第八章 泊松过程与连续参数马氏链

陈斌

Outline

回忆

泊松分布: $\lambda > 0, \Pr\{\xi = i\} = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \quad E\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda$

二项分布: $\Pr\{\xi = i\} = \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$

$np = \lambda, \quad n \to \infty$, 即得泊松分布

指数分布: $\lambda > 0, f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{\{x \geq 0\}}$

$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) I_{\{x \geq 0\}}, \quad E\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$

几何分布: $\Pr\{\xi = t\} = p(1-p)^{i-1}, i = 1, 2, \cdots$

$E\xi = \frac{1}{p}, \quad D\xi = \frac{1-p}{p^2}$

Γ 分布: $f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} (x > 0), \quad E\xi = \frac{r}{\lambda}, D\xi = \frac{r}{\lambda^2}$,

$\Gamma(r)$ 为Gamma 函数。当r是正整数时, $\Gamma(r) = (r-1)!$, 故

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!}, \quad x \geq 0$$

连续参数,离散状态马尔可夫过程(纯不连续Markov过程)

T: 连续集合,如 $[0,+\infty),(-\infty,+\infty)$, **I**: 离散集合,$0,1,2\cdots$

$$\{\xi(t),t\in T\}\quad \forall t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}\in T$$
$$\forall i_0,i_1,\cdots i_m,i_{m+1}\in I$$
$$\Pr\{\xi(t_{m+1})=i_{m+1}|\xi(t_0)=i_0,\cdots\xi(t_m)=i_m\}$$
$$=\Pr\{\xi(t_{m+1})=i_{m+1}|\xi(t_m)=i_m\}$$

定义:设 $s,t\in T$ 且 $s<t,\Pr\{\xi(t)=j|\xi(s)=i\},\ i,j\in I$

称为 $\{\xi(t),t\in T\}$ 的转移概率分布

若 $\Pr\{\xi(t)=j|\xi(s)=i\}=\Pr\{\xi(\tau)=j|\xi(0)=i\}$

$$\triangleq\ p_{ij}(\tau),\quad \tau=t-s$$

称 $\xi(t),t\in T$为齐次马氏链. $P=(p_{ij}(\tau))_{i,j\in I}$ 转移概率矩阵

跳跃阶函数:

$$\xi(t)=j\ \left\langle\begin{array}{l}\text{以概率 } 1-q(t,j)\Delta t+o(\Delta t) \text{ 不动;}\\ \text{以概率 } q(t,j)\Delta t+o(\Delta t) \text{ 跳跃. (因为状态离散)}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cc}\downarrow & \downarrow\\ \text{时刻 } t & \text{时刻 } t+\Delta t\end{array}$$

泊松过程

定义: $[0,t)$内出现事件的总数组成的过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为**计数过程**, 若其满足以下性质:

1. $N(t) \geq 0$, 非负整数
2. $\forall s, t \in T, s < t$, 则 $N(s) \leq N(t)$

$N(t) - N(s)$表示在 (s,t) 内事件出现的次数

定义: 设计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足:

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t)\}$ 是独立增量过程, $i.e.$ $0 < t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ 时 $N(t_2) - N(t_1)$ 与 $N(t_4) - N(t_3)$ 相互独立
3. $\{N(t)\}$ 具有平稳增量, $i.e.$ $s < t, N(t) - N(s)$ 只与 $\tau = t - s$ 有关,而与 s 无关
4. 在 $(t, t + \Delta t)$ 内出现一个事件的概率为 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, λ 为常数;出现二次及以上的概率为 $o(\Delta t)$(高阶无穷小)

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为**泊松过程**。

定理:[1] 泊松过程$N(t), t \geq 0$ 在时间间隔 $[t_0, t_0+t]$ 内出现 n 次事件的概率为 $\Pr\{N(t_0+t)-N(t_0)=n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$ 参数为 λt 泊松分布 $n=0,1,2,\cdots$ $(E(N(t))=\lambda t)$

证:由平稳增量条件:

$\Pr\{N(t_0+t)-N(t_0)=n\} = \Pr\{N(t)-N(0)=n\} = \Pr\{N(t)=n\}$

记 $p_n(t)=\Pr\{N(t)=n\}$, 要证 $p_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$, 首先考虑事件 $\{N(t+\Delta t)=n\}$ 可分解为

$$\begin{cases} N(t)=n, & \text{且在 } (t,t+\Delta t) \text{ 没有出现事件} \\ N(t)=n-1, & \text{且在 } (t,t+\Delta t) \text{ 出现一个事件} \\ N(t)\leq n-2, & \text{且在 } (t,t+\Delta t) \text{ 出现二次或以上事件} \end{cases}$$

$$p_n(t+\Delta t) \overset{\text{全}}{=} p_n(t)\cdot(1-\lambda\Delta t) + p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t)?!$$

$$\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$, $p_n'(t)+\lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t), n=1,2,\cdots$

同理 $n=0$时,可得到 $p_0'(t)+\lambda p_0(t)=0$

[1] 泊松分布: $\lambda>0, \Pr\{\xi=i\}=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, E\xi=\lambda,\ D\xi=\lambda$

解得 $p_0(t)=C_0\cdot e^{\lambda t}$, $\quad p_0(0)=\Pr\{N(0)=0\}=1\Rightarrow C_0=1$

故 $p_0(t)=e^{-\lambda t}$,

$$p_n'(t)+\lambda p_n(t)=\lambda p_{n-1}(t), n=1,2,\cdots$$

递推可得 $p_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$.

实际上，泊松过程是纯不连续马尔可夫过程(齐次)

$q(t,x)=\lambda$,

因为独立增量 $\Rightarrow$ Markov　　　平稳增量 $\Rightarrow$ 齐次

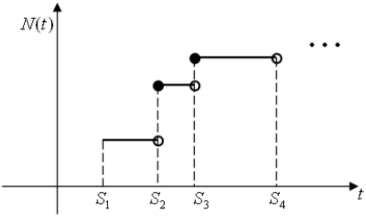
$$\Pr\left\{N\left(t_0+t\right)-N\left(t_0\right)=n\right\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$\Pr\{N(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$\Pr\{N(t)-N(s)=0\}=e^{-\lambda(t-s)}$$

$\lambda=\dfrac{E(N(t))}{t}$ 到达速率(单位时间内事件出现的平均次数)

泊松过程与指数分布的关系：相邻事件的时间间隔



设第1个事件的到达时间为 S_1,第n个事件的到达时间为 S_n

$S_n,\ n = 1, 2, \cdots$ 是一列随机变量

令 $T_n = S_n - S_{n-1}$，则 T_n 为第$n-1$个事件与第n个事件的间隔

$$S_0 = 0, \quad S_1 = T_1$$

$$S_n = \min\{t : t > S_{n-1}, N(t) = n\}$$

$\forall t \geq 0$，下列事件等价

$$\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{S_n < t\}, \quad \{N(t) < n\} = \{S_n \geq t\} \\
\{N(t) = n\} &= \{N(t) \geq n \text{ 且 } N(t) < n+1\} = \{S_n < t \leq S_{n+1}\} \\
&= \{S_n < t\} - \{S_{n+1} < t\}
\end{aligned}$$

$\Pr\{T_1 \geq t\} = \Pr\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t} \Rightarrow F_{T_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t \geq 0$
T_1 服从指数分布，参数为 λ, T_n：停留在$n-1$状态的时间；

定理： $\{N(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程，iff $\{T_n, n \geq 1\}$是独立且参数同为 λ的指数分布。

证明略

样本函数 $N(t)$ 是 t 的单增跳跃函数,间隔 T_n 独立同指数分布

S_n : 到达时间　　T_n :时间间隔

模拟时可通过测量 T_n 判断 $N(t)$ 是否泊松

到达时间S_n的分布（等待时间）

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

$\Rightarrow$ $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ 独立同分布随机变量和

特征函数 $\Phi_{T_i}(u) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \cdot e^{jtu} dt = \frac{\lambda}{\lambda - ju}$

故 $\Phi_{S_n}(u) = [\Phi_{T_i}(u)]^n = \frac{\lambda^n}{(\lambda - ju)^n}$

$$
\begin{aligned}
f_{S_n}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jtu} \cdot \frac{\lambda^n}{(\lambda - ju)^n} du \\
&= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0 \end{cases} \qquad \Gamma\text{分布}
\end{aligned}
$$

另一种方法: $F_{S_n}(t) = \Pr\{S_n <^{2} t\} = \Pr\{N(t) \geq n\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

$$
\begin{aligned}
f_{S_n} &= F'_{S_n}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda \cdot (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

[2] 连续分布取不取等号不影响分布函数的定义

例：两个独立的泊松过程 $\{N_1(t), t \geq 0\}$,参数 λ_1, $\{N_2(t), t \geq 0\}$, 参数 λ_2，$S_n^{(i)}$ 为 $N_i(t)$ 中出现第n次事件的时间， $i = 1, 2$

