本文件汇编了中科大复变函数课程试卷中部分精华题，摘录了其标准解答，提供了思路
文件网址：home.ustc.edu.cn/~jiajie

复变函数考题选解

程嘉杰整理

知识点一 解析函数和展开 1

知识点二 留数 2

知识点三 积分运算 3

知识点四 保形变换 6

知识点五 根的问题 8

知识点六 部分证明和结论 8

知识点 1 解析函数和展开

1. (2009A) 设 $\sqrt[3]{z(1-z)^2}$ 在去掉线段 $[0,1]$ 的区域内的某一单值分支为 $f(z)$. 若 f 在 $\frac{1}{2}$ 的上边沿的值是 $\frac{1}{2}$, 则 $f(2)=$,$f'(2)=$

解:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{z(z-1)^2} &= \sqrt[3]{|z||z-1|^2 e^{i(\arg z+\arg(z-1)+2k\pi)}} \\
&= |z|^{\frac{1}{3}}|z-1|^{\frac{2}{3}} \exp\left(i\frac{\arg z+2\arg(z-1)+2k\pi}{3}\right) \\
f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\exp\left(i\frac{2\pi+2k\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}, k=2 \\
f(z) &= 2^{\frac{1}{3}}\exp\left(i\frac{4\pi}{3}\right) \\
f'(z) &= \frac{1}{3}\left(z(z-1)^2\right)^{-\frac{2}{3}}\left((z-1)^2+2z(z-1)\right) \\
&= \frac{\left(z(z-1)^2\right)^{\frac{1}{3}}}{3\left(z(z-1)^2\right)}\left((z-1)^2+2z(z-1)\right) \\
&= \frac{f(z)}{3\left(z(z-1)^2\right)}(z-1)(3z-1) \\
f'(z) &= \frac{5}{6}f(2)=\frac{5\sqrt[3]{2}}{6}\exp\left(i\frac{4\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

2. (2021A) 将$f(z)=\dfrac{1}{z^3+2z^2}$ 在$1<|z+1|<+\infty$ 展开为洛朗级数.

解:

$$\begin{aligned}&\text{设}w=\frac{1}{z+1},\text{则}0<|w|<1,\\ \frac{1}{z^3+2z^2}&=\frac{w^3}{(1-w)^2(1+w)}=\frac{w^3}{2}\left(\frac{1}{1-w^2}+\frac{1}{(1-w)^2}\right)\\ &=\frac{w^3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}+n+1\right)w^n=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-3-(-1)^n}{4}(z+1)^{-n}.\end{aligned}$$

3. (2016A) 设 $f(z)$ 在复平面上除了 $z=2$ 外都解析, $z=2$ 是 $f(z)$ 的二级极点, 当 $|z|>2015$ 时, 存在 $M>0$, 使 $|f(z)|<M$. 且有 $f(0)=1, f(1)=2, f(3)=0$, 求 $f(z)$ 的表达式.

解: 由于 $z=2$ 是全平面唯一的奇点, 且为 2 级极点, 所以 $f(z)$ 在全平面的表达式为:

$$f(z)=\frac{a}{(z-2)^2}+\frac{b}{(z-2)}+g(z)\ \text{其中}g(z)\ \text{在全平面解析}$$

又依条件有：$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{x\to\infty}g(z)$ 有界，这样 ∞ 是可去奇点，所以全平面解析函数 $g(z)$ 展开成 z 的幂级数时不含有 z 的正次幂（无主要部分）, 所以 $g(z)$ 只能是常数 c, 这样 $f(z)$ 表示为:

$$f(z)=\frac{a}{(z-2)^2}+\frac{b}{(z-2)}+c$$

再由条件 $f(0)=1, f(1)=2, f(3)=0$, 得到

$$\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+c=1; a-b+c=2, a+b+c=0$$

解得, $a=\frac{2}{3}, b=-1, c=\frac{1}{3}$, 于是

$$f(z)=\frac{2}{3(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)}+\frac{1}{3}$$

知识点 2 留数

1. (2009A) 若幂函数 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=1$ 的分支, 则 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z^2}{1-\sqrt{z}},1\right]=$

