# 第四章: 平稳过程的谱分析

陈斌

Tsinghua Shenzhen International Graduate School (SIGS)

# Outline

**谱分析：**确定性信号（函数） $\Rightarrow$ 随机信号（随机过程）

**周期函数的Fourier级数：**周期为 $T$

$f(t)$, $f(t)=f(t+T)$, $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|dt<\infty$, (**绝对可积**) 则：

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_k\exp(j\omega_k t), \quad \omega_k=k\cdot\frac{2\pi}{T}, \\ \alpha_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\exp(-j\omega_k t)dt. \end{aligned}$$ **傅里叶系数**

巴塞伐等式：$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\alpha_k|^2.$

$$\frac{1}{T}\int f(t)\left[\overline{\sum\alpha_k\exp\left(j\omega_k t\right)}\right]dt=\sum\overline{\alpha_k}\frac{1}{T}\int f(t)\exp\left(-j\omega_k t\right)dt$$

**非周期函数的Fourier积分：**$[0,T]$上的函数，作周期性延拓，然后展成Fourier级数。对于非周期函数 $f(t)$, 将$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$外截掉，做周期性延拓和展开，然后令 $T\to+\infty$ （见下页）

令$F(\omega_k)=T\cdot\alpha_k$，代入$f(t)$的Fourier级数得：

$$\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{T\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}F(\omega_k)\exp(j\omega_k t) \qquad \omega_k-\omega_{k-1}=\frac{2\pi}{T}\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(\omega_k)\exp(j\omega_k t)(\omega_k-\omega_{k-1})\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\exp(j\omega t)dt.
\end{aligned}$$

$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\exp(-j\omega t)dt$ 是$f(t)$的Fourier变换。

$$\text{巴塞伐等式: }\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega.$$

总能量 $\leftrightarrow$ 能量谱密度

$$\int f(t)\frac{1}{2\pi}\int F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega dt=\frac{1}{2\pi}\int F(\omega)\int f(t)\exp(j\omega t)dtd\omega$$

$f(t)$展成Fourier积分需要绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|<\infty$.

# Fourier变换性质

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \quad \rightarrow \text{Fourier逆变换}$$
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt \quad \rightarrow \text{Fourier变换}$$ [1]

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega), \quad \text{Fourier变换对} \quad \overline{f(t)} \leftrightarrow \overline{F(-\omega)}$$

1. 对性称： $f(t) \leftrightarrow F(\omega) \;\Leftrightarrow\; F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

   证明： $$\int F(t)\exp(-j\omega t)dt = 2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int F(t)\exp[jt(-\omega)]dt$$

2. 线性： $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
3. 位移: $f(t+t_0) \leftrightarrow F(\omega)\cdot e^{j\omega t_0}$
4. 移频调制： $f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$

**例子：** $$h(t) = \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow H(\omega) = -j\cdot\mathrm{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j & w>0 \\ j & w<0 \end{cases} \tag{1}$$

[1]《信号与系统》：https://www.bilibili.com/video/BV1st411M7QE?p=89

# 卷积

**卷积：** $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

**卷积定理：**

1. $f_1(t) * f_2(t) \ \leftrightarrow \ F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
2. $f_1(t) \cdot f_2(t) \ \leftrightarrow \ \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

只证明1：

$$\iint f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \exp(-j\omega t) dt$$
$$= \ (\int f_1(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau) \cdot (\int f_2(t-\tau)\exp[-j\omega(t-\tau)]d(t-\tau))$$

**卷积性质：**

1. $f * g = g * f$
2. $(f * (g * h) = (f * g) * h,$
3. $f * (g + h) = f * g + f * h.$

# 单位脉冲函数

**$\delta$ 函数定义（单位脉冲函数）**

1. $\delta(x)=\begin{cases} 0 & x\neq 0 \\ +\infty & x=0 \end{cases}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$

**函数性质:**

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta\left(t-t_0\right)dt=f\left(t_0\right)$ 筛选性
2. $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$ 缩放性
3. $\delta(t)=\delta(-t)$ 对称性
4. $\delta(t)\leftrightarrow 1:\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\exp(-j\omega t)dt=1 & \text{Fourier 变换} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(j\omega t)d\omega=2\pi\delta(t) & \text{Fourier 逆变换} \end{cases}$
5. $f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=f(t)$

# 功率谱密度

**定义：** $S(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau, \quad \omega \triangleq 2\pi f.$

称 $S(\omega)$ 为 $\xi(t)$ 的功率谱密度, i.e., 自相关函数的功率谱密度

若$R(\tau)$**绝对可积**，则$S(f)$存在。

$$\begin{cases} \text{离散:} & \sum_k |R(k)| < \infty, & S(\omega) = \sum_k R(k)\exp(-j\omega k) \\ \text{连续:} & \int_R |R(\tau)| < \infty, & S(\omega) = \int_R R(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau \end{cases}$$

其中

$$r_k \triangleq R(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S(\omega)\cdot\exp(j\omega k)dw,$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_R S(\omega)\cdot\exp(j\omega\tau)d\omega.$$

故 $S(\omega)$ 与 $R(\tau)$ 是一对Fourier变换。

# 功率谱密度性质

1. $S(\omega) \geq 0$, 非负实函数，是必要条件！
（$R(\tau)$非负定，其Fourier变换为非负实值函数）[2]
2. 平均功率：$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S(\omega)d\omega, \quad S(0) = \int_{\mathbb{R}} R(\tau)d\tau.$

[2] $\Phi(t)$ 非负定⇒ 其Fourier变换为非负实值函数。Bochner-Khintchine 定理。

# 功率谱密度性质

1. $S(\omega) \geq 0$, 非负实函数，是必要条件!
（$R(\tau)$非负定，其Fourier变换为非负实值函数）[2]
2. 平均功率：$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S(\omega)d\omega, \quad S(0) = \int_{\mathbb{R}} R(\tau)d\tau.$
3. 若$\xi(t)$实平稳，则$S(\omega)$为偶函数。

证：由实平稳可知$R(\tau)$为偶函数

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau - j\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\sin\omega\tau d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad R(\tau)\text{偶函数} \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \quad \text{故} S(\omega) = S(-\omega).
\end{aligned}$$

[2] $\Phi(t)$ 非负定$\Rightarrow$ 其Fourier变换为非负实值函数。Bochner-Khintchine 定理。

**定理：** 若$S(\omega)$ 为偶函数$\Rightarrow R(\tau)$ 为偶函数

证明：

$$\begin{aligned} R(-\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} S(-\omega)e^{j\omega\tau}d(-\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = R(\tau) \end{aligned}$$

**例1：** 已知随机信号的自相关函数为：

$$R(\tau) = \frac{1}{2}\exp\{-\lambda|\tau|\}, \lambda > 0$$

求其功率谱密度函数？**注意条件与结论！**

解：因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\exp\{-\lambda|\tau|\}d\tau = \int_{0}^{\infty}\exp\{-\lambda\tau\}d\tau = \frac{1}{\lambda} < \infty$$

故$|R(\tau)|$**绝对可积**，可知随机信号的**功率谱密度存在**。

（续上一页：）

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\exp\{-\lambda|\tau|\}e^{-j\omega\tau}d\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}\exp\{-\lambda\tau - j\omega\tau\}d\tau + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}\exp\{\lambda\tau - j\omega\tau\}d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda + j\omega} + \frac{1}{\lambda - j\omega}\right) \\
&= \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}
\end{aligned}
$$

**Q: 求$R(\tau) = \alpha \cdot e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}$的功率谱密度函数？**

**例2：** 已知实的随机信号的自相关函数为：[3]

$$R(\tau) = a\cos(\omega_0\tau)$$

求其功率谱密度函数？

解：

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} a\cos(\omega_0\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{a}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j(\omega-\omega_0)\tau\} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j(\omega+\omega_0)\tau\} d\tau\right) \\
&= \frac{a}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right) \\
&= a\pi\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)
\end{aligned}
$$

