第五章 高斯过程

陈斌

Tsinghua Shenzhen International Graduate School (SIGS)

基本定义和多元高斯分布

中心极限定理： ξ_n 独立同分布随机序列，$E\xi_n = \mu$, $D\xi_n = \sigma^2$, 令 $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, 则

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{F} N(0,1), \quad \text{依分布收敛}$$

$$i.e., \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2 2)\, dt.$$

若 $\xi_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$, 显然上式成立。

随机变量 ξ, 影响 ξ 取值的因素很多，而且每个因素都不是主要因素，则通常 ξ 服从高斯分布。例如热噪声（高斯白噪声）。

定义：若随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ 的有限维分布都是高斯分布，则称其为高斯过程。

多元高斯分布：

$$一元：N(0,1),\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ \Phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}};$$

$$N(\mu,\sigma^2), f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \Phi(t) = \exp\left(j\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

推广：ξ 随机向量

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \mu = E\xi = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b1n \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\mu_i = E\xi_i,\ b_{ik} = E(\xi_i - \mu_i)(\xi_k - \mu_k),\ \mathbf{B} = E(\xi-\mu)(\xi-\mu)^T.$$

性质：B 对称、具有非负定性：

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \dots \lambda_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\ = & \sum_i \sum_k \lambda_i \lambda_k E(\xi_i - \mu_i)(\xi_k - \mu_k) \\ = & E[\sum_i \lambda_i (\xi_i - \mu_i)]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$b_{ik} = b_{ki} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ 对称 $\Leftarrow \mathbf{B}$ 非负定.

定义： 称随机向量 ξ 服从 n 元高斯分布，若其密度为

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right].$$

其中 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ 为均值，协方差矩阵 $\mathbf{B}$ 正定。

$$n=1,\ \mu=(\mu_1),\ \mathbf{B}=(\sigma^2), f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

$$n=2, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, |\mathbf{B}| = (1-r^2)\sigma_1^2\sigma_2^2.$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{(1-r^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix},\ 相关系数 = \frac{C(\xi_1,\xi_2)}{\sigma_1\sigma_2}.$$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right.\right. \\ &\left.\left. -2r\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}. \end{aligned}$$

$\mu_1=\mu_2=0,\ \sigma_1^2=\sigma^2=1$ 时,

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{1-r^2} & -\frac{r}{1-r^2} \\ -\frac{r}{1-r^2} & \frac{1}{1-r^2} \end{pmatrix}.$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}[x_1^2-2rx_1x_2+x_2^2]\right\}.$$

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right].$$

$\mathbf{B}$ 正定矩阵性质：

$\mathbf{B}$ 对称 $\Rightarrow$ $\mathbf{B}$ 可分解为 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}^T\Lambda\mathbf{Q}$，其中 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，i.e. $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}$, Λ 为对角矩阵。

$\mathbf{B}$ 正定 $\Rightarrow \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $\lambda_i>0$，λ_i 称为特征值。

令

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\mathbf{Q},$$

则 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{Q}^T\Lambda^{-1}\mathbf{Q}$.

特征值 λ_i 为 $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B})=0$ 的 n 个根（可以有重根），线性方程组 $(\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{z}_i=0$ 的解为 λ_i 对应的特征向量，这 n 个特征向量归一化后构成正交矩阵 $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix},\ \det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B})=(\lambda-1)^2-r^2\Rightarrow\lambda_1=1-r,\ \lambda_2=1+r.$$

$$\begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+r & 0\\ 0 & 1-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{1+r} & 0\\ 0 & \frac{1}{1-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{1-r^2}\begin{pmatrix}1 & -r\\ -r & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\sqrt{1+r} & 0\\ 0 & \sqrt{1-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1+r}{2}} & \sqrt{\frac{1+r}{2}}\\ \sqrt{\frac{1-r}{2}} & \sqrt{\frac{1-r}{2}}\end{pmatrix}.$$

变量替换：一箭双雕！

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right].$$

$f(x_1,\ldots,x_n)$ 是一个概率密度，i.e.,

1. $f(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$ 显然成立；
2. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n=1.$

$\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{A}^T$，$\mathbf{A}$ 非奇异，即 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，$\mathbf{B}^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^{-1}$，

$$(\mathbf{x}-\mu)^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)=[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)]^T\cdot\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mu).$$

令 $\mathbf{y}=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)$，则 $\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mu$，

$$\text{雅可比}=\left|\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\right|=|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}$$

因为$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right].$

$$\begin{aligned}
\text{故}\quad & \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n \\
= & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\frac{1}{2}y^Ty)\,dy \\
= & \prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp(-\frac{y_i^2}{2})dy_i=\prod_{i=1}^n 1=1.
\end{aligned}$$

特征函数：

$$\begin{aligned}
\Phi(t_1,\ldots,t_n) &= E\ \exp(jt_1\xi_1+\cdots+jt_n\xi_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}_n}\exp(jt_1x_1+\cdots+jt_nx_n)f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots d_{x_n}
\end{aligned}$$

$$\Phi(t_1,\ldots,t_n)=\exp(j\mathbf{t}^T\mu-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{B}\mathbf{t}),\quad \mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)^T$$ [1]

从高斯分布的特征函数可得均值、协方差，反之亦然，一一对应！

[1]证明见书p462-464，基本思路就是多次用变量替换！

注： 若 $\mathbf{B}$ 非负定且 $|\mathbf{B}|=0$, 则无法用密度定义高斯分布，但仍可用上述特征函数定义 n 元高斯分布，即为退化情形。

边际分布：
$\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)^T$ 的任意子向量仍服从正态分布[2]，特别地，ξ_i 服从正态分布。反之，则一般不成立。

数字特征：

$$E\xi_k=\mu_k,\ E\xi_k\xi_i=b_{ki}+\mu_k\mu_i,\ C(\xi_k,\xi_i)=b_{ki}.$$

n 元正态分布完全由其一阶矩和二阶矩确定!

[2] $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $k<n$, $(\xi_1,\ldots,\xi_k)$, 边际分布的特征函数 $\Phi_k(t_1,\ldots,t_k)=\Phi_n(t_1,\ldots,t_k,0,\ldots,0)$

计算各阶矩

$$\begin{aligned}\Phi(t_1,\ldots,t_n) &= \exp(j\mathbf{t}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{B}\mathbf{t}) \\ &= \exp(\sum_k jt_k\mu_k - \frac{1}{2}\sum_k\sum_i t_kt_ib_{ki}).\end{aligned}$$

计算各阶矩，若矩存在，则

$$E\,\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n} = j^{-\sum_i k_i}\cdot\left.\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}\Phi(t_i,\ldots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\ldots\partial t_n^{k_n}}\right|_{t_1=\cdots=t_n=0}$$

作业:

1) $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_5$ 是5 元联合正态分布的均值为0 的随机变量，试用协方差表示$E\{\xi_1\xi_2\ldots\xi_5\}$.