解:

$$\omega_0=\sqrt{|z|}\exp\left(i\frac{\arg z}{2}\right),\text{奇点：}(\sqrt{z})^2=1, |z|=1, \arg z=0,\quad z=1$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{1-z,1}\right]&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\rho}\frac{z^2}{1-\sqrt{z}}dz\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4}\frac{z^2}{1-\sqrt{z}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=2}\frac{t^4(2t)}{1-t}dt\\ &=\left(-2t^5\right)\Big|_{t=1}=-2\end{aligned}$$

2. (2021A) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(\sin z)(z+6)(z-5)}, C:|z|=4$

解： (3) 该函数 f 在 $|z|<4$ 中有 1 阶极点 $0,\pi,-\pi$ 且

$$\operatorname{Res}[f,0]=-\frac{1}{30},\quad \operatorname{Res}[f,\pi]=\frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)},\quad \operatorname{Res}[f,\pi]=-\frac{1}{(\pi-6)(\pi+5)},$$

因此该积分为

$$2\pi i\left(-\frac{1}{30}+\frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)}-\frac{1}{(\pi-6)(\pi+5)}\right)=-2\pi i\left(\frac{1}{30}+\frac{2\left(\pi^2-30\right)}{\left(\pi^2-36\right)\left(\pi^2-25\right)}\right)$$

知识点 3　积分运算

1. (2007A) $I=\oint_{|z|=2}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-1|^2}$

解：

$$\begin{aligned}
|dz|&=|z'(\theta)|\,d\theta=\left|2ie^{i\theta}\right|d\theta=2d\theta\\
(z-1)^2&=\left(2e^{i\theta}-1\right)\left(2e^{-i\theta}-1\right)\\
&=(z-1)(\bar z-1)=4-2\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)+1\\
&=5-4\cos\theta\\
I&=\int_0^{2\pi}\frac{2d\theta}{5-4\cos\theta}\overset{t=e^{i\theta}}{=}\int_{|t|=1}\frac{2}{5-\frac{4}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\frac{dt}{it}\\
&=\int_{|t|=1}\frac{2idt}{2t^2-5t+2}=\int_{|t|=1}\frac{2idt}{(2t-1)(t-2)}=\frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

2. (2009A) 设 $f(z)=\oint_{|t|=3}\frac{t^2+t+1}{t-z}\mathrm{d}t$, 则 $f'(2+\mathrm{i})=$

解：

$$\begin{aligned}
&f(z)=2\pi i\left(z^2+z+1\right),\quad z\neq\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\\
\Rightarrow &f'(z)=2\pi i(2z+1),\quad f'(2+i)=\pi(10i-4)
\end{aligned}$$

3. (2016A) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{x^4+1}dx$

解： 考虑积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i3x}}{x^4+1}dx$$

取此积分的实部和于所求. 而 $R(z)=\frac{1}{z^4+1}$ 在上半平面的奇点为: $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i3x}}{x^4+1}dx=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[R(z)e^{i3z},z_1\right]+\operatorname{Res}\left[R(z)e^{i3z},z_2\right]\right)$$

而 $\operatorname{Res}\left[R(z)e^{i3z},z_1\right]=\left.\frac{e^{i3z}}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_1}=\frac{e^{i3z_1}}{4z_1^3}=\frac{e^{i3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{4}e^{\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}+i\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\pi\right)\right)}$

$\mathrm{Res}\left[R(z)e^{i3z}, z_2\right] = \frac{e^{i3z}}{(z^4+1)'}\Big|_{z=z_2} = \frac{e^{i3z_2}}{4z_2^3} = \frac{e^{i3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}+i\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\pi\right)\right)}$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i3x}}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{2}\left(e^{\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}+i\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\pi\right)\right)} + \frac{1}{4}e^{\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}+i\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\pi\right)\right)}\right)$$

在上式中取实部, 得到:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{x^4+1}dx &= \frac{\pi}{2}e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\pi\right)+\cos\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\pi\right)\right)\\ &= \pi e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right)\end{aligned}$$

