第七章 Markov链

陈斌

Outline

复习

独立：$P(C \mid A)=P(C), P(AC)=P(A)P(C)$
条件独立定义: $P(C \mid AB)=P(C \mid B)$, 称A, C 关于B 条件独立
条件乘法公式: $P(AC \mid B)=P(A \mid B) \cdot P(C \mid AB)$
条件独立判定准则:

$$\text{条件独立} \Leftrightarrow P(AC \mid B)=P(A \mid B) \cdot P(C \mid B)$$

设$\{B_n, n \geq 1\}$ 两两不相容, $A, B_n \in \mathcal{F}$, 且$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

$P\left(B_n\right)>0$, 则$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty} P\left(AB_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P\left(B_n\right) P\left(A \mid B_n\right)$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Pr}\left\{\xi_{n+2}=i_{n+2} \mid \xi_0=i_0, \cdots \xi_n=i_n\right\} \\
= & \sum_{i_{n+1} \in I} \operatorname{Pr}\left\{\xi_{n+1}=i_{n+1}, \xi_{n+2}=i_{n+2} \mid \xi_0=i_0, \cdots, \xi_n=i_n\right\} \\
= & \sum_{i_{n+1} \in I} \operatorname{Pr}\left\{\xi_{n+1}=i_{n+1} \mid \xi_0=i_0, \cdots, \xi_n=i_n\right\} \\
& \times \operatorname{Pr}\left\{\xi_{n+2}=i_{n+2} \mid \xi_0=i_0, \cdots, \xi_{n+1}=i_{n+1}\right\}
\end{aligned}$$

基本定义

Markov过程定义：已知现在，将来与过去无关。

定义： $\{\xi(t), t\in T\}$,若 $\forall t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}\in T$ 都有条件密度 $\xi_{t_{m+1}}|\xi_{t_1},\cdots\xi_{t_m}$ 和 $\xi_{t_{m+1}}|\xi_{t_m}$，而且

$$f(x_{m+1}|x_1,x_2,\cdots x_m)=f(x_{m+1}|x_m) \qquad (*)$$

则称$\{\xi(t), t\in T\}$为Markov过程。

$(*)$ 的等价形式：

$$\Pr\{\xi_{t_{m+1}}\in A|\xi_{t_1}=x_1,\cdots\xi_{t_m}=x_m\}=\Pr\{\xi_{t_{m+1}}\in A|\xi_{t_m}\}$$

或

$$F(x_{m+1}|x_1,x_2,\cdots x_m)=F(x_{m+1}|x_m).$$

$\xi(t)$ 的有限维分布（密度）

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots x_m) &= f(x_m|x_1,\cdots x_{m-1})\cdot f(x_1,\cdots x_{m-1}) \\ &= f(x_m|x_{m-1})\cdot f(x_1,\cdots x_{m-1}) \\ &\vdots \\ &= f(x_m|x_{m-1})\cdot f(x_{m-1}|x_{m-2})\cdots f(x_2|x_1)f(x_1) \end{aligned}$$

Markov链定义：离散参数，离散状态Markov过程。

设 $T=\{0,1,\dots n,\dots\}$, I 为状态空间。

随机序列 $\{\xi(n), n\geq 0\}$ 若满足

$\forall i_0,\cdots,i_{n+1}\in I$, 在 $\Pr\{\xi_0=i_0,\cdots\xi_n=i_n\}>0$ 有

$$\Pr\{\xi_{n+1}=i_{n+1}|\xi_0=i_0,\cdots\xi_n=i_n\}=\Pr\{\xi_{n+1}=i_{n+1}|\xi_n=i_n\}$$

则称 $\xi(n)$ 为Markov链。

条件独立定义：称A, C关于B条件独立，若 $P(A|BC) = P(A|B)$

判定准则：$P(AC|B) = P(A|B) \cdot P(C|B)$

故由Markov链定义知，在 $\xi_n = i_n$ 条件下，ξ_{n+1} 与 $(\xi_0, \cdots \xi_{n-1})$ 独立. 故 ξ_{n+1} 与 $(\xi_0, \cdots \xi_{n-1})$ 的任意子集独立。

例如：ξ_{n+1}与ξ_{n-1}条件独立，i.e.,

$$\Pr\{\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n\} = \Pr\{\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_n = i_n\}$$

$$\Pr\{\xi_{n+2} = i_{n+2} | \xi_0 = i_0, \cdots \xi_n = i_n\} = \Pr\{\xi_{n+2} = i_{n+2} | \xi_n = i_n\}$$

Markov链定义:

$$\Pr\left\{\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_0 = i_0, \cdots \xi_n = i_n\right\} = \Pr\left\{\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n\right\}$$

进一步

$$\Pr\left\{\xi_{n+2} = i_{n+2} \mid \xi_0 = i_0, \cdots \xi_n = i_n\right\} = \Pr\left\{\xi_{n+2} = i_{n+2} \mid \xi_n = i_n\right\}$$

如何证明？

证：

$$
\begin{aligned}
\text{左} &\overset{\text{全}}{=} \sum_{i_{n+1}\in I} \Pr\{\xi_{n+2}=i_{n+2},\xi_{n+1}=i_{n+1}|\xi_0=i_0,\cdots\xi_n=i_n\} \\
&= \sum_{i_{n+1}\in I} \Pr\{\xi_{n+2}=i_{n+2}|\xi_0=i_0,\cdots\xi_{n+1}=i_{n+1}\} \\
&\qquad \cdot \Pr\{\xi_{n+1}=i_{n+1}|\xi_0=i_0,\cdots\xi_n=i_n\} \\
&= \sum_{i_{n+1}\in I} \Pr\{\xi_{n+2}=i_{n+2}|\xi_n=i_n,\xi_{n+1}=i_{n+1}\} \\
&\qquad \cdot \Pr\{\xi_{n+1}=i_{n+1}|\xi_n=i_n\} \\
&= \sum_{i_{n+1}\in I} \Pr\{\xi_{n+2}=i_{n+2},\xi_{n+1}=i_{n+1}|\xi_n=i_n\} \\
&\overset{\text{全}}{=} \text{右}
\end{aligned}
$$

故递推得知(把握今天，成就土豪！)

$$\Pr\{\xi_{n+k}=i_{n+k}|\xi_0=i_0,\cdots\xi_n=i_n\}=\Pr\{\xi_{n+k}=i_{n+k}|\xi_n=i_n\}.$$

Markov链等价定义：

$\forall i_0, \cdots i_{n+1} \in I$, $j_0 < j_1 < \cdots < j_{n+1}$,

$$\Pr\{\xi_{j_0} = i_0, \cdots \xi_{j_n} = i_n\} > 0$$

有 $\Pr\{\xi_{j_{n+1}} = i_{n+1} | \xi_{j_0} = i_0, \cdots \xi_{j_n} = i_n\} = \Pr\{\xi_{j_{n+1}} = i_{n+1} | \xi_{j_n} = i_n\}$

如何证明定义等价？

Markov链等价定义：
$\forall i_0, \cdots i_{n+1} \in I$, $j_0 < j_1 < \cdots < j_{n+1}$,

$$\Pr\{\xi_{j_0} = i_0, \cdots \xi_{j_n} = i_n\} > 0$$

有 $\Pr\{\xi_{j_{n+1}} = i_{n+1} | \xi_{j_0} = i_0, \cdots \xi_{j_n} = i_n\} = \Pr\{\xi_{j_{n+1}} = i_{n+1} | \xi_{j_n} = i_n\}$

如何证明定义等价？

有限维分布（密度）

$$\begin{aligned} & \Pr\{\xi_0 = i_0, \cdots \xi_n = i_n\} \\ = \; & \Pr\{\xi_n = i_n | \xi_{n-1} = i_{n-1}\} \cdots \Pr\{\xi_1 = i_1 | \xi_0 = i_0\} \cdot \Pr\{\xi_0 = i_0\} \end{aligned}$$

可见一步转移概率$p_{ij}(k) \triangleq \Pr\{\xi(k+1) = j | \xi(k) = i\}$至关重要！
显然

$$p_{ij}(k) \geq 0, \sum_{j \in I} p_{ij}(k) = 1, p_{ij}^{(1)}(k) \triangleq p_{ij}(k)$$

定义： 若 $p_{ij}(k)$ 不依赖于 k，即 $p_{ij}(k) \equiv p_{ij}$，从状态 i 转移到状态 j 的概率与 k 无关，称为齐次马尔科夫链。

齐次Markov链具有如下形式的一步转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$I = \{0, 1, \cdots\}$状态空间
I有限$\Rightarrow$ 有限状态马氏链

$$\sum_{j \in I} p_{ij} = 1 \Leftrightarrow \text{每行的和为}1$$

m 步转移概率 $p_{ij}^{(m)}(n) \triangleq \Pr\{\xi(n+m)=j|\xi(n)=i\}$, 在时刻 n 状态为 i 的条件下，经过 m 步转移到状态 j 的概率。

显然

$$p_{ij}^{(m)}(n) \geq 0,$$

$$\sum_{j\in I} p_{ij}^{(m)}(n) = 1.$$

$m=1$ 时，一步转移概率，$m=0$ 时，$p_{ij}^{(0)}(n) \triangleq \delta_{ij}$.

定理：(Chapman-Kolmogorov) C-K方程

$$p_{ij}^{(m+r)}(n) = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(m)}(n) p_{kj}^{(r)}(n+m)$$

左：时刻 n, 状态 $i \xrightarrow{m+r\text{步}}$ 时刻 $n+m+r$, 状态 j.

右：时刻 n, 状态 $i \xrightarrow{m\text{步}}$ 时刻 $n+m$,

状态 $k \xrightarrow{r\text{步}}$ 时刻 $n+m+r$, 状态 j.

