第二章 随机过程概论

陈斌

Tsinghua Shenzhen International Graduate School (SIGS)

Outline

基本定义

事物的变化过程是时间t的确定性函数 $f(t)$，称为确定性过程。

定义： 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，T 为参数集，若对 $\forall t \in T$，$\xi(t)$ 是一个随机变量，则称随机变量族 $\{\xi(t), t \in T\}$ 为该概率空间上的**随机过程**.

$$\xi(t) \triangleq \xi(t)(w) \triangleq \xi(w,t) \triangleq \xi_t(w) \quad \text{二元函数}$$

- 固定时刻t_0，$\xi(t_0)$为一个随机变量。
- 固定样本点w_0，$\xi_t(w_0)$为t的确定性函数，称为**样本函数**，有时又称为一条轨道或一次实现。

$\{\xi(t), t \in T\}$

T 离散集：**随机序列/时间序列**
T 连续集：随机过程

随机变量$\xi(t)$的取值称为状态：离散/连续

按照参数集和状态，随机过程可以简单分类如下：

- 离散参数　离散状态：马氏链
- 连续参数　离散状态：泊松过程
- 离散参数　连续状态：噪声序列
- 连续参数　连续状态：高斯过程

几个例子

- 正弦波过程：$\xi(t) = v\sin(\omega t + \varphi)$

几个例子

- 正弦波过程：$\xi(t) = v\sin(\omega t + \varphi)$
- 噪声测量：$[0,1]$, 隔单位时间取样，$t = 1, 2, \ldots$

几个例子

- 正弦波过程：$\xi(t) = v\sin(\omega t + \varphi)$
- 噪声测量： $[0, 1]$, 隔单位时间取样，$t = 1, 2, \ldots$
- 贝努力过程：$\{X_n, n \geq 0\}$，$X_0 = 0$
  $$\Pr\{X_n = 1\} = p, \quad \Pr\{X_n = 0\} = 1 - p$$

几个例子

- 正弦波过程：$\xi(t) = \upsilon \sin(\omega t + \varphi)$
- 噪声测量： $[0,1]$, 隔单位时间取样，$t = 1, 2, \dots$
- 贝努力过程：$\{X_n, n \geq 0\}$，$X_0 = 0$
  $$\Pr\{X_n = 1\} = p, \quad \Pr\{X_n = 0\} = 1 - p$$
- 二项过程：X_n 贝努力，$Y(n) = X_0 + \cdots + X_n$

几个例子

- 正弦波过程：$\xi(t) = v\sin(\omega t + \varphi)$
- 噪声测量： $[0,1]$, 隔单位时间取样，$t = 1, 2, \ldots$
- 贝努力过程：$\{X_n, n \geq 0\}$，$X_0 = 0$
  $$\Pr\{X_n = 1\} = p, \quad \Pr\{X_n = 0\} = 1 - p$$
- 二项过程：X_n 贝努力，$Y(n) = X_0 + \cdots + X_n$
- 一维随机游动：$\{X_n, n \geq 0\}$, $\quad Y(n) = X_0 + \cdots + X_n$
  $$X_0 = 0, \quad \Pr\{X_n = 1\} = p, \quad \Pr\{X_n = -1\} = 1 - p$$

有限维分布族

定义： $\{\xi(t), t \in T\}$, 任给 n, 任给 $t_1, \ldots, t_n \in T$, 记

$$\begin{aligned} F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) &\triangleq F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \\ &\triangleq \Pr\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\}, \end{aligned}$$

分布函数 $\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n),\ t_1, \ldots t_n \in T, n \ge 1\}$ 的全体称为随机过程$\{\xi(t), t \in T\}$的**有限维分布族**。

有限维分布族

定义： $\{\xi(t), t \in T\}$, 任给 n, 任给 $t_1, \ldots, t_n \in T$, 记

$$\begin{aligned} F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) &\triangleq F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) \\ &\triangleq \Pr\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\}, \end{aligned}$$

分布函数 $\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n),\ t_1,\ldots t_n \in T, n \ge 1\}$ 的全体称为随机过程$\{\xi(t), t \in T\}$的**有限维分布族**。

性质：

1. 对称性：设 $(j_1,\ldots j_n)$ 为 $(1,\ldots n)$ 的任意排列，则

$$F_{t_1,\ldots t_n}(x_1,\ldots x_n) = F_{t_{j_1},\ldots t_{j_n}}(x_{j_1},\ldots x_{j_n}).$$

2. 相容性：设 $m < n$, 则

$$\begin{aligned} &F(x_1,\ldots x_m,\infty,\ldots\infty;t_1,\ldots t_m,t_{m+1},\ldots t_n) \\ &\quad = F(x_1,\ldots x_m;t_1,\ldots t_m). \end{aligned}$$

数字特征

$\{\xi(t), t \in T\}$, 分布函数$F(x,t)$, 密度$f(x,t)$.