求：$\Pr\{S_1^{(1)} < S_1^{(2)}\} = ?$ $\qquad \Pr\{S_k^{(1)} < S_1^{(2)}\} = ?$

解： S_n 服从 Γ 分布， $f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} I_{\{t \geq 0\}}$

$$\Pr\{S_k^{(1)} < S_1^{(2)}\} \quad \text{有 } S_k^{(1)} \leftrightarrow f_1(x) \quad S_1^{(2)} \leftrightarrow f_2(y)$$

$$= \iint_{x<y} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} f_1(x) \cdot f_2(y) dydx$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \left[\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} \right] \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dydx$$

$$\text{其中} \int_x^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy = -e^{-\lambda_2 y}\Big|_x^{+\infty} = e^{-\lambda_2 x}$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} dx \\
&= -\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} de^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \\
&\longrightarrow (\text{(分部积分)} \iint udv = uv - \int vdu \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} d\frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \cdots \\
&= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-1} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} d(\lambda_1 x) \\
&= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k}
\end{aligned}
$$

第二种计算方法:

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda_1 \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \frac{\left(\lambda_1 \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x\right)^{k-1}}{(k-1)!} dx \\
&= \lambda_1 \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)} \left(\lambda_1 \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-1} \int_0^{+\infty} (\lambda_1+\lambda_2)\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \frac{[(\lambda_1+\lambda_2)\, x]^{k-1}}{(k-1)!} dx \\
&= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式子(1)中 $(\lambda_1+\lambda_2)\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \frac{[(\lambda_1+\lambda_2)\, x]^{k-1}}{(k-1)!}$ 为Γ 分布的概率密度函数,

故 $\int_0^{+\infty} (\lambda_1+\lambda_2)\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \frac{[(\lambda_1+\lambda_2)\, x]^{k-1}}{(k-1)!} dx = 1$

到达时间的条件分布

$\{N(t), t \geq 0\}$ 泊松，若已知 $[0,t]$ 内有1个事件出现，
请问该事件发生的时间 S_1 的分布如何？$S_1 = T_1$ 随机变量

$$
\begin{aligned}
\Pr\{S_1 <^{3} s | N(t) = 1\} &= \frac{\Pr\{T_1 < s, N(t) = 1\}}{p\{N(t) = 1\}} \\
&= \frac{\Pr\{N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0\}}{p\{N(t) = 1\}} \\
&= {}^{4}\frac{\Pr\{N(s) = 1\} \cdot \Pr\{N(t) - N(s) = 0\}}{p\{N(t) = 1\}} \\
&= \frac{(\lambda s) \cdot e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t \cdot e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}, \quad s \in [0, t)
\end{aligned}
$$

结论： 若已知在 $[0,t)$ 出现1次，则出现时间均匀分布在 $[0,t)$ 内

[3] 连续分布取不取等号不影响分布函数的定义

[4] 独立增量

推广：顺序统计量定义:

$Y_1, \cdots Y_n$ 随机变量，给定样本点 $\omega \in \Omega$,

将 $Y_1(\omega), \cdots Y_n(\omega)$ 重新依大小排序为 $y_1^* \leq \cdots \leq y_n^*$,

令 $Y_{(k)} = y_k^*, k = 1, 2, \cdots n$,这样得到的 n 个新随机变量 $Y_{(1)}, \cdots Y_{(n)}$ 称为 $Y_1, \cdots Y_n$的顺序统计量

$$Y_{(k)} = \max_{\{i_1, \cdots i_{n-k+1}\}} \{\min(Y_{i_1}, \cdots Y_{i_{n-k+1}})\}$$

命题: 若 $Y_1, \cdots Y_n$ 独立同分布， $y_1^* < y_2^* < \cdots y_n^*$,

则： $Y_{(0)}, \cdots Y_{(n)}$ 的联合密度为

$$f(y_1^*, \cdots y_n^*) = n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i^*).$$

定理： $N(t)=n$ 条件下，n次事件的出现时间 $S_1,\cdots S_n$的联合密度等于n个独立同 $[0,t)$ 均匀分布随机变量的顺序统计量的联合密度，

$$i.e.\quad f(s_1,s_2,\cdots s_n)=\begin{cases}\frac{n!}{t^n} & 0<s_1<s_2<\cdots<s_n\le t\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

特别地，有

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}S_i \mid N(t)=n\right]=n\cdot\frac{t}{2}\ \leftrightarrow n\text{个均匀分布期望的和}$$

定理： $\{N(t),t\ge 0\}$ 为计数过程， T_n 相邻事件的时间间隔独立同分布，S_n 为第n次事件出现的时间，有 $\Pr\{S_n\le s\mid N(t)=n\}=(\frac{s}{t})^n$,则 $\{N(t)\}$ 为泊松过程。

注：用本定理检验泊松过程可不需要知道参数 λ.

例： 设到达火车站的顾客流遵照参数为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$，火车 t 时刻离开车站，求在 $[0, t]$ 到达车站的顾客等待时间的总和（均值）

S_n : 顾客n到达时间， $t - S_n$: 顾客n等待时间

令 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)$，求 $ES(t) = ?$

解： 要求 $$ES(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr\{N(t) = n\} \cdot E[S(t)|N(t) = n],$$

可先求$E[S(t)|N(t) = n]$，

然后借助全期望公式$EEX \mid Y = EX$，可得

$$ES(t) = EE[S(t)|N(t) = n]$$

$$
\begin{aligned}
E[S(t)|N(t)=n] &= E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)|N(t)=n] \\
&= E[\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)|N(t)=n] \\
&= nt - E[\sum_{i=1}^{n}S_i|N(t)=n]
\end{aligned}
$$

在 $N(t)=n$ 条件下， $S_1,\cdots S_n$ 为n个独立同 $[0,t)$ 均匀分布

故 $E[\sum_{i=1}^{n}S_i|N(t)=n] = n\cdot\frac{t}{2}$ (所组成的顺序统计量)

$E[S(t)|N(t)=n] = nt - n\cdot\frac{t}{2} = \frac{nt}{2}$

故[5] $ES(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Pr\{N(t)=n\}\cdot\frac{nt}{2} = \frac{t}{2}\cdot EN(t) = \frac{\lambda t^2}{2}$[6]

[5]全期望公式$EEX \mid Y = EX$

[6]$E(N(t)) = \lambda t$

非齐次泊松过程

定义： 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足

1. $N(0) = 0$
2. 独立增量过程
3. $\Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) = 1\} = \lambda(\mathbf{t}) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$
   $\Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2\} = o(\Delta t)$

则称 $N(t), t \geq 0$ 为非齐次泊松过程

注： $\lambda(t)$ 是时间 t 的函数，故不具有平稳增量

$\lambda(t)$ 到达速率(单位时间内事件到达的平均次数)

$\lambda(t) = \lambda$ 时，为齐次泊松过程

定理： 非齐次泊松过程 $N(t), t \geq 0$ 在 $[t_0, t_0+t]$ 内出现n次事件 $(n \geq 0)$ 的概率

$$p_n(t_0, t) \triangleq \Pr\{N(t_0+t)-N(t_0) = n\} = \frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^n}{n!} e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$$

其中 $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$

注：证明过程与齐次泊松类似，不要求。取消了平稳增量条件，有时更接近实际情况，应用起来方便些。

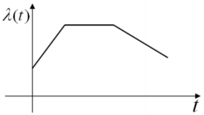
注： $[t_0, t_0+t)$ 内事件发生次数的均值为 $m(t_0+t)-m(t_0)$, 因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n(t_0, t) &= [m(t_0+t)-m(t_0)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\quad \cdot e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]} \\ &= m(t_0+t)-m(t_0) \end{aligned}$$

例：小商店 8:00~11:00 顾客数线性增加，5人/小时→20人/小时
11:00~13:00 20人/小时
13:00~17:00 线性减少 20人/小时→12人/小时
问 8:30~9:30 无顾客的概率？顾客数的均值？

解：非齐次泊松

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5+5t & 0 \le t \le 3 & 8:00 \sim 11:00 \\ 20 & 3 \le t \le 5 & 11:00 \sim 13:00 \\ 20-2(t-5) & 5 \le t \le 9 & 13:00 \sim 17:00 \end{cases}$$



$[t_0, t_0+t)$ 内 $n=0$ 的概率为 $e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$

$[t_0, t_0+t)$ 内的均值 $= m(t_0+t)-m(t_0)$

$m(t_0+t)-m(t_0) = m(\frac{3}{2}) - m(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \lambda(s)ds = 10$

故无顾客的概率为 e^{-10}, 顾客数的均值为10

复合泊松过程

复合泊松过程：由简单过程产生较复杂过程

定义： $\{N(t), t \geq 0\}$ 泊松，$Y_n, n = 1, 2, \cdots$ 独立同分布随机变量，称 $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n, t \geq 0$ 为复合泊松过程。$Y \equiv 1 \Rightarrow$ 泊松