递归使用C-K方程，可由一步转移概率求出任意步转移概率。

证：

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(m+r)}(n) &= \Pr\{\xi(n+m+r)=j|\xi(n)=i\} \\
&\overset{全}{=} \sum_{k\in I}\Pr\{\xi(n+m+r)=j,\xi(n+m)=k|\xi(n)=i\} \\
&\overset{条}{=} \sum_{k\in I}\Pr\{\xi(n+m+r)=j|\xi(n+m)=k,\xi(n)=i\} \\
&\quad \cdot\Pr\{\xi(n+m)=k|\xi(n)=i\} \\
&\overset{马}{=} \sum_{k\in I}\Pr\{\xi(n+m+r)=j|\xi(n+m)=k\} \\
&\quad \cdot\Pr\{\xi(n+m)=k|\xi(n)=i\} \\
&= \sum_{k\in I}p_{ik}^{(m)}(n)p_{kj}^{(r)}(n+m)
\end{aligned}
$$

齐次：$p_{ij}^{(m+r)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(r)} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{(m+r)} = \mathbf{P}^{(m)}\mathbf{P}^{(r)}$

m 步转移概率矩阵 $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^m$.

$I = \{0, 1, \ldots\}$

$\mathbf{P}^{(m)}$ 的第 i 行表示初始状态为 i 时，经过 m 步后的概率分布。

$$\mathbf{P}^{m+r} = \mathbf{P}^m \cdot \mathbf{P}^r$$

矩阵乘法满足结合律。

由初始分布和一步转移概率可求出马氏链的有限维分布：

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{\xi(n_1)=i_1,\ldots,\xi(n_k)=i_k\} \quad 0<n_1<\cdots<n_k \\
\overset{\text{全}}{=}\ &\sum_{j\in I}\Pr\{\xi(0)=j,\xi(n_1)=i_1,\ldots,\xi(n_k)=i_k\} \\
\overset{\text{条, 马}}{=}\ &\sum_{j\in I}\Pr\{\xi(n_k)=i_k|\xi(n_{k-1})=i_{k-1}\}\ldots\Pr\{\xi(n_2)=i_2|\xi(n_1)=i_1\} \\
&\cdot\Pr\{\xi(0)=j\}\cdot\Pr\{\xi(n_1)=i_1|\xi(0)=j\} \\
\overset{\text{齐次}}{=}\ &\sum_{j\in I}p_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})}\ldots p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)}p_{ji_1}^{(n_1)}\cdot\Pr\{\xi(0)=j\}
\end{aligned}
$$

例1：无限制随机游动（不可停留）

p: 右移一个单位概率；$1-p=q$: 左移一个单位概率。

若 $\xi(n)=i$, 则 $\xi(n+1)$ 的取值与 $\xi_0,\dots,\xi_{n-1}$ 无关，故为马氏链（齐次）。状态空间 $I=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$

一步转移概率 $\begin{cases} p_{i,i+1}=p \\ p_{i,i-1}=q \\ p_{ij}=0,\ j\neq i\pm1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} & \dots & & & & & & & \\ \dots & 0 & q & 0 & p & 0 & \dots & & \\ & \dots & 0 & q & 0 & p & 0 & \dots & \\ & \dots & & & & & & & \end{pmatrix}$$

n 步转移概率

$$p_{ij}^{(n)}=\begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ \frac{n+j-i}{2} \end{pmatrix} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}} & \text{若 } n+j-i \text{ 为偶数} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

Stirling公式：$n!\approx(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$, $p_{ii}^{(2n)}\approx\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$

例2： 无限制随机游动 $p+q+r=1$（可停留），$r=0 \Rightarrow$ 例1

p: 右移 q: 左移 r: 原地不动。$\xi(n)$ 是一个马氏链。

一步转移概率 $\begin{cases} p_{i,i+1}=p & p_{ii}=r \\ p_{i,i-1}=q & p_{ij}=0 \quad j \neq i, i \pm 1 \end{cases}$

n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}=?$

设 n 步中右移 a，左移 b，停留 m，则 $\begin{cases} a-b=j-i \\ a+b+m=n \end{cases}$ 故

$$\begin{cases} a=\frac{n-m+j-i}{2} \\ b=\frac{n-m-j+i}{2} \end{cases} \qquad m \text{ 不唯一，解不唯一！}$$

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{\substack{0 \leq m \leq n-|j-i| \\ n-m+j-i \text{ 偶}}} \binom{n}{m} \binom{n-m}{\frac{n-m+j-i}{2}} p^{\frac{n-m+j-i}{2}} \cdot r^m \cdot q^{\frac{n-m-j+i}{2}} \\ &= \sum_{\substack{n-m+j-i \text{ 偶} \\ a,b,m \geq 0}} \binom{n}{a,b,m} p^a q^b r^m. \qquad \text{其中} \binom{n}{a,b,m} \triangleq \frac{n!}{a!b!m!} \end{aligned}$$

例3：带一个吸收壁的随机游动，p: 右移 q: 左移 r: 原地不动。

$\xi(n),\ n=0,1,\ldots,$ 状态空间 $I=\{0,1,\ldots\}$, 0状态为吸收态, i.e., $p_{00}=1$. 齐次马氏链。

$$\text{一步转移概率}\begin{cases} p_{i,i+1}=p,\ p_{i,i-1}=q,\ p_{ii}=r,\ i\geq 1 \\ p_{00}=1,\ p_{0j}=0,\ j\geq 1 \\ p_{ij}=0,\ \text{其它}(\text{i.e., } i\geq 1 \text{ 且 } j\neq i,i\pm 1) \end{cases}$$

$p_{ii}=1 \Leftrightarrow i$ 为吸收态。

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & r & p & 0 & \ldots \\ 0 & q & r & p & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

例4：两个吸收壁：

$\xi(n),\ n=0,1,\ldots,\ I=\{0,1,\ldots,a\},\ 0,\ a$ 为吸收态。

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(a+1)*(a+1)}$$

有限状态，$\mathbf{P}$：$(a+1)*(a+1)$ 矩阵。

例5：带一个反射壁 $\xi(n), I=\{0,1,\dots\}$

(1) 反射壁在 $-\frac{1}{2}$ 处，$p+q=1$, i.e.，质点进入0状态后，下一步以 p 概率右移，q 概率停留。

(2) 反射壁在0处，i.e.，质点进入0状态后，下一步必右移。

(1) $\begin{pmatrix} q & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \end{pmatrix}$

例6：带两个反射壁 $I=\{0,1,\dots,a\}$ 有限状态, $\mathbf{P}$ 有限。

(1) 反射壁在 $-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}$ 处, $p+q=1$.

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} q & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

(2) 反射壁在 $0, a$ 处，$p+q+r=1$[1]

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} r & 1-r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-r & r \end{pmatrix}$$

例7：赌徒输光问题

甲、乙赌博，甲获胜概率 p, 赢1元；输掉概率 q, 输1元。平局概率 r, 不输不赢。$p+q+r=1$. 甲有 a 元，乙有 b 元，$a+b=c$, 赌至一方输光为止。求甲输光的概率。

[1]注：可停留，$r=0$，可退化成例5（2）

解：$I=\{0,1,\ldots,c\}$，带两个吸收壁的随机游动，$0,c$ 吸收态。求质点从 a 出发被 0 吸收的概率。

记u_j: 从j 出发到达0状态先于到达c状态的概率，则

$$u_j \quad = \quad {}^2 u_{j+1}\cdot p + u_{j-1}\cdot q + u_j\cdot r = u_{j+1}p + u_{j-1}(1-p-r) + u_j r$$

全概率的含义：1. 甲接下去赢了一局（概率p），处于状态$j+1$后再输光；2.甲接下去输了一局（概率q），处于状态$j-1$ 后再输光；3甲接下去打平（概率r）这三个事件的和事件的概率⇔ $(1-p-r)(u_j-u_{j-1}) = p(u_{j+1}-u_j)$

等比数列，$u_0=1$，$u_c=0$. 故

$$u_j - u_{j+1} = \frac{1-p-r}{p}(u_{j-1}-u_j) = (\frac{1-p-r}{p})^j(1-u_1)$$

$$\Rightarrow u_k = \sum_{j=k}^{c-1}(u_j-u_{j+1}) = (1-u_1)\sum_{j=k}^{c-1}(\frac{1-p-r}{p})^j,$$

令 $d \triangleq \frac{1-p-r}{p}$, $d=1$时, $k=0 \Rightarrow u_1 = 1-1/c \Rightarrow u_a = \frac{b}{c}$

$$d\neq 1, k=0 \Rightarrow u_1 = \frac{d-d^c}{1-d^c} \Rightarrow u_a = \frac{d^a-d^c}{1-d^c}$$