2) $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_6$ 是6 元联合正态分布的均值为0 的随机变量，试用协方差表示$E\{\xi_1\xi_2\ldots\xi_6\}$.

例： ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是四元联合正态分布的随机变量，若ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 的均值为0，试用ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 的协方差表示$E\left\{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\right\}$

解：由于ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 为零均值的四元正态分布随机变量，故ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 的特征函数为

$$\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}b_{ki}t_kt_i\right\}$$

为方便，设$u_k=\sum_{i=1}^{4}b_{ki}t_i$，则$\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}t_ku_k\right\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)}{\partial t_1} &= -\frac{1}{2}\left[u_1+t_1b_{11}+t_2b_{21}+t_3b_{31}+t_4b_{41}\right]\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left[u_1+b_{11}t_1+b_{12}t_2+b_{13}t_3+b_{14}t_4\right]\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)\\
&= -u_1\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)\\
\frac{\partial^2\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)}{\partial t_2\partial t_1} &= -\frac{\partial u_1}{\partial t_2}\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)-u_1\frac{\partial\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)}{\partial t_2}\\
&= -b_{12}\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)+u_1u_2\Phi\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)
\end{aligned}$$

（接上一页）

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_3\partial t_2\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_3}\left[-b_{12}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) + u_1u_2\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)\right] \\
= \quad & -b_{12}(-u_3)\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) + b_{13}u_2\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) + u_1b_{23}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) \\
& -u_1u_2u_3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) \\
= \quad & b_{12}u_3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) + b_{13}u_2\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) + b_{23}u_1\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) \\
& -u_1u_2u_3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^4\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_4\partial t_3\partial t_2\partial t_1} = b_{12}b_{34}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) - b_{12}u_3u_4\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) \\
&+b_{13}b_{24}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) - b_{13}u_2u_4\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) + b_{23}b_{14}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) \\
&-b_{23}u_1u_4\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) - b_{14}u_2u_3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) - b_{24}u_1u_3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) \\
&-b_{34}u_1u_2\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) + u_1u_2u_3u_4\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)
\end{aligned}
$$

令$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$, 则$\Phi(0,0,0,0) = 1, u_k = 0, k = 1,2,3,4$，所以

$$
\begin{aligned}
E\{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\} \quad &= \quad (j)^{-4}\left[b_{12}b_{34} + b_{13}b_{24} + b_{23}b_{14}\right] \\
&= \quad E\{\xi_1\xi_2\}E\{\xi_3\xi_4\} + E\{\xi_1\xi_3\}E\{\xi_2\xi_4\} + E\{\xi_2\xi_3\}E\{\xi_1\xi_4\}
\end{aligned}
$$

定理：$\xi_1, \ldots, \xi_n$ 联合高斯，则相互独立 $\Leftrightarrow$ 两两不相关

证：独立 $\Leftrightarrow F(x,y) = F(x) \cdot F(y)$ 或 $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$
或 $\Phi(t,u) = \Phi(t) \cdot \Phi(u)$.

不相关 $\Leftrightarrow E\ XY = EX \cdot EY$ 或 $E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) = 0$
或协方差矩阵为对角阵。

"$\Rightarrow$"

$$
\begin{aligned}
\Phi(t_1, \ldots, t_n) &= \Phi(t_1) \cdots \Phi(t_{t_n}) \\
&= \exp(j \sum_k \mu_k t_k - \frac{1}{2} \sum_k \sigma_k^2 t_k^2)
\end{aligned}
$$

i.e., $b_{kk} = \sigma_k^2$, $b_{ki} = 0\,(k \neq i)$, 协方差为对角阵。

"$\Leftarrow$" 若为对角阵，即 $b_{ki}=0\ (k\neq i)$, 则

$$\begin{aligned}
\Phi(t_1,\ldots,t_n) &= \exp(\sum_k jt_k\mu_k - \frac{1}{2}\sum_k\sum_i t_kt_ib_{ki}) \\
&= \exp(\sum_k jt_k\mu_k - \frac{1}{2}\sum_k t_k^2b_{kk}) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\exp(jt_k\mu_k - \frac{1}{2}t_k^2b_{kk}) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\Phi(t_n).
\end{aligned}$$

故独立。

子随机向量的相关性

类似地，将 ξ 分为两部分 ξ_1,ξ_2, i.e. $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$ 分块矩阵,

$\mathbf{B}$ 对称 $\Rightarrow \mathbf{B}_{21}^T = \mathbf{B}_{12}$ 互协方差矩阵,

则 ξ_1 与 ξ_2 独立 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{B}$ 为对角分块矩阵，i.e. $\mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{21} = 0$.

证明完全类似。可见特征函数在高斯分布中的重要性。

线性变换

ξ 随机向量，$\mathbf{a}$ 实向量，$\eta = \sum\limits_k a_k \xi_k = \mathbf{a}^T \xi$ 线性组合。则

均值：$E\eta = \mathbf{a}^T E\xi = \sum\limits_k a_k E\xi_k$， η 一维随机变量。

方差：

$$\begin{aligned} D\eta &= E(\eta - E\eta)^2 \\ &= E(\sum_k a_k\xi_k - \sum_k a_k E\xi_k)(\sum_i a_i\xi_i - \sum_i a_i E\xi_i) \\ &= \sum_k \sum_i a_k a_i E(\xi_k - E\xi_k)(\xi_i - E\xi_i) \\ &= \sum_k \sum_i a_k a_i b_{ki} = \mathbf{a}^T \mathbf{B} \mathbf{a} \end{aligned}$$

增加条件：ξ 正态，则 η 正态。（由均值、方差唯一确定）

定理： $\xi \sim n$ 元高斯 $N(\mu, \mathbf{B}) \Leftrightarrow$ 对任意线性组合 $\eta = \mathbf{a}^T\xi$,
$\eta \sim N(\mathbf{a}^T\mu, \mathbf{a}^T\mathbf{B}\mathbf{a})$.