[3] 非周期函数才需要验证绝对可积（充分条件）

# 综合运用

**例3：** 已知实的随机信号的自相关函数为：

$$R(\tau) = a^2 \cos(\omega_0 \tau) + b^2 \exp(-c|\tau|), \omega_0 > 0, c > 0$$

求其功率谱密度函数？

解：利用例1和例2的结论可得：

$$S(\omega) = a^2 \pi \left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right) + \frac{2cb^2}{c^2 + \omega^2}$$

# 逆问题：利用功率密度函数计算自相关函数和平均功率

**例4：** 已知随机信号$\{X(t), t \in (-\infty, \infty)\}$ 的功率谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}, \quad -\infty < \omega < \infty$$

求自相关函数和平均功率。

解：利用例3 的结论知：如果一个随机过程$Y(t)$ 的自相关函数为

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2}\exp\{-|\tau|\}$$

则其功率谱密度为

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

于是有

$$S_X(\omega) = (S_Y(\omega))^2$$

由Fourier 变换的性质知:

$$R_X(\tau) = R_Y(\tau) * R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\exp(-|x|)\exp(-|\tau - x|)dx$$

（续上一页：）

当$\tau \geq 0$ 时, 上式可化为

$$\begin{aligned}R_X(\tau) =& \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} \exp(x)\exp(-(\tau - x))dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{\tau} \exp(-x)\exp(-(\tau - x))dx \\ &+ \frac{1}{4}\int_{\tau}^{\infty} \exp(-x)\exp((\tau - x))dx \\ =& \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{-\tau} + \pi e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-\tau}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{-\tau} + \tau e^{-\tau}\right)\end{aligned}$$

又因为$S_X(-\omega) = S_X(\omega) \Rightarrow R_X(-\tau) = R_X(\tau)$

所以

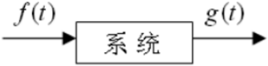
$$R_X(\tau) = \frac{1}{4}\left(e^{-|\tau|} + |\tau| e^{-|\tau|}\right)$$

其平均功率为 $R_X(0) = \frac{1}{4}$。

**课后作业：**

$$S(\omega) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{2\beta\sigma^2}{\beta^2 + \omega^2} \Rightarrow R(\tau) = \frac{\sigma^2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}\left[\alpha \cdot e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}\right]$$

# 线性系统




输入信号（函数） $f(t)$, 激励
输出信号（函数） $g(t)$, 响应

线性系统: $\rightarrow \begin{cases} \text{输入} & A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) \\ \text{输出} & A_1 g_1(t) + A_2 g_2(t) \end{cases}$

时不变系统:$\rightarrow \begin{cases} \text{输入} & f(t-t_0) \\ \text{输出} & g(t-t_0) \end{cases}$

因果性：

系统在$t_0$时刻的输出, 只与$t \le t_0$时的输入有关，因果系统

输入函数在$t<0$时为0, 称为因果信号

输入为因果信号，通过因果系统，则输出也为因果信号。

瞬时系统：系统在$t_0$时的输出仅依赖于在$t_0$时的输入。

记忆系统：系统在$t_0$时的输出仅依赖于在$[t_0-T,t_0]$时的输入。
$T$称为记忆时间。

$$h(t,\tau) \triangleq \text{系统}\tau\text{时在输入端加以冲激信号}\delta(t-\tau)$$
$$\text{而在 } t \text{ 时在输出端的响应}$$

线性时不变系统：$h(t,\tau)=h(t-\tau)$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)f(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

$\downarrow$ 线性　　$\downarrow$ 线性时不变　　$\downarrow$ 卷积

# 线性时不变系统

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-\tau)\cdot f(\tau)d\tau = h(t) * f(t)$$

$h(t)$称为系统的**冲激响应函数**或脉冲响应函数。

Fourier变换 $H(j\omega) \triangleq \int_{\mathbb{R}} h(t)\exp(-j\omega t)dt$

称为系统的转移函数(传递函数)或**频率响应函数**。

$$G(\omega) = H(\omega)\cdot F(\omega).$$

例：积分电路的输入端为**平稳过程** $\xi(t)$, $E\xi(t)=0$.
电路的初始条件为0状态，输出为随机过程$\eta(t)$.
易知，输入输出满足以下微分方程:

$$\eta'(t)+\alpha\cdot\eta(t) = \alpha\cdot\xi(t), \qquad \eta(0)=0., \quad (*)$$

研究$\eta(t)$的特性，均值？相关函数？$\begin{cases} R_{\eta\eta} \\ R_{\xi\eta} \end{cases}$ 平稳？

# 方法一(经典方法) $\eta'(t)+\alpha\cdot\eta(t)=\alpha\cdot\xi(t)$

- $(*)$式两边取均值得 $\mu'_\eta(t)+\alpha\mu_\eta(t)=\alpha\mu_\xi(t)=0$, $\mu_\eta(t)$确定性函数，解常微分方程得 $\mu_\eta(t)=A\cdot\exp(-\alpha t)$. 由初始条件知 $\mu_\eta(0)=0 \;\Rightarrow\; A=0 \;\Rightarrow\; \mu_\eta(t)=0$.

- $(*)$式中令 $t=t_2$，取共轭，然后两边同乘$\xi(t_1)$再取均值得

  $$R'_{\xi\eta}(t_1,t_2)+\alpha R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\alpha R_{\xi\xi}(t_1,t_2),$$

  （视 $t_1$ 为参数，对$t_2$微分，为常系数一元微分方程）

  如果已知$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$，解上述微分方程可得$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$.

- $(*)$式中令 $t=t_1$，然后两边同乘$\overline{\eta(t_2)}$再取均值得

  $$R'_{\eta\eta}(t_1,t_2)+\alpha R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\alpha R_{\xi\eta}(t_1,t_2),$$

  （视 $t_2$ 为参数，对$t_1$微分，为常系数一元微分方程）

  如果已知$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$, 解上述微分方程可得$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)$.

**例：**

$R(t_1,t_2)=R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\sigma^2\exp(-\beta|t_2-t_1|)$,

分$t_1\geq t_2$和$t_1<t_2$两种情形可分别求出$\mu_\eta(t), R_{\xi\eta}, R_{\eta\eta}$,

并可以知道$\eta(t)$到达稳态时是平稳随机过程。

（计算过程略，见教材P351-355）

# 方法二(时域)

线性时不变系统，设冲激响应为$h(t)$，

则 $\eta(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-u)\xi(u)du = \int_{\mathbb{R}} h(u)\xi(t-u)du = h(t) * \xi(t)$.
均值 $E\eta(t) = \int_{\mathbb{R}} h(u)E\xi(t-u)du = \int_{\mathbb{R}} h(u)du \cdot \mu_\xi$ 常数

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(t,t+\tau) &= E\xi(t)\overline{\eta(t+\tau)} = E\xi(t)\overline{\int_{\mathbb{R}} h(u)\xi(t+\tau-u)du} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{h(u)}E\xi(t)\overline{\xi(t+\tau-u)}du = \int_{\mathbb{R}} \overline{h(u)}R(\tau-u)du \\
&= (R_{\xi\xi} * \overline{h})(\tau) = R_{\xi\eta}(\tau).
\end{aligned}
$$

故 $\xi(t), \eta(t)$ 联合平稳，类似可得

$$
R_{\eta\xi}(\tau) = \overline{R_{\xi\eta}(-\tau)} = \left(\overline{R_{\xi\xi}} * h\right)(-\tau)
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(t,t+\tau) &= E\eta(t)\overline{\eta(t+\tau)} \\
&= E\int_{\mathbb{R}} h(t-u)\xi(u)du\overline{\int_{\mathbb{R}} h(t+\tau-v)\xi(v)dv} \\
&= E\int_{\mathbb{R}} h(u)\xi(t-u)du\overline{\int_{\mathbb{R}} h(v)\xi(t+\tau-v)dv} \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(u)\overline{h(v)}E\xi(t-u)\overline{\xi(t+\tau-v)}dudv \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(u)\overline{h(v)}R_{\xi\xi}(\tau+u-v)^{4}dudv \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h'(u)R_{\xi\eta}(\tau-u)^{5}dudv \\
&= R_{\eta\eta}(\tau),
\end{aligned}
$$