[2] $P(A)=\sum P(B_n)P(A\mid B_n)$

例8：艾伦菲斯特模型

袋中有 $2a$ 个球，两种颜色：红与黑

过程：随机摸出一个球，换入另一颜色的球。

$\xi(n)$: n 次摸换后袋中的黑球数目。$\xi(0)$: 初始分布

$I = \{0, 1, \ldots, 2a\}$，带两个反射壁；

$$i \to \begin{cases} i+1 & \frac{2a-i}{2a} = p_{i,i+1} \quad \text{齐次马氏链} \\ i-1 & \frac{i}{2a} = p_{i,i-1} \quad \text{一次转移概率} \end{cases}$$

$$\text{时刻 } n \to \text{时刻 } n+1.$$

例8： 艾伦菲斯特模型

袋中有 $2a$ 个球，两种颜色：红与黑

过程：随机摸出一个球，换入另一颜色的球。

$\xi(n)$: n 次摸换后袋中的黑球数目。$\xi(0)$: 初始分布

$I=\{0,1,\ldots,2a\}$，带两个反射壁；

$$i \to \begin{cases} i+1 & \frac{2a-i}{2a}=p_{i,i+1} \\ i-1 & \frac{i}{2a}=p_{i,i-1} \end{cases} \quad \begin{matrix}\text{齐次马氏链} \\ \text{一次转移概率}\end{matrix}$$

$$\text{时刻 } n \to \text{时刻 } n+1.$$

变形*： $I=\{0,1,\ldots,2a\} \to I=\{-a,-a+1,\ldots,0,1,\ldots,a\}$

描述粒子通过薄膜进行扩散的数学模型。艾伦菲斯特首次用该模型研究气体分子运动。$-a$, a 可看做反射壁。单位时间只有一个粒子运动。

$\xi(n)$: n次后右部分粒子个数与a之差，

如$-a$表示全部粒子都转移到了左边; (具体转移概率见教材P53)

$$\begin{cases} p_{i,i+1}=\frac{1}{2}(1-\frac{i}{a}) & \\ p_{i,i-1}=\frac{1}{2}(1+\frac{i}{a}) & -a+1\le i\le a-1 \\ p_{a,a-1}=1,\ p_{-a,-a+1}=1,\ p_{ij}=0 \text{ 其它} & \end{cases}$$

例9：Polya模型
袋中有 b 只黑球，r 只红球（初始分布）
过程：随机摸出一个球，放回并加入 c 只同色球。
$\xi(n)$: n 次后的黑球数目

$$I=\{0,1,2,\dots\} \quad b,b+c,\dots$$

$$\Pr\{\xi_{n+1}=j|\xi_n=i\}=\begin{cases}\frac{i}{b+r+nc} & j=i+c \rightarrow \text{摸出黑球概率}\\ 1-\frac{i}{b+r+nc} & j=i\\ 0\end{cases}$$

$p_{ij}(n)$ 与 n 有关，非齐次马氏链。

例10：离散分枝过程（生灭过程）
考察生物群体，每个个体可产生下一代个体 η 个，η 随机，η 的密度为 $\Pr\{\eta = k\} = p_k$, $k = 0, 1, \ldots,$ 各个体独立。令 $\xi(n)$ 为第 n 代中的个体总数目，显然

$$\xi(n+1) = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{\xi(n)}, \text{设初始分布 } \xi(0) \equiv 1.$$

η_i 独立同 η 分布随机变量，且如果知道$\xi(n)$，则$\xi(n+1)$完全确定，是马尔可夫链
$\xi(n+1)$ 的分布与 η 有何关系？

例10： 离散分枝过程（生灭过程）
考察生物群体，每个个体可产生下一代个体 η 个，η 随机，η 的密度为 $\Pr\{\eta = k\} = p_k$, $k = 0, 1, \ldots$, 各个体独立。令 $\xi(n)$ 为第 n 代中的个体总数目，显然

$$\xi(n+1) = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{\xi(n)}, \text{ 设初始分布 } \xi(0) \equiv 1.$$

η_i 独立同 η 分布随机变量，且如果知道$\xi(n)$，则$\xi(n+1)$完全确定，是马尔可夫链
$\xi(n+1)$ 的分布与 η 有何关系？

随机变量之和应使用母函数（特征函数）来研究。

随机变量和 $\begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim F_1(s) \cdot F_2(s) \ldots F_k(s) \\ Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_z \sim G[F(s)] \end{cases}$

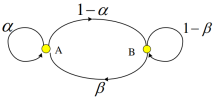
Y_i 独立同分布 $\sim F(s)$, $Z \sim G(s)$

故设 $\eta \sim F(s)$, 则 $\xi(n)$ 的母函数

$$G(s) = F(F(\ldots F(s) \ldots)) = F^{(n)}(s).$$

完全决定了$\xi(n)$的分布！

例11： 天气预报，两状态：A(有雨)，B(无雨)；假定Markov



状态传递图（齐次）

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

一步：$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$

两步：$\mathbf{P}^2=\begin{pmatrix} \alpha^2+(1-\alpha)\beta & (1-\alpha)(1+\alpha-\beta) \\ (1+\alpha-\beta)\beta & \beta(1-\alpha)+(1-\beta)^2 \end{pmatrix}$

今日有雨，明日有雨概率为 α

今日有雨，后日无雨概率为 $(1-\alpha)(1+\alpha-\beta)$

设 $\alpha=0.7,\ \beta=0.4,\ \mathbf{P}^4=\begin{pmatrix} 0.575 & 0.425 \\ 0.567 & 0.433 \end{pmatrix}$

明日（第一日），今日无雨，第四日有雨概率为 0.567

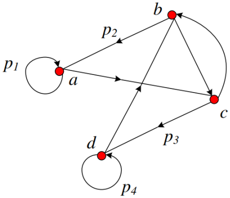
例12：天气预报（续）

马氏性的“现在”是一个抽象概念，在天气模型中不要机械的认为就是今天。如：假设某日天气依赖于前两日的天气，而不是只依赖于前一日的天气，则可通过增加状态建立马氏链模型。

$$\text{当前步状态}\begin{cases}\text{昨日有雨，今日有雨} & a\\ \text{昨日无雨，今日有雨} & b\\ \text{昨日有雨，今日无雨} & c\\ \text{昨日无雨，今日无雨} & d\end{cases}$$

$$\text{下一步状态}\begin{cases}\text{今日有雨，明日有雨}\\ \text{今日无雨，明日有雨}\\ \text{今日有雨，明日无雨}\\ \text{今日无雨，明日无雨}\end{cases}$$

齐次马氏链:



独立增量过程

增量相互独立，i.e., $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 则 $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ 独立。

独立增量过程必是马氏过程！

设 $T = [a, +\infty)$, $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, 不妨设初始分布 $\xi(a) \equiv 0$.

在 $\xi(t_n)$ 已知的条件下，$\xi(t)$ 与 $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_{n-1})$ 独立

独立增量过程

增量相互独立，i.e., $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 则 $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ 独立。

独立增量过程必是马氏过程！

设 $T = [a, +\infty)$, $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, 不妨设初始分布 $\xi(a) \equiv 0$.

在 $\xi(t_n)$ 已知的条件下，$\xi(t)$ 与 $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_{n-1})$ 独立

证明：

$\xi(t) - \xi(t_n)$, $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$, $\ldots$, $\xi(t_2) - \xi(t_1)$, $\xi_(t_1) - \xi(a)$ 独立

$\xi(t_n)$ 常数 $\Rightarrow \xi(t)$ 与 $\xi(t_1)$ 独立

$\Rightarrow \xi(t)$ 与 $\xi(t_2) = \xi(t_2) - \xi(t_1) + \xi(t_1)$ 独立 $\ldots$ $\Rightarrow$ 马氏性（*）

马氏链状态分类

马氏链的状态分类：一般情况下，本章只讨论齐次马氏链。

定义：（到达） 称 i 可达 j, 若 $\exists n \geq 1$, 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$, 记为 $i \to j$. $i \not\to j \Leftrightarrow \forall n \geq 1,\ p_{ij}^{(n)} = 0$

定义：（相通） 称 i 与 j 相通，若 $i \to j$, 且 $j \to i$.

例：无限制随机游动。$\forall i, j \in I$, $i \to j$, $j \to i$, 故 $i \leftrightarrow j$.
有吸收壁的随机游动，吸收壁状态不能到达其它状态。

定理： 若 $i \to k, k \to j$, 则 $i \to j$. 即"到达"具有传递性。

证：$i \to k \Leftrightarrow \exists n, p_{ik}^{(n)} > 0 \qquad k \to j \Leftrightarrow \exists r, p_{kj}^{(r)} > 0$

由C-K方程

$$p_{ij}^{(n+r)} = \sum_{m \in I} p_{im}^{(n)} p_{mj}^{(r)} \geq p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(r)} > 0$$

故 $i \to j$.

推论： 若 $i \leftrightarrow k, k \leftrightarrow j$, 则：$i \leftrightarrow j$, 即"相通"具有传递性。
称 $\sim$ 为等价关系，则 $\sim$ 满足：
(1) $i \sim i$ (2) $i \sim j, j \sim k \Rightarrow i \sim k$ (3) $i \sim j \Rightarrow j \sim i$.
由等价关系可以定义等价类，即集合I 中的元素a 的等价类：

$$[a] = \{i \in I \mid \sim a\}$$

相通在 I 上不是等价关系，因为不满足(1).

若定义 $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, 规定 i 与 j 本身相通，则 $\leftrightarrow$ 是等价关系。

定义： 设 $C \subseteq I$ 为状态空间的子集，若 $\forall i \in C, j \notin C$，有 $p_{ij} = 0$. 则称 C 为闭集（只进不出）。显然 I 是闭集。
单个状态的闭集称为吸收态， i 为吸收态 $\Leftrightarrow p_{ii} = 1$.

命题：C 是闭集 $\Leftrightarrow \forall i \in C, j \notin C$ 都有 $p_{ij}^{(n)} = 0, n \geq 1$.
“一步出不去，永远出不去”

证："$\Leftarrow$" 显然成立。
"$\Rightarrow$" 由C-K方程，

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in I} p_{ik} p_{kj} = \sum_{k \in C} + \sum_{k \notin C} = 0$$

由归纳法知，$\forall n \geq 1, p_{ij}^{(n)} = 0$

定义： 若闭集 C 的所有状态相通，称闭集 C 是不可约的。
称马氏链 $\{\xi(n), n \geq 0\}$ 不可约，若 I 是不可约的。
不可约马氏链的所有状态相通。

显然，若 C_1, C_2 为两个不同的不可约闭集，则 $C_1 \cap C_2 = \phi$，即 I 的不可约闭子集是两两不相交的。

这样，状态空间 I 可分解为：

$$I = N + C_1 + C_2 + \ldots, \text{其中 } C_1, C_2 \ldots \text{ 为不可约闭集}$$

$\mathbf{P}^{(n)}$: n 步转移概率矩阵，C 闭集，若只保留 $\mathbf{P}^{(n)}$ 中与 C 相关的行和列，则得到的仍是随机矩阵，仍满足C-K方程。

i.e. $\forall i, j \in C$

1. $\sum_{k \in C} p_{ik} = 1 \rightarrow$ 随机矩阵
2. $\sum_{k \in C} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} = p_{ij}^{(m+n)} \rightarrow$ C-K方程

例：$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I=\{0,1,2,3\}$.