（提示：用特征函数证明：

$$N\left(\mu, \sigma^2\right), f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \Phi(t) = \exp\left(j\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right))$$

证："$\Rightarrow$"

$$\Phi(\mathbf{t}) = \exp(j\mathbf{t}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{B}\mathbf{t}) = E\ e^{j\mathbf{t}^T\xi}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_\eta(u) &= E\ e^{ju\eta} = E\ e^{ju(\mathbf{a}^T\xi)} = E\ \exp[j(u\mathbf{a})^T\xi] \\
&= \exp[j(u\mathbf{a})^T\mu - \frac{1}{2}(u\mathbf{a})^T\mathbf{B}(u\mathbf{a})] \\
&= \exp[ju(\mathbf{a}^T\mu) - \frac{1}{2}u^2(\mathbf{a}^T\mathbf{B}\mathbf{a})] \\
&= \exp[juE\eta - \frac{1}{2}u^2 D\eta], \quad \text{故 } \eta \text{ 正态.}
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" η 正态 $\Rightarrow \Phi_\eta(u) = \exp[ju(\mathbf{a}^T\mu) - \frac{1}{2}u^2(\mathbf{a}^T\mathbf{B}\mathbf{a})] = E\ e^{ju\mathbf{a}^T\xi}$

$$\Rightarrow \Phi_\eta(1) = E\ e^{j\mathbf{a}^T\xi} = \exp[j\mathbf{a}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{B}\mathbf{a}], \ \mathbf{a} \text{ 任意} \Rightarrow \xi \text{ 正态.}$$

ξ: n 维向量　η: m 维向量
线性变换 $\xi \to \eta$, $\eta = \mathbf{C}\xi$, $\mathbf{C} = (c_{ki})_{m\times n}$

均值:

$$E\eta = \mathbf{C}E\xi = \mathbf{C}\mu_\xi;$$

协方差:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_\eta &= E(\eta - E\eta)(\eta - E\eta)^T \\ &= E\{\mathbf{C}(\xi - \mu_\xi)[\mathbf{C}(\xi - \mu_\xi)]^T\} \\ &= \mathbf{C}E(\xi - \mu_\xi)(\xi - \mu_\xi)^T\mathbf{C}^T \\ &= \mathbf{C}\mathbf{B}_\xi\mathbf{C}^T.\end{aligned}$$

增加条件: ξ 正态，则 η 正态。

证：

$$\begin{aligned}\Phi_\eta(t_1,\dots,t_m) &= E\ \exp(j\mathbf{t}^T\eta) = E\ \exp(j\mathbf{t}^T\mathbf{C}\xi)\\ &= E\ \exp[j(\mathbf{C}^T\mathbf{t})^T\xi]\\ &= \exp[j(\mathbf{C}^T\mathbf{t})^T\mu - \frac{1}{2}(\mathbf{C}^T\mathbf{t})^T\mathbf{B}(\mathbf{C}^T\mathbf{t})]\\ &= \exp[j\mathbf{t}^T(\mathbf{C}\mu) - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T(\mathbf{CBC}^T)\mathbf{t}]\end{aligned}$$

故 η 正态[3]。

总结：

1. 正态分布的线性变换不变性：联合高斯（正态）的线性变换仍联合高斯。

2. 联合高斯（正态）即分量构成多元高斯向量。

[3] $\Phi(t_1,\dots,t_n) = \exp\left(j\mathbf{t}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{B}\mathbf{t}\right)$

ξ: n 元正态，$\mathbf{B}, \mathbf{U}: n\times n$ 正交矩阵，$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$.

$\eta = \mathbf{U}\xi$，线性变换，η 仍为 n 元正态向量，$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$.

ξ：n 元正态，$\mathbf{B}$, $\mathbf{U}: n \times n$ 正交矩阵，$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$.

$\eta = \mathbf{U}\xi$，线性变换，η 仍为 n 元正态向量，$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$.

定理：存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$, $\eta = Q\xi$, 使得 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 相互独立。

证：$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^T\Lambda\mathbf{Q}$, Λ 对角阵 $\Rightarrow \Lambda = \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T$, $\mathbf{Q}$ 正交矩阵。

令 $\eta = \mathbf{Q}\xi$ 为 ξ 的正交变换, η 正态，

$\mathbf{B}_\eta = \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = \Lambda$ 对角阵$\Leftrightarrow$不相关$\Leftrightarrow$独立

η 的方差分量 $D\eta_i = \lambda_i$ 为 $\mathbf{B}$ 的特征值。

高斯过程

有限维分布都是高斯分布。$\{\xi(t), t \in T\}$

$$f(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_t - \mu_t)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}_t - \mu_t)\}$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{t_1} \\ \vdots \\ x_{t_n} \end{pmatrix}, \mu_t = \begin{pmatrix} \mu_{t_1} \\ \vdots \\ \mu_{t_n} \end{pmatrix} = E\mathbf{x}_t, \quad \mathbf{B} = (b_{ki})_{n\times n},$$

$$b_{ki} = E(\xi_{t_k} - \mu_{t_k})(\xi_{t_i} - \mu_{t_i}) = C(t_k, t_i) = R(t_k, t_i) - \mu_{t_k}\mu_{t_i},$$

$$\begin{aligned} \Phi(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n) &= \exp\left\{ j\mathbf{u}^T \mu_t - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \right\} \\ &= \exp\left\{ \sum_k j u_k \mu_{t_k} - \frac{1}{2} \sum_k \sum_i u_k u_i b_{ki} \right\}. \end{aligned}$$

高斯过程由其均值和相关函数完全确定。

$\{\xi(t)\}$ 宽平稳 $\Leftrightarrow \mu_{t_k} = \mu,\ b_{ki} = b(t_k - t_i)$

$\Leftrightarrow \Phi(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n) = \exp\{\sum_k j u_k \mu - \frac{1}{2} \sum_k \sum_i u_k u_i b(t_k - t_i)\}$

$$\begin{aligned} & \Phi(u_1, \ldots, u_n; t_1 + h, \ldots, t_n + h) \\ = \ & \exp\{\sum_k j u_k \mu - \frac{1}{2} \sum_k \sum_i u_k u_i b(t_k - t_i)\} \end{aligned}$$

定理：高斯过程，宽平稳 $\Leftrightarrow$ 严平稳.