定义： **数学期望(均值)**

$$\mu(t) \triangleq E\xi(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,t) dx.$$

定义： 方差

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &\triangleq D\xi(t) \triangleq E[\xi(t) - \mu(t)]^2 \\ &= E\xi^2(t) - [E\xi(t)]^2. \end{aligned}$$

注： 均值 $\mu(t)$ 和方差 $\sigma^2(t)$ 都是t的确定性函数

数字特征(续)

自相关函数：

$$R(t_1,t_2)=E\xi(t_1)\xi(t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2.$$

自协方差函数： $C(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)-\mu(t_1)][\xi(t_2)-\mu(t_2)].$

$t_1=t_2$时， $C(t,t)=R(t,t)-\mu^2(t)=D\xi(t)$

$\mu(t_1)=\mu(t_2)=0$时， $C(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)$

$\rho(t_1,t_2)=\frac{C(t_1,t_2)}{\sqrt{D\xi(t_1)}\sqrt{D\xi(t_2)}}=\frac{C(t_1,t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$ 相关系数

最重要的是均值和协方差，0均值时简化为相关函数！

例： 正弦波过程 $\xi(t) = A\cos(\omega t + \theta)$, 其中 A, ω 为常数，$\theta \sim (-\pi, \pi)$ 均匀分布，求均值和相关函数？

例： 正弦波过程 $\xi(t) = A\cos(\omega t + \theta)$，其中 A, ω 为常数，$\theta \sim (-\pi, \pi)$ 均匀分布，求均值和相关函数？

证：

$$\begin{aligned}
\mu_\xi(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A}{2\pi} \cos(\omega t + \theta) d\theta = 0, \\
R(t_1, t_2) &= E\xi(t_1)\xi(t_2) = \int_{-\pi}^{\pi} g_1(\theta) g_2(\theta) dF(\theta) \\
&= \frac{A^2}{2} \cos\omega(t_1 - t_2).
\end{aligned}$$

例： 正弦波过程 $\xi(t) = A\cos(\omega t + \theta)$, 其中 A, ω 为常数，$\theta \sim (-\pi, \pi)$ 均匀分布，求均值和相关函数？

证：

$$\begin{aligned}
\mu_\xi(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A}{2\pi}\cos(\omega t + \theta)d\theta = 0, \\
R(t_1, t_2) &= E\xi(t_1)\xi(t_2) = \int_{-\pi}^{\pi} g_1(\theta)g_2(\theta)dF(\theta) \\
&= \frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1 - t_2).
\end{aligned}$$

例： 二项过程，$Y(n) = X_1 + \cdots + X_n$, 求均值和协方差？

例： 正弦波过程 $\xi(t) = A\cos(\omega t + \theta)$, 其中 A, ω 为常数，$\theta \sim (-\pi, \pi)$ 均匀分布，求均值和相关函数？

证：

$$\begin{aligned}
\mu_\xi(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A}{2\pi}\cos(\omega t + \theta)d\theta = 0, \\
R(t_1, t_2) &= E\xi(t_1)\xi(t_2) = \int_{-\pi}^{\pi} g_1(\theta)g_2(\theta)dF(\theta) \\
&= \frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1 - t_2).
\end{aligned}$$

例： 二项过程，$Y(n) = X_1 + \cdots + X_n$, 求均值和协方差？

证： 由均值的线性性立即可得：$\mu_Y(n) = np$;

例： 正弦波过程 $\xi(t) = A\cos(\omega t + \theta)$, 其中 A, ω 为常数，$\theta \sim (-\pi, \pi)$ 均匀分布，求均值和相关函数？

证：

$$\begin{aligned} \mu_\xi(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A}{2\pi} \cos(\omega t + \theta) d\theta = 0, \\ R(t_1, t_2) &= E\xi(t_1)\xi(t_2) = \int_{-\pi}^{\pi} g_1(\theta) g_2(\theta) dF(\theta) \\ &= \frac{A^2}{2} \cos\omega(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