故输出$\eta(t)$是平稳过程。

[4] $\left(h' * \bar{h} * R_{\xi\xi}\right)(\tau)$, $h'(u)=h(-u)$, 即令 $u=-u$

[5] $R_{\xi\eta}(\tau)=(R_{\xi\xi} * \overline{h})(\tau)$

# 时域方法总结:

$\eta(t) = h(t) * \xi(t)$, 令 $h'(t) = h(-t)$, 有如下关系式:

$$
\begin{aligned}
E\eta(t) &= \mu_\xi \cdot \int_R h(u)du \text{ 常数} \\
R_{\xi\eta}(\tau) &= \left(R_{\xi\xi} * \bar{h}\right)(\tau) \\
R_{\eta\xi}(\tau) &= \overline{R_{\xi\eta}(-\tau)} = \left(\overline{R_{\xi\xi}} * h\right)(-\tau) \\
R_{\eta\eta}(\tau) &= \left(R_{\xi\eta} * h'\right)(\tau) = \left(R_{\xi\xi} * \bar{h} * h'\right)(\tau)
\end{aligned}
$$

# 方法三（频域）：计算

线性时不变系统 $h(t)$， $H(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\exp(-j\omega t)dt.$

输入 $\xi(t)$，相关函数 $R_{\xi\xi}$，功率谱密度：

$$\begin{aligned} S_{\xi\xi}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} R_{\xi\xi}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau, \\ R_{\xi\xi}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_{\xi\xi}(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega. \end{aligned}$$

输出$\eta(t)$，相关函数

$R_{\eta\eta}(\tau) = (R_{\xi\xi} * \overline{h} * h')(\tau) = \int_R \int_R h(u)\overline{h(v)}R_{\xi\xi}(\tau+u-v)dudv.$

功率谱密度：

$$\begin{aligned} S_{\eta\eta}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} R_{\eta\eta}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(u)\overline{h(v)}R_{\xi\xi}(\tau+u-v)\exp(-j\omega\tau)dudvd\tau \end{aligned}$$

令$s=\tau+u-v$，则 $\tau=s-u+v$.

$$
\begin{aligned}
& S_{\eta\eta}(\omega) \\
= \ & \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(u)\overline{h(v)}R_{\xi\xi}(s)\exp(-j\omega s)\exp(j\omega u)\exp(-j\omega v)dudvds \\
= \ & \int_{\mathbb{R}} h(u)\exp(j\omega u)du \int_{\mathbb{R}} \overline{h(v)\exp(j\omega v)}dv \int_{\mathbb{R}} R_{\xi\xi}\exp(-j\omega s)ds \\
= \ & H(-\omega)\cdot\overline{H(-\omega)}\cdot S_{\xi\xi}(\omega) \\
= \ & |H(-\omega)|^2 S_{\xi\xi}(\omega).
\end{aligned}
$$

**借助频域$S_{\eta\eta}(\omega)$反推时域$R_{\eta\eta}(\tau)$:**

$$
\begin{cases}
S_{\eta\eta}(\omega)=|H(-\omega)|^2 S_{\xi\xi}(\omega). \\
R_{\eta\eta}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|H(-\omega)|^2 S_{\xi\xi}(\omega)\cdot\exp(j\omega\tau)d\omega.
\end{cases}
$$

若$h(t)$为实函数，则 $|H(-\omega)|^2=|H(\omega)|^2$，$H(-\omega)=\overline{H(\omega)}$.

例[6]：

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\beta|t|) \;\Rightarrow\; S_{\xi\xi}(\omega) = \sigma^2 \cdot \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2},$$

$$h(t) = \alpha \cdot \exp(-\alpha t),\; t \geq 0 \;\Rightarrow\; H(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha+j\omega} = \frac{\alpha(\alpha-j\omega)}{\alpha^2+\omega^2}.$$

故 $S_{\eta\eta} = |H(-\omega)|^2 S_{\xi\xi}(\omega) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2} \cdot \frac{2\beta\sigma^2}{\beta^2+\omega^2}$

$$\Rightarrow\; R_{\eta\eta}(\tau) = \frac{\sigma^2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\left[\alpha \cdot e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}\right].$$ [7]

**反推，即课后作业的结果！**

[6] $S_{\xi\xi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} R_{\xi\xi}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau$, $H(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\exp(-j\omega t)dt$

[7] $R_{\eta\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |H(-\omega)|^2 S_{\xi\xi}(\omega)\cdot\exp(j\omega\tau)d\omega$

**定义：联合平稳过程的互谱密度**

$$S_{\eta\xi}(\omega) \triangleq \int_{\mathbb{R}} R_{\eta\xi}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau.$$

为互相关函数$R_{\eta\xi}(\tau) \triangleq E\overline{\xi(t+\tau)}\eta(t)$的Fourier变换。

$$R_{\xi\eta}(\tau) \triangleq E\xi(t)\overline{\eta(t+\tau)} = \overline{R_{\eta\xi}(-\tau)} \;\Rightarrow\; S_{\xi\eta}(\omega) = \overline{S_{\eta\xi}(\omega)}.$$

反变换 $\begin{cases} R_{\eta\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_{\eta\xi}(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega \\ R_{\xi\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_{\xi\eta}(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega \end{cases}$

令$\tau = 0$, $R_{\eta\xi}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_{\eta\xi}(\omega)d\omega.$

$\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$，联合平稳过程之和

$$R_{\zeta\zeta}(\tau) = R_{\xi\xi}(\tau) + R_{\eta\eta}(\tau) + R_{\xi\eta}(\tau) + R_{\eta\xi}(\tau)$$

$\Rightarrow \quad S_{\zeta\zeta}(\omega) = S_{\xi\xi}(\omega) + S_{\eta\eta}(\omega) + S_{\xi\eta}(\omega) + S_{\eta\xi}(\omega)$ 实函数[8]

[8] $S_{\xi\eta}(\omega) = \overline{S_{\eta\xi}(\omega)}$

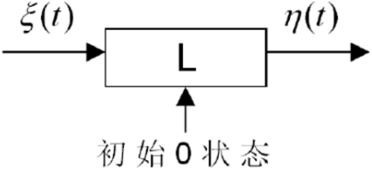
线性时不变：$R_{\xi\eta}(\tau)=(R_{\xi\xi}*\overline{h})(\tau) \ \Rightarrow\ S_{\xi\eta}(\omega)=S_{\xi\xi}\cdot\overline{H(-\omega)}.$

$$\begin{aligned}
S_{\xi\eta}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} R_{\xi\eta}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{h(u)}R_{\xi\xi}(\tau-u)du\cdot\exp(-j\omega\tau)d\tau \\
\text{令 } s &= \tau-u,\quad \tau=s+u \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{h(u)}R_{\xi\xi}(s)\cdot\exp(-j\omega s)\cdot\exp(-j\omega u)duds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{h(u)}\cdot\exp(-j\omega u)du\int_{\mathbb{R}} R_{\xi\xi}(s)\exp(-j\omega s)ds \\
&= \overline{H(-\omega)}\cdot S_{\xi\xi}(\omega).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{同理} &\qquad R_{\eta\eta}(\tau)=\left(R_{\xi\eta}*h'\right)(\tau) \\
\Rightarrow S_{\eta\eta}(\omega) &= H(-\omega)\cdot S_{\xi\eta}(\omega) \\
&= H(-\omega)\cdot\overline{H(-\omega)}S_{\xi\xi}(\omega) \\
&= |H(-\omega)|^2 S_{\xi\xi}(\omega).
\end{aligned}$$