例：$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I=\{0,1,2,3\}.$

状态3：吸收态，不可约闭集

状态0,1：不可约闭集

0,1,3：闭集，但可约；0，1，2 非闭集

例：$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I=\{0,1,2,3\}.$

状态3：吸收态，不可约闭集

状态0,1：不可约闭集

0,1,3：闭集，但可约；0，1，2 非闭集

如果改变状态2的转移概率

$$\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\to\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0$$

则 0,1,2 为闭集，但可约

常返态与非常返态

定义： 首达时间 $T_{ij} \triangleq \min\{n : n \geq 1, \xi_0 = i, \xi_n = j\}$[3], $T_{ij} =$ 从状态 i 出发首次到达状态 j 的时间。若状态 i 永远不能达到状态 j, 则定义 $T_{ij} = \infty$.

定义： 首达概率 $f_{ij}^{(n)} \triangleq \Pr\{T_{ij} = n | \xi_0 = i\}$

$$f_{ij}^{(n)} = \Pr\{\xi_n = j, \xi_m \neq j, m = 1, 2, \ldots, n-1 | \xi_0 = i\}$$

$f_{ij}^{(n)}$ 为从 i 出发经 n 步首次到达 j 的概率。
$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ 一步转移概率。
$f_{ij}^{(\infty)} = \Pr\{\xi_m \neq j, m \geq 1 | \xi_0 = i\}$, i 永远不能到达 j 的概率。

[3] 随机变量

首达概率 $f_{ij}^{(n)} \triangleq \Pr\{T_{ij}=n|\xi_0=i\}$

定义： $f_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \Pr\{T_{ij}<\infty\}$，求和中不包含 $f_{ij}^{(\infty)}$.
f_{ij} 为从 i 出发经有限步首次到达 j 的概率。

定义： 称 i 为常返态，若 $f_{ii}=1$; 有限步概率1回来
称 i 为非常返态，若 $f_{ii}<1$. 有可能回不来

当 i 为常返态时，$f_{ii}=1$, $\{f_{ii}^{(n)}, n\geq 1\}$ 构成一个**概率分布** η_i.

η_i: 从i出发**首次返回**i的时间， 离散状态随机变量，

$$\Pr\{\eta_i=n\} \triangleq f_{ii}^{(n)}, n\geq 1$$

η_i 的均值 μ_i 表示从 i 出发**首次返回** i 的平均时间(步数).

$$\mu_i \triangleq E\eta_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$ 平均返回时间.

定义：设 i 为常返态，若 $\mu_i < \infty$，称 i 为正常返态；若 $\mu_i = \infty$，则称 i 为零常返态。

例：$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
对马氏链进行分类?!
(**特例：** $p = 1/2$的无限制随机游动，每个状态零常返)。

定义： 设 i 为常返态，若 $\mu_i < \infty$，称 i 为正常返态；若 $\mu_i = \infty$，则称 i 为零常返态。

例：$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

对马氏链进行分类?!

(**特例：** $p = 1/2$的无限制随机游动，每个状态零常返)。

解：2,3:不可约闭集，常返；$f_{ii}^{(n)} = \frac{1}{2^n}$ （出去呆$n-2$步，回来！）

$\mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots = 2$, 故正常返。

0,1:不可约闭集，常返；$f_{00}^{(n)} = f_{11}^{(n)} = \frac{1}{2^n}$

$\mu_0 = \mu_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots = 2$, 故正常返。

4: 非闭集，非常返。

$$f_{44}^{(1)} = \frac{1}{2}, f_{44}^{(n)} = 0 (n \geq 2), \quad f_{44} = \frac{1}{2} < 1$$

n步转移与n步首达互表示

定理：$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}$，特别的，$p_{ii}^{(n)} = \sum_{v=1}^{n} f_{ii}^{(v)} p_{ii}^{(n-v)}$.

反之，$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$, $n \geq 2$ 时，$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}$.

证：$\{\xi_0 = i, \xi_n = j\} \subseteq \{T_{ij} \leq n\} = \bigcup_{v=1}^{n} \{T_{ij} = v\}$ “互不相交的事件”

故 $\{\xi_0 = i, \xi_n = j\} = \bigcup_{v=1}^{n} \{\xi_0 = i, \xi_n = j, T_{ij} = v\}$ “首达不相交可用全概，n步不可用”

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \Pr\{\xi_n = j | \xi_0 = i\} \\
&= \Pr\{\xi_n = j, T_{ij} \leq n | \xi_0 = i\} \\
&\overset{全}{=} \sum_{v=1}^{n} \Pr\{\xi_n = j, T_{ij} = v | \xi_0 = i\} \\
&\overset{条}{=} \sum_{v=1}^{n} \Pr\{\xi_n = j | T_{ij} = v, \xi_0 = i\} \cdot \Pr\{T_{ij} = v | \xi_0 = i\}
\end{aligned}
$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^{n} \Pr\{\xi_n = j \mid T_{ij} = v, \xi_0 = i\} \cdot \Pr\{T_{ij} = v \mid \xi_0 = i\}$$

其中，

$$\begin{aligned} & \Pr\{\xi_n = j | T_{ij} = v, \xi_0 = i\} \\ = \ & \Pr\{\xi_n = j | \xi_0 = i, \xi_1 \neq j, \ldots, \xi_{v-1} \neq j, \xi_v = j\} \\ = \ & \Pr\{\xi_n = j | \xi_v = j\} = p_{jj}^{(n-v)} \end{aligned}$$

$$\Pr\{T_{ij} = v | \xi_0 = i\} = f_{ij}^{(v)} \Rightarrow p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}$$

反之，$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$, 显然，$n \geq 2$ 时

$$\{T_{ij} = n, \xi_0 = i\} = \bigcup_{k \neq j} \{\xi_0 = i, \xi_1 = k, \xi_m \neq j, 2 \leq m \leq n-1, \xi_n = j\}$$

$$
\begin{aligned}
f_{ij}^{(n)} &= \Pr\{T_{ij}=n|\xi_0=i\} \\
&\overset{\text{全}}{=} \sum_{k\neq j}\Pr\{\xi_1=k,\xi_m\neq j,2\leq m\leq n-1,\xi_n=j|\xi_0=i\} \\
&\overset{\text{条,马}}{=} \sum_{k\neq j}\Pr\{\xi_1=k|\xi_0=i\}\cdot \\
&\qquad \Pr\{\xi_m\neq j,2\leq m\leq n-1,\xi_n=j|\xi_1=k\} \\
&= \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

推论：$f_{ij}^{(n)}\leq p_{ij}^{(n)}\leq f_{ij}$

证明：

$$
f_{ij}^{(n)}=f_{ij}^{(n)}p_{jj}^{(n-n)}\leq p_{ij}^{(n)}=\sum_{v=1}^{n}f_{ij}^{(v)}p_{jj}^{(n-v)}\leq\sum_{v=1}^{n}f_{ij}^{(v)}\leq\sum_{v=1}^{\infty}f_{ij}^{(v)}=f_{ij}
$$

定理[4]：$f_{ij} > 0 \Leftrightarrow i \to j$, 从而 $f_{ij} > 0$, $f_{ji} > 0 \Leftrightarrow i \leftrightarrow j$.

证："$\Rightarrow$" $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, $f_{ij} > 0 \Rightarrow \exists n_0 \geq 1$, $s.t.$ $f_{ij}^{(n_0)} > 0$,

$$\text{而 } p_{ij}^{(n_0)} = \sum_{v=1}^{n_0} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n_0-v)} \geq \sum_{v=n_0} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n_0-v)} = f_{ij}^{(n_0)} > 0$$

故 $i \to j$.

"$\Leftarrow$" 若 $i \to j$, 则 $\exists n \geq 1$, $s.t.$ $p_{ij}^{(n)} > 0$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)} > 0 \Rightarrow \exists v_0, f_{ij}^{(v_0)} > 0$$

故 $f_{ij} = \sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} \geq f_{ij}^{(v_0)} > 0$.

[4]**定义**：（到达）称 i 可达 j, 若 $\exists n \geq 1$, 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$

定理： i 常返 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

i 非常返$(f_{ii} < 1) \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$

证：引入母函数

$$p_{ii}^{(n)} \leftrightarrow P_i(s) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n \qquad p_{ii}^{(0)} \triangleq 1$$

$$f_{ii}^{(n)} \leftrightarrow F_i(s) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n \qquad f_{ii}^{(0)} \triangleq 0$$

（接下页）

$$
\begin{aligned}
P_i(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \cdot s^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{v=1}^{n} f_{ii}^{(v)} p_{ii}^{(n-v)}] s^n + 1 \\
&= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=v}^{\infty} f_{ii}^{(v)} \cdot p_{ii}^{(n-v)} s^n + 1 \\
&= \sum_{v=1}^{\infty} f_{ii}^{(v)} s^v \cdot \sum_{n=v}^{\infty} p_{ii}^{(n-v)} s^{n-v} + 1 \\
&= F_i(s) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} p_{ii}^{(m)} s^m + 1 \\
&= F_i(s) \cdot P_i(s) + 1
\end{aligned}
$$

$0 \le s < 1$ 时[5]，

$$P_i(s) < P_i(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

$$F_i(s) < F_i(1) = f_{ii} \le 1$$

$$P_i(s) = \frac{1}{1 - F_i(s)},$$

$s \to 1^-$ 时，

$$P_i(s) \to \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n}, \quad F_i(s) \to f_{ii},$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}}$$

$$i \text{ 常返} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

$$i \text{ 非常返} (f_{ii} < 1) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty$$

[5] $P_i(s) = F_i(s) \cdot P_i(s) + 1$

小结:判断是否常返/是否正常返

$$f_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \Pr\{T_{ij} < \infty\}$$

定义: 称i 为常返态, 若$f_{ii} = 1$;
称i 为非常返态, 若$f_{ii} < 1$.

$$\mu_i \triangleq E\eta_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

定理:

- i 常返$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$
- i 非常返$(f_{ii} < 1) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$

定义:设i 为常返态,若$\mu_i < \infty$, 称i 为正常返态;
若$\mu_i = \infty$, 则称i 为零常返态。

命题：

1 i 常返 $\Leftrightarrow$ 无穷多次返回 i （概率1）.