例： 二项过程，$Y(n) = X_1 + \cdots + X_n$, 求均值和协方差？

证： 由均值的线性性立即可得：$\mu_Y(n) = np$;
假设$m \leq n$，则有

$$\begin{aligned} & E[Y(m)Y(n)] - EY(m)EY(n) \\ = \;& E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i^2 + \sum_{i\neq j} X_i X_j\right] - mnp^2 = mp + (mn - m)p^2 - mnp^2 \end{aligned}$$

例： 正弦波过程 $\xi(t) = A\cos(\omega t + \theta)$, 其中 A, ω 为常数，$\theta \sim (-\pi, \pi)$ 均匀分布，求均值和相关函数？

证：

$$\begin{aligned}\mu_\xi(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A}{2\pi}\cos(\omega t + \theta) d\theta = 0, \\ R(t_1, t_2) &= E\xi(t_1)\xi(t_2) = \int_{-\pi}^{\pi} g_1(\theta) g_2(\theta) dF(\theta) \\ &= \frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1 - t_2).\end{aligned}$$

例： 二项过程，$Y(n) = X_1 + \cdots + X_n$, 求均值和协方差？

证： 由均值的线性性立即可得：$\mu_Y(n) = np$;
假设$m \leq n$，则有

$$\begin{aligned}& E[Y(m)Y(n)] - EY(m)EY(n) \\ = \quad & E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i^2 + \sum_{i\neq j} X_i X_j\right] - mnp^2 = mp + (mn - m)p^2 - mnp^2\end{aligned}$$

故$C_Y(m, n) = \min\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\} \cdot p(1 - p)$.

两个随机过程

$\{\xi(t), t \in T\}$, $\{\eta(t), t \in T\}$, 我们有如下定义：

独立：任给m, n,
若 $F_{n,m}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n; y_1, \ldots, y_m; t'_1, \ldots, t'_m)$
$= F_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \cdot F_m(y_1, \ldots y_m; t'_1, \ldots, t'_m)$,
则称 $\{\xi(t), t \in T\}$ 与 $\{\eta(t), t \in T\}$ 相互独立。

两个随机过程

$\{\xi(t), t \in T\}$, $\{\eta(t), t \in T\}$, 我们有如下定义：

独立：任给m, n,

若 $F_{n,m}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n; y_1, \ldots, y_m; t'_1, \ldots, t'_m)$
$= F_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \cdot F_m(y_1, \ldots y_m; t'_1, \ldots, t'_m)$,
则称 $\{\xi(t), t \in T\}$ 与 $\{\eta(t), t \in T\}$ 相互独立。

互相关函数

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) \triangleq E\xi(t_1) \cdot \eta(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi\eta}(x, y; t_1, t_2) dx dy.$$

互协方差函数:

$$\begin{aligned} C_{\xi\eta}(t_1, t_2) &\triangleq E[\xi(t_1) - \mu_\xi(t_1)][\eta(t_2) - \mu_\eta(t_2)] \\ &= R_{\xi\eta(t_1, t_2)} - \mu_\xi(t_1)\mu_\eta(t_2). \end{aligned}$$

两个随机过程

$\{\xi(t), t \in T\}$, $\{\eta(t), t \in T\}$, 我们有如下定义：

独立：任给m, n,

若 $F_{n,m}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n; y_1, \ldots, y_m; t'_1, \ldots, t'_m)$
$= F_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \cdot F_m(y_1, \ldots y_m; t'_1, \ldots, t'_m)$,
则称 $\{\xi(t), t \in T\}$ 与 $\{\eta(t), t \in T\}$ 相互独立。

互相关函数

$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) \triangleq E\xi(t_1) \cdot \eta(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{\xi\eta}(x, y; t_1, t_2)dxdy.$

互协方差函数:

$$\begin{aligned} C_{\xi\eta}(t_1, t_2) &\triangleq E[\xi(t_1) - \mu_\xi(t_1)][\eta(t_2) - \mu_\eta(t_2)] \\ &= R_{\xi\eta(t_1,t_2)} - \mu_\xi(t_1)\mu_\eta(t_2). \end{aligned}$$

两个随机过程称为**不相关**，若 $C_{\xi\eta}(t_1, t_2) = 0$,
即 $R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E\xi(t_1)\eta(t_2) = E\xi(t_1)E\eta(t_2)$.

复随机过程

定义： $\{X(t), t \in T\}$, $\{Y(t), t \in T\}$ 两个实过程
具有相同的参数集T和概率空间
称 $Z(t) = X(t) + jY(t)$ 为复过程，其中 $j = \sqrt{-1}$.

