第三章 二阶矩过程和平稳过程

陈斌

Tsinghua Shenzhen International Graduate School (SIGS)

Outline

二阶矩过程

定义： 设 $\{\xi(t), t \in T\}$ 为随机过程，

若 $\forall t \in T$, $\mathbf{E}|\xi(\mathbf{t})|^{\mathbf{2}} < \infty$，称$\{\xi(t), t \in T\}$ 为**二阶矩过程**。

例：高斯过程，平稳过程

[1] $E|\xi\eta| = |E|\xi\eta||$

二阶矩过程

定义： 设 $\{\xi(t), t\in T\}$ 为随机过程，

若 $\forall t\in T$, $\mathbf{E|\xi(t)|^2} < \infty$，称$\{\xi(t), t\in T\}$ 为**二阶矩过程**。

例：高斯过程，平稳过程

设 $\{\xi(t), t\in T\}$ 为实二阶矩过程，有：

1 $E|\xi+\eta| \leq E|\xi| + E|\eta|$.

2 $|E\xi\eta| \leq E|\xi\eta|$; $\quad \eta = 1, -1$ 时，$|E\xi| \leq E|\xi|$.

3 $|E\xi\eta| \leq E|\xi\eta|^1 \leq \sqrt{E|\xi|^2 E|\eta|^2}$; **Cauchy-Schwartz(CS)不等式**

证明: 对任意t, $u(t) = E(t\xi-\eta)^2 = t^2E\xi^2 - 2tE\xi\eta + E\eta^2 \ldots$

4 若$\{\xi(t), t\in T\}$为**复过程**，有$|E\xi\bar{\eta}| \leq E|\xi\bar{\eta}| \leq \sqrt{E|\xi|^2 E|\bar{\eta}|^2}$;

[1] $E|\xi\eta| = |E|\xi\eta||$

二阶矩过程

定义： 设 $\{\xi(t), t \in T\}$ 为随机过程，
若 $\forall t \in T$, $\mathbf{E}|\xi(\mathbf{t})|^2 < \infty$，称$\{\xi(t), t \in T\}$为**二阶矩过程**。

例：高斯过程，平稳过程

设 $\{\xi(t), t \in T\}$ 为实二阶矩过程，有：

1. $E|\xi+\eta| \le E|\xi| + E|\eta|$.

2. $|E\xi\eta| \le E|\xi\eta|$; $\eta = 1, -1$ 时，$|E\xi| \le E|\xi|$.

3. $|E\xi\eta| \le E|\xi\eta|$[1] $\le \sqrt{E|\xi|^2 E|\eta|^2}$; **Cauchy-Schwartz(CS)不等式**
   证明: 对任意t, $u(t) = E(t\xi-\eta)^2 = t^2E\xi^2 - 2tE\xi\eta + E\eta^2 \ldots$

4. 若$\{\xi(t), t \in T\}$为**复过程**，有$|E\xi\bar{\eta}| \le E|\xi\bar{\eta}| \le \sqrt{E|\xi|^2 E|\bar{\eta}|^2}$;
   $\eta = 1$ 时，$|E\xi| \le \sqrt{E|\xi|^2}$. **二阶矩控制一阶矩！**

[1] $E|\xi\eta| = |E|\xi\eta||$

二阶矩过程

定义： 设 $\{\xi(t), t \in T\}$ 为随机过程，

若 $\forall t \in T$, $\mathbf{E}|\xi(\mathbf{t})|^{\mathbf{2}} < \infty$，称$\{\xi(t), t \in T\}$ 为**二阶矩过程**。

例：高斯过程，平稳过程

设 $\{\xi(t), t \in T\}$ 为实二阶矩过程，有：

1. $E|\xi + \eta| \leq E|\xi| + E|\eta|$.
2. $|E\xi\eta| \leq E|\xi\eta|$; $\eta = 1, -1$ 时，$|E\xi| \leq E|\xi|$.
3. $|E\xi\eta| \leq E|\xi\eta|$[1] $\leq \sqrt{E|\xi|^2 E|\eta|^2}$;   **Cauchy-Schwartz(CS)不等式**
   证明: 对任意t, $u(t) = E(t\xi - \eta)^2 = t^2 E\xi^2 - 2tE\xi\eta + E\eta^2 \ldots$
4. 若$\{\xi(t), t \in T\}$为**复过程**，有$|E\xi\bar{\eta}| \leq E|\xi\bar{\eta}| \leq \sqrt{E|\xi|^2 E|\bar{\eta}|^2}$;
   $\eta = 1$ 时，$|E\xi| \leq \sqrt{E|\xi|^2}$. **二阶矩控制一阶矩！**
5. 二阶矩过程: $\mathbf{E}|\xi(\mathbf{t})|^{\mathbf{2}} = \mathbf{R}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) < \infty \Leftrightarrow$ **期望和方差都存在**；

[1] $E|\xi\eta| = |E|\xi\eta||$

4 $g(x)$ 下凸连续函数，$E|\xi| < \infty$，则 $g(E\xi) \leq E\, g(\xi)$.

Jensen不等式

令 $g(x) = |x|$，得2中 $\eta = 1$ 情形。
令 $g(x) = x^2$，得3中 $\eta = 1$ 情形。

5 $\sqrt{E|\xi+\eta|^2} \leq \sqrt{E|\xi|^2} + \sqrt{E|\eta|^2}$.　　三角不等式

证明：

4 $g(x)$ 下凸连续函数，$E|\xi| < \infty$，则 $g(E\xi) \le E\, g(\xi)$.

Jensen不等式

令 $g(x) = |x|$，得2中 $\eta = 1$ 情形。
令 $g(x) = x^2$，得3中 $\eta = 1$ 情形。

5 $\sqrt{E|\xi+\eta|^2} \le \sqrt{E|\xi|^2} + \sqrt{E|\eta|^2}$. **三角不等式**

证明：

$$\begin{aligned} E|\xi+\eta|^2 &= E\xi\bar{\xi} + E\xi\bar{\eta} + E\bar{\xi}\eta + E\eta\bar{\eta} \\ &\le E|\xi|^2 + 2E|\xi\eta| + E|\eta|^2 \\ &\le E|\xi|^2 + 2\sqrt{E|\xi|^2 E|\eta|^2} + E|\eta|^2 \\ &= \left(\sqrt{E|\xi|^2} + \sqrt{E|\eta|^2}\right)^2 \end{aligned}$$

设 $\{\xi(t), t\in T\}$ 为**复二阶矩过程**。
回顾 $\xi \triangleq \zeta + j\eta$, $|\xi|^2 = \xi\bar{\xi} = \zeta^2 + \eta^2$.