2 i 非常返 $\Leftrightarrow$ 概率1有限次返回 i （概率1）.

$$令 I_n(i)=\begin{cases}1, & X_n=i,\\ 0, & X_n\neq i,\end{cases} \quad 及 S(i)=\sum_{n=0}^{\infty} I_n(i)$$

则$S(i)$ 表示马氏链$\{X_n,n\geq 0\}$ 到达i 的次数. 于是

$$\begin{aligned} E\{S(i)\mid X_0=i\} &= \sum_{n=0}^{\infty} E\{I_n(i)\mid X_0=i\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n=i\mid X_0=i\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \end{aligned}$$

可见$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ 表示由i 出发返回到i 的平均次数.
当i 为常返状态时,返回i 的平均次数为无限多次, 反之亦然;
当i 为非常返状态时, 再回到i 的平均次数为有限次.

⋮ ⋮

推论1：若 j 非常返，则对每一个 i, $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$, 且 $p_{ij}^{(n)} \to 0$.

证：$j = i$ 时，显然成立。
因为i 非常返$(f_{ii} < 1) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$
$j \neq i$ 时，类似地有 $P_{ij}(s) = F_{ij}(s)P_{jj}(s)$.

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n, \ F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n, \ p_{ij}^0 = 0, \ p_{jj}^0 = 1.$$

$$\text{故} \ \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1^-) = F_{ij}(1^-)P_{jj}(1^-) \leq P_{jj}(1) < \infty.$$

命题: 如果j 为非常返态, 则任意i 概率1 有限次到达j.
证明：反设$\{i$ 无穷次到达$j\} = \{i$ 首达j, j 无穷次返回$j\}$, 与j 为非常返态矛盾!

两种情形：
(1) $i \not\to j \Rightarrow$ 任意i, 0 次到达j (概率1)
(2) $i \to j \Rightarrow \exists n \geq 1, p_{ij}^{(n)} > 0 \Rightarrow \exists m \leq n, f_{ij}^{(m)} > 0$

推论2：若 j 常返[6]，则

1 $i \to j$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty$

2 $i \not\to j$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

证：2显然成立，下面证1.

$i \to j \Leftrightarrow \exists m > 0, s.t.\ p_{ij}^{(m)} > 0$。 由C-K方程，

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(m+n)} \geq p_{ij}^{(m)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty.$$

[6] i 常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

例：无限制随机游动 $r=0$, $q=1-p$, p 右移概率

$$p_{ij}^{(n)}=\left(\begin{array}{c} n \\ \frac{n+j-i}{2} \end{array}\right) p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}},\ n\geq 1, \quad \text{状态分类?}$$

证明：由二项展开：

$$(1+s)^a=\sum_{n=0}^{a}\left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) s^n,$$

推广：

$$(1+s)^{-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} -a \\ n \end{array}\right) s^n,\ |s|<1 \text{ 时}.$$

$$\left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) \triangleq \frac{a\cdot(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!},$$

$$\left(\begin{array}{c} -a \\ n \end{array}\right) \triangleq \frac{-a(-a-1)\ldots(-a-n+1)}{n!}$$

$i=j$ 时，

$$p_{ii}^{(2n+1)}=p_{00}^{(2n+1)}=0$$

$$p_{ii}^{(2n)}=p_{00}^{(2n)}=\left(\begin{array}{c}2n\\n\end{array}\right)p^nq^n,\ n\geq 1$$

考虑母函数

$$\begin{aligned}
p_{ii}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}2n\\n\end{array}\right)p^nq^ns^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}(pqs^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}(-1)^n}{n!}(-\frac{1}{2})\ldots(-\frac{2n-1}{2})(pqs^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4pqs^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}-\frac{1}{2}\\n\end{array}\right)(-4pqs^2)^n=(1-4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}(2n)! &= [1\cdot 3\cdot \ldots (2n-1)](2\cdot 4\cdot \ldots 2n)\\ &= [1\cdot 3\cdot \ldots (2n-1)]\cdot 2^n\cdot n!\end{aligned}$$

$$P_{ii}(s)=\left(1-4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=P_{ii}(1)=\lim_{s\to 1^-}(1-4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-4pq}}$$

故 $p=q=\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty \Leftrightarrow i$ 常返

$p\neq \frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}<\infty \Leftrightarrow i$ 非常返

$$P_{ii}(s) = \left(1 - 4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1+s)^a = \sum_{n=0}^{a} \binom{a}{n} s^n$$

$p = \frac{1}{2}$ 时，

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)} \Leftrightarrow F_{ii}(s) = 1 - \frac{1}{P_{ii}(s)} = 1 - (1 - s^2)^{\frac{1}{2}}$$

平均返回时间

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = F_{ii}'(1) = \lim_{s \to 1^-} \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} = \infty$$

故状态 i 是零常返的。

$$F_{ii}(s) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-s^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2^n \cdot n!} s^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad f_{ii}^{(2n)} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2^n \cdot n!}$$

结论：

无限制随机游动$r=0,q=1-p,p$ 右移概率

$p=q=\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty\Leftrightarrow i$ 常返

平均返回时间

$$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}=\infty$$

故状态i 是零常返的。

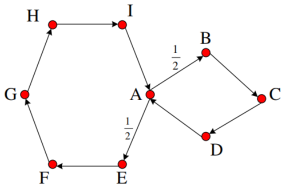
$p\neq\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}<\infty\Leftrightarrow i$ 非常返

周期与非周期

定义： 若 $\{n : n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 为空集，则不对状态 i 定义周期。否则，记 $d = \gcd\{n : n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ (最大公约数)。
若 $d > 1$，称 i 为周期的，其最小正周期为 d;
若 $d = 1$，称 i 为非周期的。例如：对角线非0，可首达自身;

周期为 $d \nRightarrow \forall n \geq 1, p_{ii}^{(nd)} > 0$ (与书上不同)

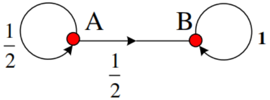
例：

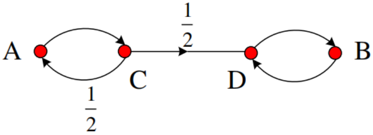


其它边的概率都为 1，显然 $p_{AA}^{(4)} = \frac{1}{2} > 0$, $p_{AA}^{(6)} = \frac{1}{2} > 0$,
故 $d = 2$，但 $p_{AA}^{(2)} = 0$.

命题：设 i 的周期为 d, 则存在正整数 $M, \forall n \geq M$, 有 $p_{ii}^{(nd)} > 0$.

周期性与常返性无关！





A 非周期，非常返
B 非周期，常返

A,C 周期，非常返
B,D 周期，常返

例：无限制随机游动：$r = 0$ 时，周期 $= 2$,
零常返：$p = q = \frac{1}{2}$; 非常返：$p \neq q$

定义： 非周期的正常返状态称为遍历态。

定理： 设 i 常返，则

1. i 为零常返 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$;
2. i 遍历（正常返且非周期）$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$;
3. i 正常返且周期为 d, $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$.

其中 $\mu_i \triangleq \sum\limits_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ 为平均返回时间。

证明可参见：李漳南，吴荣《随机过程教程》或
林元烈《应用随机过程》

定理 若 i 与 j 相通，即 $i \leftrightarrow j$，则它们或同为非常返，或同为常返。当 i 与 j 同为常返时，或同为零常返，或同为正常返。

证：$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow$ 存在 $l \geq 1, n \geq 1$，使 $p_{ij}^{(l)} = \alpha > 0, p_{ji}^{(n)} = \beta > 0$
由C-K方程

$$p_{ii}^{(l+m+n)} \geq p_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(m)} p_{ji}^{(n)} = \alpha\beta \cdot p_{jj}^{(m)}$$

$$p_{jj}^{(l+m+n)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(m)} p_{ij}^{(l)} = \alpha\beta \cdot p_{ii}^{(m)}$$

故 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_{ii}^{(m)}$ 与 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_{jj}^{(m)}$ 或同为 ∞，或同为有限值，即 i 与 j 或同为非常返，或同为常返。

类似的，由零常返，正常返判别定理可证其余结论。

例：齐次链，$I=\{0,1,2,\ldots\}$，$\begin{cases} p_{i,i+1}=q_i, 0<q_i<1 \\ p_{i,0}=1-q_i \end{cases}$

$i=0,1,\ldots$ 试研究该链的特性。

可约？周期？常返？正常返或零常返？

解：状态i 右移的概率为$q_i, 0<q_i<1$，左移至0 的概率为$1-q_i$.

