_1-(\alpha_3,\eta_2)\eta_2=\alpha_3-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2$$

$$\Rightarrow\eta_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2+\alpha_3}{\sqrt{\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{5}&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{5}\\1\end{pmatrix}}}=\frac{\sqrt{15}}{3}(-\alpha_1+\alpha_3)+\frac{\sqrt{15}}{15}\alpha_2$$

其中，$\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{5}&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{5}\\1\end{pmatrix}=\frac{3}{5}$

5. (12 分) 给定二次曲面在直角坐标系下的方程是 $2x^2+6y^2+2z^2+8xz=1$. 将它通过正交变换化为标准方程, 并指出这曲面的类型.

解答： 给出二次型：$A=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{pmatrix}$, 由于

$$|\lambda I-A|=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$$

所以 A 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$.

对 $\lambda=6$ 有特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 正交化为 $e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

对 $\lambda=-2$ 有特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 正交化为 $e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, 则取

$$P=\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$, 变换为 $X=PY,X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, 因

6. (10 分) 设 A,B 是两个 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB=BA$. 求证: 存在 n 阶正交方阵 P, 使得 P^TAP 与 P^TBP 都是对角矩阵.

解答： 证明. 由于 A 是实对称矩阵, 所以存在正交阵 Q 使得 $Q^TAQ=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值. 进而可假设

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1I_{r_1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_sI_{r_m}\end{pmatrix}$$

其中 λ_i 为 A 的 r_i 重特征值. 由于 $AB=BA$, 则

$$\left(Q^TAQ\right)\left(Q^TBQ\right)=Q^TABQ=A^TBAQ=\left(Q^TBQ\right)\left(Q^TAQ\right)$$

将 Q^TBQ 对应分块为

$$\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\B_{m1}&\cdots&B_{mm}\end{pmatrix}$$

由于 Q^TBQ 为对称矩阵, 所以 $B_{ij}=B_{ji}^T,B_{ii}$ 对称. 因为 $\left(Q^TAQ\right)\left(Q^TBQ\right)=\left(Q^TBQ\right)\left(Q^TAQ\right)$,

所以

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_1 B_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m B_{m1} & \cdots & \lambda_m B_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_m B_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 B_{m1} & \cdots & \lambda_m B_{mm} \end{pmatrix}$$

比较分块可知 $(\lambda_i - \lambda_j) B_{ij} = 0$, 所以 $i \neq j$ 时有 $B_{ij} = 0$, 故

$$B = \operatorname{diag}(B_{11}, \cdots, B_{mm})$$

设 $P_k^T B_{kk} P_k = \Lambda_k$ 是对角块, 则取

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_m \end{pmatrix}$$

则 P 为正交阵, 且 $P^T(Q^T BQ)P$ 为对角阵, 且 $P^T(Q^T AQ)P = Q^T AQ$ 为对角阵. 因此取 $M = QP$, 则 $M^T AM$ 与 $M^T BM$ 同时为对角阵.

注：一个结论

A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB = BA$. 则 A, B 同时正交相似对角化

第 4 节 2020-2021 年线性代数 B1 春季期末

一、填空

1. 设3 阶方阵A 的特征值为$1, 3, 5$, 则矩阵$A^2 - 3A$ 的特征值为

解答： 可以采取特解法，或者直接进行变换

$$Ax = \lambda x$$
$$(A^2 - 3A)x = (\lambda^2 - 3\lambda)x$$

$\lambda' = \lambda^2 - 3\lambda = -2, 0, 10$

2. 设矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{pmatrix}$相似于对角阵, 则常数$a =$

解答：

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -8 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -a & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(\lambda - 6)(\lambda - 6)(\lambda + 2)$$

对于 2 重特征值 $\lambda=6$，要使得代数重数和几何重数相等，则 $a=0$，使得 $\operatorname{rank}(6I-A)=1$

3. 设 $\mathcal{A}$ 是 3 维欧式空间 V 中的第二类正交变换, 且 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ 是 $\mathcal{A}$ 在复数域上的一个特征值, 则 $\mathcal{A}$ 的另外两个特征值为:

解答： 第二类正交变换的行列式为-1。
另外两个特征值为：$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$（复数域特征值成对出现）和-1