定理1： 二阶矩过程的均值、相关函数、方差、协方差存均在。
证明：由 CS 不等式即得。

$$\begin{aligned} & |E\xi|, \quad |R(\xi_1,\xi_2)| = |E\xi_1\overline{\xi_2}|, \\ D\xi \quad = \quad & E|\xi-\mu_\xi|^2 = E\xi\bar{\xi} - \mu_\xi\overline{\mu_\xi} = E|\xi|^2 - |\mu_\xi|^2, \\ & |C(\xi_1,\xi_2)| \ = \ |E(\xi_1-\mu_1)\overline{(\xi_2-\mu_2)}|. \end{aligned}$$

定理2： 设 $R(t_1,t_2)$ 为相关函数，则

$$\overline{R(t_1,t_2)} = R(t_2,t_1), \qquad \text{(Hermit性)}.$$

若$\xi(t)$为实过程，则 $R(t_1,t_2)=R(t_2,t_1)$ 为二元对称实函数。

定理3： $R(t_1,t_2)$具有**非负定性**，$\forall t_1,\ldots,t_n\in T,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$

则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda_k R(t_k,t_m)\overline{\lambda_m}\geq 0$

证明：由于

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \sum_k\sum_m \lambda_k E\xi(t_k)\overline{\xi(t_m)\lambda_m}\\ &= E\left(\sum_k\sum_m\lambda_k\xi(t_k)\overline{\lambda_m\xi(t_m)}\right)=E\left|\sum_k\lambda_k\xi(t_k)\right|^2\end{aligned}$$

定理3的矩阵形式：

令$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$，　$R=(R(t_k,t_m))_{n\times n}$，　有$\Lambda^T R\overline{\Lambda}\geq 0$,

定理3：$R(t_1,t_2)$具有**非负定性**，$\forall t_1,\ldots,t_n \in T$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$

则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda_k R(t_k,t_m)\overline{\lambda_m} \geq 0$

证明：由于

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= \sum_k\sum_m \lambda_k E\xi(t_k)\overline{\xi(t_m)\lambda_m} \\
&= E\left(\sum_k\sum_m \lambda_k\xi(t_k)\overline{\lambda_m\xi(t_m)}\right) = E\left|\sum_k \lambda_k\xi(t_k)\right|^2
\end{aligned}
$$

定理3的矩阵形式：

令$\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$, $\quad R = (R(t_k,t_m))_{n\times n}$, $\quad$ 有$\Lambda^T R\overline{\Lambda} \geq 0$,

则$\Lambda^T R\overline{\Lambda} = \overline{(\Lambda^T R\overline{\Lambda})^T} = \Lambda^T\overline{R^T}\overline{\Lambda}$，故 $R = \overline{R^T}$ $\quad$ 定理2.

例1：正弦波过程 $\xi(t) = A\cos(\omega t+\theta)$，$\theta$ 均匀分布。

例2：$\xi(t) = \sum\limits_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}$, $\quad \eta_k \sim N(0,\sigma_k^2)$.

类似于相关函数，对于协方差函数有：$\{\xi(t)\}$ 实，二阶矩

- $C(t_1,t_2)=C(t_2,t_1)$
- 非负定性 $\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\lambda_k C(t_k,t_m)\lambda_m \ge 0$

定义+CS不等式可证明：

$$|R(t_1,t_2)|^2 \le R(t_1,t_1)\cdot R(t_2,t_2)$$
$$|C(t_1,t_2)|^2 \le C(t_1,t_1)\cdot C(t_2,t_2)=\sigma_\xi^2(t_1)\cdot\sigma_\xi^2(t_2)$$ [2]

[2] 自协方差函数： $C(t_1,t_2)=E\left[\xi(t_1)-\mu(t_1)\right]\left[\xi(t_2)-\mu(t_2)\right]$

类似于相关函数，对于协方差函数有：$\{\xi(t)\}$ 实，二阶矩

- $C(t_1, t_2) = C(t_2, t_1)$
- 非负定性 $\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \lambda_k C(t_k, t_m)\lambda_m \geq 0$

定义+CS不等式可证明：

$$|R(t_1, t_2)|^2 \leq R(t_1, t_1) \cdot R(t_2, t_2)$$
$$|C(t_1, t_2)|^2 \leq C(t_1, t_1) \cdot C(t_2, t_2) = \sigma_\xi^2(t_1) \cdot \sigma_\xi^2(t_2)$$ [2]

$\{\xi(t), t \in T\}$ 二阶矩过程，$E\,\xi(t)$ 存在且为t的确定性函数。
令 $\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - E\,\xi(t)$, 则 $\tilde{\xi}(t)$ 是0均值二阶矩过程。

[2] 自协方差函数: $C(t_1, t_2) = E[\xi(t_1) - \mu(t_1)][\xi(t_2) - \mu(t_2)]$

均方极限

定义： $H \triangleq \{\xi : E|\xi|^2 < \infty\}$ 二阶矩存在的随机变量全体。

性质：

1 H 为线性空间，即 $\forall \xi, \eta \in H$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a\xi + b\eta \in H$.
证：由三角不等式可得。

2 令 $\|\xi\| \triangleq \sqrt{E|\xi|^2}$，则 $\|\cdot\|$ 满足：

- $\|\xi\| \geq 0$ 且 $\|\xi\| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0,\ a.e.$（几乎处处）
- $\|c\xi\| = |c|\|\xi\|$，c 常数
- $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$，三角不等式
即 H 为赋范线性空间，$\|\cdot\|$ 为**范数**。Banach空间（完备）

3 $|E\xi| \leq E|\xi| \leq \|\xi\| = \sqrt{E|\xi|^2}$

4 令$d(\xi,\eta) \triangleq \|\xi-\eta\| = \sqrt{E|\xi-\eta|^2}$，则

- $d(\xi,\eta) \geq 0$ 且 $d(\xi,\eta) = 0 \Leftrightarrow \xi = \eta,\ a.e.$
- $d(\xi,\eta) = d(\eta,\xi)$
- $d(\xi,\zeta) \leq d(\xi,\eta) + d(\eta,\zeta)$ 三角不等式
  即 $d(\cdot,\cdot)$ 为 H 中的距离，H 为距离空间。

5 令$(\xi,\eta) \triangleq E\xi\overline{\eta}$，则

- $(\eta,\xi) = \overline{(\xi,\eta)}$
- $(c\xi,\eta) = c(\xi,\eta)$，常数
- $(\xi+\eta,\zeta) = (\xi,\zeta) + (\eta,\zeta)$
- $(\xi,\xi) = E|\xi|^2 \geq 0$ 且 $(\xi,\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0,\ a.e.$
  即 (ξ,η) 为**内积**，H 为内积空间。Hilbert空间（完备）

随机变量的收敛性

- 均方收敛：$E|\xi_n|^2 < \infty$，若 $\exists\, \xi$, $E|\xi|^2 < \infty$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n - \xi|^2 = 0$，称$\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi$.
- 依概率收敛：（弱收敛）
  若 $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0$ ，称 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.
- 依分布收敛：$F_n(x)$ 分布，若 $\exists\, F(x)$，使得在$F(x)$上的每个连续点，$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$，称 $\xi_n \xrightarrow{F} \xi$.
- 概率1收敛：强收敛，几乎处处收敛，a.e., a.s.
  若 $\exists\, \xi$，使$P\{\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi\} = 1$，称 $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi$.