显然所有状态连通，故不可约。

现研究状态0 的性质：以下$p_i \triangleq q_i$

$$f_{00}^{(1)}=1-p_0, f_{00}^{(2)}=p_0\left(1-p_1\right),\ldots, f_{00}^{(k)}=p_0p_1\ldots p_{k-2}\left(1-p_{k-1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_{00}^{(k)}=1-p_0p_1\ldots p_{n-1} \Rightarrow f_{00}=1-\lim_{n\to\infty} p_0p_1\ldots p_{n-1}$$

故0 常返$\Leftrightarrow f_{00}=1 \Leftrightarrow -\sum_{n=0}^{\infty}\ln p_n=+\infty$。

(接上一页)

若$p_n = e^{-\frac{1}{n+1}}$, $\quad -\sum_{n=0}^{\infty} \ln p_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$
$\Rightarrow f_{00} = 1 - \lim_{n\to\infty} p_0 p_1 \ldots p_{n-1} = 1 \Leftrightarrow 0$ 常返
$\Rightarrow$ 此时为不可约常返链。

由$f_{00}^{(k)} = p_0 p_1 \ldots p_{k-2}\,(1 - p_{k-1})$可得

$$
\begin{aligned}
\mu_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} \\
&= (1 - p_0) + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \exp\left\{-\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)\right\}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)
\end{aligned}
$$

$n f_{00}^{(n)} = n \cdot \exp\{-[\ln n + c + o(n)]\}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \rightarrow$ 常数,
故$\mu_0 = \sum n f_{00}^{(n)} = \infty \Leftrightarrow$ 零常返

若$p_n = e^{-\frac{1}{(n+1)^2}}$, $\quad -\sum \ln p_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$
故$f_{00} = 1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{6}\right) < 1 \Leftrightarrow$ 非常返。

定理： 若 $i \leftrightarrow j$, 则它们或同为非周期，或同为周期，且有相同的周期。

证：设 j 的周期为 d（$d=1$ 时即为非周期）

$$p_{jj}^{(l+n)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(l)} = \alpha\beta > 0$$

故 $d | l+n$

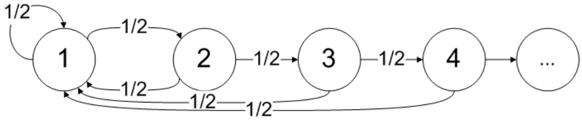
设 i 的周期为 d', 可取m与d互素，使得 $p_{ii}^{(md')} > 0$,
故$p_{jj}^{(l+md'+n)} \geq \alpha\beta \cdot p_{ii}^{(md')} > 0$, 即$d \mid l+md'+n$.

故 $d | d' \Rightarrow d \leq d'$, 同理可知 $d' \leq d$, 因此 $d = d'$.

例：无限制随机游动，$r=0$, $q=1-p$, 所有状态相通，周期为 2, $p=\frac{1}{2}$ 时，同为零常返；$p \neq \frac{1}{2}$ 时，同为非常返。

例: 设马氏链$S = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 转移概率为$p_{11} = \frac{1}{2}$,
$p_{ii+1} = \frac{1}{2}, p_{i1} = \frac{1}{2}, i \in S.$ i 遍历状态?

例: 设马氏链$S=\{1,2,3,\cdots\}$, 转移概率为$p_{11}=\frac{1}{2}$,
$p_{ii+1}=\frac{1}{2}, p_{i1}=\frac{1}{2}, i\in S.$　i 遍历状态?
证明：画状态转移图，分析状态1.



可知$f_{11}^{(1)}=\frac{1}{2}, f_{11}^{(2)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2, f_{11}^{(3)}=\left(\frac{1}{2}\right)^3, \cdots, f_{11}^{(n)}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1,$$ 所以" 1 "是常返状态. .

又因为 $$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<\infty,$$ 所以" 1 " 是正常返状态.

再由$p_{11}^{(1)}=\frac{1}{2}>0$, 知“1 ” 是非周期的. 从而“1 " 是遍历状态.
对其他$i\neq 1$, 因$i\leftrightarrow 1$, 故i 也是遍历状态 (注：若求$f_{ii}^{(n)}$ 则较麻烦)

总结

$$f_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \triangleq \sum \Pr\{\xi_n = j, \xi_m \neq j, m = 1, 2, \ldots, n-1 \mid \xi_0 = i\}$$

i 非常返 $\Leftrightarrow f_{ii} < 1 \Leftrightarrow$ 返回有限次（概率1） $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$

i 常返 $\Leftrightarrow f_{ii} = 1 \Leftrightarrow$ 返回无穷次（概率1） $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

i 零常返 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0 \Leftrightarrow$ 常返且 $\mu_i = \infty$

i 正常返 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, 且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} p_{ii}^{(n)} > 0 \Leftrightarrow$ 常返且 $\mu_i < \infty$.

i 遍历（正常返且非周期）$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} \quad \text{平均返回时间}$$

$i \leftrightarrow j \Rightarrow i$ 与 j 同非常返，常返，零常返，正常返，周期，遍历。

再论状态空间的分解

定理： 所有(零)常返状态构成一个闭集 C。

证：由定义证，$\forall i \in C, j \notin C$, 则 $i \nrightarrow j$.
　　用反证法，若 $i \rightarrow j$, 由 i 常返知 j 常返（见林元烈教材定理3.3.8），与 $j \notin C$ 矛盾。

令 C表示所有常返态构成的闭集，则有
定理： $C \neq \phi$, C_i 为两两互不相交的不可约闭集（两两相通）。$C = C_1 + C_2 + \dots$ (有限或无限)

证：$\forall i_1 = C$, C_1 为包含 i_1 所有相通状态的子集。
取 $i_2 \in C - C_1$ (若 $C - C_1 \neq \phi$), C_2 为包含 i_2 所有相通状态的子集。
$\dots$
所以$C = C_1 + C_2 + \dots$

定理： 令 C 为包含所有常返态的闭集，T 为包含所有非常返态的集合(T 不一定是闭集)，则状态空间

$$I = T + C = T + C_1 + C_2 + \dots$$

其中 C_i 称为 I 的基本常返闭集。

定理： $\{\xi_n\}$ 为有限状态马氏链，即 I 为有限集，则 $T = \phi$ 或 T 非闭
证：若 $T = \phi$ ，则证完。若T非空，用反证法，假设T是闭集，则对任意$i \in T$，有

$$\sum_{j \in T} p_{ij}^{(n)} = 1$$

由前面推论1可知 $\lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$，因此有

$$1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in T} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in T} \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0,\ \text{矛盾，可知}T\text{闭集。}$$

推论：有限马氏链至少有1个状态是常返的。

推论：有限不可约马氏链所有状态常返。
推论：有限不可约非周期马氏链所有状态遍历。
例：无限马氏链上述结论不一定成立。
无限制随机游动，$r = 0$, $P \neq \frac{1}{2}$ 时，所有状态非常返。

$p_{ij}^{(n)}$ 的渐进性质和平稳分布

定理： 若 j 为非常返态或零常返态，则 $\forall i \in I,\ p_{ij}^{(n)} \to 0.$

证：j 非常返态，已证。

j 零常返态，且 $i = j$ 时已证，即 $p_{ii}^{(n)} \to 0.$

下证j 零常返态，且$i \neq j$ 时

设 $m < n$，则

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)} = \sum_{v=1}^{m} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)} + \sum_{v=m+1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)} \\ &\leq \sum_{v=1}^{m} p_{jj}^{(n-v)} + \sum_{v=m+1}^{n} f_{ij}^{(v)} \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} \leq 1 \Rightarrow \exists m_0 \text{ 使得 } \sum_{v=m_0+1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$p_{jj}^{(n)} \to 0, m_0 \text{ 有限值} \Rightarrow \exists n_0,\text{ 使得 } n \geq n_0\ , \sum_{v=1}^{m_0} p_{jj}^{(n-v)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

故

$$p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{v=1}^{m_0} p_{jj}^{(n-v)} + \sum_{v=m_0+1}^{n} f_{ij}^{(v)} \leq \varepsilon \text{ (当} n \geq n_0 \text{ 时)},\ \text{i.e. } p_{ij}^{(n)} \to 0 (n \to \infty)$$

推论： 有限马氏链无零常返状态。

证：i 零常返，$C_i = \{j : i \leftrightarrow j\}$ 闭，故 $\sum_{j \in C_i} p_{ij}^{(n)} = 1\ (\forall n \geq 1)$

由于 $p_{ij}^{(n)} \to 0$，C_i 有限，则 $\sum_{j \in C_i} p_{ij}^{(n)} = \to 0$，矛盾。

极限分布与平稳分布

齐次马氏链，$\pi(0)$ 为初始分布，$\pi_i(0)=\Pr\{\xi(0)=i\}$, $\pi(n)$ 为时刻 n 时的分布，$\pi_j(n)=\Pr\{\xi(n)=j\}$, $\pi(n)\triangleq(\pi_0(n),\pi_1(n),\ldots)$

$$\begin{aligned}\pi_j(n) &= \sum_{i\in I}\Pr\{\xi(0)=i\}\cdot\Pr\{\xi(n)=j|\xi(0)=i\}\\ &= \sum_{i\in I}\pi_i(0)\cdot p_{ij}^{(n)}\\ \pi(n) &= \pi(0)\cdot\mathbf{P}^{(n)}\end{aligned}$$

Problem: $n\to\infty$ 时，$\pi(n)$ 极限是否存在？$\Leftrightarrow$ $\mathbf{P}^{(n)}$ 极限是否存在?
i.e., $\pi_j(n)$ 极限存在？$p_{ij}^{(n)}$ 极限存在？是否与 i 有关？

定理: 若j 为非常返态或零常返态, 则$\forall i \in I, p_{ij}^{(n)} \to 0$.
上述定理解决了j 为**非常返和零常返状态**的情形。
只需解决j **正常返态**, $\pi_j(n)$ 的极限问题即可。
一些记号: $\pi(n)$: 时刻 n 时的分布, 是一维概率分布（行向量）,
$\pi_j(n) \triangleq \Pr\{\xi_n = j\}$, $\sum_{j\in I} \pi_j(n) = 1$, $\pi(n) = \pi(0) \cdot \mathbf{P}^{(n)}$,
$\pi(n+1) = \pi(n) \cdot \mathbf{P}$.