复高斯过程：$\zeta(t) = \xi(t) + j\eta(t), \xi(t), \eta(t)$ 实过程。

定义：ξ 与 η 是 n 元高斯随机向量，若其联合分布为 $2n$ 元高斯随机向量，则称 $\xi + j\eta$ 为 n 元复高斯随机向量。

定义：若复过程 $\zeta(t)$ 的有限维分布是复高斯分布，称之为复高斯过程。

均方极限

定理：高斯向量列的均方极限（若存在）仍为高斯向量。

证：$\xi^{(n)}$ 高斯向量列，ξ 随机向量，已知 $\xi^{(n)} \xrightarrow{m.s.} \xi$，
由均方极限的性质知：

$$\mu^{(n)} = E\,\xi^{(n)} \longrightarrow E\,\xi = \mu$$

$$\mathbf{B}^{(n)} = E\,(\xi^{(n)} - \mu^{(n)})(\xi^{(n)} - \mu^{(n)})^T \longrightarrow E(\xi - \mu)(\xi - \mu)^T = \mathbf{B}$$

故 $\underset{\xi^{(n)}\text{ 的特征函数}}{\Phi_n(u_1, \ldots, u_k)} \longrightarrow \underset{\xi\text{ 的特征函数}}{\Phi(u_1, \ldots, u_k)}$

$$\Leftrightarrow \exp\left\{ j\mathbf{u}^T\mu^{(n)} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{B}^{(n)}\mathbf{u} \right\} \longrightarrow \exp\left\{ j\mathbf{u}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{B}\mathbf{u} \right\}$$

(m.s.收敛 $\Rightarrow$ 依概率收敛 $\Rightarrow$ 依分布收敛 $\Leftrightarrow$ 特征函数收敛)

故 ξ 为高斯向量。

均方导数

定理： 高斯过程的导数（若存在）仍是高斯过程。m.s.

证：$\xi(\mathbf{t})$, $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_k)^T$, $\mathbf{t}+h=(t_1+h,\ldots,t_k+h)^T$

$\xi(\mathbf{t})$, $\xi(\mathbf{t}+h)$ 联合高斯 $\Rightarrow \frac{1}{h}[\xi(\mathbf{t})-\xi(\mathbf{t}+h)]$ 联合高斯(线性变换)

均方极限 $=\xi'(\mathbf{t})$ 高斯。
由于 k 是任意的，$t_1,\ldots,t_k$ 是任取的，
故 $\{\xi'(\mathbf{t})\}$ 为高斯过程。

均方积分

定理: 设 $\{\xi(t)\}$ 为均方可积高斯过程,
则 $\eta(t)=\int_a^t \xi(u)du$ 和 $\zeta(t)=\int_a^b \xi(u)h(t,u)du$ 是高斯过程。

证: $\eta(t),\zeta(t)=\underset{\Delta u_k\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_k \xi(u_k)h(t,u_k)\Delta u_k$

(取值在小区间 $[u_{k-1},u_k]$ 的右端点)

对于 $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)^T$, $\sum_k \xi(u_k)h(\mathbf{t},u_k)\Delta u_k$ 是线性组合
故为高斯向量 $\Rightarrow$ 其极限为高斯向量

故 $\zeta(\mathbf{t})$ 是高斯向量 $\Rightarrow \{\zeta(t)\}$ 是高斯过程。

$\eta(t)=\int_a^b \xi(u)h(t,u)du$ 高斯, $\eta(t)=\int_{\mathbb{R}} \xi(u)h(t,u)du$ 高斯
$\Rightarrow$ 高斯过程通过线性系统仍是高斯过程。

定理: $\{\eta(t)\}$ 与 $\{\xi(t)\}$ 是联合高斯,证明见教材

瑞利分布 Rayleigh

称 ξ 服从瑞利分布，若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)dt \\ &= \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)d\frac{t^2}{2\sigma^2} = -\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_0^x \\ &= \begin{cases} 1-\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{显然 } F(+\infty) = 1. \end{aligned}$$

计算可知 $E\xi=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$, $D\xi=(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2$.

$$
\begin{aligned}
E\xi &= \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\int_0^{+\infty}\underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx}_{\text{0均值高斯分布的方差！}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{\sigma^2}{2} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma.
\end{aligned}
$$

方差计算得借助分部积分法，可参考百度百科的详细推导！

命题： 假设 $U \sim (0,1)$ 均匀分布，Y 为任意随机变量，$F_Y(y)$ 为 Y 的分布，$F_Y^{-1}(y)$ 为其反函数，则 $Z = F_Y^{-1}(U)$ 与 Y 同分布。

$$F_Z(y) = P\{Z \le y\} = P\{F_Y^{-1}(U) \le y\} = P\{U \le F_Y(y)\} = F_Y(y)^4.$$

故理论上可由均匀分布**仿真任意随机变量**。

设 ξ_1 为 $\sigma = 1$ 的瑞利分布，则 $F_1(x) = [1 - e^{-\frac{x^2}{2}}] \cdot I_{\{x \ge 0\}}$，下面我们给出仿真高斯分布的算法：

$$F_1(x) = (1 - e^{-\frac{x^2}{2}}) \Rightarrow F_1^{-1}(y) = \sqrt{-2\ln(1-y)}$$

$$U \sim U(0,1) \Rightarrow 1 - U \sim U(0,1),$$

故 $F_1^{-1}(U) \sim F_1^{-1}(1-U) \sim \xi_1 \sim \sqrt{-2\ln U}$, i.e.,

给定均匀分布 $U(0,1)$，则 $\sqrt{-2\ln U}$ 服从 $\sigma = 1$ 的瑞利分布。

---

4 $P(U \le b) = F_U(b) - F_U(0) = b$

设 $A \sim$ Rayleigh 分布，$\theta \sim (0, 2\pi)$ 均匀分布，A 与 θ 独立。

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_{\{A \geq 0\}}, \\
f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} I_{[0,2\pi]}(\theta).
\end{aligned}
$$

$$
f(A, \theta) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp(-\frac{A^2}{2\sigma^2}) I_{\{A \geq 0\}} \cdot I_{[0,2\pi]}(\theta),
$$

设 $A \sim$ Rayleigh 分布，$\theta \sim (0, 2\pi)$ 均匀分布，A 与 θ 独立。

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \frac{A}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)\cdot I_{\{A\geq 0\}},\\
f(\theta) &= \frac{1}{2\pi}I_{[0,2\pi]}(\theta).
\end{aligned}
$$

$$
f(A,\theta) = \frac{A}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{A^2}{2\sigma^2})I_{\{A\geq 0\}}\cdot I_{[0,2\pi]}(\theta),
$$

令 $\begin{cases} X = A\cos\theta \\ Y = A\sin\theta \end{cases}$， 则 $\begin{cases} A = \sqrt{X^2+Y^2} \\ \theta = \arctan\frac{Y}{X} \end{cases}$.