例：到站的公汽数是一泊松，每辆公汽的乘客数独立同分布，则到站的乘客总人数是复合泊松过程，求期望和方差？

随机个独立同分布随机变量和：用母函数解决！

$N(t) \sim G(s) = e^{\lambda t(s-1)}$， 参数为 λt 的泊松分布

$Y_n \sim F(s), \quad EY_n = F'(1), EY_n^2 = F''(1) + F'(1)$

$DY_n = F''(1) + F'(1) - [F'(1)]^2, \quad F(1) = 1$

$$\begin{aligned}
\text{则：}\quad X(t) &\sim G[F(s)] = e^{\lambda t(F(s)-1)} \qquad \text{注意不是} F[G(s)]! \\
G'(F(1)) &= \lambda t, \qquad G''(F(1)) = (\lambda t)^2 \\
EX(t) &= [G(F(s))]'|_{s=1} = G'(F(1)) \cdot F'(1) = \lambda t \cdot EY_n
\end{aligned}$$

$$G'(F(1))=\lambda t \quad G''(F(1))=(\lambda t)^2 \quad EY_n=F'(1) \quad EY_n^2=F''(1)+F'(1)$$

$$\begin{aligned}
DX(t) &= [G(F(s))]''+[G(F(s))]'-\{[G(F(s))]'\}^2|_{s=1}\\
&= G''(F(1))\cdot[F'(1)]^2+G'(F(1))F''(1)+G'(F(1))F'(1)\\
&\quad -[G'(F(1))F'(1)]^2\\
&= (\lambda t)^2E^2Y_n+\lambda t\cdot[F''(1)+F'(1)]-(\lambda tEY_n)^2\\
&= \lambda t\cdot EY_n^2
\end{aligned}$$

例： 设 $[0,t)$ 内的顾客到达数服从泊松分布，若每次到达的顾客男性出现的概率为 p，女性出现的概率为 $1-p$, 则 $[0,t)$ 内到达的男（女）顾客数服从参数为 λp $(\lambda(1-p))$ 的泊松分布

证明：只考虑男顾客的情形：

η : 贝努力分布 $\Pr\{\eta=1\}=p$, $\Pr\{\eta=0\}=1-p$,

$F(s)=ps+1-p$

$N_1(t)=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{N(t)}$, $[0,t)$内到达的男顾客数

$N_1(t)$ 为复合泊松过程，其母函数为 $G[F(s)]=e^{\lambda pt(s-1)}$

故 $N_1(t)$ 为参数为 λp 的泊松过程

过滤的泊松过程

一冲激脉冲串服从泊松分布，经过线性时不变系统，输出为 $\xi(t)$

$\xi(t)=\sum_{i=1}^{N(T)} h(t-U_i)$ $h(t)$冲激响应，假定h 为周期为T 的函数

U_i第i个脉冲出现的时间，$N(T):[0,T)$ 内进入系统的冲激个数

$\Pr\{N(T)=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$

在 $N(T)=k$ 条件下，U_i，$i=1,2,\cdots k$ 独立同均匀分布 $[0,T)$

(1)求 $E\xi(t)$?

$$\begin{aligned} E\xi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\Pr\{N(T)=k\}E[\xi(t)|N(T)=k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Pr\{N(T)=k\}E\sum_{i=1}^{k}h(t-U_i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Pr\{N(T)=k\}\sum_{i=1}^{k}Eh(t-U_i) \qquad (2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{7}\text{因为 } Eh(t-U_i) &= \frac{1}{T}\int_0^T h(t-U_i)dU_i = \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy \\
\text{故 } (2) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\cdot\frac{k}{T}\int_0^T h(y)dy \\
&= E[N(t)]\cdot\frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy = \lambda\int_0^T h(y)dy
\end{aligned}
$$

(2)求 $\xi(t)=\sum_{i=1}^{N(T)} h\left(t-U_i\right)$ 的相关函数 $R_{\xi\xi}(t,t+\tau)$

$$
\begin{aligned}
& R_{\xi\xi}(t,t+\tau) = E\xi(t)\xi(t+\tau) \\
= \ & E\xi(t)\xi(t+\tau) \\
= \ & \sum_{k=0}^{\infty}\Pr\{N(t)=k\}E[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}h(t-U_i)h(t+\tau-U_j)] \\
= \ & \sum_{k=0}^{\infty}\Pr\{N(T)=k\}[(\sum_{i=j}+\sum_{i\neq j})Eh(t-U_i)h(t+\tau-U_j)]
\end{aligned}
$$

---

[7] $Eg(Y)=\int g(y)f_Y(y)dy$

$$\sum_{i=j} = kEh(t-U_i)h(t+\tau-U_i) = \frac{k}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy$$

$$\sum_{i\neq j} = k(k-1)Eh(t-U_i)Eh(t+\tau-U_j) = \frac{k(k-1)}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2$$

$$N(T)\sim G(s)=e^{\lambda T(s-1)} \Rightarrow \begin{cases} EN(T)=G'(1)=\lambda T \\ E\{N^2(T)-N(T)\}=G''(1)=\lambda^2T^2 \end{cases}$$

$$R_{\xi\xi}(t,t+\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\Pr\{N(T)=k\}\left[\left(\sum_{i=j}+\sum_{i\neq j}\right)Eh\left(t-U_i\right)h\left(t+\tau-U_j\right)\right]$$

$$= E\{N(T)\}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy + E\{N^2(T)-N(T)\}\cdot\frac{1}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2$$

$$= \lambda\cdot\int_0^T h(y)h(t+\tau)dy+\lambda^2\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2$$

(3)求 $\xi(t)$ 的特征函数 $\Phi(v)$

$$\begin{aligned}\Phi(v) &= Ee^{jv\xi(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\{N(T)=k\}\cdot E\exp[jv\sum_{i=1}^{k} h(t-U_i)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\{N(T)=k\}\cdot \prod_{i=1}^{k} E\exp[jvh(t-U_i)]\end{aligned}$$

因为 $E\exp[jvh(t-U_i)]$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \exp[jvh(t-U_i)]dU_i = \frac{1}{T}\int_0^{\mathbf{T}} \mathbf{e}^{\mathbf{jvh(y)dy}} \qquad (\equiv \boldsymbol{\Delta})$$

故 $\Phi(v)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\frac{1}{T^k}\left[\int_0^T e^{jvh(y)}dy\right]^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda\Delta)^k}{k!} = e^{\lambda(\Delta-T)} = \exp\left\{\lambda\int_0^T [e^{jvh(y)}-1]dy\right\}\end{aligned}$$

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{N(T)} h\left(t-U_i\right), \qquad \Pr\{N(T)=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}$$

$$\Phi(v)=\exp\left\{\lambda\int_0^T\left[e^{jvh(y)}-1\right]dy\right\}$$

$\Phi(v)$ 与 t 无关，故 $\xi(t)$ 的一维分布都相同。

同理可证，$\xi(t)$ 的有限维分布随时间平移而不变，即 $\xi(t)$，

过滤的泊松过程是一个严平稳过程。

(4)$\lambda\to\infty$时， $\eta(t)\triangleq$ 标准化的 $\xi(t)$,均值0，方差1

则 $\eta(t)\to N(0,1)$, 依分布收敛，用特征函数证明
即单位时间的平均脉冲数无限增大时，
$\xi(t)$为独立同分布随机变量的叠加→高斯分布(中心极限定理)
(见陆大金教材p149-151)

回顾：指数分布的性质

指数分布:

$$\lambda > 0, f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{\{x\geq 0\}}$$
$$F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) I_{\{x\geq 0\}}$$
$$E\xi = \frac{1}{\lambda}. \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

生存函数（剩余时间分布函数）

$$\Pr(X \geq t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

命题: 指数分布的条件分布仍是同参数的指数分布。

$$\Pr(X \geq t + s \mid X \geq s) = \Pr(X \geq t) \text{ 无记忆性}$$

证明:
$$\Pr(X \geq t + s \mid X \geq s) = \frac{\Pr(X \geq t + s, X \geq s)}{\Pr(X \geq s)} = \frac{\Pr(X \geq t + s)}{\Pr(X \geq s)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \Pr(X \geq t)$$

连续参数马氏链

参数集 T 连续，状态空间 I 离散

$p_{i,j}(t) = \Pr\{\xi(s+t) = j|\xi(s) = i\}$ 本章着重研究齐次链

性质：

1. $p_{i,j}(t) \geq 0, \quad i,j \in I$
2. $\sum_{j\in I} p_{ij}(t) = 1, \quad i \in I$
3. $p_{ij}(s+t) = \sum_{k\in I} p_{ik}(s)\cdot p_{kj}(t), \quad s,t > 0,\ i,j \in I$ C-K 方程

   增加连续性条件
4. $\lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$，$p_{ij}(0) = \delta_{ij}$，即$p_{ij}(t)$在0点连续

C-K方程的矩阵形式 $P(s+t) = P(s)\cdot P(t)$

连续性条件的矩阵形式 $P(0) = I$，$\lim_{t\to 0} P(t) = I$ 单位矩阵

C-K方程对 $p_{ij}(t)$ 有较强的限制

定理1： $\forall i \in I, t \in T, p_{ii}(t) > 0$

证：$t \to 0$ 时，$p_{ii}(t) \to 1$

由连续性条件，$\forall t$，存在n使得 $p_{ii}(\frac{t}{2^n}) > 0$

由C-K方程，$p_{ij}(s+t) \geq p_{ik}(s) \cdot p_{kj}(t), \forall k \in I$

故 $p_{ii}(t) \geq p_{ii}^2(\frac{t}{2}) \geq \cdots \geq [p_{ii}(\frac{t}{2^n})]^{2^n} > 0$

定理2： $p_{ij}(t)$ 对所有充分大的t,或者恒等于0[8]，或者恒大于0.