定理: 若j 为非常返态或零常返态, 则$\forall i \in I, p_{ij}^{(n)} \to 0.$

上述定理解决了j 为**非常返和零常返状态**的情形。

只需解决j **正常返态**, $\pi_j(n)$ 的极限问题即可。

一些记号: $\pi(n)$: 时刻 n 时的分布, 是一维概率分布(行向量),

$\pi_j(n) \triangleq \Pr\{\xi_n = j\}$, $\sum_{j\in I} \pi_j(n) = 1$, $\pi(n) = \pi(0)\cdot \mathbf{P}^{(n)}$,

$\pi(n+1) = \pi(n)\cdot \mathbf{P}$.

假设$\mathbf{P}^{(n)}$ 极限存在, $\pi(n)$ 存在极限分布$\pi(n\to\infty)$, 即

$\pi_j(n) \triangleq \Pr\{\xi_n = j\} \to \pi_j, \pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$, 则

1 由 $\pi(n+1) = \pi(n)\cdot \mathbf{P} \Rightarrow \pi = \pi\mathbf{P} \Leftrightarrow \pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij}$

2 概率分布的极限仍是概率分布, $\sum_{j\in I} \pi_j = 1$

3 $\mathbf{P}^{(n)}$ 极限存在, $\mathbf{P}^{(n)} \to \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$ 即$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ 与i 无关

证: 设 $\mathbf{P}^{(n)} \to \mathbf{Q} = (q_{ij}) \Rightarrow \pi = \pi(0)\cdot \mathbf{Q} \Leftrightarrow \pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i(0) q_{ij}$,
由于 $\pi(0)$ 是任意概率分布, 取 $\pi(0) = (1, 0, \ldots)$ 得 $q_{0j} = \pi_j$,
取 $\pi(0) = (0, 1, 0, \ldots)$, 得 $q_{1j} = \pi_j$,
即 $\mathbf{Q}$ 的行向量相同并为 π.

4 π 是唯一的，极限亦唯一。

假设 $\pi' = \pi'\mathbf{P}$, $\pi = \pi\mathbf{P}$, 则 $\pi' = \pi'\mathbf{P}^{(n)} \to \pi' \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \\ \vdots \end{pmatrix}$、,

故 $\pi'_j = \sum_{i\in I} \pi'_i \cdot \pi_j = \left(\sum_{i\in I} \pi'_i\right) \cdot \pi_j = \pi_j$, 即 $\pi' = \pi$

5 π 与 $\pi(0)$ 即起始状态分布无关

$\pi(n) = \pi(0) \cdot \mathbf{P}^{(n)} \Rightarrow \pi = \pi(0) \cdot (\pi \ \ \dots \ \ \pi)^T$,
该式对任意分布 $\pi(0)$ 都成立。

综上，只需解决 j 正常返态，$\pi_j(n)$ 的极限问题即可。

定义： 定义在I 上的概率分布$\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots)$ 称为马氏链的平稳分布，若有$\theta = \theta \mathrm{P}$，即$\theta_j = \sum_{i \in I} \theta_i p_{ij}$

$$\theta = \theta \mathrm{P} = \theta \mathrm{P}^2 = \cdots = \theta \mathrm{P}^n = \dots$$

求以下马氏链的平稳分布：

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\pi(n)$: 时刻n 时的分布

$\pi(n)$ 极限分布$\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ 何时等于平稳分布

例[7] **:** $I = \{0, 1, 2\}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$, 有限不可约遍历.

$$\pi = \pi\mathbf{P} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$$

$$\begin{cases} 0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2 = \pi_0 \\ 0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2 = \pi_1 \\ 0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.5\pi_3 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

解方程组得

$$\pi_0 = \frac{21}{62}, \ \pi_1 = \frac{23}{62}, \ \pi_2 = \frac{18}{62}$$

$$\mathbf{P}^{10} = \begin{pmatrix} 0.338719 & 0.370972 & 0.290309 \\ 0.338708 & 0.370967 & 0.290325 \\ 0.338701 & 0.370964 & 0.290335 \end{pmatrix}$$

$$\pi : \ 0.338710 \ \ 0.370968 \ \ 0.290323 \quad \approx \mathbf{P}^{15}$$

[7] **推论:** 有限不可约非周期马氏链所有状态遍历

i 正常返 $\begin{cases} \text{周期：平稳分布存在。} \\ \text{非周期} \Leftrightarrow \text{遍历} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0. \end{cases}$ π 存在唯一

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}, \quad \text{平均返回时间}$$

$C_i = \{j : i \leftrightarrow j\}$ 为包含 i 的不可约闭集，i 遍历 $\Leftrightarrow$ C_i 遍历。

定理： 基本正常返闭集具有唯一的平稳分布
$C_i = \{j : i \leftrightarrow j\}$ 为包含i 的不可约闭集, i 正常返
则$\left\{\theta_j = \frac{1}{\mu_j}, j \in C_i\right\}$ 是方程组

$$\begin{cases} \theta_j = \sum_{i\in C_i} \theta_i p_{ij} \quad j \in C_i \\ \sum_{j\in C_i} \theta_j = 1, \quad \theta_j \geq 0 \end{cases} \quad \text{的唯一解。}$$

也是C_i 的唯一平稳分布！

重要情形！极限分布=平稳分布

注： 一般来说，平稳分布容易求（解方程）。若极限分布=平稳分布，则极限分布可以直接通过平稳分布求得！

推论： 不可约遍历链具有唯一的平稳分布，且平稳分布就是极限分布。

$$\theta_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_i \text{ 与 } i \text{ 无关（与初始分布无关）}$$

故不可约遍历链（无论状态有限还是无限）极限性质易于处理。此时通过解方程$\pi = \pi \mathbf{P}$就可以求出平稳(极限)分布。

$I = T + C$, T 非常返集，C 常返集，设 $C_+ \subset C$ 为正常返集。

定理：（一般马氏链）

1. 平稳分布存在 $\Leftrightarrow C_+ \neq \phi$.
2. 平稳分布唯一存在 $\Leftrightarrow$ 只有一个基本正常返闭集 $C_+ = C$.
3. 有限状态马氏链的平稳分布一定存在.
4. 有限不可约（非周期）马氏链存在唯一的平稳分布。
   且 $\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$

证：(1): "$\Rightarrow$"

平稳分布存在 $\Leftrightarrow \pi\mathbf{P} = \pi$, $\pi \neq 0$

反证法：若 $C_+ = \phi$, 则 I 的状态为非常返态或零常返态。

故 $p_{ij}^{(n)} \to 0$, 即 $\mathbf{P}^n \to 0$, 故 $\pi = \pi\mathbf{P} = \pi\mathbf{P}^n \to 0$ 矛盾

"$\Leftarrow$"

若 $C_+ \neq \phi$, 设 $i \in C_+$, 则 C_i 上存在平稳分布 $\pi^{(i)}$, 使得 $\pi^{(i)}\mathbf{P}_{(i)} = \pi^{(i)}$, $\mathbf{P}_{(i)}$ 为 $\mathbf{P}$ 在 C_i 上的限制。取 $\pi = (\pi^{(i)}, 0)$, 则 $\pi\mathbf{P} = \pi$, 即 π 是平稳分布。

(2) 略（两个基本正常返闭集可导出两个不同的平稳分布）
(3) 有限状态马氏链至少有1个状态正常返 $\Rightarrow C_+ \neq \phi \Rightarrow$ 平稳分布存在。
(4) 有限不可约链所有状态相通，故只有一个正常返基本闭集。

注：j 正常返，周期，$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，但 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)}$ 存在
此时，$\mathbf{P}^n$ 极限不一定存在，马氏链可能不存在极限分布，但一定存在平稳分布。极限分布 $\Rightarrow$ 平稳分布。反之未然

注：对于非周期不可约链，
正常返 $\Leftrightarrow$ 平稳分布 $=$ 极限分布且唯一。

注：不可约遍历链，$Pr\{\xi_n = j\} = \pi_j(n) \to \pi_j = \frac{1}{\mu_j}$. 无论初始状态如何，$\xi_n$ 是一个渐进平稳序列！

求平稳分布的两种方法

例： 艾伦菲斯特模型（续）
$2a$ 个球，红，黑，随机摸出一球，换入另一颜色球。$\xi(0)$ 为初始分布，$\xi(n)$ 为 n 次摸换后的黑球数目。，求平稳分布（极限分布）

方法一：定义法，即解方程

$I=\{0,1,\ldots,2a\}$, $p_{i,i+1}=\frac{2a-i}{2a}$, $p_{i,i-1}=\frac{i}{2a}$, 其它为 0.

$$\pi=\pi\mathbf{P}\Leftrightarrow\pi_j=\sum_{i\in I}\pi_i p_{ij}\Leftrightarrow\pi_i=\sum_{j\in I}\pi_j p_{ji}$$

定义 $\pi_{-1}=\pi_{2a+1}=0$,

$$\begin{aligned}\pi_i &= \pi_{i+1}p_{i+1,i}+\pi_{i-1}p_{i-1,i}\\ &= \pi_{i+1}\cdot\frac{i+1}{2a}+\pi_{i-1}\cdot\frac{2a-i+1}{2a}\qquad i=0,1,\ldots,2a\end{aligned}$$

解方程组得[8]

$$\pi_i = \pi_0 \begin{pmatrix} 2a \\ i \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2a$$

$$\sum \pi_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 \cdot \sum_{i=0}^{2a} \begin{pmatrix} 2a \\ i \end{pmatrix} = \pi_0 \cdot 2^{2a} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = 2^{-2a} \Rightarrow \pi_i = 2^{-2a} \begin{pmatrix} 2a \\ i \end{pmatrix}$$