换元 (1)代入 (2)Jacobi (3)积分区域

$$
f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad J = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}
$$

故 $X \sim N(0,\sigma^2)$, $Y \sim N(0,\sigma^2)$, 且 X 与 Y 独立。

仿真高斯分布：

1. 均匀分布 + 中心极限定理
   设 $U_1,\ldots,U_n \sim U(0,1)$, 则 $\frac{U_1+\cdots+U_n}{\sqrt{n}} \to N(\mu,\sigma^2)$.
   实验表明 $n \geq 12$ 时，效果比较理想。

2. 首先产生 $U_1, U_2 \sim U(0,1)$, 独立同 $(0,1)$ 均匀分布。
   则 $\sqrt{-2\ln U_1}\cos 2\pi U_2$ 与 $\sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2$ 独立同 $N(0,1)$ 分布。

由高斯分布得到瑞利分布:

设 $(X,Y)\sim N(0,\mathbf{B})$, X,Y 独立, 0 均值, 等方差,

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}).$$

令 $A=\sqrt{X^2+Y^2}$, $\theta=\arctan\frac{Y}{X}$, 则

$$f(A,\theta)=\frac{A}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{A}{2\sigma^2})I_{\{A\geq 0\}}I_{[0,2\pi]}(\theta).$$

由此得到边际分布

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{A}{\sigma^2}e^{-\frac{A}{2\sigma^2}}I_{\{A\geq 0\}}, \\ f(\theta) &= \frac{1}{2\pi}I_{[0,2\pi]}(\theta), \end{aligned}$$

故 A 服从瑞利分布, θ 服从 $(0,2\pi)$ 均匀分布, 且 A 与 θ 独立!

窄带平稳实高斯过程 Rayleigh 分布

窄带平稳实过程可表示为

$$X(t) = X_c(t)\cos\omega_0 t - X_s(t)\sin\omega_0 t,$$

其中

$$\begin{aligned} X_c(t) &= X(t)\cos\omega_0 t + \widehat{X}(t)\sin\omega_0 t, \\ X_s(t) &= \widehat{X}(t)\cos\omega_0 t - X(t)\sin\omega_0 t, \\ \widehat{X}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{X(u)}{t-u}du \text{是 } X(t) \text{ 的 } Hilbert \text{ 变换}. \end{aligned}$$

若 $X(t)$ 高斯，则 $X(t)$，$\widehat{X}(t)$ 联合高斯[5] $\Rightarrow X_c(t), X_s(t)$ 联合高斯[6].

---

[5] 均方积分也高斯

[6] 线性变换也高斯

设 $X(t)$ 均值为 0, 方差为 σ^2, 相关函数为 $R(\tau)$, $R(0)=\sigma^2$, 则:

$$X_c(t)\ \text{均值}=0,\quad \sigma_{X_c}^2=R_{X_c}(0)=R(0)=\sigma^2\quad \text{平稳}$$

$$X_s(t)\ \text{均值}=0,\quad \sigma_{X_s}^2=R_{X_s}(0)=R(0)=\sigma^2\quad \text{平稳}$$

设 $X(t)$ 均值为 0, 方差为 σ^2, 相关函数为 $R(\tau)$, $R(0)=\sigma^2$, 则:

$$X_c(t)\ 均值=0,\quad \sigma_{X_c}^2=R_{X_c}(0)=R(0)=\sigma^2\quad 平稳$$
$$X_s(t)\ 均值=0,\quad \sigma_{X_s}^2=R_{X_s}(0)=R(0)=\sigma^2\quad 平稳$$

$$由\begin{pmatrix} R_x(0) & 0 & R_{x_c}(\tau) & R_{x_cx_s}(\tau) \\ 0 & R_x(0) & -R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_c}(\tau) \\ R_{x_c}(\tau) & -R_{x_cx_s}(\tau) & R_x(0) & \mathbf{0} \\ R_{x_cx_s(\tau)} & R_{x_c}(\tau) & \mathbf{0} & R_x(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 可知 R_{X_cX_s}(0)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad E\ X_c(t)X_s(t)=0=E\ X_c(t)\cdot E\ X_s(t) \\ &\qquad i.e.\ \ X_c(t)\ 与\ X_s(t)\ 不相关 \\ &\Leftrightarrow \quad X_c(t)\ 与\ X_s(t)\ 独立. \end{aligned}$$

$$\therefore\quad f\left(x_c,x_s\right)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x_c^2+x_s^2}{2\sigma^2}\right\}$$

令

$$V(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)} \quad \longrightarrow \quad X(t) \text{ 的包络}$$
$$\theta(t) = \arctan \frac{X_s(t)}{X_c(t)} \quad \longrightarrow \quad X(t) \text{ 的相位}$$

则:

$$\begin{aligned} X_c(t) &= V(t)\cos\theta(t), \\ X_s(t) &= V(t)\sin\theta(t), \\ X(t) &= V(t)\cos(\omega_0 t + \theta(t)), \end{aligned}$$

令

$$V(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)} \quad \longrightarrow \quad X(t) \text{ 的包络}$$
$$\theta(t) = \arctan \frac{X_s(t)}{X_c(t)} \quad \longrightarrow \quad X(t) \text{ 的相位}$$

则：

$$\begin{aligned} X_c(t) &= V(t)\cos\theta(t), \\ X_s(t) &= V(t)\sin\theta(t), \\ X(t) &= V(t)\cos(\omega_0 t + \theta(t)), \end{aligned}$$

变量代换，Jacobi, $|J| = V(t)$, 故

$$f(V_t, \theta_t) = \frac{V_t}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{V_t^2}{2\sigma^2})I_{\{V_t \geq 0\}}I_{[0,2\pi]}(\theta_t)$$
$$\Rightarrow \quad f(V_t) = \frac{V_t}{\sigma^2}\exp(-\frac{V_t^2}{2\sigma^2})I_{\{V_t \geq 0\}}, \quad f(\theta_t) = \frac{1}{2\pi}I_{[0,2\pi]}(\theta_t)$$
$$\Rightarrow \quad V_t, \theta_t \text{ 独立}.$$