复随机过程

定义： $\{X(t), t \in T\}$, $\{Y(t), t \in T\}$ 两个实过程
具有相同的参数集T和概率空间
称 $Z(t) = X(t) + jY(t)$ 为复过程，其中 $j = \sqrt{-1}$.

- $\mu(t) \triangleq EZ(t) \triangleq EX(t) + jEY(t)$
- $$R(t_1, t_2) \triangleq EZ(t_1) \cdot \overline{Z(t_2)}$$
  $$= E[X(t_1) + jY(t_1)]\overline{[X(t_2) + jY(t_2)]}$$
- $DZ(t) \triangleq E|Z(t) - \mu(t)|^2 = E|Z(t)|^2 - |\mu(t)|^2$，非负实函数
- $C(t_1, t_2)$?

复随机过程

定义： $\{X(t), t \in T\}$, $\{Y(t), t \in T\}$ 两个实过程
具有相同的参数集T和概率空间
称 $Z(t) = X(t) + jY(t)$ 为复过程，其中 $j = \sqrt{-1}$.

- $\mu(t) \triangleq EZ(t) \triangleq EX(t) + jEY(t)$
- $R(t_1, t_2) \triangleq EZ(t_1) \cdot \overline{Z(t_2)}$
  $= E[X(t_1) + jY(t_1)]\overline{[X(t_2) + jY(t_2)]}$
- $DZ(t) \triangleq E|Z(t) - \mu(t)|^2 = E|Z(t)|^2 - |\mu(t)|^2$，非负实函数
- $C(t_1, t_2)$?

$$C(t_1, t_2) = E[Z(t_1) - \mu(t_1)]\overline{[Z(t_2) - \mu(t_2)]} = R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\overline{\mu(t_2)}$$

随机过程的分类

1 **独立增量过程：** $\{\xi(t), t \in T\}$, 泊松过程、随机游动
$\forall n, \forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n, t_i \in T,$
$\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ 相互独立，则称$\sim$.
若 $\forall\ s < t$, $\xi(t) - \xi(s)$ 的分布仅依赖于 $t - s$, 称有平稳增量

随机过程的分类

1 **独立增量过程：** $\{\xi(t), t \in T\}$, 泊松过程、随机游动
$\forall n, \forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n, t_i \in T,$
$\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ 相互独立，则称∼.
若 $\forall\ s < t$, $\xi(t) - \xi(s)$ 的分布仅依赖于 $t - s$, 称有平稳增量

2 **Markov过程：** 已知现在，将来与过去无关（无后效性）
$\forall n, \forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t, t_i \in T, t \in T, A \subset \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} & \Pr\{\ \xi(t) \in A \mid \xi(t_1) = x_1, \ldots \xi(t_n) = x_n\ \} \\ = & \Pr\{\ \xi(t) \in A \mid \xi(t_n) = x_n\ \}. \end{aligned}$$

随机过程的分类

1 **独立增量过程：** $\{\xi(t), t \in T\}$, 泊松过程、随机游动
$\forall n,\ \forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n,\ t_i \in T,$
$\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ 相互独立，则称∼.
若 $\forall\ s < t,\ \xi(t) - \xi(s)$ 的分布仅依赖于 $t - s$, 称有平稳增量

2 **Markov过程：** 已知现在，将来与过去无关（无后效性）
$\forall n,\ \forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t,\ t_i \in T,\ t \in T,\ A \subset \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} & \Pr\{\ \xi(t) \in A \mid \xi(t_1) = x_1, \ldots \xi(t_n) = x_n\ \} \\ = \ & \Pr\{\ \xi(t) \in A \mid \xi(t_n) = x_n\ \}. \end{aligned}$$

3 **二阶矩过程：** $\forall t \in T,\ E|\xi(t)|^2 < \infty.$

随机过程的分类

1 **独立增量过程：** $\{\xi(t),\ t\in T\}$，泊松过程、随机游动
$\forall n,\ \forall t_1<t_2<\ldots<t_n,\ t_i\in T,$
$\xi(t_1),\xi(t_2)-\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ 相互独立，则称∼.
若 $\forall\ s<t,\ \xi(t)-\xi(s)$ 的分布仅依赖于 $t-s$，称有平稳增量