4. 设 $\mathbb{R}_2[x]$ 中的某个内积在基 $\alpha_1=x-1,\alpha_2=x+1,\alpha_3=x^2$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}2&2&1\\2&5&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

则该内积在基$\beta_1=2x,\beta_2=-x+1,\beta_3=x^2+2$ 下的度量矩阵为

解答：

$$(2x,-x+1,x^2+2)=(x-1,x+1,x^2)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$G'=T^{\top}GT=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&5&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-4&4\\-4&2&-1\\4&-1&2\end{pmatrix}$$

5 . 若矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&a&5\\-3&5&1\end{pmatrix}$ 相合于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则$a=$

解答： 首先求秩，

$$\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&a&5\\-3&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&a-1&8\\0&8&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{a=-7}\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

然后可以验证正负惯性指数相同

6. 若实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+tx_1x_2+tx_1x_3+x_2x_3$ 正定, 则 t 满足条件

解答： 正定满足任意主子式行列式大于 0

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac{t}{2}&\frac{t}{2}\\\frac{t}{2}&2&\frac{1}{2}\\\frac{t}{2}&\frac{1}{2}&3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\begin{vmatrix}2&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&3\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}1&\frac{t}{2}\\\frac{t}{2}&2\end{vmatrix}>0,|A|>0$$

得到 t 的范围：$-\dfrac{\sqrt{23}}{2}<t<\dfrac{\sqrt{23}}{2}$

二、判断

1. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $A^{\mathrm{T}}AX=0$ 同解.

2. 设 n 阶方阵 $A\neq 0$, 且存在正整数 k, 使得 $A^k=0$, 则 $\det(I_n-kA)=1$

3. 设 $\mathcal{A}$ 是欧氏空间 V 中的一个线性变换, 满足条件: 存在 V 中的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 它们在 $\mathcal{A}$ 中的像仍是 V 中的一组基, 且长度不变. 则 $\mathcal{A}$ 是 V 中的正交变换.

4. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵, 则 AB 与 BA 有相同的特征多项式.

解答：

1、　正确。首先，子空间的角度：$V_A\subseteq V_{A^\top A}$ 接着进行化简：

$$\forall Y\in V_{A^\top A}\Rightarrow A^\top AY=0\Rightarrow Y^\top A^\top AY=(AY)^\top AY=0\Rightarrow AY=0\Rightarrow Y\in V_A$$

说明同解

2、　正确。

$$\left.\begin{array}{c}\because \text{A 总可以相似于上三角阵}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix} \\ A^k=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$$

$$\Rightarrow \det(I_n-kA)=\det\left(I_n-kP^{-1}\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ O & & 0\end{pmatrix}P\right)=1$$

3、　错误。取 $V=\mathbb{R}^2$.　$\alpha_1=(1,0)$,　$\alpha_2=(1,1)$,　$\mathcal{A}(\alpha_1)=(1,0)$,　$\mathcal{A}(\alpha_2)=(0,\sqrt{2})$

则 $\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2)$ 为 V 中一组基，且 $|\mathcal{A}(\alpha_1)|=|\alpha_1|=1$.　$|\mathcal{A}(\alpha_2)|=|\alpha_2|=\sqrt{2}$.

但是 $\mathcal{A}((0,1))=\mathcal{A}(\alpha_2-\alpha_1)=\alpha(\alpha_2)-\mathcal{A}(\alpha_1)=(-1,\sqrt{2})$ 不保持长度，所以不成立

4、　正确。这是由于已知重要等式 $p_{AB}(\lambda)=|\lambda I_n-AB|=|\lambda I_n-BA|=p_{BA}(\lambda)$

注

证明此等式考虑 $\begin{vmatrix}\lambda I_n & A \\ B & I_n\end{vmatrix}$

三、【10+6 分】设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $V=F^{2\times 2}$ 是线性空间, 定义 V 上的线性变换 $\mathcal{A}: M\mapsto AM, M\in V$. (1) 求 $\mathcal{A}$ 的所有特征值和特征向量. (2) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & -1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

解答：

(1) 记 $\Gamma_1 : E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$

$$\mathcal{A}\left(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\right) = \left(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