结论：窄带平稳实高斯过程的**一维包络分布为 Rayleigh 分布，一维相位分布为均匀分布，而且两随机变量独立**。

二维包络分布与二维相位分布

$V(t_1), V(t_2)$ 两个随机变量，都服从 Rayleigh 分布，$\tau = t_2 - t_1$，$V(t_1)$ 与 $V(t_2)$ 是否独立？$\tau \to \infty$ 时的情况？(V_{t_1}, V_{t_2}) 的联合分布？同样，$\theta(t_1), \theta(t_2)$ 中有类似的问题。
(V_{t_1}, V_{t_2}) 与 $(\theta_{t_1}, \theta_{t_2})$独立？

$$\begin{aligned} X(t_1) &= X_c(t_1)\cos\omega_0 t_1 - X_s(t_1)\sin\omega_0 t_1 \\ X(t_2) &= X_c(t_2)\cos\omega_0 t_2 - X_s(t_2)\sin\omega_0 t_2 \end{aligned}$$

$X_c(t_1)$,$X_s(t_1)$,$X_c(t_2)$,$X_s(t_2)$ 联合高斯，四维向量，0均值，协方差

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & R_{X_c}(\tau) & -R_{X_cX_s}(\tau) \\ 0 & \sigma^2 & R_{X_cX_s}(\tau) & R_{X_c}(\tau) \\ R_{X_c}(\tau) & R_{X_cX_s}(\tau) & \sigma^2 & 0 \\ -R_{X_cX_s}(\tau) & R_{X_c}(\tau) & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = [\sigma^4 - R^2_{X_c}(\tau) - R^2_{X_cX_s}(\tau)]^2$$

$$
\begin{aligned}
& f(x_c(t_1), x_s(t_1), x_c(t_2), x_s(t_2)) \\
= \quad & \frac{1}{(2\pi)^2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\frac{1}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}[\sigma^2(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) \\
& -2R_{X_c}(\tau)(x_1y_1 + x_2y_2) + 2R_{X_cX_s}(\tau)(x_1y_2 - x_2y_1)]\}
\end{aligned}
$$

$$
\text{变换}\begin{cases} x_c(t_1) = x_1 = V_1\cos\theta_1 \\ x_s(t_1) = x_2 = V_1\sin\theta_1 \\ x_c(t_2) = y_1 = V_2\cos\theta_2 \\ x_s(t_2) = y_2 = V_2\sin\theta_2 \end{cases}, \quad |J| = V_1V_2.
$$

$$
\begin{aligned}
f(V_1, V_2, \theta_1, \theta_2) = & \frac{V_1V_2}{(2\pi)^2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\frac{1}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}[\sigma^2(V_1^2 + V_2^2)^2 \\
& -2R_{X_c}(\tau)V_1V_2\cos(\theta_2 - \theta_1) - 2R_{X_cX_s}(\tau)V_1V_2\sin(\theta_2 - \theta_1)]\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(V_1,V_2) &= \frac{V_1V_2}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}(V_1^2+V_2^2)\right\} \\
&\quad \cdot J_0{}^{7}\left(\frac{jV_1V_2}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}[R_{X_c}^2(\tau)+R_{X_cX_s}^2(\tau)]^{1/2}\right).
\end{aligned}
$$

当$\tau\to\infty$ 时，若 $X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 独立，
则$X_c(t_1)$ 与 $X_c(t_2)$ 独立，$X_s(t_1)$ 与 $X_s(t_2)$ 也独立
故，$R_{X_c}(\tau)\to 0$，$R_{X_cX_s}(\tau)\to 0$
则

$$
|\mathbf{B}| = [\sigma^4 - R_{X_c}^2(\tau) - R_{X_cX_s}^2(\tau)]^2 = \sigma^8
$$

则 $V(t_1)$ 与 $V(t_2)$ 独立。

类似地，对 $\theta(t_1)$ 与 $\theta(t_2)$ 有一些结果。

(V_1,V_2) 与 (θ_1,θ_2) 一般情况下不独立。

[7]零级修正贝塞尔函数，具体见教材p485-486

补充知识

第一类贝塞尔（Bessel）函数 $J_n(u)$ 定义为下述 Bessel 微分方程的解：

$$u^2\frac{d^2f(u)}{du^2}+u\frac{df(u)}{du}+(u^2-n^2)f(u)=0,$$

很多积分可以表示成特殊函数（如 Bessel 函数）的形式。

第一类

$$J_n(u)=\frac{1}{2\pi j^n}\int_0^{2\pi}e^{ju\cos\theta}\cdot e^{jn\theta}d\theta.$$

第一类零级

$$J_0(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ju\cos\theta}d\theta,\quad J_0(0)=1.$$

补充知识

第一类贝塞尔（Bessel）函数 $J_n(u)$ 定义为下述 Bessel 微分方程的解：

$$u^2\frac{d^2f(u)}{du^2}+u\frac{df(u)}{du}+(u^2-n^2)f(u)=0,$$

很多积分可以表示成特殊函数（如 Bessel 函数）的形式。

第一类

$$J_n(u)=\frac{1}{2\pi j^n}\int_0^{2\pi}e^{ju\cos\theta}\cdot e^{jn\theta}d\theta.$$

第一类零级

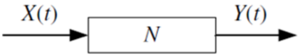
$$J_0(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ju\cos\theta}d\theta,\quad J_0(0)=1.$$

定理: 设随机变量ξ 有密度函数$p_1(x), x\in(a,b)$. 如果分割$(a,b)=\bigcup_i I_i$ (I_i 互不相交), 在每个子区间I_i 上函数$y=f(x)$ 有唯一的反函数$h_i(y)$, 且$h_i'(y)$ 存在连续. 那么$\eta=f(\xi)$ 仍为连续型变量, 其密度函数:

$$p_2(y)=\begin{cases} & \sum_i p_1\left[h_i(y)\right]\cdot|h_i'(y)| \\ 0, & \text{若}y\text{ 使反函数不存在}\end{cases}$$

高斯过程通过非线性系统

平方器：$Y(t)=X^2(t)$　　限幅器：$Y(t)=\begin{cases}1 & X(t)\ge 0\\ -1 & X(t)<0\end{cases}$



假定输入为 0 均值实平稳高斯过程 $X(t)$，相关函数为 $R(\tau)$，$DX(t)=\sigma^2=R(0)$.