4. (2016A) $\oint_{|z|=2}\frac{\cos 2z dz}{z^2\sin z}$

解: 围道内只有唯一奇点 $z=0$, 此奇点是 3 级极点,

$$原积分 = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0],\ f(z) = \frac{\cos 2z}{z^2\sin z}$$

由于 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 3 级极点, 并且 $f(z)$ 是奇函数, 所以可设 $f(z)$ 在 $z=0$ 附近的罗朗展开式为:

$$f(z) = \frac{\cos 2z}{z^2\sin z} = a_{-3}z^{-3}+a_{-1}z^{-1}+a_1z+\ldots$$

把 $\sin z, \cos 2z$ 的 Taylor 展开式代入上式, 得到,

$$\left(1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}+\ldots\right) = z^2\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\right)(a_{-3}z^{-3}+a_{-1}z^{-1}+a_1z+\ldots)$$

比较两边常数项系数和 z^2 系数得到

$$a_{-3}=1, -2 = a_{-1}-\frac{a_{-3}}{3!}$$

解得:

$$\mathrm{Res}[f(z),0] = a_{-1} = -\frac{11}{6}$$

故可以计算积分

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0] = -\frac{11\pi i}{3}$$

5. (2020A) 计算积分 $\int_C\frac{z\cos^2\frac{1}{z}}{1-z}\,\mathrm{d}z$, 其中 $C:\left|z-\frac{1}{2}\right|+\left|z+\frac{1}{2}\right|=3$.

解: 直接考虑在 $|z|>1$ 区域进行洛朗展开，求整体的 a_{-1}，单独求各个极点留数会十分复杂，0 点处涉及到无穷留数

$$\begin{aligned}\frac{z\cos^2\frac{1}{z}}{1-z} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos\frac{2}{z}}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!z^{2m}}+1\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m 2^{2m}}{(2m)!z^{2m+n}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}\right)\end{aligned}$$

整体的-1 次幂的系数：$a_{-1}=-1, I = 2\pi i\cdot(-1) = -2\pi i$

补充：单独计算留数的方法：

在 0 的附近的小邻域 $0<|z|<\rho$ 进行展开

$$
\begin{aligned}
\frac{z^2\cos^2\frac{1}{z}}{-z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1}\left(\frac{1+\cos\frac{2}{z}}{2}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n+1}}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left(\frac{2}{z}\right)^m
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{Res}(f(z),0)=a_{-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+2}(2)^{n+2}}{(2(n+2))!}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{(2n)!}=\frac{\cos 2-1}{2}=\cos^2 1-1
$$

1 点留数 $\operatorname{Res}(f(z),1)=-1\cdot\cos^2 1=-\cos^2 1\Rightarrow I=-2\pi i$

6. (2007A) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}(0<b<a)$

解：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+b^2\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\\
&= \int_0^\pi \frac{2d\theta}{(a^2+b^2)+(b^2-a^2)\cos 2\theta}\\
&= \int_0^{2\pi}\frac{d\theta'}{(a^2+b^2)+(b^2-a^2)\cos\theta'}\left(t=e^{i\theta'},d\theta'=\frac{dt}{it}\right)\\
&= \int_{(t)=1}\frac{-2idt}{(b^2-a^2)(t^2+1)+2(a^2+b^2)}\\
&= \int_{|t|=1}\frac{-2idt}{[(b+a)t+(b-a)][(b-a)t+(b+a)]}\\
&= 2\pi i\operatorname{Res}\left(f(t),\frac{a-b}{b+a}\right)=2\pi i\lim_{t\to t_0}(t-t_0)f(t)\\
&= 2\pi i\frac{-2i}{4ab}=\frac{\pi}{ab}
\end{aligned}
$$

7. (2022A) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$

解：

$$
I=\int_0^\infty\frac{\sin^3(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 3x-3\sin x}{4x^3}\,\mathrm{d}x
$$

方法一： $\displaystyle I(\alpha)=\int_0^\infty\frac{\sin^3(\alpha)}{\alpha^3}\,\mathrm{d}\alpha$**这是考虑参数积分的方法**