均方收敛

定义： $\{\xi_n\}, n=1,2,\ldots, \xi_n \in H$，即$E|\xi_n|^2<\infty$，
若存在$\xi \in H$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n-\xi|^2=0$，即$\lim_{n\to\infty}\|\xi_n-\xi\|=0$
称$\{\xi_n\}$**均方收敛**于ξ，记为$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$，或$\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi$.

$$\left.\begin{array}{r}\text{均方收敛}\\ \text{概率1收敛}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{依概率收敛} \Rightarrow \text{依分布收敛.}$$

均方收敛

定义：$\{\xi_n\}, n = 1, 2, \ldots, \xi_n \in H$，即$E|\xi_n|^2 < \infty$，
若存在$\xi \in H$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n - \xi|^2 = 0$，即$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$
称$\{\xi_n\}$**均方收敛**于ξ，记为$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m}}\, \xi_n = \xi$，或$\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi$.

$$\left.\begin{array}{r}\text{均方收敛}\\ \text{概率1收敛}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{依概率收敛} \Rightarrow \text{依分布收敛.}$$

只证明m.s.$\Rightarrow$ P:
由Markov不等式：$P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^2}{\varepsilon^2}$. 可证！

均方收敛

定义： $\{\xi_n\}, n = 1, 2, \ldots, \xi_n \in H$，即$E|\xi_n|^2 < \infty$,
若存在$\xi \in H$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n - \xi|^2 = 0$，即$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$
称$\{\xi_n\}$**均方收敛**于ξ，记为$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, \xi_n = \xi$，或 $\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi$.

$$\left.\begin{array}{r}\text{均方收敛} \\ \text{概率1收敛}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{依概率收敛} \Rightarrow \text{依分布收敛}.$$

只证明m.s.$\Rightarrow$ P:
由Markov不等式：$P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^2}{\varepsilon^2}$. 可证！

注：一般二阶矩存在时，均方收敛比概率1收敛弱。

命题1: $\xi_n \xrightarrow{m\cdot s} \xi, \xi_n \xrightarrow{\text{a.e.}} \eta$, 则: $\xi = \eta$, a.e.

定理1：柯西准则

$\{\xi_n\}$为Cauchy列（即 $\xi_n \in H$ 且 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E|\xi_m - \xi_n|^2 = 0$, i.e., $\lim_{m,n\to\infty} \|\xi_m - \xi_n\| = 0$）

当且仅当存在 $\xi \in H$，使 $\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi$.

极限ξ在均方意义下和概率1意义下都是唯一的，即 H 完备。

定理1：柯西准则

$\{\xi_n\}$为Cauchy列（即 $\xi_n \in H$ 且 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E|\xi_m - \xi_n|^2 = 0$, i.e., $\lim_{m,n\to\infty} \|\xi_m - \xi_n\| = 0$）

当且仅当存在 $\xi \in H$，使 $\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi$.

极限ξ在均方意义下和概率1意义下都是唯一的，即 H 完备。

证："$\Leftarrow$" $\|\xi_m - \xi_n\| \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|\xi_m - \xi\|} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|\xi - \xi_n\|}$ 三角不等式

"$\Rightarrow$" Chebyshev不等式，$P\{|\xi| \ge \varepsilon\} \le \frac{E|\xi|^2}{\varepsilon^2}$.

利用Fatou引理和测度论的知识（略）。

唯一性证明：$\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi, \xi_n \xrightarrow{m.s.} \eta$, 则 $\xi = \eta$, $m.s., a.e.$

$\|\xi - \eta\| \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|\xi - \xi_n\|} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|\xi_n - \eta\|}$

故$\|\xi - \eta\| = 0$，则 $\xi = \eta$, $, a.e., m.s.$

定理2：设$\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{m.s.} \eta$，则：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n = E\xi$ 极限与积分可互换，均值收敛
2. $\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n|^2 = E|\xi|^2,\ i.e., \|\xi_n\| \to \|\xi\|$ 范数收敛
3. $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{m.s.} a\xi + b\eta$ 其中 a, b 常数，线性
4. $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\xi_m\overline{\eta_n} = E\xi\overline{\eta},\ i.e., (\xi_m, \eta_n \to (\xi, \eta))$ 内积收敛

定理2：设$\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{m.s.} \eta$，则：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n = E\xi$ 极限与积分可互换，均值收敛
2. $\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n|^2 = E|\xi|^2$, $i.e., \|\xi_n\| \to \|\xi\|$ 范数收敛
3. $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{m.s.} a\xi + b\eta$ 其中 a, b 常数，线性
4. $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\xi_m\overline{\eta_n} = E\xi\overline{\eta}$, $i.e., (\xi_m, \eta_n \to (\xi, \eta))$ 内积收敛

证明：只证明1. 由于

$$|E\xi_n - E\xi| \le E\left|\xi_n - \xi\right| \le \sqrt{E\left|\xi_n - \xi\right|^2} \to 0,\ n \to \infty$$

2-4的证明可参考陆大金教材p256-258：定理一、二、三；
主要证明技巧就是CS不等式+三角不等式

定理3：Loéve准则 $\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi \Leftrightarrow \lim\limits_{m,n\to\infty} E\xi_m\overline{\xi_n} = E|\xi|^2$,

即，$\lim\limits_{m,n\to\infty}(\xi_m, \xi_n) = c$ 常数，

证："$\Rightarrow$"

$$\begin{aligned} & |E\xi_m\overline{\xi_n} - E\xi\overline{\xi}| \leq E|\xi_m\overline{\xi_n} - \xi\overline{\xi}| \\ \leq\ & E|\xi_m(\overline{\xi_n} - \overline{\xi})| + E|(\xi_m - \xi)\overline{\xi}| \\ \leq\ & \|\xi_m\| \cdot \|\xi_n - \xi\| + \|\xi_m - \xi\| \cdot \|\xi\| \ \to 0. \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$"

$$\begin{aligned} & \|\xi_m - \xi_n\|^2 = E|\xi_m - \xi_n|^2 \\ =\ & E(\xi_m - \xi_n)\overline{(\xi_m - \xi_n)} \\ =\ & \underset{\displaystyle E|\xi|^2}{\underset{\downarrow}{E\xi_m\overline{\xi_m}}} - \underset{\displaystyle E|\xi|^2}{\underset{\downarrow}{E\xi_m\overline{\xi_n}}} - \underset{\displaystyle E|\xi|^2}{\underset{\downarrow}{E\xi_n\overline{\xi_m}}} + \underset{\displaystyle E|\xi|^2}{\underset{\downarrow}{E\xi_n\overline{\xi_n}}}. \end{aligned}$$

由柯西准则可证。

例： $\{\xi_n,\ n=0,\pm1,\ldots\}$, $E\xi_n=0$, $E\xi_n\bar{\xi}_m=\delta_{n,m}\sigma^2$.
令

$$S_n(N)=\sum_{k=-N}^{N}a_k\xi_{n-k},\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2<\infty.$$