$i.e.$，若 $p_{ij}(t_0) > 0$，则$\forall t > t_0$，$p_{ij}(t) > 0$

证：$p_{ij}(t) \overset{C-K}{\geq} p_{ij}(t_0) \cdot p_{jj}(t-t_0) \overset{\text{定理1}}{>} 0$

定理3： $p_{ij}(t)$ 在 T 上一致连续

证：$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(h) p_{kj}(t) - p_{ij}(t)$

$= \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) - p_{ij}(t)[1 - p_{ii}(h)]$

$\leq \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h)$ 且 $\geq -[1 - p_{ii}(h)]$

$h \to 0$ 时，可知 $p_{ij}(t)$ 在 T 上一致连续

[8] CK方程取等号时可证

定理： $\lim\limits_{t\to0}\frac{p_{ij}(t)}{t}$ 极限存在且有限, $i\neq j$

$\lim\limits_{t\to0}\frac{p_{ii}(t)-1}{t}$ 极限存在，但可能是无限，$i=j$

证明不要求！

$p_{ij}(t)=p_{ij}(0)+q_{ij}\cdot t+o(t),\quad q_{ij}\triangleq p'_{ij}(0)=\lim\limits_{t\to0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}$(转移率)

$i\neq j,\ q_{ij}=\lim\limits_{t\to0}\frac{p_{ij}(t)}{t},\ q_{ij}\geq0,$

$i=j,\ q_{ii}=\lim\limits_{t\to0}\frac{p_{ii}(t)-1}{t}$ 可能是无限，$q_{ii}\leq0$

I有限集时，

$1=\sum_{j\in I}p_{ij}(t)=\sum_{j\in I}p_{ij}(0)+\sum_{j\in I}q_{ij}t+o(t)=1+\sum_{j\in I}q_{ij}t+o(t)$

$\Rightarrow\sum_{j\in I}q_{ij}=0$

$\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}=-q_{ii}$, q_{ii}为有限值，$-q_{ii}$ 跳跃概率 $q(t,x)$.

一般情况下，$\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}\leq-q_{ii}$

Q矩阵

$Q=(q_{ij})$ 称为 $\{\xi(t),t\neq 0\}$ 的转移率矩阵，简称 Q矩阵。

若 Q 满足 $\forall i\in I,\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}=-q_{ii}<\infty$, 则称 Q 是**保守 Q 矩阵。**

故 I 为有限集时，Q 必保守。保守的 Q 矩阵满足:

1. 每行的所有元素之和为0
2. 对角线元素非正
3. 非对角线元素非负

注：实际问题中 Q 的许多元素为 0; 非齐次链，$q_{ij}\to q_{ij}(t)$.

例：考虑泊松过程

$$q_{i,i+1}=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ii+1}(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\lambda t+o(t)}{t}=\lambda$$

$$q_{ii}=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ii}(t)-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\lambda t+o(t)-1}{t}=-\lambda$$

$$\text{故}\quad Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots\end{pmatrix}$$

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\frac{\sum\limits_k p_{ik}(t)p_{kj}(h)-p_{ij}(t)}{h}$$

$$=\sum_{k\neq j}\frac{p_{kj}(h)}{h}p_{ik}(t)+\frac{p_{jj}(h)-1}{h}p_{ij}(t)\to\sum_k q_{kj}p_{ik}(t)$$

$$P(0)=I,\ \frac{dP(t)}{dt}=P(t)\cdot Q$$ **柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程**

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\frac{\sum_k p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)}{h}$$

$$=\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)+\frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t)$$

$$\to\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)+q_{ii}p_{ij}(t)=\sum_k q_{ik}p_{kj}(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt}=Q\cdot P(t)$$ **柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程**

注： 前进-后退方程的解是相同的。

令

$$r_j(t) \triangleq \Pr\{\xi(t) = j\}$$

为 t 时刻系统位于状态 j 的概率（随机过程 $\xi(t)$ 的一维分布）

令

$$r(t) = (r_0(t), r_1(t), \dots)$$

则

$$r(t) = r(0) \cdot P(t)$$

因此

$$\frac{dr(t)}{dt} = r(0)\frac{dP(t)}{dt} = r(0)P(t) \cdot Q = r(t) \cdot Q$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = r(t) \cdot Q$$ 福克-普朗克方程

例：$M/M/1$ 排队系统
设有一服务台，$[0,t)$ 内到达的顾客数服从参数为 λt 的泊松分布。只有一个服务员。单个顾客的服务时间服从指数分布，平均服务时间为 $\frac{1}{\mu}$. 顾客到达时若发现1 人在接受服务，2人在等候，就离开。
求 Q 矩阵，$r(t)?P(t)?$

解：$I=\{0,1,2,3\}$, 顾客数为3表示1人接受服务，2人等候。有限状态。

$$q_{ij}=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}$$

$[0,t)$ 内的顾客数

$$p_{01}(t)=\lambda t+o(t)\Rightarrow q_{01}=\lambda$$
$$p_{02}(t)=p_{03}(t)=o(t)\Rightarrow q_{02}=q_{03}=0$$

$$q_{00}=-(q_{01}+q_{02}+q_{03})=-\lambda$$

指数分布的条件分布仍是同参数的指数分布。
i.e.无论正在接受服务的顾客已经接受服务的时间是多长，其剩余服务时间的均值都不变，且在 t 时间内结束服务的条件概率为

$$1-e^{-\mu t}=\mu t+o(t)$$

故(注: $e^x \approx 1+x, e^{-x} \approx 1-x$)

$$p_{10}(t)=(\mu t+o(t))(1-\lambda t+o(t)) \Rightarrow q_{10}=\mu$$

$\swarrow$ 结束服务　　$\searrow$ 没来新顾客

$$p_{12}(t)=(\lambda t+o(t))\cdot(1-\mu t+o(t))=\lambda t+o(t) \Rightarrow q_{12}=\lambda$$

$\swarrow$ 来了新顾客　　$\searrow$ 没有结束服务

$$p_{13}(t)=o(t) \Rightarrow q_{13}=0$$

$$p_{11}(t)=(1-\lambda t+o(t))(1-\mu t+o(t)) \Rightarrow \quad q_{11}=-(\lambda+\mu)$$

同理，$q_{20}=0$, $q_{21}=\mu$, $q_{22}=-(\lambda+\mu)$, $q_{23}=\lambda$
$q_{32}=\mu$, $q_{30}=q_{31}=0$, $q_{33}=-\mu$.

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ & & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

依此可列出福克-普朗克方程，初始条件为

$t=0$ 时, 无顾客, 服务员空闲$r(0)=(1,0,0,0)$
$\frac{dr(t)}{dt}=r(t)\cdot Q$ 福克-普朗克方程
前进-后退方程可求出$p_{ij}(t)$.
$\frac{dP(t)}{dt}=Q\cdot P(t)$ 柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程
$\frac{dP(t)}{dt}=P(t)\cdot Q$ 柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程

$p_j(t) \triangleq \Pr\{\xi(t)=j\} \quad p_{ij}(t)=\Pr\{\xi(s+t)=j \mid \xi(s)=i\}$

极限分布 $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$

引理： $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)$ 存在且与初始分布 $p_j(0)$ 无关，当且仅当 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ 对任何 i 都存在且相等。

证：$p_j(t) \overset{全}{=} \sum\limits_{i\in I} p_i(0)p_{ij}(t)\ldots(*)$

"$\Rightarrow$" $p_j(t)\to p_j$ 且与初始分布无关

取 $P_i(0)=(0\ldots1\ldots0), i\in I$，其中$p_i(0)=1$，即第$i$个分量为1，其余为 0，代入 $(*)$ 式，得

$$p_{ij}(t)=p_j(t)\to p_j$$

"$\Leftarrow$" $p_{ij}(t)\to p_j$

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{i\in I} p_i(0)p_{ij}(t)=\sum_{i\in I} p_i(0)p_j=p_j$$

马尔可夫定理：$\{\xi(t), t \geq 0\}$ 连续参数马氏链，状态有限，若存在 t_0 使得 $\forall i, r \in I$，有 $p_{ir}(t_0) > 0$，则 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j$ 存在且与 i 无关。（陆大金教材p167-170）

显然由引理知此时 $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t) = p_j$.