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_i} \Rightarrow \mu_i = \frac{2^{2a}}{\begin{pmatrix} 2a \\ i \end{pmatrix}}$$

有限，不可约，正常返，周期

$$p_{ii}^{(2n+1)} = 0, \qquad p_{ii}^{(2n)} \to \frac{2}{\mu_i}$$

[8] 具体求解见陆大金教材p93

方法二：动态平衡原理求

利用动态平衡原理求平稳分布 π：

将 I 分解为 I_1 与 I_2 的和，i.e. $I = I_1 \bigcup I_2, I_1 \bigcap I_2 = \phi$

从 I_1 进入 I_2 的概率 $\Pr\{I_1 \to I_2\} = \sum_{j\in I_2} \sum_{i\in I_1} \pi_i p_{ij}$

从 I_2 进入 I_1 的概率 $\Pr\{I_2 \to I_1\} = \sum_{j\in I_1} \sum_{i\in I_2} \pi_i p_{ij}$

动态平衡原理：$\Pr\{I_1 \to I_2\} = \Pr\{I_2 \to I_1\}$ 证明（略），见p.99-100

例：用动态平衡原理求艾伦菲斯特模型的平稳分布

$I=\{0,1,\ldots,2a\}$, $I_1=\{0,1,\ldots,i-1\}$, $I_2=\{i,i+1,\ldots,2a\}$

$$\begin{aligned}\Pr\{I_1\to I_2\} &= \frac{2a-(i-1)}{2a}\cdot\pi_{i-1}\\ \Pr\{I_2\to I_1\} &= \frac{i}{2a}\pi_i\end{aligned}$$

$$故\quad \frac{2a-(i-1)}{2a}\pi_{i-1}=\frac{i}{2a}\pi_i\Leftrightarrow\pi_i=\frac{2a-(i-1)}{i}\pi_{i-1}$$

该递推公式更简单，易得 $\pi_i=\pi_0\left(\begin{array}{c}2a\\ i\end{array}\right)$, 其余步骤相同。

定理： $\{\xi_n\}$ 马氏链，则：ξ_n 严平稳 $\Leftrightarrow$ 初始分布是平稳分布。
即 $\pi(0)=\pi(0)\mathbf{P}$.
证："$\Rightarrow$" ξ_n 严平稳，$\pi(n)$ 为时刻 n 的一维分布。故

$\pi(0)=\pi(1)=\cdots=\pi(n)=\ldots$(有限维分布相同 $\Rightarrow$ 一维分布相同)

由 $\pi(1)=\pi(0)\mathbf{P}$ 得，$\pi(0)=\pi(0)\mathbf{P}$.

"$\Leftarrow$" $\pi(1)=\pi(0)\mathbf{P}=\pi(0)$, 故 $\pi(0)=\pi(1)=\cdots=\pi(n)=\ldots$,
即一维分布相同，下面证明有限维分布相同。
$t_1<t_2<\cdots<t_n$,

$$\begin{aligned}
\Pr\{\xi_{t_1}=i_1,\ldots,\xi_{t_n}=i_n\} &= \pi_{i_1}(t_1)\cdot p_{i_1i_2}^{(t_2-t_1)}\ldots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n-t_{n-1})}\\
&= \pi_{i_1(t_1+\tau)}p_{i_1i_2}^{(t_2-t_1)}\ldots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n-t_{n-1})}\\
&= \Pr\{\xi_{t_1+\tau}=i_1,\ldots,\xi_{t_n+\tau}=i_n\}
\end{aligned}$$

故严平稳。

非常返态分析

$$I = T + C = T + C_1 + C_2 + \dots$$

一、求从状态 i 出发进入基本常返闭集 C_k 的概率 $\Pr\{C_k|i\}$，即 C_k 的吸收概率。

$$\begin{aligned} i \in C_k &\quad \Rightarrow \quad \Pr\{C_k|i\} = 1 \\ i \in C_m \neq C_k &\quad \Rightarrow \quad \Pr\{C_k|i\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \in T: \quad \Pr\{C_k|i\} &\overset{\text{全}}{=} \sum_{j\in I} p_{ij} \Pr\{C_k|j\} \\ &= \sum_{j\in T} p_{ij} \Pr\{C_k|j\} + \sum_{j\in C_k} p_{ij} \end{aligned}$$

假设 T 有限集

$$i \in T,\ \Pr\{C_k|i\} - \sum_{j\in T} p_{ij} \Pr\{C_k|j\} = \sum_{j\in C_k} p_{ij}$$

是一个线性方程组，可以解出 $\Pr\{C_k|i\}$.

二、研究从非常返态进入常返态所需的平均时间 ES. (吸收时间的数学期望)

i: 起始状态， S: 吸收时间， 取值 $0, 1, 2, \ldots$
$i \in C \Rightarrow S = 0$

$$i \in T \begin{cases} T \text{ 有限集（非闭）} \Rightarrow \Pr\{C|i\} = 1 = \Pr\{S < \infty|i\} \\ T \text{ 无限集} \Rightarrow \Pr\{C|i\} \text{ 可能为}0 \end{cases}$$

$\Pr\{S = n|i\}$, $n = 0, 1, \ldots$ 表示系统从 i 出发经过 n 步首次进入 C 的概率。
$\Pr\{C|i\} = \Pr\{S < \infty|i\}$ 系统从 i 出发进入 C 的概率。
$1 - \Pr\{S < \infty|i\}$ 系统永远停留在 T 中的概率， “亏值”。

$$i \in C \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Pr\{S = 0 \mid i\} = 1 \\ \Pr\{S > 0 \mid i\} = 0 \end{cases}$$

(续下页)

$$i \in C \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Pr\{S = 0 \mid i\} = 1 \\ \Pr\{S > 0 \mid i\} = 0 \end{cases}$$

$i \in T$, $n \geq 1$;

$$\Pr\{S = n+1|i\} \overset{全}{=} \sum_{j \in I} \Pr\{S = n|j\} p_{ij} = \sum_{j \in T} \Pr\{S = n|j\} p_{ij} \quad (1)$$

$$\Pr\{S = 1|i\} = \sum_{j \in I} \Pr\{S = 0|j\} p_{ij} = \sum_{j \in C} p_{ij} \quad (2)$$

故得到(1)为递推方程，(2)为(1)的初始条件。此时可得到 S 的概率分布。

亏值为 0 时，S 是一个分布，其均值为：

$$E(S|i)=\sum_{n=1}^{\infty} n\Pr\{S=n|i\}$$

亏值 $\neq 0$ 时，S 不是一个分布，系统可能永远停留在 T 中，上式无意义。

改变上述步骤，也可以直接求 $E(S|i)$，其本质还是一样的。

$$i\in T,\ \Pr\{S=n+1|i\}=\sum_{j\in T}\Pr\{S=n|j\}p_{ij}$$

$$(n+1)\Pr\{S=n+1|i\}-\Pr\{S=n+1|i\}=\sum_{j\in T} n\Pr\{S=n|j\}p_{ij}$$

$n=0,1,2,\ldots$ 求和

$$(n+1)\Pr\{S=n+1\mid i\}-\Pr\{S=n+1\mid i\}=\sum_{j\in T} n\Pr\{S=n\mid j\}p_{ij}$$

$n=0,1,2,\ldots$ 求和

$$E(S|i)-\sum_{n=1}^{\infty}\Pr\{S=n|i\}=\sum_{j\in T}E(S|j)p_{ij}$$

假设亏值为0,

$$i\in T\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\Pr\{S=n|i\}=1$$

故

$$E(S|i)-\sum_{j\in T}E(S|j)p_{ij}=1$$

解方程组可求出所有的 $E(S|i)$, $i\in T$.

例： $I=\{0,1,2,\dots,k\}$, 起始状态为 $k>0$, 0 吸收态 $p_{00}=1$, $j=0,1,\dots,i-1$ 时，$p_{ij}=\frac{1}{i}$, $i=1,2,\dots,k$
求：吸收时间的数学期望。$T=?C=?$ 吸收态与遍历态?

例：$I=\{0,1,2,\ldots,k\}$，起始状态为 $k>0$，0 吸收态 $p_{00}=1$，
$j=0,1,\ldots,i-1$ 时，$p_{ij}=\frac{1}{i}$，$i=1,2,\ldots,k$
求：吸收时间的数学期望。$T=?C=?$ 吸收态与谝历态？

解：首先$C=\{0\}$，$T=\{1,2,\ldots,k\}$,?? 且$p_{ij}=0$，$j\geq i$.
设 $E(s|i)=s_i$，则由 $E(s|i)-\sum\limits_{j\in T}E(s|j)\cdot p_{ij}=1$得

$$s_i-\sum_{j=1}^{i-1}s_j\cdot\frac{1}{i}=1, i=2,3,\ldots,k$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= E(s|1)=1\cdot p_{10}=1, \quad \text{一步返回0的概率为1}\\
s_i &= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}\\
s_i &= \sum_{j=1}^{i-1}\frac{s_j}{i}+1 \Leftrightarrow s_i-1=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{s_j}{i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_{i+1} &= \sum_{j=1}^{i} \frac{s_j}{i+1} + 1 \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{s_j}{i+1} + \frac{s_i}{i+1} + 1 \\
&= (\sum_{j=1}^{i-1} \frac{s_j}{i}) \cdot \frac{i}{i+1} + \frac{s_i}{i+1} + 1 \\
&= (s_i - 1)\frac{i}{i+1} + \frac{s_i}{i+1} + 1 \\
&= s_i + \frac{1}{i+1}.
\end{aligned}
$$

故由 $s_1 = 1$ 得 $s_i = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{i}$,

$$E\{s|k\} = s_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$$