# 总结

线性时不变系统，初始0状态




**方法一：** 经典状态空间法

均值： 解微分方程

互相关函数$R_{\xi\eta}, R_{\eta\xi}$： 解微分方程

自相关函数$R_{\eta\eta}$： 解微分方程

**方法二：** 时域， $h(t)$冲激响应， $h'(t)=h(-t)$

$$
\begin{aligned}
\eta(t) &= h(t)*\xi(t). \\
E\eta(t) &= \mu_\xi\cdot\int_R h(u)du \text{ 常数}, \\
R_{\xi\eta}(\tau) &= (R_{\xi\xi}*\overline{h})(\tau), \\
R_{\eta\xi}(\tau) &= \overline{R_{\xi\eta}(-\tau)} = (\overline{R_{\xi\xi}}*h)(-\tau), \\
R_{\eta\eta}(\tau) &= (R_{\xi\eta}*h')\tau = (R_{\xi\xi}*\overline{h}*h')(\tau).
\end{aligned}
$$

**方法三：** 频域， $h(t)\ \leftrightarrow\ H(\omega)$

$$R_{\xi\xi}\ \leftrightarrow\ S_{\xi\xi}(\omega), \qquad R_{\xi\eta}(\tau)\ \leftrightarrow\ S_{\xi\eta}(\omega),$$

$$R_{\eta\eta}(\tau)\ \leftrightarrow\ S_{\eta\eta}(\omega).$$

$$S_{\xi\eta}(\omega)=\overline{H(-\omega)}\cdot S_{\xi\xi}(\omega) \quad \text{互谱密度}$$

$$S_{\eta\xi}(\omega)=\overline{S_{\xi\eta}(\omega)}=H(-\omega)\cdot S_{\xi\xi}(\omega)$$

$$S_{\eta\eta}(\omega)=H(-\omega)\cdot S_{\xi\eta}(\omega)=|H(-\omega)|^2 S_{\xi\xi}(\omega).$$

# Laplace变换

Fourier变换要求$f(t)$绝对可积，[9] 当$f(t)$不满足该条件时，可引入衰减因子$e^{-\sigma t}$使得$e^{-\sigma t}f(t)$绝对可积，即

$$F_1(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\exp[-(\sigma + j\omega)t]dt.$$

令$s = \sigma + j\omega$得

$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$ 正变换$L$ (单边Laplace变换)

$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds,$ 逆变换$L^{-1}$

$f(t)$原函数，$F(s)$象函数，$F(s)$的自变量$s$为复数，复变函数[10]

[9] $f(t) = 0$，若$t < 0$

[10] 傅立叶变换$F(\omega)$ 中$\omega$ 为实数

# Laplace变换的性质

**例：** 验证$L\alpha e^{-\alpha t} = \frac{\alpha}{\alpha+s}$

**Laplace变换性质:**

1. 线性
2. 微分 $Lf'(t) = sF(s) - f(0)$

$$Lf^{(n)}(t) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

3. 积分 $L\int_0^t f(u)du = \frac{1}{s}F(s)$
4. 平移 $Le^{at}f(t) = F(s-a)$
5. 延迟 $Lf(t-\tau) = e^{-s\tau}F(s)$, $L^{-1}e^{-s\tau}F(s) = f(t-\tau)$
6. 拉氏变换把卷积变成乘积，拉氏逆变换把乘积变成卷积。

# Laplace描述方法

Laplace变换， S域

线性时不变系统，输入$\xi(t)$，输出$\eta(t)$，初值/初始状态为0

则可用微分方程描述:

$$b_n\eta^{(n)}(t)+\cdots+b_1\eta'(t)+b_0\eta(t)$$
$$=a_m\xi^{(m)}(t)+\cdots+a_1\xi'(t)+a_0\xi(t).$$

$F(s)\ \leftrightarrow\ \xi(t)$, Laplace变换对

$F(s)=\int_{\mathbb{R}}\xi(t)\exp(-st)dt=L\xi(t),\ \xi(t)=L^{-1}F(s)$
(积分区域，单边，双边)

$G(s)\ \leftrightarrow\ \eta(t),\qquad H(S)\ \leftrightarrow\ h(t),$

$G(s)=H(s)\cdot F(s),\ \ H(s)=\frac{a_ms^m+\cdots+a_1s+a_0}{b_ns^n+\cdots+b_1s+b_0}.$

$H(s)$ 为传递函数, $h(t)=L^{-1}H(s)$ 为冲激响应。
$s=j\omega$时， $H(j\omega)$ 为频率响应。

**例：** $\eta'(t) + \alpha\eta(t) = \alpha\xi(t)$，求冲击响应$h(t)$.

两边取Laplace变换

$$sG(s) + \alpha \cdot G(s) = \alpha \cdot F(s) \ \Rightarrow \ H(s) = \tfrac{G(s)}{F(s)} = \tfrac{\alpha}{s+\alpha}.$$

$$\text{故 } h(t) = L^{-1}H(s) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

频率响应： $H(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega+\alpha}$.

# Z变换：离散时间情形

Z变换： Z域：$\{h_k\}$的Z变换$\rightarrow H(z)$

(双边) $H(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k}$, $z$ 为复变量

对应连续时间系统 $H(\omega)$ 或 $H(j\omega)$

(单边) 因果系统

$$h_k=0 \ \ (k<0) \qquad H(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} h_k z^{-k}.$$

**例**：$h_k=1,\ k=0,1,2,\cdots,$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}=\frac{z}{z-1}.$$

# 离散时间线性时不变系统 (初始0状态)

输入序列: $x_n \leftrightarrow X(z) = \sum x_n z^{-n}$

单位样值响应: $h_n \leftrightarrow H(z) = \sum h_n z^{-n}$

输出序列: $y_n \leftrightarrow Y(z) = \sum y_n z^{-n}$

零状态响应: $y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$, $i.e.$ $y_n = h_n * x_n$, 卷积

$y_n = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k x_{n-k}$, 因果系统(单边)

$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$.

线性离散系统可使用“差分方程”进行描述, 方法一

$\{h_n\}$“单位样值响应”进行描述, 方法二

转移函数“$\{h_n\}$的Z变换”进行描述, 方法三

# 方法二

$x_n \to \xi_n$，$y_n \to \eta_n$， 实平稳随机序列作为输入的激励信号

$$\eta_n = h_n * \xi_n = \sum_k h_k \xi_{n-k}.$$

$$E\eta_n = \mu_\xi \sum_k h_k \ \text{常数} \ \sum_k h_k < +\infty.$$

$$\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(n, n+m) &= E\xi_n \eta_{n+m} = E\xi_n \sum_k h_k \xi_{n+m-k} \\
&= \sum_k h_k E\xi_n \xi_{n+m-k} \\
& \quad \text{其中} E\xi_n\xi_{n+m-k} = R(m-k) \\
&= h_m * R_{\xi\xi}(m) = R_{\xi\eta}(m) \\
&= R_{\xi\xi}(m) * h_m.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(n, n+m) &= E\eta_n\eta_{n+m} \\
&= E\sum_i h_i\xi_{n-i}\sum_k h_k\xi_{n+m-k} \\
&= \sum_i\sum_k h_ih_kE\xi_{n-i}\xi_{n+m-k} \\
&= \sum_i\sum_k h_ih_kR_{\xi\xi}(m-k+i) \\
&= R_{\xi\xi}(m) * h_m * h'_m = R_{\eta\eta}(m),
\end{aligned}
$$

其中 $h'_i = h_{-i}$.

$$R_{\eta\eta}(m) = R_{\xi\eta}(m) * h'_m = R_{\xi\xi}(m) * h_m * h'_m.$$

故输出序列 $\eta_n$ 平稳且与 $\xi_n$ 联合平稳。

# 方法三：Z域

离散平稳序列的功率谱密度

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\xi\xi}(k)\exp(-j\omega k), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

$$R_{\xi\xi}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)\exp(j\omega k)d\omega.$$