求解极限分布 $P = (p_0, p_1, \dots)$

由柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程

$$\frac{d\ p_{ij}(t)}{d\ t} = \sum_{k\in I} p_{ik}(t) q_{kj}$$

$$p_{ij}(t) \to p_j \Rightarrow \frac{d\ p_{ij}(t)}{d\ t} = p'_{ij}(t) \to 0$$

故 $\sum\limits_{k\in I} p_k q_{kj} = 0,\ j = 0, 1, 2 \dots$

$$P \cdot Q = 0$$

线性方程组，可解出 p_k.

例： $Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$, $I=\{0,1\}$，且满足 $P\cdot Q=0$

求解极限分布 $P=(p_0,p_1,\dots)$

$$P\cdot Q=0$$

方程组

$$\begin{cases} -\lambda p_0+\mu p_1=0 \\ \lambda p_0-\mu p_1=0 \\ p_0+p_1=1 \end{cases}$$

解得

$$p_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$p_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

两个分布简介

负二项分布（巴斯卡分布）：

$$\Pr\{\xi = i\} = \begin{pmatrix} i-1 \\ r-1 \end{pmatrix} p^r (1-p)^{i-r}, \quad i = r, r+1, \ldots$$

$$E\xi = \frac{r}{p}, \quad D\xi = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

几何分布:

$$\Pr\{\xi = i\} = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots \; E\xi = \frac{1}{p}, \quad D\xi = \frac{1-p}{p^2}$$

两者的关系？

生灭过程

应用十分广泛，理论成果较多。排队论，可靠性，生物，医学，经济，管理，物理，通信，交通...

定义： $\{\xi(t), t \geq 0\}$, $I = \{0, 1, 2 \ldots\}$ 满足 $[t, t + \Delta t)$ 内

$q_{00} = -\lambda_0(t)$, $q_{01} = \lambda_0(t)$, 即 0状态只能转移到1状态

$$\vdots \qquad \vdots$$

$q_{n(n-1)} = \mu_n(t)$, $q_{nn} = -[\lambda_n(t) + \mu_n(t)]$, $q_{n(n+1)} = \lambda_n(t)$,

即 n 状态转移到 $n-1$ 状态的概率为 $\mu_n(t)\Delta t + o(\Delta t)$,
n 状态转移到 $n+1$ 状态的概率为 $\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$,
而且转移 ≥ 2 个状态的概率为 $o(\Delta t)$.

称 $\{\xi(t), t \geq 0\}$ 为**生灭过程**。

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0(t) & \lambda_0(t) & & & \\ \mu_1(t) & -[\lambda_1(t)+\mu_1(t)] & \lambda_1(t) & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & \mu_n(t) & -[\lambda_n(t)+\mu_n(t)] & \lambda_n(t) & \\ & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

保守 Q 矩阵

$n \to n+1$, 生，概率与 n 有关，λ_n (齐次，与 t 无关)

$n \to n-1$, 灭，概率与 n 有关，μ_n (齐次，与 t 无关)

$$\lambda_n(t)=\begin{cases} \lambda_n,\mu_n \quad \text{齐次,与}t\text{无关} \\ \text{常数},\mu=0 \quad \text{时为泊松} \\ \lambda(t),\mu=0 \quad \text{时为非齐次泊松} \\ n\lambda(t),n\mu(t) \quad \text{线性} \end{cases}$$

$\mu=0$　纯增殖过程（纯生过程）$\lambda_n(t)$ 可能与n 有关

$\lambda=0$　纯灭过程，泊松$\lambda_n(t)$ 与n 无关

齐次线性纯生过程 ~ 尤尔(Yule)过程

齐次线性生灭过程：$\lambda_n(t)=n\lambda$, $\mu_n(t)=n\mu$.

由 $$\frac{dP(t)}{dt}=P(t)\cdot Q$$ **柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程**

$$\frac{dP(t)}{dt}=Q\cdot P(t)$$ **柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程**

$$\frac{dr(t)}{dt}=r(t)\cdot Q$$ **福克-普朗克方程** 可得

定理：$\{\xi(t)\}$ 生灭过程，向前向后方程

$$p'_{ij}(t)=-p_{ij}(t)[\lambda_j(t)+\mu_j(t)]+p_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1}(t)+p_{i,j+1}(t)\mu_{j+1}(t)$$

$$p'_{ij}(t)=-[\lambda_i(t)+\mu_i(t)]p_{ij}(t)+\lambda_i(t)p_{i+1,j}(t)+\mu_i(t)p_{i-1,j}(t)$$

定理：Fokker-Plank(福克-普朗克)方程

$$p'_j(t)=-p_j(t)[\lambda_j(t)+\mu_j(t)]+p_{j-1}(t)\lambda_{j-1}(t)+p_{j+1}(t)\mu_{j+1}(t)$$

$$p'_0(t)=-p_0(t)\lambda_0(t)+p_1(t)\mu_1(t)$$

求 $\xi(t)$ 的极限分布（若存在）[9]
由福克-普朗克方程，令 $t \to \infty$ 得（假定是齐次链）

$$
\begin{aligned}
& -(\lambda_j+\mu_j)p_j+\lambda_{j-1}p_{j-1}+\mu_{j+1}p_{j+1}=0, \quad && j\geq 0, p_{-1}\triangleq 0 \\
\Rightarrow\quad & \mu_{j+1}p_{j+1}-\lambda_j p_j=\mu_j p_j-\lambda_{j-1}p_{j-1}=\cdots && \text{递推可得} \\
=\quad & \mu_1 p_1-\lambda_0 p_0=0^{10} \\
\Rightarrow\quad & p_{j+1}=\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}p_j
\end{aligned}
$$

解得

$$p_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0,\quad \ldots,\quad p_k=\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\cdots\mu_k}p_0$$

由 $\sum\limits_{k\in I} p_k=1$ 得

$$p_0=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\cdots\mu_k}\right)^{-1}$$

[9] $P\cdot Q=0$
[10] 齐次 $\Rightarrow -\lambda_0 p_0+\mu_1 p_1=0$

定理: $\{\xi(t), t \geq 0\}$ 齐次生灭过程, 则 $\xi(t)$ 存在唯一的平稳分布（等于极限分布）iff.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k} < \infty$$

且

$$p_0 = (1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k})^{-1}, \quad p_k = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k} p_0$$

直接求解微分方程“前进，后退，福克”则困难得多。

不过对于生灭过程，可使用母函数法进行求解，
参见教材 pp. 179 – 187.

定理：[11] $\{\xi(t), t \geq 0\}$ 齐次线性生灭过程，$\xi(0) = i$，参数 λ, μ. 则：

$$p_{i0}(t) = \alpha^i(t)$$

$$p_{in}(t) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \binom{i+n-j-1}{n-j} \alpha^{i-j}(t) \cdot \beta^{n-j}(t) \cdot [1-\alpha(t)-\beta(t)]^j$$

$$E\xi(t) = ie^{(\lambda-\mu)t}, \quad D\xi(t) = i\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}[e^{(\lambda-\mu)t} - 1]$$

其中，

$$\alpha(t) = \frac{\mu - \mu e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}, \quad \beta(t) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \alpha(t)$$

注：$i = 1$ 时，$p_{1n}(t) = [1-\alpha(t)][1-\beta(t)] \cdot \beta^{n-1}(t)$.

注：$\lim_{t\to\infty} p_{i0}(t)$ 初始状态为i，经过长时间后转移到状态0(灭绝)

$$= \lim_{t\to\infty} \alpha^i(t) = \begin{cases} 1 & \lambda < \mu \\ (\frac{\mu}{\lambda})^i & \lambda > \mu \end{cases}$$ i 越大，灭绝的可能性越小。

[11] 齐次线性生灭过程：$\lambda_n(t) = n\lambda$, $\mu_n(t) = n\mu$

纯生过程

$\mu=0$ 时，纯生过程，求 $p_n(t)=\Pr\{\xi(t)=n\}$?