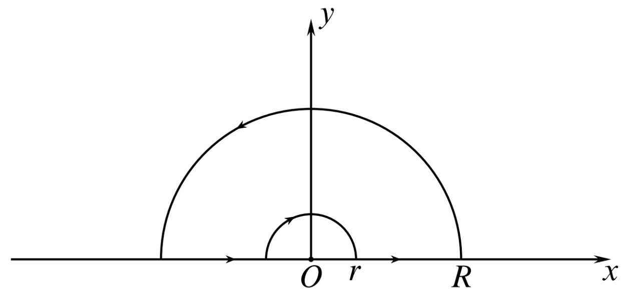
$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}'(\alpha) &= \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)\sin(2\alpha x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(3\alpha x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\\
\mathrm{I}''(\alpha) &= \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\sin(\alpha x)+3\sin(3\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}2\pi\operatorname{sgn}(\alpha)=\frac{3}{2}\pi\operatorname{sgn}(\alpha)\\
\mathrm{I}'(\alpha) &= \frac{3}{2}\pi|\alpha|,\quad \mathrm{I}(1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\pi\int_0^1|\alpha|\mathrm{d}\alpha=\frac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^\infty\frac{\sin^3(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\pi
$$

史济怀复变函数提供了方法二：$I=\frac{1}{8}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i3z}-3e^{iz}+2}{z^3}\,\mathrm{d}z$

（2 的引入消去了分子三次项构造一级极点）

$$I=\frac{1}{8}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(1+i3z-\frac{9z^2}{2}\right)-3\left(1+iz-\frac{z^2}{2}\right)+2}{z^3}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{8}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-3z^2}{z^3}\,\mathrm{d}z=\frac{3\pi}{8}$$



沿着如图的模式进行围道积分

知识点 4 保形变换

1. (2007A) (1) 问 $w=\frac{z+1}{z-1}$ 将有割痕 $(-\infty,-1]$ 的单位圆外域映成了什么？(2) 求保形变换 $w=f(z)$ 将有割痕 $(0,1]$ 的右半平面 $\mathrm{Re}\,z>0$ 映为带形域 $-\pi<\mathrm{Im}(w)<\pi, \mathrm{Re}(z)>0$.

   解：(1) 有割痕 $(0,1]$ 的右半平面

   (2) 首先做 (1) 中的反变换，$\varphi_1=\frac{z+1}{z-1}$ 再采取对数变换，$\varphi_2=\ln\varphi_1=\ln\frac{z+1}{z-1}$

2. (2008A) 求一保形变换 $w=f(z)$, 将半带域 $D:-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\,z>0$ 映射为上半平面 $\mathrm{Im}\,w>0$.

   解：一种变换：

$$\begin{aligned}
&\varphi_1=re^{-\frac{\pi}{2}i}=iz\text{逆时针转 }90^\circ\\
&\varphi_2=e^{\varphi_1}\text{变换为右侧半单位圆}\\
&\varphi_3=\frac{\varphi_2+i}{\varphi_2-i}\text{半圆变到二象限}\\
&\varphi_4=e^{\frac{\pi}{2}i}\varphi_3\text{变到三象限}\\
&\varphi_5=\varphi_4^2=-\left(\frac{e^{iz}+i}{e^{iz}-i}\right)^2\ \text{回到上半平面}
\end{aligned}$$

   另一种变换：

$$\begin{aligned}
&\varphi_1=i\left(z+\tfrac{\pi}{2}\right)\ \text{先平移再顺时针旋转 }90^\circ\\
&\varphi_2=\tfrac{1}{2}\left(e^{\varphi_1}+e^{-\varphi_1}\right)\ \text{半带状域变到下半面}\\
&\varphi_3=-\varphi_2=\sin z\text{共轭对称变换}
\end{aligned}$$

3. (2020A) 求保形变换 $\omega = f(z)$, 将区域 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, |z - \sqrt{3}i| < 2\}$ 映为区域 $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| < 1\}$, 并且满足条件 $f(\sqrt{3}i) = 0, f'(\sqrt{3}i) > 0$. (请画出必要的示意图)

解:

$$\frac{\varphi_1 - 0}{1} = \frac{z-1}{z+1}, \varphi_1 = \frac{z-1}{z+1}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 e^{-\frac{\pi}{6}i} = e^{-\frac{\pi}{6}i}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$\varphi_3 = {\varphi_2}^3 = -i{\varphi_1}^3$$