取$z = e^{j\omega}$ 得 $R_{\xi\xi}(k)$ 的$z$变换

$$\phi_{\xi\xi}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\xi\xi}(k)z^{-k},$$

逆变换 $\frac{1}{2\pi j}\oint \phi_{\xi\xi}(z)z^{k-1}dz = R_{\xi\xi}(k).$

逆变换及其计算请参见 郑君里等《信号与系统》，高教出版社.

$$\begin{aligned}
\phi_{\xi\eta}(z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{\xi\eta}(m)\cdot z^{-m} \\
&= \sum_{m}\sum_{k} h_k \cdot R_{\xi\xi}(m-k)z^{-m}.
\end{aligned}$$

令 $n = m - k,\ m = n + k$

$$
\begin{aligned}
\phi_{\xi\eta}(z) &= \sum_k \sum_n h_k \cdot R_{\xi\xi}(n) \cdot z^{-(n+k)} \quad (R_{\xi\eta}(m) = R_{\xi\xi}(m) * h_m) \\
&= \sum_k h_k z^{-k} \sum_n R_{\xi\xi}(n) z^{-n} = H(z) \cdot \phi_{\xi\xi}(z).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{同理 } \phi_{\eta\eta}(z) &= \sum_m R_{\eta\eta}^{(m)} z^{(-m)} \quad (R_{\eta\eta}(m) = h_m * h'_m * R_{\xi\xi}(m)) \\
&= \sum_m \sum_k \sum_i h_k h_i R_{\xi\xi}(m - k + i) z^{-m} \\
&\quad \text{令} m - k + i = n,\ m = n + k - i \\
&= \sum_k h_k z^{-k} \sum_i h_i z^i \sum_n R_{\xi\xi}(n) z^{-n} \\
&= H(z) \cdot H(\frac{1}{z}) \cdot \phi_{\xi\xi}(z) \\
&= H(\frac{1}{z}) \cdot \phi_{\xi\eta}(z), \qquad \text{故可由逆变换得到 } R_{\eta\eta}(k).
\end{aligned}
$$

**例：** $h_k = \exp(-\alpha k),\ \ k \geq 0$ 因果系统

输入信号0均值平稳序列（白噪声）

$$R_{\xi\xi}(n) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & (n=0) \\ 0, & (n \neq 0) \end{cases}$$ 输出序列？

**解：** 转移函数 $H(z) = \sum\limits_k \exp(-\alpha k) \cdot z^{-k} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - z^{-1}}$

$$\begin{aligned} E\eta_n &= \sum h_k \mu_\xi = 0 \\ \phi_{\xi\xi}(z) &= \sum_n R_{\xi\xi}(n) z^{-n} = \frac{N_0}{2} \\ \phi_{\eta\eta}(z) &= H(z)H(\frac{1}{z})\phi_{\xi\xi}(z) \\ &= \frac{e^\alpha}{e_\alpha - z^{-1}} \cdot \frac{e^\alpha}{e^\alpha - z} \cdot \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

反变换 $R_{\eta\eta}(n) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}-1} \exp(-\alpha|n|),\ n = 0, \pm 1, \cdots$

# 反变换如何求？凑出级数形式，观察$z^{-k}$的系数！

$$
\begin{aligned}
\phi_{\eta\eta}(z) &= \frac{e^{\alpha}}{e_{\alpha}-z^{-1}}\cdot\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-z}\cdot\frac{N_0}{2} \\
&= \frac{N_0}{2}\cdot\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}-1}\cdot\frac{e^{2\alpha}-1}{(e^{\alpha}-z^{-1})(e^{\alpha}-z)} \\
&= \frac{N_0}{2}\cdot\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}-1}\cdot\left(\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-z^{-1}}+\frac{z}{e^{\alpha}-z}\right) \\
&= \frac{N_0}{2}\cdot\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}-1}\cdot\left(\frac{1}{1-(z\cdot e^{\alpha})^{-1}}+\frac{z\cdot e^{-\alpha}}{1-z\cdot e^{-\alpha}}\right) \\
&= \frac{N_0}{2}\cdot\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}-1}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\alpha n}z^{-n}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k}z^{k}\right) \\
&= \frac{N_0}{2}\cdot\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}-1}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|n|}z^{-n}, \\
R_{\eta\eta}(n) &= \frac{N_0}{2}\cdot\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}-1}\exp(-\alpha|n|).
\end{aligned}
$$

# 窄带信号的表示方法

信号 $x(t)$， 频谱 $F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x(t)exp(-j\omega t)dt.$
若 $F(\omega)$只在窄的频率范围内异于0, 即：

$\omega_0 - \omega_c < |\omega| < \omega_0 + \omega_c$时，$F(\omega) \neq 0$；其它，$F(\omega) = 0.$

而且 $\omega_c \ll w_0$，则称 $x(t)$ 为**窄带信号**。$2\omega_c$的带宽！

窄带信号 $x(t)$ 可表示为：$x(t) = v(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \phi(t))$,

其中 $v(t)$称为包络函数，随 $t$ 慢变化；
$\phi(t)$称为相位函数，随 $t$ 慢变化。

## 窄带信号

$$\begin{aligned} x(t) &= v(t)\cdot\cos(\omega_0 t+\phi(t)) \\ &= v(t)[\cos\omega_0 t\cos\phi(t)-\sin\omega_0 t\sin\phi(t)] \\ &= x_c(t)\cos\omega_0 t - x_s(t)\sin\omega_0 t, \end{aligned}$$

其中

$x_c(t)\triangleq v(t)\cos\phi(t)$ 余弦分量

$x_s(t)\triangleq v(t)\sin\phi(t)$ 正弦分量

易知： $v(t)=\sqrt{x_c^2(t)+x_s^2(t)}$,

$\phi(t)=\arctan\frac{x_s(t)}{x_c(t)}$.

故 $x(t)$ 的两种表示可以相互导出。

# Hilbert变换

阶跃函数 $u(t) \triangleq \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ 在跳变点无定义 $\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

符号函数 $sgn(t) \triangleq \begin{cases} 1 & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$ 在跳变点无定义 $\leftrightarrow -\frac{2j}{\omega}$

因果函数 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$ 满足$f(t)=0,\ t<0$, 即$f(t)=f(t)u(t)$,

故 $\quad F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*U(\omega)=\frac{F(\omega)}{2}+\frac{1}{2\pi j}F(\omega)*\frac{1}{\omega}$,

或 $\quad F(w)=-\frac{j}{\pi}F(\omega)*\frac{1}{\omega}$,

设 $F(\omega)=\hat{x}(\omega)_{实部}+jx(\omega)_{虚部}$, 代入并比较两边的实虚部得

$$\hat{x}(\omega)=\frac{1}{\pi}x(\omega)*\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{x(u)}{\omega-u}du,$$
$$x(\omega)=-\frac{1}{\pi}\hat{x}(\omega)*\frac{1}{\omega}=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\hat{x}(u)}{\omega-u}du,$$

$x(\omega)$ 和 $\hat{x}(\omega)$ 恰好构成 Hilbert 变换对。

**定义：** $\hat{x}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{x(u)}{t-u}du$称为 $x(t)$ 的**Hilbert变换**，

$x(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\hat{x}(u)}{t-u}du$称为**Hilbert逆变换**.

$y(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$称为 $x(t)$ 的解析信号.

一个简单线性系统：

- 冲击响应 $h(t)=\frac{1}{\pi t}$
- 频率响应 $H(j\omega)=-j\cdot sgn(\omega)=\begin{cases}-j & w>0\\ j & w<0\end{cases}$
- 输入 $x(t)$，输出 $\hat{x}(t)=x(t)*h(t)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{x(u)}{t-u}du$
- 频域表示 $\hat{F}(\omega)=F(\omega)\cdot H(j\omega)=-j\cdot sgn(\omega)\cdot F(\omega)$

Hilbert变换对可以看作一个简单线性系统的输入和输出!