2 **Markov过程：** 已知现在，将来与过去无关（无后效性）
$\forall n,\ \forall t_1<t_2<\ldots<t_n<t,\ t_i\in T,\ t\in T,\ A\subset\mathbb{R},$

$$\begin{aligned}&\Pr\{\ \xi(t)\in A\mid \xi(t_1)=x_1,\ldots\xi(t_n)=x_n\ \}\\ =\ &\Pr\{\ \xi(t)\in A\mid \xi(t_n)=x_n\ \}.\end{aligned}$$

3 **二阶矩过程：** $\forall t\in T,\ E|\xi(t)|^2<\infty.$

4 **宽平稳过程：** 二阶矩过程，若 $E\xi(t)=$常数μ，
且协方差 $C(s,t)$ 仅依赖于 $t-s$，称∼.
严平稳过程： $\forall n,\ t_1,\ldots t_n\in T$ 及 $h>0,$
$(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))$ 与 $(\xi(t_1+h),\ldots,\xi(t_n+h))$有相同的联合分布，即有限维分布平移不变！

5 **高斯过程：** 有限维分布服从高斯分布的随机过程。

n-维高斯分布：$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)^T$.
均值 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$, 协方差矩阵 $\mathbf{B}$ 为正定矩阵。

密度函数和特征函数

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T B^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right], \\
\Phi(t_1, \ldots, t_n) &= \exp\left(j\mathbf{t}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{B}\mathbf{t}\right).
\end{aligned}
$$

5 **高斯过程：** 有限维分布服从高斯分布的随机过程。

n-维高斯分布：$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$，$\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)^T$.
均值 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$，协方差矩阵 $\mathbf{B}$ 为正定矩阵。

密度函数和特征函数

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T B^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right], \\ \Phi(t_1, \ldots, t_n) &= \exp\left(j\mathbf{t}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{B}\mathbf{t}\right). \end{aligned}$$

一维情形:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad \Phi(t) = \exp\left(jt\mu - \frac{t^2\mu^2}{2}\right).$$

例： N 为常正整数，$\eta_k \sim N(0, \sigma_k^2)$, $k = 1, \ldots, N$, 相互独立，$\xi(t) \triangleq \sum_{k=1}^{N} \eta_k \, e^{j w_k t}$，$w_k$ 为常数串，求均值和相关函数。

例： N 为常正整数，$\eta_k \sim N(0, \sigma_k^2)$，$k = 1, \ldots, N$, 相互独立，$\xi(t) \triangleq \sum_{k=1}^{N} \eta_k \, e^{j w_k t}$，$w_k$ 为常数串，求均值和相关函数。

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{N} \eta_k \cos w_k t + j \sum_{k=1}^{N} \eta_k \sin w_k t,$$

例： N 为常正整数，$\eta_k \sim N(0,\sigma_k^2)$, $k=1,\ldots,N$, 相互独立，
$\xi(t) \triangleq \sum_{k=1}^{N} \eta_k \, e^{jw_k t}$，$w_k$ 为常数串，求均值和相关函数。

$$
\begin{aligned}
\xi(t) &= \sum_{k=1}^{N} \eta_k \cos w_k t + j \sum_{k=1}^{N} \eta_k \sin w_k t, \\
E\xi(t) &= E \sum_{k=1}^{N} \eta_k \cos w_k t + j \cdot E \sum_{k=1}^{N} \eta_k \sin w_k t = 0,
\end{aligned}
$$

例： N 为常正整数，$\eta_k \sim N(0,\sigma_k^2)$，$k=1,\ldots,N$，相互独立，$\xi(t) \triangleq \sum_{k=1}^N \eta_k e^{jw_k t}$，$w_k$ 为常数串，求均值和相关函数。

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \sum_{k=1}^N \eta_k \cos w_k t + j\sum_{k=1}^N \eta_k \sin w_k t, \\
E\xi(t) &= E\sum_{k=1}^N \eta_k \cos w_k t + j\cdot E\sum_{k=1}^N \eta_k \sin w_k t = 0, \\
R(t_1,t_2) &= E\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)} = E\sum_{k=1}^N \eta_k e^{jw_k t_1}\cdot\sum_{m=1}^N \eta_m e^{-jw_m t_2} \\
&= \sum_{k=1}^N\sum_{m=1}^N e^{j(w_k t_1 - w_m t_2)} E\eta_k\eta_m = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{jw_k(t_1-t_2)}.
\end{aligned}$$

故 $\{\xi(t),\, t\in\mathbb{R}\}$ 宽平稳。

协方差$C(t_1,t_2)$呢？ $C(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)$!