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 - i}{\varphi_3 + i} = \frac{\varphi_1^3 + 1}{{\varphi_1}^3 - 1} = \frac{(z - v^3 + (z+1)^3}{(z-1)^3 - (z+1)^3}$$

$$f_0(z) = \varphi_4 = \frac{2z^3 + 6z}{-6z^2 - 2}, \quad f_0(\sqrt{3}i) = 0, f_0'(\sqrt{3}i) < 0\text{更换一下首次变换}$$

$$\varphi_1 \to \frac{1}{\varphi_1}, \quad f(z) = \frac{2z^3 + 6z}{6z^2 + 2} \quad f(\sqrt{3}i) = 0, f'(\sqrt{3}i) > 0\text{说明找到了}$$

4. (2022A) 求一保形变换 $w = f(z)$, 将区域 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1, |z| < 2\}$ 映为单位圆盘 $|w| < 1$, 并且满足 $f(-1) = 0$. (请画出必要的示意图)

解: (1) 取分式线性变换 $t(z)$ 使得两相切圆的切点 $z = 2$ 变为无穷远点,
并使 $t(0) = 0, t(1+i) = 1$, 具体为;

$$t(z) = i\frac{z}{z-2}$$

由于两相切圆的切点变为了无穷远点, 因此两圆变成了平行直线,
而 $t(0) = 0, t(1+i) = 1$ 表明内圆 $|z-1| = 1$ 变为了实轴。又 $t(-2) = \frac{i}{2}$, 这样 $t(z)$ 把区域 D 变为条形区域

$$0 < \mathrm{Im} t < \frac{1}{2}.$$

(2) 变换 $T = \exp(2\pi t)$ 即把以上条形区域变为角形区域 $0 < \arg T < \pi$, 即上半平面。而 $z_0 = -1$ 经过以上变换 (1) 和 (2) 变为了 $T_0 = \exp\frac{2}{3}\pi i$.

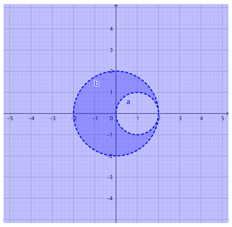
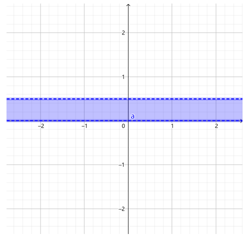
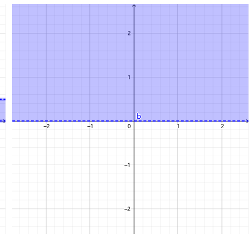
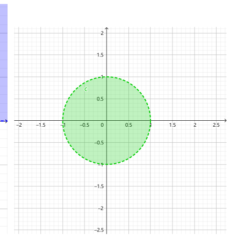
(3) 分式线性变换 ω, 使得 T 平面的 $T_0 = \exp\frac{2}{3}\pi i$ 变为 $0, T_0$ 关于实轴的对称点 $T_1 = \exp(-\frac{2}{3}\pi i)$ 变为无穷, 实轴映为单位圆周 $|\omega| = 1$, 具体为:

$$\omega = e^{i\theta}\frac{T - \exp\frac{2}{3}\pi i}{T - \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)}$$

$$\Rightarrow \text{最后写出：} \omega = e^{i\theta}\frac{\exp\left(2\pi i\frac{z}{z-2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\exp\left(2\pi i\frac{z}{z-2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

(以上变换示意图如下:)

注 4.1. 本题需要理解保形变换相切圆域需要先变到条形域再进一步变换

知识点 5　根的问题

1. (2009A) 试求方程 $2z^6-3z^3+2=0$ 在各个象限内根的个数.

解:

$$\begin{aligned} f(iy)=f(z)&=2(iy)^6-3(iy)^3+2\\ &=-2y^6+3iy^2+2\\ &=\left(2y^6+2\right)+i\left(3y^2\right)\text{，u,v 轴交点两个，对应着 y=0 和 i}\\ u'=-12y^5,v'&=6y,\frac{n+2k}{2}=4,\text{通过分析得到转过一圈} \end{aligned}$$

由于实轴上无零点故二、三象限各两个根, 一、四象限各一个根.