设 $x(t)$ 为窄带0均值实平稳过程，其功率谱密度 $S_x(\omega)$ 只在窄的频率范围内异于0, 即 $\omega_c \ll \omega_0$,

$$\omega_0-\omega_c<|\omega|<\omega_0+\omega_c \text{ 时，} S_x(\omega)\neq 0\text{；否则} S_x(\omega)=0.$$

同样 $x(t)$ 可有以下表示:

$$\begin{aligned}
x(t) &= v(t)\cos(\omega_0 t+\phi(t))\\
&= x_c(t)\cos w_0 t - x_s(t)\sin\omega_0 t\\
\text{计算可知: } \hat{x}(t) &= x_c(t)\sin\omega_0 t + x_s(t)\cos\omega_0 t\\
&= v(t)\sin(\omega_0 t+\phi(t))\\
\text{故 } x_c(t) &= x(t)\cos\omega_0 t + \hat{x}(t)\sin\omega_0 t\\
x_s(t) &= \hat{x}(t)\cos\omega_0 t - x(t)\sin\omega_0 t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{另一种方法: 令 } x_c(t) &\triangleq x(t)\cos\omega_0 t + \hat{x}(t)\sin\omega_0 t\\
x_s(t) &\triangleq \hat{x}(t)\cos\omega_0 t - x(t)\sin\omega_0 t\\
\text{则 } x(t) &= x_c(t)\cos\omega_0 t - x_s(t)\sin\omega_0 t\\
\hat{x}(t) &= x_c(t)\sin\omega_0 t + x_s(t)\sin\omega_0 t
\end{aligned}$$

$$x(t) \;=\; x_c(t)\cos\omega_0 t - x_s(t)\sin\omega_0 t \qquad (*)$$

**研究问题：** 该表示下 $x_c(t)$ 与 $x_s(t)$ 的性质

**平稳？均值？相关函数？谱密度？联合平稳？**

**方法：利用Hilbert变换！**
**频域角度可得$x(t)$与$\hat{x}(t)$的关系：**

$$x(t) \;\to\; \text{线性系统} \;\to\; \hat{x}(t) \qquad \begin{array}{l} x(t):\; S_x(\omega) \\ \hat{x}(t):\; S_{\hat{x}}(\omega) \\ H(\omega) = -j\cdot sgn(\omega), \quad h(t) = \frac{1}{\pi t} \end{array}$$

$$S_{\hat{x}}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = S_x(\omega) \qquad \text{实系数方程 } H(-\omega) = \overline{H(\omega)}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad R_x(\tau) &= R_{\hat{x}}(\tau) \\ S_{x\hat{x}}(\omega) &= \overline{H(-\omega)}S_x(\omega) = -j\cdot sgn(\omega)S_x(\omega) \\ S_{\hat{x}x}(\omega) &= \overline{S_{x\hat{x}}(\omega)} = j\cdot sgn(\omega)S_x(\omega) = -S_{x\hat{x}}(\omega) \\ \text{故} \quad R_{\hat{x}x}(\tau) &= -R_{x\hat{x}}(\tau). \end{aligned}$$

# 研究思路:

$$
\begin{aligned}
S_{\hat{x}}(\omega) &= S_x(\omega) \\
S_{\hat{x}x}(\omega) &= -S_{x\hat{x}}(\omega)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
R_{\hat{x}}(\tau) &= R_x(\tau) \\
R_{\hat{x}x}(\tau) &= -R_{x\hat{x}}(\tau)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
R_{x_s}(\tau) &= R_{x_c}(\tau) \\
R_{x_cx_s}(\tau) &= -R_{x_sx_c}(\tau)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
S_{x_c}(\omega) &= S_{x_s}(\omega) \\
&= \begin{cases} S_x(\omega-\omega_0)+S_x(\omega+\omega_0) & |\omega|<\omega_c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{x_cx_s}(\omega) &= -S_{x_sx_c}(\omega) \\
&= \begin{cases} j\cdot[S_x(\omega-\omega_0)-S_x(\omega+\omega_0)] & |\omega|<\omega_c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$Ex(t)=0 \;\Rightarrow\; E\hat{x}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{Ex(u)}{t-u}du=0,$$

由：$x_c(t)=x(t)\cos\omega_0 t+\hat{x}(t)\sin\omega_0 t,\; x_s(t)=\hat{x}(t)\cos\omega_0 t-x(t)\sin\omega_0 t$
故 $Ex_c(t)=Ex_s(t)=0.$

$$\begin{aligned}
R_{x_c}(t,t+\tau) &= Ex_c(t)x_c(t+\tau)\\
= &\; E[x(t)\cos\omega_0 t+\hat{x}(t)\sin\omega_0 t]\\
&\; [x(t+\tau)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)+\hat{x}(t+\tau)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)]\\
= &\; R_x(\tau)\cos\omega_0 t\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)+R_{\hat{x}}(\tau)\sin\omega_0 t\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)\\
&\; R_{x\hat{x}}(\tau)\cos\omega_0 t\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)+R_{\hat{x}x}(\tau)\sin\omega_0 t\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)\\
= &\; {}^{11}R_x(\tau)\cos\omega_0\tau+R_{x\hat{x}}(\tau)\sin\omega_0\tau=R_{x_c}(\tau).
\end{aligned}$$

同理

$$R_{x_s}(t,t+\tau)=R_x(\tau)\cos\omega_0\tau+R_{x\hat{x}}(\tau)\sin\omega_0\tau=R_{x_c}(\tau).$$

故 $X_c(t),X_s(t)$ 为0均值平稳过程。

[11] $R_x(\tau)=R_{\hat{x}}(\tau),R_{\hat{x}x}(\tau)=-R_{x\hat{x}}(\tau)$

$$
\begin{aligned}
&\text{功率谱密度}\quad S_{x_c}(\omega) = S_{x_s}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} R_{x_c}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau \\
= &\int_{\mathbb{R}} [R_x(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{x\hat{x}}(\tau)\sin\omega_0\tau]\exp(-j\omega\tau)d\tau \\
= &\int_{\mathbb{R}} \left[R_x(\tau)\frac{e^{j\omega_0\tau}+e^{-j\omega_0\tau}}{2} + R_{x\hat{x}}(\tau)\frac{e^{j\omega_0\tau}-e^{-j\omega_0\tau}}{2j}\right] e^{-j\omega\tau}d\tau \\
= &\frac{S_x(\omega-\omega_0)+S_x(\omega+\omega_0)}{2} + \frac{S_{x\hat{x}}(\omega-\omega_0)-S_{x\hat{x}}(\omega+\omega_0)}{2j} \\
= &{}^{12}\,\frac{S_x(\omega-\omega_0)+S_x(\omega+\omega_0)}{2} \\
&+\frac{-jsgn(\omega-\omega_0)S_x(\omega-\omega_0)+jsgn(\omega+\omega_0)S_x(\omega+\omega_0)}{2j} \\
= &\frac{1}{2}[1-sgn(\omega-\omega_0)]S_x(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}[1+sgn(\omega+\omega_0)]S_x(\omega+\omega_0) \\
= &\begin{cases} S_x(\omega-\omega_0)+S_x(\omega+\omega_0) & |\omega|<\omega_c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