证明：$S_n(N)$ 当 $N\to\infty$ 时均方收敛，两种方法：

柯西准则:

$$E\left|S_n(M)-S_n(N)\right|^2=E\left(\sum_{|k|=N+1}^{M}a_k\xi_{n-k}\sum_{|i|=N+1}^{M}\overline{a_i\xi_{n-i}}\right)$$

$$=\sum_{|k|=N+1}^{M}\sum_{|i|=N+1}^{M}a_k\bar{a}_iE\left(\xi_{n-k}\bar{\xi}_{n-i}\right)=\sum_{|k|=N+1}^{M}\left|a_k\right|^2\sigma^2$$

洛维准则:

$$ES_n(M)\overline{S_n(N)}=E\left(\sum_{k=-M}^{M}a_k\xi_{n-k}\sum_{i=-N}^{N}\overline{a_i\xi_{n-i}}\right)$$

$$=\sum_{k=-M}^{M}\sum_{i=-N}^{N}a_k\bar{a}_iE\left(\xi_{n-k}\overline{\xi_{n-i}}\right)=\sum_{k=-N}^{N}\left|a_k\right|^2\sigma^2$$

均方连续

定义： $\{\xi(t), t \in T\}$ 二阶矩过程，固定 $t_0 \in T$，
若$\xi(t_0+h) \xrightarrow{m.s.} \xi(t_0)$，i.e.,
$\lim\limits_{h\to 0} E|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)\| = 0$
称 $\{\xi(t)\}$ 在 $t=t_0$ 处**均方连续**. 若 $\forall t_0 \in T$, $\{\xi(t)\}$ 在 t_0 处连续，
称 $\{\xi(t)\}$ 具有均方连续性。

定理3： $\{\xi(t)\}$ 在 t_0 均方连续 $\Leftrightarrow$ $R(s,t)$在 (t_0,t_0) 处连续。

证：均方连续：$E|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2 \to 0, \ (h\to 0)$
(t_0,t_0)连续：$|R(t_0+h,t_0+k)-R(t_0,t_0)| \to 0, \ (h,k\to 0)$

$$
\begin{aligned}
(\Rightarrow) \qquad & |R(t_0+h,t_0+k)-R(t_0,t_0)| \\
\le \ & |R(t_0+h,t_0+k)-R(t_0+h,t_0)| + |R(t_0+h,t_0)-R(t_0,t_0)| \\
\le \ & E\left|\overline{\xi(t_0+h)}\right|\left|\xi(t_0+k)-\xi(t_0)\right| + E\left|\overline{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}\right|\left|\xi(t_0)\right| \\
\le \ & \sqrt{E|\xi(t_0+h)|^2 E|\xi(t_0+k)-\xi(t_0)|^2} + \sqrt{E|\xi(t_0)|^2 E|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2} \to 0 \\
(\Leftarrow) \qquad & E|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2 \\
= \ & R(t_0+h,t_0+h)-R(t_0+h,t_0)-R(t_0,t_0+h)+R(t_0,t_0) \to 0
\end{aligned}
$$

推论1：$\{\xi(t), t \in T\}$ 具有均方连续性，
$iff.\ R(s,t)$ 在 $\{(t,t), t \in T\}$ 上二元连续。（对角线）

推论2：$R(s,t)$ 在 $\{(t,t), t \in T\}$上二元连续，$iff.\ R(s,t)$ 在 $T \times T$ 上连续。（方形区域）

证明：只需要证明(⇒): 由推论1知$\xi(t)$，$\xi(s)$ 均方连续，
再由定理2:(4)可知内积收敛，由数列收敛可推函数收敛，故

$$\lim_{h,k\to 0} R(s+h, t+k) = \lim_{h,k\to 0} E[\xi(s+h)\overline{\xi(t+k)}] = E[\xi(s)\overline{\xi(t)}] = R(s,t)$$

定理4：二阶矩$\{\xi(t), t \in T\}$均方连续，则

$$\lim_{h\to 0} E[\xi(t+h)] = E\xi(t).$$

注：$\lim$ 与 E 可交换次序。

证明：由定理2:(1)可知收敛列与积分可交换，由数列收敛可推函数收敛。

均方导数

若 $\{\xi_t, t \in T\}$ 的样本函数连续且导数存在，
则 $\xi'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}$ 是其导数的样本函数。

该条件过于严格，一般研究均方意义下的导数更合适。

定义： 二阶矩过程 $\{\xi(t), t \in T\}$, $\{\eta(t), t \in T\}$,
若 $\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h} \xrightarrow{m.s.} \eta(t_0)$, 称 $\{\xi(t)\}$ 在 t_0 处均方可导且 $\eta(t_0)$ 称为其均方导数。若 $\forall t \in T, \{\xi(t)\}$ 均方可导且均方导数为 $\eta(t)$,
称 $\{\xi(t)\}$ 在 T 上均方可导，$\{\eta(t)\}$ 为其在 T 上的均方导数。

定理1： 二阶矩过程 $\{\xi(t), t \in T\}$，相关函数 $R(t,s)$，

$\xi(t)$ 在$t_0 \in T$ 处均方导数存在 iff.

$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t \partial s}$ 在 (t_0, t_0) 附近存在且在 (t_0, t_0) 处连续。

定理2： $\{\xi(t), t \in T\}, \{\eta(t)\}$均方可导，$f(t)$确定性函数，

- 均方可导$\Rightarrow$均方连续.
- a, b常数，$[a\xi(t) + b\eta(t)]' = a\xi'(t) + b\eta'(t)$.
- $[f(t) \cdot \xi(t)]' = f'(t)\xi(t) + f(t)\xi'(t)$.
- $E\xi'(t) = [E\xi(t)]'$.
- $R_{\xi'\xi'}(s,t) = \frac{\partial^2 R(s,t)}{\partial s \partial t}$.

高阶导数

类似的，若 $\xi(t)$ 的相关函数有 $2n$ 阶导数，且在对角线 $\{(t,t),t\in T\}$ 连续，则 $\{\xi(t),t\in T\}$ 有 n 阶均方导数 $\xi^{(m)}(t)$，且有：

- $E\xi^{(n)}(t)=[E\xi(t)]^{(n)}$.
- $R_{\xi^{(n)}\xi^{(n)}}(t,s)=\frac{\partial^{2n}R(t,s)}{\partial t^n\partial s^n}$.
- $R_{\xi^{(n)}\xi^{(m)}}(t,s)=E\xi^{(n)}(t)\overline{\xi^{(m)}(s)}=\frac{\partial^{m+n}R(t,s)}{\partial t^n\partial s^m}$.