知识点 6　部分证明和结论

1. (2020A) 设 $f(z)$ 为定义在上半平面内的解析函数, 则 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 为定义在下半平面上的复变函数, 请问: $g(z)$ 在下半平面上是否为解析函数? 给出你的答案, 如果"是", 给出证明; "否", 举个反例.

证明: "是"的理由:

$$\text{解析函数可以写成幂级数展开：}f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$\overline{f(\bar{z})}=\overline{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\bar{z}-z_0)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a_n}(z-\bar{z_0})^n\text{相当于是对称到实轴对侧展开，收敛半径不变}$$

2. (2009A) 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是不可约有理真分式函数, $a_k(k=1,\cdots,m)$ 是 $Q(z)$ 的全部零点, 且其阶数为 n_k. 试证明 $f(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_k}\dfrac{A_{ks}}{(z-a_k)^s}$, 其中 A_{ks} 为复常数.

证明: 由题设条件, a_1 是 $f(z)$ 的 n_1 阶极点，故在 a_1 去心邻域可以展开成洛朗级数:

$$f(z)=\frac{A_{1n_1}}{(z-a_1)^{n_1}}+\cdots+\frac{A_{11}}{z-a_1}+\varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ 在 a_1 处解析，a_2 仍为 $\varphi(z)$ 的 n_2 阶极点，于是有

$$\varphi(z)=\frac{A_{2n_2}}{(z-a_2)^{n_2}}+\cdots+\frac{A_{21}}{z-a_2}+\varphi_1(z),$$

且 $\varphi_1(z)$ 在 a_2 处解析，但 a_3 是 $\varphi_1(z)$ 的 n_3 阶极点, 这样过程重复 m 次得到，

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(z-a_k)^s}+h(z),$$

其中 $h(z)$ 是全平面解析函数，$f(z)$ 为有理真分式，故 $\lim\limits_{z\to+\infty}f(z)=0$, 于是 $\lim\limits_{z\to+\infty}h(z)=0$, 再根据 Liouville 定理得到 $h(z)=Const.=0$. □

注 6.1. 参见《复变函数》（严镇军编，中国科大出版社，第二版）第 201 页部分分式法

3. (2020B) 已知函数 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 内解析, 函数 $g(z)$ 在 $|z|\geqslant 1$ 解析, 且存在常数 M, 使得在 $|z|>1$ 时, $|g(z)|<M$. 证明以下算式成立:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\left(\frac{f(\xi)}{\xi-a}-\frac{ag(\xi)}{\xi(\xi-a)}\right)\mathrm{d}\xi=\begin{cases}f(a),\ \text{当}|a|<1\\ g(a),\ \text{当}|a|>1\end{cases}$$

证明： 利用题设函数巧妙换元，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\mathrm{d}\xi=\begin{cases}f(a),\ \text{当}|a|<1\\ 0,\quad \text{当}|a|>1\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{ag(\xi)}{\xi(\xi-a)}\mathrm{d}\xi\overset{z=\frac{1}{\xi}}{=}\text{（因环路方向反向添加负号）}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{g(\frac{1}{z})}{z-\frac{1}{a}}\mathrm{d}z=\begin{cases}0,\quad \text{当}|a|<1\\ -g(a),\ \text{当}|a|>1\end{cases}$$

□

4. (2022A) 设 $f:D\to\mathbb{C}$ 为区域 D 内的解析函数, γ 为 D 内简单闭曲线, 其内部包含于 D. 设 a 为 $f(z)$ 在 γ 内部的 n 阶零点, b 为 $f(z)$ 在 γ 内部的 m 阶极点, $f(z)$ 在 γ 内除了 b 外没有其它奇点, 在 γ 上没有零点和奇点. 证明:

$$\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\sin z\mathrm{d}z=2\pi i(n\sin a-m\sin b).$$

证明： 由于 a 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 因此在的某个 ∃ a 某个邻域 V，f(z) 可以表示为:

$f(z)=(z-a)^n\varphi(z)$, 其中 $\varphi(a)\neq 0$

$$\therefore\ \frac{f'(z)}{f(z)}\sin z=\frac{n\sin z}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{n\left(\sin a+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\dots\right)}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

类似可证明

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\sin z,b\right]=-m\sin b$$

最后由留数定理得到:

$$\int_y\frac{f'(z)}{f(z)}\sin z\mathrm{d}z=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\sin z,a\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\sin z,b\right]\right)=2\pi i(n\sin a-m\sin b).$$

□

5. (2021A) 设 f 是域 $|z|>r>0$ 上的解析函数. 证明: 如果对于 $|a|>R>r$, $\lim_{z\to\infty}f(z)=f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=0.$$

证明: 证明. 设 $R' > |a|$, 则函数 $\dfrac{f(z)}{z-a}$ 在 $|z| > R'$ 上解析, 因此由多连通区域的柯西积分定理, 对任意 $R'' > R' + |a|$,

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

由长大不等式

$$\left|\int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(a)\right| = \left|\int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi \max_{|z-a|=R''} |f(z)-f(a)|.$$

令 $R' \to +\infty$, 则

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(a).$$

设 D 为区域 $R < |z| < R'$, C 为其边界. 由多连通区域的柯西积分定理

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{C} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(a),$$

因此

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0$$

□

注 6.2. 参见《复变函数》(严镇军编, 中国科大出版社, 第二版) 第 68 页习题 7, 17

6. (2008A) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 区域 D 内解析, $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是 D 内的一个点列, $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in D$, 如果对于任意的 k, 都有 $f(a_k) = g(a_k)$, 求证: 在 D 内恒有 $f(z) = g(z)$ 成立.

证明: (1) 令: $H(z) = f(z) - g(z)$ 这样只要证明 D 内 $H(z)$ 恒为 0，首先根据条件: $H(a_n) = f(a_n) - g(a_n) = 0, n = 0.1.2 \ldots\ldots$ 由于 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ 且 $H(z)$ 在 n 点连续, 所以 $H(a) = \lim_{n\to+\infty} H(a_n) = 0$. 这样 n 是 H(a) 的一个零点，并且不是孤立的，

(2) 我们下面证明存在 a 的一个邻域 S 使得 S 内 $H(z)$ 恒为 0，用反证法: 假设不然，则 $H(z) = (z-a)^m \varphi(z)$ ，其中 m 为某一整数, 而 $\varphi(z)$ 解析: $\varphi(a) \neq 0$. 由连续性，存在 a 的一个邻域 v 在 v 中 $\varphi(z) \neq 0$ 这样在 v 内除 a 点外都有 $H(z) \neq 0$ 这说明 a 是孤立零点. 这与 a 不是孤立零点矛盾。这样我们就证明了存在 a 的一个邻域 S 使得 $H(z)$ 恒等 0 .

(3) 最后: 对 D 内任意一点 z_0. 我们总可找折线 L 连接 a, z_0 (即利用 a 为中心可以作圆 S_1 ，使 S_1 内 $H(z)$ 恒为 0) 再利用 S 与折线的交点再作圆 S_2. 使 S_2 内 $H(z)$ 恒为 0 一直做下去直到最后一个圆包含了 z_0 可证明 $H(z_0) = H(a) = 0$. □

说明: 以上前两步已经正确论述，而第三步未详细论述园链法的不扣分。

注 6.3. 参见《复变函数》(严镇军编, 中国科大出版社, 第二版) 第 134 页唯一性定理

7. (2016A) 设 f(z) 在以 a 点为中心的闭圆 $\bar{E}=\{z:|z-a|\leqslant 1\}$ 解析,

(1) 证明:

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+e^{i\theta}\right)e^{-i\theta}d\theta$$

(2) 设 M 是 $|f(z)|$ 在闭圆 $\bar{E}$ 边界上的最大值, 记 $c=f'(a)-2hM$, 其中 $h>1$ 为实数, 证明: 方程 $f(z)=c$ 在闭圆内部 $E=\{z:|z-a|<1\}$ 中无解.