[12] $S_{x\hat{x}}(\omega) = -j\cdot\mathrm{sgn}(\omega)S_x(\omega)$

互相关函数 $R_{x_sx_c}(t,t+\tau)=Ex_s(t)x_c(t+\tau)$

$$\begin{aligned}
&= E[\hat{x}(t)\cos\omega_0 t - x(t)\sin\omega_0 t]\\
&\quad [x(t+\tau)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)+\hat{x}(t+\tau)(\omega_0 t+\omega_0\tau)]\\
&= R_{\hat{x}x}(\tau)\cos\omega_0 t\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)+R_{\hat{x}}(\tau)\cos\omega_0 t\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)\\
&\quad -R_x(\tau)\sin\omega_0 t\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)-R_{x\hat{x}}\sin\omega_0 t\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)\\
&= R_x\sin\omega_0\tau+R_{\hat{x}x}(\tau)\cos\omega_0\tau\\
&= R_{x_sx_c}(\tau)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{同理}\quad R_{x_cx_s}(t,t+\tau) &= -R_x\sin\omega_0\tau-R_{\hat{x}x}\cos\omega_0\tau\\
&= R_{x_cx_s}(\tau)=-R_{x_sx_c}(\tau)
\end{aligned}$$

故 $x_c(t)$ 与 $x_s(t)$ 是联合平稳的。

互谱密度 $S_{x_cx_s}(\omega)=-S_{x_sx_c}(\omega)=\int_{\mathbb{R}}R_{x_cx_s}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\mathbb{R}}[R_x(\tau)\sin\omega_0\tau + R_{\hat{x}x}(\tau)\cos\omega_0\tau]\exp(-j\omega\tau)d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[R_x(\tau)\frac{e^{-j\omega_0\tau}-e^{j\omega_0\tau}}{2j} - R_{\hat{x}x}(\tau)\frac{e^{-j\omega_0\tau}+e^{j\omega_0\tau}}{2}\right]\exp(-j\omega\tau)d\tau \\
&= \frac{S_x(\omega+\omega_0)-S_x(\omega-\omega_0)}{2j} - \frac{S_{\hat{x}x}(\omega+\omega_0)+S_{\hat{x}x}(\omega-\omega_0)}{2} \\
&\overset{13}{=} \frac{S_x(\omega+\omega_0)-S_x(\omega-\omega_0)}{2j} \\
&\quad - \frac{jsgn(\omega+\omega_0)S_x(\omega+\omega_0)+jsgn(\omega-\omega_0)S_x(\omega-\omega_0)}{2} \\
&= \frac{j}{2}[S_x(\omega-\omega_0)-sgn(\omega-\omega_0)S_x(\omega-\omega_0) \\
&\quad -S_x(\omega+\omega_0)-sgn(\omega+\omega_0)S_x(\omega+\omega_0)] \\
&= \begin{cases} j\cdot[S_x(\omega-\omega_0)-S_x(\omega+\omega_0)] & |\omega|<\omega_c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

[13] $S_{x\hat{x}}(\omega) = -j\cdot\mathrm{sgn}(\omega)S_x(\omega)$

# 由功率谱密度计算相关函数:

由$S_{x_c}(\omega)=S_{x_s}(\omega)=\begin{cases}S_x(\omega-\omega_0)+S_x(\omega+\omega_0) & |\omega|<\omega_c \\ 0 \text{ 其它} \end{cases}$ 可得:

$$
\begin{aligned}
R_{x_c}(\tau)=R_{x_s}(\tau)=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\left[S_x(\omega-\omega_0)+S_x(\omega+\omega_0)\right]\exp(j\omega\tau)d\omega \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c-\omega_0}^{\omega_c-\omega_0}S_x(\omega)\exp\left[j\left(\omega+\omega_0\right)\tau\right]d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c+\omega_0}^{\omega_c+\omega_0}S_x(\omega)\exp\left[j\left(\omega-\omega_0\right)\tau\right]d\omega \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c+\omega_0}^{\omega_0-\omega_c}S_x(-\omega)\exp\left[j\left(-\omega+\omega_0\right)\tau\right]d(-\omega)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c+\omega_0}^{\omega_c+\omega_0}S_x(\omega)\exp\left[j\left(\omega-\omega_0\right)\tau\right]d\omega \\
=&\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\omega_0-\omega_c}\int_0^{\omega_0+\omega_c}S_x(\omega)\exp\left[j\left(-\omega+\omega_0\right)\tau\right]d\omega+\int_{-\omega_c+\omega_0}^{\omega_c+\omega_0}S_x(\omega)\exp\left[j\left(\omega-\omega_0\right)\tau\right]d\omega\right. \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\omega_c}^{\omega_0+\omega_c}S_x(\omega)\left\{\exp\left[j\left(-\omega+\omega_0\right)\tau\right]+\exp\left[j\left(\omega-\omega_0\right)\tau\right]\right\}d\omega \\
=&\frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\omega_c}^{\omega_0+\omega_c}S_x(\omega)\cos\left(\omega\tau-\omega_0\tau\right)d\omega
\end{aligned}
$$

同理由

$$S_{x_cx_s}(\omega) = -S_{x_sx_c}(\omega) = \begin{cases} j\cdot\left[S_x\left(\omega-\omega_0\right)-S_x\left(\omega+\omega_0\right)\right] & |\omega|<\omega_c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

可得:

$$\begin{aligned} R_{x_cx_s}(\tau) &= -R_{x_sx_c}(\tau) = \frac{j}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}[S_x(\omega-\omega_0)-S_x(\omega+\omega_0)]e^{j\omega\tau}d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\omega_c}^{\omega_0+\omega_c} S_x(\omega)\sin(\omega\tau-\omega_0\tau)d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} S_x(\omega)\sin(\omega\tau-\omega_0\tau)d\omega. \end{aligned}$$

**总结:**

$$R_{x_c}(\tau) = R_{x_s}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} S_x(\omega)\cos\left(\omega\tau-\omega_0\tau\right)d\omega$$

$$R_{x_cx_s}(\tau) = -R_{x_sx_c}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} S_x(\omega)\sin\left(\omega\tau-\omega_0\tau\right)d\omega$$

在上式中令 $\tau=0$,

$$\begin{aligned} R_{x_c}(0) &= R_{x_s}(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} S_x(\omega)d\omega = R_x(0), \\ R_{x_c x_s}(0) &= -R_{x_s x_c}(0)=0, \end{aligned}$$

或 $E{x_c}^2(t)=E{x_s}^2(t)=Ex^2(t)$, $Ex_c(t)x_s(t)=Ex_s(t)x_c(t)=0$.

**综上，$x_c(t), x_s(t), x_c(t+\tau), x_s(t+\tau)$的相关矩阵如下：**

$$R=\begin{pmatrix} R_x(0) & 0 & R_{x_c}(\tau) & -R_{x_c x_s}(\tau) \\ 0 & R_x(0) & R_{x_c x_s}(\tau) & R_{x_c}(\tau) \\ R_{x_c}(\tau) & R_{x_c x_s}(\tau) & R_x(0) & 0 \\ -R_{x_c x_s}(\tau) & R_{x_c}(\tau) & 0 & R_x(0) \end{pmatrix}$$

均值0 $\Rightarrow$ 相关函数 $=$ 协方差函数

平稳 $\Rightarrow$ 不依赖于 $t$

实 $\Rightarrow$ 对称

# 平稳过程的谱分解

**例：** $\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_n e^{j\omega_n t}$，$\eta_n$ 随机序列，均值为0，不相关，

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E|\eta_n|^2 < \infty$，　$\omega_n$任取一实数列，$\sigma_n^2 \triangleq E|\eta_n|^2$.