$\{\xi(t),t\in T\},\{\eta(t),t\in T\}$ 二阶矩，若相应均方导数存在，则

- $R_{\xi'\eta}(t,s)=\frac{\partial R_{\xi\eta}(t,s)}{\partial t}$ $\quad R_{\xi\eta}(t,s)\triangleq E\xi(t)\overline{\eta(s)}$.
- 推广：

$$R_{\xi^{(n)}\eta^{(m)}}(t,s)=\frac{\partial^{n+m}R_{\xi\eta}(t,s)}{\partial t^n\partial s^m}.$$

均方积分

定义： $\{\xi(t), t\in T\}$ 二阶矩，$T=[a,b]$, $f(t)$, $t\in T$ 确定性函数；$\forall$ 分点 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b, \Delta t_k=t_k-t_{k-1}$，
(均方极限存在时，a,b可取无穷)
若 $\forall u_k\in[t_k,t_{k-1}]$，存在 η 使得

$$\lim_{\max\Delta t_k\to 0} E|\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\xi(u_k)\Delta t_k-\eta|^2=0,$$

则称 $\eta\triangleq\int_a^b f(t)\xi(t)\,dt$ 为 $f(t)\xi(t)$ 在 $[a,b]$ 上的**均方积分**。
注：η 是**随机变量**，若$f(t)=1$，此时η是$\{\xi(t),t\in T\}$ 的均方积分。

令$h(t,\tau)$，$t\in[a,b]$ 为确定性函数，τ参数，

$$\sum_{k=1}^{n} h(u_k,\tau)\xi(u_k)\Delta t_k \xrightarrow{m.s.} \eta(\tau), \quad 当 \max\Delta t_k\to 0时.$$

注：$\eta(\tau)\triangleq\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)\,dt$ 为 $h(t,\tau)\xi(t)$ 在 $[a,b]$ 上的均方积分，是一个**随机过程**

均方可积准则

定理： $f(t)\xi(t)$ 均方可积 $\Leftrightarrow$ $\int_a^b\int_a^b f(t)\overline{f(u)}R(t,u)\,dtdu$ 存在。

证：分割 $S_n \triangleq \sum_{i=1}^n f(t_i')\xi(t_i')\Delta t_i,\ n\to\infty \Leftrightarrow \Delta t_i \to 0$

另一分割 $S_m \triangleq \sum_{k=1}^m f(u_k')\xi(u_k')\Delta u_k$

Loéve准则：S_n均方收敛$\Leftrightarrow ES_n\overline{S_m}$普通极限存在。

$$
\begin{aligned}
ES_n\overline{S_m} &= E\sum_{i=1}^n f(t_i')\xi(t_i')\Delta t_i\overline{\sum_{k=1}^m f(u_k')\xi(u_k')\Delta u_k}\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^m f(t_i')\overline{f(u_k')}\Delta t_i\Delta u_k E\xi(t_i')\overline{\xi(u_k')}.
\end{aligned}
$$

注：$f(t)$可换为$h(t,\tau)$.

注：$a\to+\infty$ 或$b\to-\infty$，均方可积准则仍然成立。

均方积分性质

1. $\int_a^b [\alpha\xi(t)+\beta\eta(t)]\,dt = \alpha\int_a^b \xi(t)\,dt + \beta\int_a^b \eta(t)\,dt.$ 线性
2. $\int_a^c \xi(t)\,dt = \int_a^b \xi(t)\,dt + \int_b^c \xi\,dt,\ a<b<c.$
3. $\xi(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方连续，则 $\xi(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方可积。
   设 $\eta(t) \triangleq \int_a^t \xi(u)\,du,\ a\le t\le b,$
   则 $\eta(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方连续、均方可导，且$\eta'(t)=\xi(t).$
   推论： $\xi(t)$ 导数连续，则 $\int_a^b \xi'(t)\,dt = \xi(b)-\xi(a).$
4. $E\int_a^b f(t)\xi(t)\,dt = \int_a^b f(t)E\xi(t)dt.$

均方积分性质

5 $\{\xi(t), t \in [a,b]\}$均方可积，$\eta(t) = \int_a^t \xi(u)\,du.$

$\{\eta(t), t \in [a,b]\}$二阶矩过程

$$\begin{aligned} R_{\eta\eta}(t_1,t_2) &= E\int_a^{t_1} \xi(u)\overline{\int_a^{t_2} \xi(v)\,dv} \\ &= \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} E\xi(u)\overline{\xi(v)}\,dudv \\ &= \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} R_{\xi\xi}(u,v)\,dudv. \end{aligned}$$

同理，$\eta(\tau) \triangleq \int_a^b h(t,\tau)\xi(t)\,dt$，二阶矩过程

$R_{\eta\eta}(\tau_1,\tau_2) = \int_a^b\int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}R_{\xi\xi}(t,u)\,dtdu.$

均方积分性质

6 $\| \int_a^b \xi(u)\, du\| \leq \int_a^b \|\xi(u)\|\, du$, i.e.,
$\sqrt{E| \int_a^b \xi(u)\, du|^2} \leq \int_a^b \sqrt{E|\xi(u)|^2}\, du$.

证:

$$
\begin{aligned}
左^2 &= E\int_a^b\int_a^b \xi(u)\overline{\xi(v)}\, dudv \\
&= \int_a^b\int_a^b E\xi(u)\overline{\xi(v)}\, dudv \\
&\leq \int_a^b\int_a^b \sqrt{E|\xi(u)|^2\, E|\xi(v)|^2}\, dudv \quad \text{CS不等式} \\
&= \left(\int_a^b \sqrt{E|\xi(u)|^2}\, du\right)^2 = 右^2.
\end{aligned}
$$

均方积分性质

推论：

$$E\left|\int_a^b \xi(u)\,du\right|^2 \le (b-a)\int_a^b E|\xi(u)|^2 du.$$

证：由上述6可知

$$\begin{aligned} \text{左边} &\le \left(\int_a^b \sqrt{E|\xi(u)|^2}\,du\right)^2 \\ &\le \int_a^b 1^2\,dv \cdot \int_a^b E|\xi(u)|^2 du \\ &= (b-a)\int_a^b E|\xi(u)|^2 du. \end{aligned}$$

可积函数空间的CS不等式:

内积: $(f,g)=\int f(x)g(x)dx$, 则 $|(\xi,\eta)|\le\|\xi\|\cdot\|\eta\|, \|\xi\|=\sqrt{(\xi,\xi)}$

平稳过程

严平稳过程：$\{\xi(t), t \in T\}$ 有限维分布时间平移不变，
$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau)$.