证明: 由于 $f(z)$ 在闭圆: $|z-a|\leqslant 1$ 解析, 由柯西积分公式:

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^2}d\xi,\quad C:|\xi-a|=1$$

由于 $|\xi-a|=1$, 所以 ξ 可以表示为 $\xi=a+e^{i\theta}$, 相应地 $(\xi-a)^2=\left(e^{i\theta}\right)^2$, $d\xi=ie^{i\theta}d\theta$, 代入上式得到:

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(a+e^{i\theta}\right)}{\left(e^{i\theta}\right)^2}ie^{i\theta}d\theta$$

整理后得到结论:

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+e^{i\theta}\right)e^{-i\theta}d\theta$$

(2) (6 分) 我们用 Rouché 定理证明 $f(z)=c$ 在闭圆内部 $E=\{z:|z-a|<1\}$ 中无解. 为此我们证明 $|z-1|=1$ 上: $|c|>|f(z)|$. 实际上, 由第一问的结论

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+e^{i\theta}\right)e^{-i\theta}d\theta,$$

所以上式两边取模并且作估计得到:

$$|f'(a)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f\left(a+e^{i\theta}\right)e^{-i\theta}d\theta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(a+e^{i\theta}\right)\right|\left|e^{-i\theta}\right|d\theta$$

由于 $\left|e^{-i\theta}\right|=1$, 且由已知条件, 在闭圆边界上 $|f(z)|\leqslant M$, 即 $\left|f\left(a+e^{i\theta}\right)\right|\leqslant M$ 则由上式:

$$|f'(a)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Md\theta=M$$

所以

$$|c|=|f'(a)-2hM|\geq|2hM|-|f'(a)|\geq 2hM-M=(2h-1)M$$

由于 $h>1$, 所以 $|c|>M$, 而在边界上, $|f(z)|\leqslant M$, 所以在闭圆边界上, $|c|>|-f(z)|$, 显然常值函数 c 在闭圆内部没有零点. 这样由 Rouché 定理: $c-f(z)$ 在圆的内部没有零点. 即方程 $f(z)=c$ 在圆内部没有解。 □

8.（2022A）设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析, 且满足 $\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi ; \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \leqslant 3, \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 证明: $|f(0)| \leqslant \sqrt{6}$.

证明：　证明: 令 $g(z)=f(z)f(-z)$, 在单位圆 $z=e^{i\theta}$ 上,

$$|g(z)|=\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\left|f\left(-e^{i\theta}\right)\right|=\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\left|f\left(e^{i(\pi+\theta)}\right)\right|$$

而对于任意 θ, 如 $e^{i\theta}$ 在上半单位圆或下半单位圆的某个半圆上, 则 $e^{i(\pi+\theta)}$ 只可能另外一个半圆上, 则依此关系, 在单位圆 $z=e^{i\theta}$ 上

$$|g(z)| \leqslant\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\left|f\left(e^{i(\pi+\theta)}\right)\right| \leqslant 2 \times 3=6$$

根据最大模原理

$$\begin{aligned}
&|g(0)| \leqslant|g(\xi)| \leqslant 6, \quad(|\xi|=1) \\
&|f(0)|^{2} \leqslant 6 \Longrightarrow|\mathbf{f}(0)| \leqslant \sqrt{6}
\end{aligned}$$

□

9.（2020A）设 $P_n(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}$, A_n 表示 $P_n(z)$ 的 n 个零点模的最小值, 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n=+\infty.$$

证明：　对于 $\forall R>0$　在圆环 $|z|=R$ 上 $|e^z| \geqslant e^{-R}$,　$|e^z-P_n(z)| \leqslant \sum_{k^2 n+1}^{+\infty} \frac{R^k}{k!}$

可找到 $N>0$，当 $n>N$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R^k}{k!}<e^{-R} \therefore |e^z-P_n(z)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R^k}{k!}<e^{-R} \leqslant |e^z|$

由 Rouché 定理，在区域 $0<|z|<R, P_n(z)$ 和 e^z 零点相同，无零点, $A_n \geqslant R$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n=+\infty.$$

□

结语：实际上，复变函数 A 的证明题都可以在教材上找到出处，通读教材，对不同定理证明相互联系和保有印象，对我们考场解题很有帮助!