1.平方器： 求 $Y(t)$ 的均值，相关函数，一维密度

$$
\begin{aligned}
EY(t) &= EX^2(t)=R(0)=\sigma^2,\\
R_Y(t,t+\tau) &= EY(t)Y(t+\tau)=EX^2(t)X^2(t+\tau)^{8}\\
&= R^2(0)+2R^2(\tau)=R_Y(\tau),\Rightarrow\ R_Y(0)=3R^2(0)<\infty
\end{aligned}
$$

故 $Y(t)$ 为平稳过程（非0均值）。

[8] $E\xi_{t_1}^2\xi_{t_2}^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}).$$

方法一： . 换元 $y = x^2$, $x = \sqrt{y}$, $|J| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$,

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{y}{2\sigma^2}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2 \cdot I_{\{y\geq 0\}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}\exp(-\frac{y}{2\sigma^2}) \cdot I_{\{y\geq 0\}}. \end{aligned}$$

方法二：

$$\begin{aligned} . \, F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} \\ &= \begin{cases} P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) & , \quad y \geq 0 \\ 0 & , \quad y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 2P\{0 \leq X \leq \sqrt{y}\}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2F(\sqrt{y}) - 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 2F'(\sqrt{y}) \cdot \frac{d\sqrt{y}}{dy} & , \quad y \geq 0 \\ 0 & , \quad y < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} & , \quad y \geq 0 \\ 0 & , \quad y < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma} \exp(-\frac{y}{2\sigma^2}) & , \quad y \geq 0 \\ 0 & , \quad y < 0 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

2. 限幅器 $Y(t)=\begin{cases} 1 & X(t)\geq 0 \\ -1 & X(t)<0 \end{cases}$, $Y(t)=\mathrm{sgn}[X(t)]$.

$$\begin{aligned} EX(t)=0 &\Rightarrow P\{Y(t)=1\}=P\{Y(t)=-1\}\Rightarrow EY(t)=0. \\ R_Y(t,s) &= EY(t)Y(s) \\ &= 1\cdot P\{X(t)X(s)\geq 0\}+(-1)\cdot P\{X(t)X(s)<0\} \\ &= P\{X(t)X(s)\geq 0\}-P\{X(t)X(s)<0\} \\ &= 1-2P\{X(t)X(s)<0\}, \end{aligned}$$

$$P\{X(t)X(s)<0\}=\iint_{x_1x_2<0} f(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

$(X(t),X(s))$ 联合密度

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x_1,x_2)\mathbf{B}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right].$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} R(0) & R(t-s) \\ R(t-s) & R(0) \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix},$$

$$r \triangleq \frac{R(t-s)}{R(0)} \quad \text{相关系数}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}, \text{其中 } \mathbf{A} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2(1+r)}} & \sqrt{\frac{1}{2(1+r)}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2(1-r)}} & \sqrt{\frac{1}{2(1-r)}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{1-r^2}\sigma, \quad |\mathbf{B}|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}\sigma}, \\ \mathbf{B}^{-1} &= \frac{1}{(1-r^2)\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1} &= \sigma \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+r}{2}} & -\sqrt{\frac{1-r}{2}} \\ \sqrt{\frac{1+r}{2}} & \sqrt{\frac{1-r}{2}} \end{pmatrix} \\
x_1 &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+r}y_1 - \sqrt{1-r}y_2) \\
x_2 &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+r}y_1 + \sqrt{1-r}y_2) \\
\text{Jacobi} &= \sigma \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+r}{2}} & -\sqrt{\frac{1-r}{2}} \\ \sqrt{\frac{1+r}{2}} & \sqrt{\frac{1-r}{2}} \end{pmatrix} \\
|J| &= \sqrt{1-r^2}\sigma
\end{aligned}$$

$$\iint\limits_{x_1x_2<0} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_{(1+r)y_1^2-(1-r)y_2^2<0} \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}\right)dy_1dy_2$$

令 $\begin{matrix} y_1 = V\cos\theta \\ y_2 = V\sin\theta \end{matrix}$

$$= \iint\limits_{(1+r)\cos^2\theta-(1-r)\sin^2\theta<0} \frac{V}{2\pi}e^{-\frac{V^2}{2}}dVd\theta$$

$$= \int\limits_{\cos 2\theta+r<0,\quad 0<\theta<2\pi} \frac{1}{2\pi}d\theta.$$

$$\cos 2\theta+r<0,\ \ 0<\theta<2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \pi-\arccos r<2\theta<\pi+\arccos r \\ 3\pi-\arccos r<2\theta<3\pi+\arccos r \end{cases}$$

$$\int_{\substack{\cos 2\theta + r < 0 \\ 0 < \theta < 2\pi}} \frac{1}{2\pi} d\theta = \int_{\frac{\pi - \arccos r}{2}}^{\frac{\pi + \arccos r}{2}} \frac{1}{2\pi} d\theta + \int_{\frac{3\pi - \arccos r}{2}}^{\frac{3\pi + \arccos r}{2}} \frac{1}{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\arccos r}{\pi},$$

故

$$\begin{aligned} P\{X(t)X(s) < 0\} &= \frac{1}{\pi} \arccos r \\ R_Y(t,s) &= 1 - 2 \cdot P\{X(t)X(s) < 0\} \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \arccos r \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin r, \end{aligned}$$

其中$r = \frac{R(\tau)}{R(0)}$, $\quad \arccos r + \arcsin r = \frac{\pi}{2}$.

故$R_Y(0) = \frac{2}{\pi} \arcsin 1 < \infty$, 即限幅器是0均值平稳过程。

正弦波与窄带高斯之和 Rician 分布

杂波叠加，且无主导 ⇒ 窄带高斯 ⇒ 导出分布（包络）Rayleigh
杂波叠加，且有主导 ⇒ 正弦波+窄带高斯 ⇒ 导出分布（包络）Rician 莱斯分布

无主导：

$$\begin{aligned} X(t) &= X_c(t)\cos\omega_0 t - X_s(t)\sin\omega_0 t \\ &= V(t)\cos(\omega_0 t + \theta_t), \end{aligned}$$

$V(t)$ 包络 $\sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)}$,
$X_c(t) = V(t)\cos\theta_t$, $X_s(t) = V(t)\sin\theta_t$.