为简化推导，假定 $\lambda_n(t)=\lambda_n$ (齐次)

福克-普朗克方程 $p_n'(t)=-\lambda_n p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t) \quad n\geq m \quad (*)$

显然纯生过程为泊松推广

$$n\to n+1, \quad \lambda\cdot\Delta t\to\lambda_n\cdot\Delta t \quad (\text{齐次情形})$$

起始状态设为 $m\geq 0$, 即 $p_m(0)=1$, 福克-普朗克方程
$n=m$ 时，$p_m'(t)=-\lambda_m p_m(t)$
$n>m, \quad p_n'(t)=-\lambda_n p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)$ (*)

下面我们来解微分方程组(*)

使用拉氏变换，令 $\pi_n(s)=\mathcal{L}(p_n(t))$, $p_n(0)=\delta_{m,n}$，则有

$$\mathcal{L}p_n'(t)=s\pi_n(s)-p_n(0)$$

故$p_m'(t)=-\lambda_m p_m(t)\Rightarrow s\pi_m(s)-1=-\lambda_m\pi_m(s)$,
$p_n'(t)=-\lambda_n p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)$
$\Rightarrow s\pi_n(s)=-\lambda_n\pi_n(s)+\lambda_{n-1}\pi_{n-1}(s) \quad (n\geq m)$,

$$s\pi_m(s) - 1 = -\lambda_m \pi_m(s) \quad \pi_m(s) = \frac{1}{s+\lambda_m}$$

$$s\pi_n(s) = -\lambda_n \pi_n(s) + \lambda_{n-1}\pi_{n-1}(s) \quad \pi_n(s) = \frac{\lambda_{n-1}}{(s+\lambda_n)}\pi_{n-1}(s)$$

逆拉氏变换得

$$p_n(t) = (-1)^{n-m}\lambda_m \dots \lambda_{n-1} \sum_{i=m}^{n} \frac{e^{-i\lambda t}}{\prod_{\substack{j\neq i \\ m\leq j\leq n}} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

特例： $\lambda_n = n\lambda$ 线性齐次纯生过程 $\sim$ 尤尔过程（细菌分裂）
初始状态为 m 时，

$$p_n(t) = \begin{pmatrix} n-1 \\ m-1 \end{pmatrix} e^{-m\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-m}, \quad n \geq m$$

$p_n(t)$ 是负二项分布，$m=1$ 时退化为几何分布。

$\lambda_n = n\lambda$ 线性齐次纯生过程$\sim$ 尤尔过程
尤尔过程的直接推导：

由福克-普朗克方程： $p_n'(t) = -n\lambda p_n(t) + (n-1)\lambda p_{n-1}(t),\ n \geq 1$

$n = 1, m = 1$ 时， $\left.\begin{array}{c} p_1'(t) = -\lambda p_1(t) \\ p_1(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p_1(t) = e^{-\lambda t}$

递推可得 $p_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1},\ n \geq 1$

$m \geq 1$ 时，$p_m(0) = 1$ 的尤尔过程可看作 m 个 $p_1(0) = 1$ 的尤尔过程之和。

使用母函数法知(具体计算参考林元烈书P202)

$$G_m(s) = [G_1(s)]^m \qquad G_1(s) = \frac{s \cdot e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})s}$$

故 $p_n(t) = \begin{pmatrix} n-1 \\ m-1 \end{pmatrix} e^{-m\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-m}$ 负二项分布

电话交换问题： 电话总机有 n 条线路。呼叫流服从参数为 λ 的泊松分布，即 $[t, t+\Delta t)$ 来一次呼叫的概率为 $\lambda\Delta t$, 每次呼叫的通话时间服从参数为 μ 的指数分布，即 $[t, t+\Delta t)$ 内完成呼叫的概率为 $\mu\cdot\Delta t + o(\Delta t) = 1 - e^{-\mu t}$. (注：$e^x \approx 1+x, e^{-x} \approx 1-x$)
注: 呼叫到达时如n 条线路都被占用, 则该呼叫遭拒绝而消失(即不等待), 设$p_0(0)=1$,求Q矩阵和极限分布p_k？

$p_k(t) = \{t$ 时刻有 k 条电话线被占用的概率$\} = \Pr\{\xi(t)=k\}$
$\xi(t) \triangleq t$ 时刻电话交换系统被占用的电话线数。
显然，$\{\xi(t), t\geq 0\}$ 为生灭过程（齐次）

设 t 时刻有 k 条线被占，则 $t+\Delta t$ 时刻$(n\geq k\geq 0)$

1. k 条线都没有结束通话的概率

$$\approx (1-\mu\cdot\Delta t)^k \approx 1 - k\mu\Delta t$$

2. k 条线中恰有一条线结束通话的概率

$$\approx k\mu\Delta t$$

故

$$p_{k,k+1}(\Delta t) \approx \lambda\Delta t \cdot (1 - k\mu\Delta t) \approx \lambda\Delta t$$

其中，$\lambda\Delta t$：来了新呼叫；$(1 - k\mu\Delta t)$：k 条线没结束呼叫

i.e. $q_{k,k+1} = \lambda$, $q_{k,k-1} = k\mu$, $q_{k,k} = -(\lambda + k\mu)$, $k \geq 1$
$q_{n,n-1} = n\mu$, $q_{n,n} = -n\mu$.

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & k\mu & -(\lambda+k\mu) & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & n\mu & -n\mu \end{pmatrix}$$

下面求极限分布 $p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t)$, $p_k(t) = \Pr\{\xi(t) = k\}$

福克-普朗克方程，令 $t \to \infty$

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0 \quad (*) \\ \lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0 \end{cases}$$

$(*)$ 变形，

$$\lambda p_k - (k+1)\mu p_{k+1} = \lambda p_{k-1} - k\mu p_k = \cdots = \lambda p_0 - \mu p_1 = 0$$

故

$$1 \le k \le n, \quad p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0$$

由 $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$，得 $p_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}(\frac{\lambda}{\mu})^i = 1$. 故

$$p_k = \frac{\frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^k}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}(\frac{\lambda}{\mu})^i}, \quad 0 \le k \le n \quad \text{埃尔兰公式}$$

直接解法： 因为是齐次生灭过程，所以有

$$p_k = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k} p_0$$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k}\right)^{-1}$$

直接代入可得！

排队与服务

假设只排一条队

排队过程包括三部分：(1)到达过程　(2)排队　(3)服务过程

多数排队过程可转化为生灭过程模型。

(1)到达过程：假定泊松最为常见，i.e. $[t, t+\Delta t) \sim \lambda \cdot \Delta t$

(2)排队：$\left\{\begin{array}{l}\text{无容量限制}\\\text{有容量限制}\end{array}\right.$　$\left\{\begin{array}{l}\text{一个服务员}\\\text{多个服务员}\end{array}\right.$

(3)服务：$\left\{\begin{array}{l}\text{先到先服务}\\\text{优先级}\end{array}\right.$　$\left\{\begin{array}{l}\text{服务时间随机（如指数分布）}\\\text{服务时间固定}\end{array}\right.$

$G_1/G_2/s$,　G_1: 到达顾客数分布；G_2: 服务时间分布

$M/M/s$,　泊松 + 指数 + s 个服务员

排队论研究的四个问题：(系统进入平衡状态后，即极限状态)

1. 系统中的顾客平均数 L. (含正在接受服务的顾客)
2. 排队等候的顾客平均数 L_Q.
3. 顾客在系统中花费时间的均值 W. (含接受服务的时间)
4. 顾客排队等候的时间的均值 W_Q.

由前面定理知：

定理: $\{\xi(t), t \geq 0\}$ 齐次生灭过程, 则$\xi(t)$ 存在唯一的平稳分布（等于极限分布）iff.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k} < \infty$$

且$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k}\right)^{-1}$, $\quad p_k = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k} p_0$

例1：$M/M/1$ 无容量限制，λ 到达率，$\frac{1}{\mu}$ 平均服务时间。
生灭过程$\lambda_n(t) = \lambda$, $\mu_n(t) = \mu$, 当系统进入平稳分布后，

$$p_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n p_0, \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n = 1 \Rightarrow p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

故 $\lambda < \mu$ 时存在极限（平稳）分布。$p_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n (1 - \frac{\lambda}{\mu})$（几何分布）.
$\lambda < \mu \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} < \frac{1}{\lambda}$, i.e. 平均服务时间少于平均相邻的时间间隔。

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (\sum (n+1) p_n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu - \lambda}) \\
L_Q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \\
W &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n E\{\text{新顾客的花费时间}|\text{已有 } n \text{ 个顾客}\} \\
&= \sum p_n \cdot \frac{n+1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad L = \lambda W \\
W_Q &= \sum p_n \cdot \frac{n}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad L_Q = \lambda W_Q
\end{aligned}$$

例2：$M/M/1$ 有容量限制 N[12]
$I=\{0,1,\dots N\}$, 生灭过程 $\lambda_n=\lambda>0$, $\mu_n=\mu>0$.