此矩阵的每一列向量由：$\mathcal{A}(E_{ij}) = AE_{ij}$ 求得。

$$p_A(\lambda) = \mid \lambda I - A \mid = (\lambda-1)^2(\lambda-4)^2$$

得到两个特征值，分别为 1 和 4，都是 2 重的

$\lambda = 1$，$(I-A)x = 0$，得到基础解系 $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\therefore \xi_1 = E_{11}, \xi_2 = E_{12}$

所以特征值 1 下特征向量：

$$\left\{ k_1E_{11} + k_2E_{12} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{F}, \text{不全为 } 0 \right\}$$

$\lambda = 4$，$(4I-A)x = 0$，$x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\therefore \xi_3 = 2E_{11} + 3E_{21}, \xi_4 = 2E_{12} + 3E_{22}$

所以特征值 1 下特征向量：

$$\left\{ k_3\xi_3 + k_4\xi_4 = \begin{pmatrix} 2k_3 & 2k_4 \\ 3k_3 & 3k_4 \end{pmatrix} \mid k_3, k_4 \in \mathbb{F}, \text{不全为 } 0 \right\}$$

(2) 设 $\Gamma_2 : \{M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\}$

$$\begin{pmatrix} M, & M_2 & M_3 & M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}&0&0&-\frac{5}{2}\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

四、【12 分】设 $V=R_2[x]$, 对于 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2, g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$, 定义

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

用 Schimidt 正交化方法将 $1,x,x^2$ 按顺序改造成标准正交基.

解答： 根据

$$\begin{aligned}\langle 1,1\rangle&=\textstyle\int_0^1 1^2dx=1\\ \langle 1,x\rangle&=\textstyle\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}\\ \langle x,x\rangle&=\textstyle\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}\\ \langle x,x^2\rangle&=\textstyle\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}\\ \langle x^2,x^2\rangle&=\textstyle\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\text{在：}1,x,x^2\text{这三个基下 度量矩阵为：}G=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

取 $\eta_1=1$

$$\beta_2=x-(x,1)\,1=x-\frac{1}{2}$$

$$\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2},1,0\right)G\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}}}=\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}=2\sqrt{3}x-\sqrt{3}$$

$$\beta_3=x^2-\left(x^2,\eta_1\right)\eta_1-\left(x^2,\eta_2\right)\eta_2=\frac{1}{6}-x+x^2$$

$$\eta_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{\frac{1}{6}-x+x^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{6},-1,1\right)G\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\-1\\1\end{pmatrix}}}=\frac{\frac{1}{6}-x+x^2}{\sqrt{\frac{1}{180}}}=\sqrt{5}-6\sqrt{5}x+6\sqrt{5}x^2$$

则 $\eta_{1,2,3}$ 为标准正交基

五、【12+2 分】设实二次型

$$Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准形, 并写出相应的正交变换矩阵. (2) 判断 $Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=0$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

解答：

(1) $Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

所以特征值为 1（2 重）和-2（1 重）

$\lambda=-2,(-2I-A)x=0$，解得属于-2 特征向量: $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得到 $e_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$

$\lambda=1,(I-A)x=0$，解得属于 1 特征向量：$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

进行标准正交化，$e_2=\dfrac{\xi_2}{|\xi_2|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$

$$\beta_3=\xi_3-(\xi_3,\eta_2)\,\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},\quad e_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

取 $T=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$，则 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

作 $X=Ty$，则可以得到标准形：$-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

(2) 二次锥面

六、【8 分】已知 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 且 A 的特征值皆为实数. 证明: 存在可逆矩阵 $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $T^{-1}AT$ 为上三角阵.

解答： 与复方阵相似于上三角阵类似，只需证明特征值对应的特征向量在 $\mathbb{R}^n$ 中
用数学归纳法，$n=1$ 显然成立。现在假设命题对 $n-1$ 成立。考虑 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$ 。其一个特征值设为 λ_1 ，它的一个特征向量记为 $\boldsymbol{x}_1$ 。把它扩充为 $\mathbb{C}^{n\times 1}$ 的基

$$S=\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$$

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$，也就是

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$$

由归纳假设，存在 $\boldsymbol{P}_2$ 使得 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}_{22}$ 为上三角形矩阵，且对角元为 $\boldsymbol{A}_{22}$ 的排列 (就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的部分)。则计算得

$$\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{P}_2\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}:=\boldsymbol{B}$$

右边是上三角形矩阵。令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 是上三角形矩阵且满足要求。

□