一维分布：$F_\xi(x;t) = F_\xi(x; t+\tau) = F_\xi(x)$与$t$无关
二维分布：$F_\xi(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_\xi(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1)$
仅为 $\tau = t_2 - t_1$ 的函数。

k级平稳 $\triangleq$ k维分布时间平移不变
k级平稳 $\Rightarrow$ $k-1$维平稳
严平稳 + 二阶矩 $\Rightarrow$ 宽平稳，证明？

宽平稳过程：$\{\xi(t), t \in T\}$，**二阶矩**，均值为常数，相关函数仅是 $\tau = t_2 - t_1$ 的函数（一、二阶矩为**常数**），后面讲的**平稳**一般都指**宽平稳**，是一类特殊且最重要的二阶矩过程。

高斯过程

高斯过程：$\{\xi(t), t \in T\}$ 有限维分布都是正态分布

$$f(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{t_1} \\ \vdots \\ x_{t_n} \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_{t_1} \\ \vdots \\ \mu_{t_n} \end{pmatrix}, \mu_{t_k} \triangleq E\xi(t_k) \quad \text{列向量}$$

$\mathbf{B} = (b_{k_i})_{n \times n}$　　协方差矩阵，$b_{k_i} = C(t_k, t_i) = R(t_k, t_i) - \mu_{t_k} \mu_{t_i}$.

高斯过程

例：0均值，实平稳正态过程

$$C(\tau) = R(\tau),$$

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1, x_2)\mathbf{B}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} R(0) & R(t_2 - t_1) \\ R(t_1 - t_2) & R(0) \end{pmatrix} = \sigma_\xi^2 \begin{pmatrix} 1 & k_\xi(\tau) \\ k_\xi(\tau) & 1 \end{pmatrix},$$

$$k_\xi(\tau) = \frac{R_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2}, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

对于高斯过程，宽平稳 $\Leftrightarrow$ 严平稳，证明？。

独立增量过程 正交增量过程

独立增量过程：$\forall\ t_1 < \cdots < t_n$,
$\xi(t_1), \xi(t_2)-\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ 相互独立。

平稳独立增量过程：$\forall s < t, \xi(t)-\xi(s)$ 的分布仅依赖于 $t-s$.
i.e. $\xi(t)-\xi(s)$ 与 $\xi(t-s)-\xi(0)$ 同分布。
例：泊松，维纳（布朗运动），平稳增量。

正交增量过程：二阶矩 $\{\xi(t), t \in T\}$，$t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$

$$E[\xi(t_2)-\xi(t_1)]\overline{[\xi(t_4)-\xi(t_3)]} = 0$$

定理：0 均值、二阶矩的独立增量过程必然是正交增量过程。

证：$\left.\begin{array}{c}\text{独立}\\ \text{二阶矩}\end{array}\right\} \Rightarrow E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta.$ 又因为是0 均值，得证。

定理： 随机过程 $\{\xi(t), t\in T\}$, 满足$\xi(0)=0$，$F(s)\triangleq E|\xi(s)|^2$, 则其为正交增量过程$\Leftrightarrow$：若 $s<t$, 则

$$1.R_{\xi\xi}(s,t)=F(s)\Rightarrow \text{非平稳过程},$$

$$2.E|\xi(t)-\xi(s)|^2=F(t)-F(s)\Rightarrow F(t)\ \text{单调不减}.$$

只证明$\Rightarrow$：

$$\begin{aligned}
& 1.R(s,t)=E\xi(s)\overline{\xi(t)}=E\xi(s)[\overline{\xi(t)}-\overline{\xi(s)}+\overline{\xi(s)}]\\
= \quad & E[\xi(s)-\xi(0)][\overline{\xi(t)}-\overline{\xi(s)}]+E\xi(s)\overline{\xi(s)}=E|\xi(s)|^2\\
& 2.\text{左边}=E|\xi(t)|^2-E\xi(t)\overline{\xi(s)}-E\overline{\xi(t)}\xi(s)+E|\xi(s)|^2\\
= \quad & E|\xi(t)|^2-E|\xi(s)|^2-E|\xi(s)|^2+E|\xi(s)|^2=F(t)-F(s)-F(s)+F(s)
\end{aligned}$$

例： $p=1/2$ 的无限制随机游动,

$P\{\xi_i=1\}=P\{\xi_i=-1\}=\frac{1}{2}$, $\quad \eta_0=0,\ \eta_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, 则

$E\eta_n=E\sum_{i=1}^n\xi_i=0,\ E\eta_m(\eta_n-\eta_m)=E\eta_m\cdot E(\eta_n-\eta_m)=0,\ m<n,$

$$\Rightarrow E\left|\eta_n-\eta_m\right|^2=F(n)-F(m)$$

$$\Rightarrow R(m,n)=E\eta_m\eta_n=E\eta_m^2=m,\quad m<n.$$

故为独立增量过程，并具有正交增量，非平稳过程。

宽平衡的性质和例子

性质： $\{\xi(t), t \in T\}$ 宽平稳过程，μ_ξ 为均值，则：

1. $R(t_2 - t_1) = \overline{R(t_1 - t_2)}$ 或 $R(\tau) = \overline{R(-\tau)}$.
   对于实过程，$R(\tau) = R(-\tau)$ 为偶函数.
2. $R(0) \geq |\mu_\xi|^2$, $\Leftarrow$ 方差 $D\xi(t)$ 非负.
3. $R(0) \geq |R(\tau)|$, $C(0) \geq |C(\tau)|$. CS不等式
4. $R(\tau)$ 具有非负定性：

   $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$, $\mathbf{R} = (R_{ij})_{n\times n}$, $R_{ij} = R(t_i, t_j) = R(t_j - t_i)$,

   $\Lambda^T \mathbf{R} \overline{\Lambda} \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{R}$ 具有非负定性 $\Leftrightarrow\ R(\tau)$ 具有非负定性.

例：证明以下是宽平稳过程

1. 热噪声（白噪声）
   观察取样为 $\{\xi(n), n=0,\pm1,\dots\}$, 该随机序列满足
   i). $\xi(n)$ 相互独立; ii). $\xi(n)\sim N(0,\sigma^2)$.

2. 推广：条件i),ii)减弱为
   $E\xi_n=0,\ E|\xi_n|^2=\sigma^2,\ E\xi_n\overline{\xi_m}=\delta_{n,m}\cdot\sigma^2.$

3. 滑动平均. 设 $\sigma=1, \zeta(n)=\sum\limits_{k=0}^{s}a_k\xi_{n-k}$, a_k 常数.

   证明：

   $$R(n,n+m)=E\zeta(n)\overline{\zeta(n+m)}=\sum_k\sum_i a_k\overline{a_l}E\xi_{n-k}\overline{\xi_{n+m-l}}=\sum_k a_k\overline{a_{m+k}}$$

4. $\{\xi_n, n\geq1\}$, $E\xi_n=0$, $E\xi_n\overline{\xi_m}=0\ (n\neq m)$,
   $\sum_{k=1}^{\infty}E|\xi_k|^2<\infty$. $\{\lambda_k, k\geq1\}$ 常数串，$\eta(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k e^{j\lambda_k t}$.