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ & & & \mu & -\mu \end{pmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

系统进入平稳分布后，

$$p_k=(\frac{\lambda}{\mu})^k p_0, \quad ,k=1,2,\dots N$$

$$\sum_{k=0}^{N} p_k=1\Rightarrow p_0=\frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\cdots+(\frac{\lambda}{\mu})^N}=\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}}.$$

[12] 顾客到达时发现系统中有N人，不再排队而离开

由于 N 有限，故可归一化，无需假定 $\lambda<\mu$.

$$L=\sum_{k=0}^{N} kp_k = p_0\sum_{k=0}^{N} k(\frac{\lambda}{\mu})^k,\ p_0=\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

$$S_N=\sum_{k=1}^{N} k(\frac{\lambda}{\mu})^k,\quad S_N-\frac{\lambda}{\mu}S_N=\sum_{k=1}^{N}(\frac{\lambda}{\mu})^k-N\cdot(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}$$

$$S_N=\frac{\frac{\lambda}{\mu}-(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}}{(1-\frac{\lambda}{\mu})^2}-\frac{N\cdot(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}}{(1-\frac{\lambda}{\mu})}$$

故可化简得

$$L=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\cdot\frac{1+N\cdot(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}-(N+1)(\frac{\lambda}{\mu})^N}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}}$$

($\frac{\lambda}{\mu}<1$, 且 $N\to\infty$ 时，$L=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ 与无容量限制相同)

$$L_Q=\sum_{k=1}^{N}(k-1)p_k=L-\sum_{k=1}^{N}p_k=L-(1-p_0)$$

顾客的平均花费时间

$$W\left\{\begin{array}{l} W^{(1)}: \text{含离去的顾客（该顾客花费为0）} \\ W^{(2)}: \text{不含离去的顾客}^{13} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} p_N &= \lim_{t\to\infty}\Pr\{\xi(t)=N\}=\text{顾客离去的概率(队列已满，新来顾客离去)} \\ W^{(1)} &= \sum_{k=0}^{N}p_kE\{\text{新顾客的花费时间}|\text{已有 } k \text{ 个顾客在系统中}\} \\ &= {}^{14}\sum_{k=0}^{N-1}p_k\cdot(\frac{k+1}{\mu}) \quad \text{(假设顾客离去时，花费时间为0)} \\ &= \frac{L-(N+1)p_N+1}{\mu}=\frac{L}{\lambda}. \end{aligned}$$

[13] 在系统不存在离去顾客的条件下,即已知顾客一定进入系统的条件下

[14] $k=N$时，顾客$N+1$不等待，直接离去

$$W^{(1)}=\frac{L-(N+1)p_N+1}{\mu}$$

$$=\frac{L-(\mathrm{N}+1)\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}+1}{\mu}$$

$$=\left\{L+\frac{1}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N+(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}\right]\right\}/\mu$$

$$=\left\{L+\frac{1}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}\cdot\left[1+\mathrm{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N\right]\right\}/\mu$$

$$=\frac{L+\frac{\mu-\lambda}{\lambda}L}{\mu}=\frac{1}{\lambda}\mathrm{L}$$

注意到$p_0, p_1, \ldots p_{N-1}, p_N$: 是指在计算离去的顾客时，系统中有 k 个顾客的概率，$k=0,1,\cdots N-1$

故在不包含离去的顾客时[15]，系统中有 k 个顾客的概率为

$$p_k^{(2)} \triangleq \frac{p_k}{1-p_N}{}^{16}, \quad k=0,1,\cdots N-1$$

故

$$\begin{aligned} W^{(2)} &= \sum_{k=0}^{N-1} p_k^{(2)} E\{\text{新顾客的花费时间}|\text{已有 } k \text{ 个顾客在系统中}\} \\ &= \frac{p_k}{1-p_N} E\{\text{新顾客的花费时间}|\text{已有 } k \text{ 个顾客在系统中}\} \\ &= \frac{W^{(1)}}{1-p_N}. \end{aligned}$$

[15] 在系统不存在离去顾客的条件下,即已知顾客一定进入系统的条件下

[16] 已知状态为$0,1,\cdots,N-1$ 时处于k 的概率

对于 $W^{(2)}$, i.e. 不包含离开的顾客情形。

此时，顾客以 p_N 概率离开，以 $1-p_N$ 的概率进入系统。所以进入系统的顾客服从参数为 $\lambda(1-p_N)$ 的泊松分布。

由 $W^{(2)}=\frac{W^{(1)}}{1-p_N}$ 与 $L=\lambda W^{(1)}$ 知

$$L=\lambda(1-p_N)W^{(2)}$$

其中，L 为平均顾客数，$\lambda(1-p_N)$ 为单位时间到达的平均顾客数，$W^{(2)}$ 为平均花费时间。

总结：顾客的到达速率为 λ, 故平均时间间隔为 $1/\lambda$,
L 个顾客的平均到达时间为 L/λ, 总平均等待时间为 W.
当排队系统达到稳态时，必然有

$$L/\lambda=W, \quad \text{即 } L=\lambda W.$$

排队服务问题的基本关系式:

$$L=\lambda W, \quad L_Q=\lambda W_Q \quad (\text{系统进入稳定状态后})$$

例3： $M/M/s$, 无容量限制

$I=\{0,1,2,\ldots\}$, $\lambda_n=\lambda$, $n=0,1,\ldots,$

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu, & n=1,2,\ldots s \\ s\mu, & n=s+1,\ldots \end{cases}$$

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & (s-1)\mu & -(\lambda+(s-1)\mu) & \lambda & & & \\ & & s\mu & -(\lambda+s\mu) & \lambda & & \\ & & & s\mu & -(\lambda+s\mu) & \lambda & \\ & & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$p_k=\frac{\lambda_0\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\ldots\mu_k}p_0, \quad ,k=1,2,\ldots$$

$$
\begin{aligned}
\text{故} \quad p_k &= \frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^k p_0,\ k = 1, 2, \ldots, s \\
p_k &= (\frac{1}{s})^{k-s} \cdot \frac{1}{s!}(\frac{\lambda}{\mu})^k p_0 = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s} p_0,\ k = s+1, s+2, \ldots
\end{aligned}
$$

$\sum\limits_k (\frac{\lambda}{s\mu})^k$ 在 $\frac{\lambda}{s\mu} < 1$ 时收敛。

$$
\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^k + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{(s-1)!(s-\frac{\lambda}{\mu})}}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\lambda}{\mu} + p_0 \cdot \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{s+1}}{(s-1)!(s-\frac{\lambda}{\mu})^2} \\
L_Q &= \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) p_n = L - \frac{\lambda}{\mu} \\
W &= \frac{L}{\lambda},\ \ W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

具体计算参考陆大金教材p205-210

例4：$M/M/s$ 有容量限制 k, i.e.系统中有 k 个顾客时，新顾客就离去。显然，$k \geq s$. $k = s$ 时即为著名的电话交换问题。仅计算其平稳分布（极限分布）即可（参考陆大金教材p210）

$I = \{0, 1, \dots k\}$, $\lambda_n = \lambda$, $n = 0, 1, \dots, k-1$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n = 1, 2, \dots s \\ s\mu, & n = s+1, \dots k \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & \ddots & & & \\ & & s\mu & -(\lambda+s\mu) & \lambda \\ & & & s\mu & -s\mu \end{pmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}$$

更新过程

泊松过程 $N(t)$：S_n 第 n 个事件发生的时间 $n \geq 1$, $S_0 \triangleq 0$.

$X_n(T_n) = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 1)$

第 $n-1$ 个事件与第 n 个事件的间隔。

$X_1, X_2, \cdots X_n \cdots$ 独立同指数分布。

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从 Γ 分布。

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n < t\}$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_n < t\} - \{S_{n+1} < t\}$$

推广：$X_n \to$ 独立同分布非负随机变量，泊松 $\longrightarrow$ 更新过程

定义： 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布非负随机变量，分布函数

为 $F(t)$ 且 $F(0) < 1$. 令 $S_0 = 0$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$,

$\forall t \geq 0$, 记 $N(t) = \max\{n : S_n < t\}$.

称计数过程 $N(t)$ 为更新过程。

注： 更新过程的原型是零件的连续更换。设零件的寿命独立同分布 $F(t)$, 第 n 个零件在 $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 时失效，随后马上换一新零件，则 $[0, t)$ 时间段内更换的零件数目为 $N(t)$.

