第三章-条件概率和独立性

程家骏

2022 年 1 月 28 日

1 条件概率

条件概率的基本概念 P(A|B) = P(AB)/P(B) 指的是在我们的 B 发生的条件下 A 发生的概率

例子: A 有 80% 的概率将他的钥匙放在了他外套的两个口袋中, 他 40% 的确定在左边的口袋,40% 在右边的口袋里面, 所以如果检查了左边的口袋没有找到钥匙, 那么钥匙在右边口袋的条件概率是多少

解: 首先这个是一个条件概率, 表示的是在我们的钥匙不在左边的口袋里面的条件下, 在右边的概率

$$P(A|B^t) = P(AB^t)/P(B^t) = 0.4/0.6 = 2/3$$

乘法规则

$$P(E_1E_2E_3...E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)...P(E_n|E_1...E_{n-1}) \tag{1}$$

例子: 在 N 个人从 N 个帽子中进行随机的挑选的时候, 求刚好有 K 个人配对成功的概率是

$$\begin{aligned} P(E_1...E_k) &= P(E_1)P(E_1|E_2)...p(E_k|E_1..E_{n-1}) \\ &= \frac{1}{N}..\frac{1}{N-k+1} = \frac{(N-k)!}{n!} \end{aligned}$$

假设这 k 个人都实现了拿到正确的帽子, 那么剩下的人全部错开的概率是

$$P = \frac{(N-k)!}{N!}$$

然后将这两个式子进行处理即可

2 贝叶斯公式

贝叶斯公式: $E = EF \cup EF^c$

例子: 一项血液化验有 95% 的把握去诊断某种疾病, 但是, 这个结果有 1% 的可能是假的, 如果该疾病的患者事实上仅占总人口的 0.5% , 如果该人化验结果为阳性, 则该人确实患疾病的概率为多少

解: 假设 D 为患病,E 为其化验结果为阳性

$$\begin{aligned} P(D|E) &= P(DE)/P(E) \\ &= \frac{0.95 \times 0.005}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.01} \\ &\approx 0.323 \end{aligned}$$

3 独立性事件

独立性的公式:P(EF) = P(E)P(F)

如果上面这个公式是成立的, 那么我们可以知道这两个事件是独立的事件比如我们从扑克牌中抽取一张牌, 这个牌的花色为黑桃和这个牌的数字是某个数字的情况是独立的. 所以我们可以直接去使用上面的公式去得到结果

例子: 掷两枚均匀的骰子, 总数点数之和为 6 和第一枚点数为 4 的概率的事件概率之间

$$P(EF) = P(4,2) = \frac{1}{36}$$

$$P(E)P(F) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$