   证明:

   $$R(t,t+\tau)=E\eta(t)\overline{\eta(t+\tau)}=\sum_k\sum_i e^{j\lambda_k t}e^{-j\lambda_i(t+\tau)}E\xi_k\bar{\xi_l}=\sum_k e^{-j\lambda_k\tau}E\,|\xi_k|^2$$

宽平稳过程的均方分析

定理：$\{\xi(t), t \in R\}$ 宽平稳，则以下条件等价：

1. $\xi(t)$ 均方连续
2. $\xi(t)$ 在 $t=0$ 处均方连续
3. $R(\tau)$ 连续
4. $R(\tau)$ 在 $t=0$ 处连续

证：1 $\Leftrightarrow$ 2：因为$E|\xi(t+h)-\xi(t)|^2 = E|\xi(h)-\xi(0)|^2$
由二阶矩过程的连续性证明知：
1 $\Rightarrow$ 3：

$$
\begin{aligned}
|R(h+\tau)-R(\tau)| &= |E\xi(0)(\overline{\xi(h+\tau)-\xi(\tau)})| \\
&\leq E|\xi(0)||\overline{\xi(h+\tau)-\xi(\tau)}| \\
&\leq \sqrt{E|\xi(0)|^2 E|\xi(h+\tau)-\xi(\tau)|^2} \text{ CS不等式}
\end{aligned}
$$

3 $\Rightarrow$ 4：显然
1 $\Leftrightarrow$ $R(t_1, t_2)$ 连续$\Leftrightarrow$ 4.

定理： $\{\xi(t)\}$ 宽平稳，均方可导，iff $R'(0)$ 与$R''(0)$ 存在。

性质： $\{\xi(t)\}$ 平稳可导，则 $\xi'(t)$ 仍平稳，而且

$$E\xi'(t) = 0, \quad R_{\xi'\xi'}(\tau) = -R''_{\xi\xi}(\tau)$$

性质：

$$R_{\xi^{(n)}\xi^{(m)}}(\tau) = (-1)^m \frac{d^{m+n}}{d\tau^{m+n}} R(\tau)$$

Taylor展开：
定理： $\{\xi(t)\}$ 宽平稳，若 $R(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 点解析且可展成Taylor级数 $R(\tau) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} R^{(n)}(0)\frac{\tau^n}{n!}$，则 $\{\xi(t)\}$ 均方解析，并可作Taylor展开。

$$\xi(t+\tau) \overset{m.s.}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \xi^n(t)\frac{\tau^n}{n!}$$

各态历经性（均方遍历性）

计算数字特征：
大量重复试验得到多个样本函数，从而估计其均值和方差。

Problem: 能否通过一次试验（即一个样本函数）得到 $\{\xi(t)\}$ 的均值和方差？

强大数定律：ξ_n 独立同分布，则 $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n} \to E\xi$, m.s., a.e.

随机序列 $\{\xi_n\}, n \geq 1$, 可以证明：若 $\{\xi_n\}$ 平稳，则其时间平均 $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}$ 均方收敛于随机变量 η. 若 $\eta = E\xi_n$ 恰为常数，则 Problem 中的均值即可求出。

定义： $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ 均方连续平稳过程

$$\text{时间平均} \triangleq \langle \xi(t) \rangle \triangleq \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi(t)\,dt.$$

若 $\langle \xi(t) \rangle = E\xi(t)$，称**均值具有遍历性**。

$$\text{时间相关函数} \triangleq \langle \xi(t)\overline{\xi(t+\tau)} \rangle \triangleq \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-T}^{T} \xi(t)\overline{\xi(t+\tau)}\,dt$$

若 $\langle \xi(t)\overline{\xi(t+\tau)} \rangle = R(\tau)$，称**相关函数具有遍历性**。

$$\{\xi(t)\} \text{ 遍历 } \Leftrightarrow \text{ 均值和相关函数遍历.}$$

例：$\xi(t) = \eta$. No 非退化随机变量不是常数

例： 正弦波过程$\xi(t)=A\cos(wt+\theta)$, $\theta\sim(-\pi,\pi)$ 均匀分布，验证其各态历经性

解:

$\langle\xi(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(\omega t+\theta)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{A\sin\omega T\cos\theta}{\omega T}=0$

$$\langle\xi(t)\overline{\xi(t+\tau)}\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A^2\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega t+\omega\tau+\theta)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{A^2}{2}[\cos(2\omega t+\omega\tau+2\theta)+\cos(\omega\tau)]dt=\frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

$$\mu_\xi(t)=E\xi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A\cos(\omega t+\theta)d\theta=\frac{A}{2\pi}\sin(\theta+\omega t)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$R_\xi(\tau)=E\xi(t)\overline{\xi(t+\tau)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A^2\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega t+\omega\tau+\theta)d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(2\omega t+\omega\tau+2\theta)+\cos(\omega\tau)]d\theta=\frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

故$\mu_\xi(t)=E\{\xi(t)\}=\langle\xi(t)\rangle$, $R_\xi(\tau)=\langle\xi(t)\overline{\xi(t+\tau)}\rangle$

因此随机相位正弦波过程具有各态历经性。

唯一性定理：

$\Pr\{\xi=0\}=1$, 即 $\xi=0$, $a.e.$ $\Leftrightarrow E|\xi|=0 \Leftrightarrow E|\xi|^2=0$.

证："$\Rightarrow$" 仅以 $E|\xi|=0$ 为例，同理适用于 $E|\xi|^2$.

$E|\xi|=\int_{\mathbb{R}}|x|\,dF(x)=\int_{\xi=0}|x|\,dF(x)+\int_{\xi\neq 0}|x|\,dF(x)=0.$

"$\Leftarrow$" 仅以 $E|\xi|=0$ 为例，同理适用于 $E|\xi|^2$.

$0=E|\xi|=\int_{\mathbb{R}}|x|\,dF(x)\geq\int_{\xi\geq\frac{1}{n}}|x|\,dF(x)\geq\frac{1}{n}P\{|\xi|\geq\frac{1}{n}\}$,

故 $\forall n, \Pr\{|\xi|\geq\frac{1}{n}\}=0.$

所以 $P\{|\xi|\neq 0\}=P\{\xi\neq 0\}=P\{\bigcup_{n=1}^{\infty}|\xi|\geq\frac{1}{n}\}$

$\leq\sum_{n=1}^{\infty}P\{|\xi|\geq\frac{1}{n}\}=0.$ 可列可加性/联合界

推论：$\xi=c$ 常数，a.e. $\Leftrightarrow E\xi=c$ 且 $D\xi=0$.