有主导：

$$Y(t) = P\sin(\omega_0 t + \theta) + X(t)$$

其中 P, ω_0 为常数，ω_0 称为 $X(t)$ 功率谱密度的中心频率；θ 为 $[0, 2\pi]$ 均匀分布；$X(t)$ 为窄带高斯信号，$E\ X(t) = 0$, $D\ X(t) = \sigma^2$, 并且 θ 与 $X(t)$ 独立。

若 θ 为常数 θ_0，

$$EY(t) = P\sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

是 t 的函数，故 $Y(t)$ 非平稳。$P\sin(\omega_0 t + \theta_0)$可看作协方差阵为 0 的高斯过程[9]，故 $Y(t)$ 仍是高斯过程。[10]

若 $\theta \sim U[0, 2\pi]$，

$$\begin{aligned}
EY(t) &= EP\sin(\omega_0 t + \theta) + EX(t) = 0 \\
R_Y(t, t+\tau) &= EP^2\sin(\omega_0 t + \theta)\sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta) + R(\tau) \\
&= \frac{P^2}{2}\cos(\omega_0 \tau) + R(\tau) \\
&= R_Y(\tau)
\end{aligned}$$

故 $Y(t)$ 平稳，但 $Y(t)$ 不是高斯过程[11]。

[9] 取n个点，看成n个常数的特征函数仍然是高斯

[10] 独立高斯过程之和，即$P\sin(\omega_0 t + \theta_0) + X(t)$仍然是高斯

[11] 因为特征函数，概率密度不是高斯

考察 $Y(t)$ 的一维密度（一维特征函数）

$$
\begin{aligned}
P\sin(\omega_0 t+\theta): \quad f(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{P^2-x^2}}\cdot I_{\{|x|<P\}},\\
\Phi(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[ju\cdot P\sin(\omega_0 t+\theta)]d\theta\\
&= J_0(Pu).\\
X(t): \quad f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}),\\
\Phi_X(u) &= \exp(-\frac{\sigma^2u^2}{2}).
\end{aligned}
$$

独立随机变量之和

$$Y(t)=P\sin(\omega_0 t+\theta)+X(t)\Rightarrow \Phi_Y(u)=\Phi(u)\cdot\Phi_X(u),$$

$$\Phi_Y(u)=J_0(Pu)\exp(-\frac{\sigma^2u^2}{2}).\ \text{非高斯}$$

$f_Y(x)$ 为 $\Phi_Y(u)$ 的 Fourier 逆变换。

由$Y(t) = P\sin(\omega_0 t + \theta) + X(t)$
容易看出 $P \to 0$ 时，$Y(t) \to X(t)$, $f_Y(x) \to$ 高斯分布。
另外，$\Phi_Y(u) = J_0(Pu)\exp(-\frac{\sigma^2 u^2}{2})$,可知

$$J_0(Pu) \to J_0(0) = 1 \Rightarrow \Phi_Y(u) \to \exp(-\frac{\sigma^2 u^2}{2}).$$

下面研究 $Y(t)$ 的（一维）包络：

$$\begin{aligned} Y(t) &= P\sin(\omega_0 t + \theta) + X_c(t)\cos\omega_0 t - X_s(t)\sin\omega_0 t \\ &= [P\sin\theta + X_c(t)]\cos\omega_0 t + [P\cos\theta - X_s(t)]\sin\omega_0 t \\ &\triangleq Y_c(t)\cos\omega_0 t + Y_s(t)\sin\omega_0 t, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} Y_c(t) &= P\sin\theta + X_c(t), \\ Y_s(t) &= P\cos\theta - X_s(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X_c(t), X_s(t), \theta) &= f(X_c(t), X_s(t)) \cdot f(\theta) \\ &= \frac{1}{4\pi^2\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_{[0,2\pi]}(\theta). \end{aligned}$$

通过以下变量代换$\begin{cases} x_1 = y_1 - P\sin\theta \\ x_2 = P\cos\theta - y_2 \\ \theta = \theta \end{cases}$

$\text{Jacobi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -P\cos\theta \\ 0 & -1 & -P\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, 我们有

$$\begin{aligned} f(Y_c(t), Y_s(t), \theta) &= \frac{1}{4\pi^2\sigma^2} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_1^2 + y_2^2 + P^2 \\ &\quad -2P(y_1\sin\theta + y_2\cos\theta)]\} \cdot I_{[0,2\pi]}(\theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_c(t)\cos\omega_0 t + Y_s(t)\sin\omega_0 t \\ &= V(t)\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi(t)), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} V(t) &= \sqrt{Y_c^2(t)+Y_s^2(t)} \qquad \text{包络} \\ \varphi(t) &= \arctan\left[-\frac{Y_s(t)}{Y_c(t)}\right] \qquad \text{相位} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Y_c(t) = V(t)\cos\varphi(t) \\ Y_s(t) = -V(t)\sin\varphi(t) \\ \theta = \theta \end{cases}$$

$$\text{Jacobi} = \begin{vmatrix} \cos\varphi(t) & -V(t)\sin\varphi(t) & 0 \\ -\sin\varphi(t) & -V(t)\cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -V_t.$$

$$故\ f(V_t,\varphi_t,\theta) = \frac{V_t}{4\pi^2\sigma^2}\cdot\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[V_t^2+P^2-2PV_t\sin(\theta-\varphi_t)]\}$$
$$I_{\{V_t\geq 0\}}\cdot I_{[0,2\pi]}(\varphi_t)\cdot I_{[0,2\pi]}(\theta).$$

边际分布

$$f(V_t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(V_t,\varphi_t,\theta)d\varphi_t d\theta$$
$$= \frac{V_t}{4\pi^2\sigma^2}\exp\left(-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma^2}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{PV\sin(\theta-\varphi_t)}{\sigma^2}\right\}d\varphi_t d\theta$$

变量替换 $\alpha = \frac{\pi}{2}-(\theta-\varphi_t),\ \varphi_t = \varphi_t$

1. 化二重积分为一重积分 2. $\sin\to\cos$

$$= \frac{V_t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma^2}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{PV_t\cos\alpha}{\sigma^2}\right)d\alpha$$

$$f(V_t) = \frac{V_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V_t^2 + P^2}{2\sigma^2}\right) \cdot J_0\left(-j\frac{PV_t}{\sigma^2}\right) \cdot I_{\{V_t \geq 0\}} \quad (*)$$

称 $(*)$ 表示的分布为**莱斯（Rician）分布**，也称广义瑞利分布，故 $Y(t)$ 的**包络服从 Rician 分布**。

容易看出 $P \to 0$ 时，莱斯分布退化为瑞利分布，即

$$f(V_t) = \frac{V_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V_t^2}{2\sigma^2}\right) I_{\{V_t \geq 0\}}$$