$E\xi(t) = 0$，$E\xi(t)\overline{\xi(t+\tau)} = \sum_n \sigma_n^2 e^{-j\omega_n \tau}$，故$\xi(t)$平稳。

$\xi(t)$可看作具有随机振幅的简谐振动叠加！

**例：** $\xi(t) = \sum_{n=1}^{N} (\xi_n \cos\omega_n t + \eta_n \sin\omega_n t)$，$t \in \mathbb{R}$.

$\xi_n, \eta_n$不相关实随机序列，均值0，$\omega_n$正实数列。

$E\xi(t) = 0$，$E\xi(t)\overline{\xi(t+\tau)} = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 \cos\omega_n \tau$，故$\xi(t)$平稳。

$\xi(t)$可看作具有随机振幅的简谐振动叠加！

**Problem：** 是否所有平稳过程都可有类似的分解呢？

**定理：** 设 $\{\xi(t)\}$ 为均方连续0 均值平稳过程，

则 $\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j\omega t) d\eta(\omega)$，其中 $\eta(\omega)$ 满足

1. 0均值
2. $\eta(\omega)$正交增量过程
3. $\eta(\omega) \overset{m.s.}{=} \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\xi(t)dt$
4. $E|\eta(\omega_2) - \eta(\omega_1)|^2 = F(\omega_2) - F(\omega_1)$，其中 $F(\omega)$ 是 $\xi(t)$的功率谱分布，$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} dF(\omega)$.

称$\eta(\omega)$为$\xi(t)$的随机谱函数。

均方意义下的 $Rieman-Stieltjes$积分 (R-S积分)

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(j\omega t) d\eta(\omega) = \lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(j\omega_n t) \cdot [\eta(\omega_n + \Delta\omega) - \eta(\omega_n)]$$

R-S积分有两种形式：$\int_a^b f(t) d\xi(t)$ 与 $\int_a^b \xi(t) df(t)$

要求 $\xi(t)$ 为二阶矩过程且 $f(t)$ 为有界变差函数，即

$$\sum_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)| < \infty.$$

详细内容请参见《随机过程理论及其应用》俞钟琪等 §4.6

# Shannon采样定理

$\{\xi(t), t \in R\}$ 为零均值平稳过程，功率谱密度

$$S(f) = S(\omega) = \int_{\mathbb{R}} R(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau, \quad \omega = 2\pi f$$

限于$(-f_c, f_c)$之间，即$|f| > |f_c|$时，$S(f) = 0$.
抽样间隔 $\leq \frac{1}{2f_c} \triangleq t_0$，即抽样频率 $\geq 2f_c$.
则可从抽样中恢复原连续信号，即

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi\left(\frac{n}{2f_c}\right)\frac{\sin[\omega_c(t-\frac{n}{2f_c})]}{\omega_c(t-\frac{n}{2f_c})}, \quad \omega_c = 2\pi f_c \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi(nt_0)\frac{\sin\omega_c(t-nt_0)}{\omega_c(t-nt_0)}, \quad t_0 = \frac{1}{2f_c}\end{aligned}$$

故对于有限带宽的平稳随机信号，采样定理也同样适用。

# 线性微分方程

考虑线性系统所对应的线性微分方程:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(1)}(t) + a_n(t)y(t) = x(t).$$

设$x(t)$为输入信号(激励), $y(t)$为输出信号(响应)。
设系统的初始条件/初始状态为 $y(0), y^{(1)}(0), \cdots y^{(n-1)}(0)$.

(1) 若初始条件为0, 方程的解为$y(t) = \int_0^t h(t,u)x(u)du$ (因果系统),
若系统还是时不变的,则 $h(t,u) = h(t-u)$, $y(t) = h(t) * x(t)$,
其中 $h(t,u)$ 为系统的冲击响应,即在初始状态为0的条件下,在时刻$u$时系统输入一个冲击 ($\delta$函数),而在时刻$t$时系统输出的响应。

对于线性时不变系统,在0初始状态下,我们已研究了输入信号为平稳过程的情形。

(2) 若初始条件不为 0，方程的解为：

$$y(t) = \underbrace{y_0(t)}_{\text{0输入响应}} + \underbrace{\int_0^t h(t,u)x(u)du}_{\text{0状态响应}}.$$

0 输入线性：激励$x(t)=0$时，$y_0(t)$对初始条件线性；

0 状态线性：初始条件为0时，0状态响应对激励$x(t)$线性；

但初始条件非0时，完全响应$y(t)$对激励$x(t)$不一定线性。

冲击响应 $h(t,u)$ 为齐次方程 $a_0(t)y^{(n)}(t)+\cdots+a_n(t)y(t)=0$ 在初始条件$(0,\cdots 0,\frac{1}{a_0(t)})$下的解。

设$z_0(t),\cdots,z_{n-1}(t)$是齐次方程在初始条件分别为$(1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)$时的解。

0输入线性 $\Rightarrow$ $y_0(t)=y(0)z_0(t)+\cdots+y^{(n-1)}(0)z_{n-1}(t)$.

故响应（方程的解）$y(t)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0)z_k(t)+\int_0^t h(t,u)x(u)du.$

确定性信号 $\to$ 随机信号 $x(t)$ 二阶矩过程

(3) 初始条件$(y(0),\cdots y^{(n-1)}(0))$为随机向量 (该随机向量不随$t$变化)

令 $y_s(t)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0)z_k(t)$ 0输入解，奇分量

$y_r(t)=\int_0^t h(t,u)x(u)du$ 0状态解，规则分量

则 $y(t)=y_s(t)+y_r(t)$.

假定 $x(t)$ 与随机向量独立，且 $Ex(t)=0$，即$Ey_r(t)=0$.
响应 $y(t)$ 的均值

$$\begin{aligned} Ey(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} z_k(t)Ey^{(k)}(0)+\int_0^t h(t,u)Ex(u)du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z_k(t)Ey^{(k)}(0). \end{aligned}$$

响应 $y(t)$ 的相关函数

$$R_y(t_1,t_2) \triangleq Ey(t_1)y(t_2) = E[y_s(t_1)+y_r(t_1)]\cdot[y_s(t_2)+y_r(t_2)]$$
$$= Ey_s(t_1)y_s(t_2) + Ey_r(t_1)y_r(t_2) + \underbrace{Ey_s(t_1)y_r(t_2)}_{\text{独立}} + \underbrace{Ey_r(t_1)y_s(t_2)}_{\text{独立}}$$
$$= R_{y_s}(t_1,t_2) + R_{y_r}(t_1,t_2).$$

$$R_{y_s}(t_1,t_2) \triangleq Ey_s(t_1)y_s(t_2) = E\sum_k y^{(k)}(0)z_k(t_1)\sum_i y^{(i)}(0)z_i(t_2)$$
$$= \sum_k\sum_i z_k(t_1)z_k(t_2)Ey^{(k)}(0)y^{(i)}(0)$$
$$= (z_0(t_1),\cdots,z_{n-1}(t_1))$$
$$\cdot\begin{pmatrix} Ey^{(0)}(0)y^{(0)}(0) & \cdots & Ey^{(0)}(0)y^{(n-1)}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ Ey^{(n-1)}(0)y^{(0)}(0), & \cdots & Ey^{(n-1)}(0)y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_0(t_2) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t_2) \end{pmatrix}$$
$$\triangleq Z_1^T Y Z_2.$$

$$R_{y_s}(t_1,t_2) = Z_1^T Y Z_2,$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} z_0(t_1) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t_1) \end{pmatrix}, \qquad Z_2 = \begin{pmatrix} z_0(t_2) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t_2) \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} Ey^{(0)}(0)y^{(0)}(0) & \cdots & Ey^{(0)}(0)y^{(n-1)}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ Ey^{(n-1)}(0)y^{(0)}(0), & \cdots & Ey^{(n-1)}(0)y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}$$

$$= E\begin{pmatrix} y^{(0)}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} (y^{(0)}(0), \cdots y^{(n-1)}(0)).$$

$$
\begin{aligned}
R_{y_r}(t_1,t_2) &= Ey_r(t_1)y_r(t_2) \\
&= E\int_0^{t_1} h(t_1,u)x(u)du \int_0^{t_2} h(t_2,v)x(v)dv \\
&= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1,u)h(t_2,v)Ex(u)x(v)dudv \\
&= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1,u)h(t_2,v)R_{xx}(u,v)dudv.
\end{aligned}
$$

$$
R_y(t_1,t_2) = R_{y_s}(t_1,t_2) + R_{y_r}(t_1,t_2).
$$