性质：

1. $\{N(t) \geq n\} = \{S_n < t\}$

   $\{N(t) = n\} = \{S_n < t \leq S_{n+1}\} = \{S_n < t\} - \{S_{n+1} < t\}$

$\because \mathrm{S}_n = S_{n-1} + X_n$

$\therefore$ 由特征函数性质得$\mathrm{G}_n(u) = G_{n-1}(u) \cdot G_x(u)$

由特征函数与概率密度关系求傅里叶逆变换得

$f_n(t) = f_{n-1}(t) * f(t)$

利用卷积定义展开得:

$$f_n(t) = \int f_{n-1}(\mathrm{t} - \tau) f(\tau) d\tau$$

由密度函数与分布函数的积分关系即$\int f(t)dt = F(t)$

将上式两边对t 积分可得

$$\int f_n(t)\mathrm{dt} = \iint f_{n-1}(\mathrm{t} - \tau) dt f(\tau) d\tau \to F_n(t) = \int F_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

$$= \int F_{n-1}(t - \tau) dF(\tau)$$

即$F_n(t) = F_{n-1}(t) * f(\mathrm{t})$

2 设 S_n 的分布函数为 $F_n(t)$, 则由上一页知 $F_n(t) = F_{n-1}(t) * f(t)$ 是 $f(t)$ 的 n 重卷积。故

$$\Pr\{N(t) = n\} = \Pr\{S_n < t\} - \Pr\{S_{n+1} < t\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

3 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu = EX_i$ 强大数定律, $F(0) < 1 \Rightarrow \mu > 0$

证明:

$$F(0) = F\left(0^+\right) = \Pr\{X_i = 0\} < 1 \Rightarrow \Pr\{X_i > 0\} > 0$$

$$\Rightarrow \mu = \sum n \Pr\{X_i = n\} > 0$$

故$S_n \xrightarrow{a.s.} \infty$, 当$n \to \infty$

令$m(t) \triangleq EN(t)$, 称$m(t)$为更新过程$\{N(t), t \geq 0\}$的更新函数。

定理: $\forall t \geq 0$, $m(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(t)$

证：
$$
\begin{aligned}
m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \Pr\{N(t) = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \Pr\{N(t) = n\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \Pr\{N(t) = n\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N(t) \geq k\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{N(t) \geq n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{S_n < t\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)
\end{aligned}
$$

推论：若 $\forall t \geq 0$, $F(t) < 1$, 则

$$F_n(t) \leq [F(t)]^n, \quad m(t) \leq \frac{F(t)}{1-F(t)} \quad (\text{归纳法})$$

证明：归纳基础：由$F(t)$ 单增可知，若$n=2$，有

$$F_2(t) = \int_0^t F(t-u)dF(u) \leq \int_0^t F(t)dF(u) = F^2(t)$$

推论： 若 $\forall t \geq 0$, $F(t) < 1$, 则

$$F_n(t) \leq [F(t)]^n, \quad m(t) \leq \frac{F(t)}{1 - F(t)} \quad (\text{归纳法})$$

证明： 归纳基础：由$F(t)$ 单增可知，若$n = 2$，有

$$F_2(t) = \int_0^t F(t-u)dF(u) \leq \int_0^t F(t)dF(u) = F^2(t)$$

定理： $\forall t \geq 0$, $m(t)$ 满足更新方程

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-u)dF(u)$$

证明：

$$\begin{aligned}
m(t) &= F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t) \\
&= {}^{17}F(t) + \int_0^t \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(t-u)dF(u) \\
&= F(t) + \int_0^t m(t-u)dF(u).
\end{aligned}$$

更新函数[18]两边取拉氏变换

令 $\lambda(t)=m'(t)$, **更新强度**, $\lambda(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$,

$f_n(t)$ 为$f(t)$的n次卷积（卷积变乘积），故两边取拉氏变换

$$\tilde{\lambda}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}[\tilde{f}(s)]^n=\frac{\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(s)}.$$

即

$$\tilde{\lambda}(s)=\tilde{f}(s)+\tilde{\lambda}(s)\tilde{f}(s)$$

拉氏逆变换得更新方程

$$\lambda(t) \quad = \quad f(t)+\int_0^t \lambda(t-u)f(u)du$$

---

[18] 令$m(t)\triangleq EN(t)$, 称$m(t)$ 为更新过程$\{N(t),t\geq 0\}$ 的更新函数。

定理: $\forall t\geq 0, m(t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$

定理： $\forall t, m(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty$

$N(t) \overset{a.s.}{<} \infty$ 并不能直接得到$m(t) = EN(t) < \infty$.

反例： ξ （看成特殊的$N(t)$)

取值$1, 2, 4, \ldots 2^n, \ldots, \Pr\{\xi = 2^n\} = \frac{1}{2^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{\xi = 2^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$$

是一概率分布且$\xi < \infty, a.s.$, 但

$$E\xi = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \Pr\{\xi = 2^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

但对于更新过程确实有$m(t) < \infty$.

(接上一页)

证：X_i 非负 $\Rightarrow t<0$ 时，$F_n(t)=0 \Rightarrow m(t)=0$

$t=0$ 时，

$$m(t) \le \sum_{n=1}^{\infty} F^n(0) = \frac{F(0)}{1-F(0)} < \infty \quad (F_n(t) \le F^n(t))$$

$t>0$ 时，

$$m(t) \le \frac{F(t)}{1-F(t)} \quad \text{由于 } F(t) \text{ 可能为1，故不可行}$$

对固定的 t, 由 $S_n \stackrel{a.s.}{\to} \infty$ 知 $\exists r$ 使 $\Pr\{S_r \ge t\} = \beta > 0$, i.e.

$$F_r(t) = \Pr\{S_r < t\} = 1-\beta < 1$$

类似于 $F_n \le F^n(t)$,

$$F_{nr+m}(t) \le F_r^n(t)F_m(t) \le F_r^n(t), \quad 1 \le m \le r-1$$

故

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{r} F_{nr+m}(t) \le \sum_{n=0}^{\infty} r \cdot F_r^n(t) = \frac{r}{1-F_r(t)} = \frac{r}{\beta} < \infty.$$

定理： 记 $N(\infty) = \lim_{t\to\infty} N(t)$, $\Pr\{N(\infty)=\infty\} = 1$.

证：

$$\begin{aligned}
\{N(\infty) < \infty\} &= \{\text{无穷的时间段内发生事件的个数有限}\} \\
&= \{\text{至少有一个相邻事件的时间间隔为 } \infty\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = \infty\}.^{19}
\end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \Pr\{N(\infty)=\infty\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{X_n=\infty\} = 0$$

[19] X_n 为随机变量: $\sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X_n = i) = 1 \Rightarrow \Pr(X_n = \infty) = 0$

注：$\forall t, N(t) \overset{a.s.}{<} \infty$, 但 $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) \overset{a.s.}{=} \infty$.
$N(t)$ 趋于 ∞ 的速度见下面定理。(注：$\frac{t}{N(t)}$ 为平均时间间隔$= \mu$)

定理： $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, a.s.$, 即 $\Pr\{\lim\limits_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\} = 1$.
证：$\{N(t) \geq n\} = \{S_n < t\} \Rightarrow \{N(t) \geq N(t)\} = \{S_{N(t)} < t\}$

$$i.e.\ \ S_{N(t)} < t$$

$\{N(t) < n\} = \{S_n \geq t\} \Rightarrow \{N(t) < N(t)+1\} = \{S_{N(t)+1} \geq t\}$

$$i.e.\ \ t \leq S_{N(t)+1}$$

故
$$\underset{\displaystyle \mu}{\underset{\downarrow}{\frac{S_{N(t)}}{N(t)}}} < \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \underset{\displaystyle \mu}{\underset{\downarrow}{\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}}} \cdot \underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{\frac{N(t)+1}{N(t)}}}$$

故 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \mu$. ($\frac{S_n}{n} \overset{a.s}{\to} \mu = EX_i$ 强大数定律)

定义：$\{X_n, n \geq 1\}$ 随机序列，T 为取值非负整数的随机变量。若对任意非负整数 n, 事件 $\{T = n\}$ 仅依赖于 $X_1, \ldots X_n$, 而与 $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ 独立，则称 T 关于 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是**停时** (Stopping time,Markov time).

注：观察随机序列 X_n 时，T 表示停止观察的那一时刻。

例：$N(t)$ 泊松，S_n, 则 $N(t)$ 关于 $\{S_n, n \geq 0\}$ 不是停时，
$\{N(t) = n\} = \{S_n < t \leq S_{n+1}\}$ 依赖于 S_n 与 S_{n+1}.

但 $N(t) + 1$ 关于 $\{S_n, n \geq 0\}$ 是停时，因为：
$N(t) + 1 = n \Leftrightarrow N(t) = n - 1 \Leftrightarrow S_{n-1} < t \leq S_n$
$N(t) + 1 = n$ 只与S_{n-1}, S_n 有关, 与$S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$, 独立

关于$\{X_n\}$？更新过程?

定理：(瓦尔德等式（Wald）) 假设$\{X_n, n \geq 1\}$ 独立同分布且 $\mu = EX_n < \infty$, T 关于 X_n 是停时，且 $ET < \infty$, 则

$$E\sum_{n=1}^{T} X_n = ET \cdot EX_n = \mu \cdot ET$$

推论：$N(t)+1$ 关于 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是停时，对于更新过程，当 $\mu < \infty$ 时，$ES_{N(t)+1} = \mu \cdot [m(t)+1]$.

定理：（基本更新定理）

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

μ 可以为 ∞ 并规定 $\frac{1}{\infty} = 0$.（证明见樊平毅书P107.）