定理：（均值遍历性判定准则）$\{\xi(t), t\in\mathbb{R}\}$ 均方连续平稳过程，则：$\xi(t)$ 的均值具有遍历性 iff

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\left[R(\tau)-|\mu_\xi|^2)\right]\,d\tau=0.$$

证：

$$\begin{aligned}
\langle\xi(t)\rangle &= \operatorname*{l.i.m}_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)\,dt \text{ 是一个随机变量}\\
E\langle\xi(t)\rangle &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\xi(t)\,dt=\mu_\xi \quad \text{平稳}\\
D\langle\xi(t)\rangle &= E|\langle\xi(t)\rangle|^2-|\mu_\xi|^2\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\,dt_1dt_2-|\mu_\xi|^2\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left[R(t_2-t_1)-|\mu_\xi|^2\right]\,dt_1dt_2.
\end{aligned}$$

证：（续）变量替换 $\tau = t_1 - t_2$, $u = t_1 + t_2$, Jacobi $= 1/2$.

$$
\begin{aligned}
D\langle \xi(t)\rangle &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\int_{|\tau|-2T}^{2T-|\tau|} \frac{1}{2}\left[R(\tau) - |\mu_\xi|^2\right] du d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right)\left[R(\tau) - |\mu_\xi|^2\right] d\tau.
\end{aligned}
$$

"$\Rightarrow$" 均值具有遍历性 $\Leftrightarrow \langle \xi(t)\rangle$ 常数 $\Rightarrow D\langle \xi(t)\rangle = 0$

"$\Leftarrow$" $E\langle \xi(t)\rangle =$ 常数，$D\langle \xi(t)\rangle = 0$

由唯一性定理知，$\langle \xi(t)\rangle$ 为常数，即均值遍历。

推论：$\{\xi(t)\}$ 为实过程时，则上述条件可简化为

$$
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{2T}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)\left[R(\tau) - \mu_\xi^2\right] d\tau = 0.
$$

参数集为 $[0,+\infty)$ 时，可变形为以下形式：

定理： $\{\xi(t), t \geq 0\}$ 均方连续平稳过程，则：

$$\langle \xi(t) \rangle \triangleq \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt \overset{a.e.}{=} \mu_\xi \quad \text{if and only if}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^T \left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\left[R(\tau)-|\mu_\xi|^2\right] = 0.$$

$\{\xi(t)\}$ 为实过程时，可简化为

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(1-\frac{\tau}{T}\right)\left[R(\tau)-\mu_\xi^2\right] = 0.$$

定理：自相关函数遍历性判定准则
$\{\xi(t), t\in\mathbb{R}\}$ 均方连续平稳过程，则 $\xi(t)$ 的自相关函数遍历 iff

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)\left[B(u)-|R(\tau)|^2\right]\,du=0,$$

其中 $B(u)=E\xi(t)\overline{\xi(t+\tau)}\ \overline{\xi(t+u)}\xi(t+u+\tau)$.

参数集为 $[0,+\infty)$ 时，

$$\langle\xi(t)\overline{\xi(t+\tau)}\rangle\ \triangleq\ \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{T}\int_0^T\xi(t)\overline{\xi(t+\tau)}\,dt\overset{a.e.}{=}R(\tau)\quad\text{iff}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|u|}{T}\right)\left[B(u)-|R(\tau)|^2\right]\,du=0.$$

（接下页）

若 $\{\xi(t)\}$ 为实过程，可进一步简化为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{T}\right)\left[B(u)-R^2(\tau)\right]\,du=0.$$

其中 $B(u)=E\xi(t)\xi(t+\tau)\xi(t+u)\xi(t+u+\tau)$.

注：工程实际中较易达到遍历性的条件。

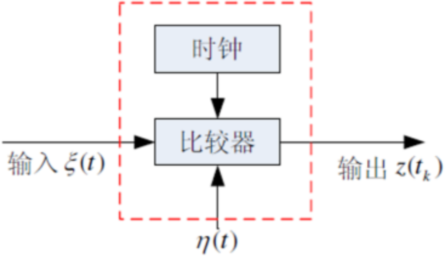
注：均方连续可用连续参数替换，离散参数过程仍有类似结果。

例： 利用遍历转换器测量遍历过程的均值。

$\xi(t),\eta(t)$ 独立遍历平稳过程，$\eta(t)$ 的一维密度为 $U(0,\alpha)$，

$\xi(t)>0$, $t_1<t_2<\cdots<t_k$ 为取样时刻。

令 $z(t_k)=\begin{cases}1 & 若\ \xi(t_k)>\eta(t_k)\\ 0 & 否则\end{cases}$，利用 $z(t_k)$ 估计 $\xi(t)$ 的均值。



遍历转换器

解： $z(t_k)$ 离散状态随机序列，状态 1, 0。

$$
\begin{aligned}
& P\{z(t_k)=1\} = P\{\xi(t_k) > \eta(t_k)\} \\
= \ & \iint_{x>y} f_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{\xi\eta}(x,y)\,dydx \\
& (\ \xi_{t_k} \text{ 与 } \eta_{t_k} \text{ 独立，故 } f_{\xi_{t_k}\eta_{t_k}}(x,y) = f_{\xi_{t_k}}(x)\cdot\frac{1}{\alpha}I_{\{0<y<\alpha\}}\ ) \\
= \ & \int_0^{+\infty}\int_0^{x} f_{\xi_{t_k}}(x)\cdot\frac{1}{\alpha}\,dydx \qquad (\ \alpha\text{充分大时，}(0,x)\subseteq(0,\alpha)\ ) \\
= \ & \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} x f_{\xi_{t_k}}(x)\,dx = \frac{E\xi(t_k)}{\alpha} = \frac{\mu_\xi}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

故欲求 μ_ξ，只需求 $\Pr\{z(t_k)=1\}$.

$z(t_k)$ 易知平稳遍历过程，故

$$E\,z(t_k) = \mathop{\mathrm{l.i.m}}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z(t_k).\ \text{离散情形}$$

由 $E\,z(t_k)$ 的定义，$E\,z(t_k) = \Pr\{z(t_k)=1\}$,

故 $\mu_\xi = \mathop{\mathrm{l.i.m}}_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n} z(t_k)$.

联合平稳

定义： $\xi(t), \eta(t)$ 平稳，其互相关函数 $R_{\xi\eta}(t, t+\tau)$ 与$R_{\eta\xi}(t, t+\tau)$ 仅为 τ 的函数，与 t 无关，则称 $\{\xi(t)\}$ 与 $\{\eta(t)\}$ **联合平稳**。

性质：

1. $R_{\eta\xi}(\tau) = \overline{R_{\xi\eta}(-\tau)}$, 实过程则 $R_{\xi\eta}(-\tau) = R_{\eta\xi}(\tau)$.
2. $|R_{\xi\eta}(\tau)|^2 \leq R_{\xi\xi}(0) \cdot R_{\eta\eta}(0)$,
   $|R_{\eta\xi}(\tau)|^2 \leq R_{\xi\xi}(0) \cdot R_{\eta\eta}(0)$.
   证明:
   $$|R_{\xi\eta}(\tau)|^2 \leq (E|\xi(t)\overline{\eta(t+\tau)}|)^2 \leq E|\xi(t)|^2 E\,|\,\overline{\eta(t+\tau)}|^2 = R_{\xi\xi}(0)R_{\eta\eta}(0)$$
3. $\xi(t) + \eta(t)$ 平稳, 证明？可推广到线性组合都平稳,

注：$\xi(t), \eta(t)$ 平稳但非联合平稳，则 $\xi(t) + \eta(t)$ 不一定平稳。