Contents

1 基本概念介绍

22 状态的 EKF 方法，da_x, da_y, da_z 表示在机体坐标系中测量得到的角速度测量值，由陀螺仪给出；dv_x, dv_y, dv_z 表示在机体坐标系中测量得到的加速度值，由加速度计给出；q0, q1, q2, q3 表示机体坐标系相对于当地 NED 坐标系的四元数；vn, ve, vd 表示在 NED 坐标系中速度；pn, pe, pd 表示在 NED 坐标系中的位置；dax_b, day_b, daz_b 表示角速度的漂移量；dvz_b 表示重力加速度漂移；gn, ge, gd 表示重力加速度在 ned 坐标系中的分量；daxcov, daycov, dazcov, dvxcov, dvycov, dvzcov 表示对应的协方差；vwn, vwe 表示 NE 的风速，

2 EKF 基本原理

2.1 EKF 基本方程

扩展卡尔曼滤波的状态方程和观测方程如下式所示：

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k) \\ z_k = h(x_k, v_k) \end{cases} \tag{1}$$

EKF 的状态变量为 $x = [q; v_n; p_n; da_b; dv_b; vw; m_n; m_b]$，其中 $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ 为机体坐标系 i 系到导航坐标系 n 系的四元数；v_n 表示导航坐标系 n 系中的速度；p_n 表示导航坐标系 n 系中的位置；vw 表示导航坐标系 n 系中的 n, e 方向上的风速 $vw = [vwn, vwe]$；m_n 表示在导航坐标系 n 系中的磁场；m_b 表示在机体坐标系 b 系中的磁场。

EKF 的测量向量为 $z = [v_n, p_n,\ vw, m_b, w_o, d_r]$，其中 v_n 为在导航坐标系下的速度 $v_n = [v_n, v_e, v_d]$，p_n 为在导航坐标系下的位置 $p_n = [p_n, p_e, p_d]$，v_n, p_n 由 GPS 的给出；vw 为空速，由空速管给出；m_b 为磁场强度，由磁罗盘给出；w_o 为下视光溜传感器给出的 xy 方向上的的角速度；d_r 为超声波模块给出的距离。

EKF 的输入向量 u_k 为 $\delta v, \delta\theta$，表示 IMU 测得的加速度和角速度，

在公式 (1) 中，显然我们不知道每一个时刻噪声 w_k 和 v_k 的值。但是我们可以将它们假设为 0，从而估计状态向量和观测向量为

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k, 0) \\ \tilde{z}_k = h(\tilde{x}_k, 0) \end{cases} \tag{2}$$

为了估计 (2)，首先将 (2) 进行线性化表示：

$$\begin{cases} x_k \approx \tilde{x}_k + A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + Ww_{k-1} \\ z_k \approx \tilde{z}_k + H(x_k - \hat{x}_k) + Vv_k \end{cases} \tag{3}$$

在公式 (3) 中，x_k 和 z_k 为状态向量和观测向量的真值，$\tilde{x}_k$ 和 $\tilde{z}_k$ 来自 (2)，表示状态向量和观测向量的估计值，$\hat{x}_k$ 表示 k 时刻状态向量的后验估计，随机向量 w_k 和 v_k 表示过程噪声和观测噪声；A 表示 f 对 x 的偏导的雅可比矩阵：

$$A_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{x}_k, u_k, 0)$$

W 是 f 对 w 的偏导的雅可比矩阵：

$$W_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{x}_k, u_k, 0)$$

H 是 h 对 x 的偏导的雅可比矩阵：

$$H_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0)$$

V 是 h 对 v 的偏导的雅可比矩阵：

$$V_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0)$$

2.2 EKF 更新方程

EKF 更新方程依次为：

四元数更新方程：

$$\begin{cases} q_{k+1} = q_k * \Delta_q \\ \Delta_q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 * \delta\theta_{xc} \\ 0.5 * \delta\theta_{yc} \\ 0.5 * \delta\theta_{zc} \end{bmatrix} \\ \delta\theta_c = \delta\theta - \delta\theta_b \end{cases} \tag{4}$$

公式 (4) 中 $\delta\theta$ 表示陀螺仪测得的角度变化，$\delta\theta_b$ 表示陀螺仪漂移量的估计值。

速度更新方程：

$$v_{k+1} = v_k + g * dt + R_b^n(\delta v - \delta v_b) \tag{5}$$

公式 (5) 中 δv 表示加速度计测得的加速度，δv_b 表示估计的加速度漂移值，由于加速度测量的为比力，所以需要加上重力加速度。

位置更新方程：

$$p_{k+1} = p_k + v_k * dt \tag{6}$$

公式 (6) 中 v_k 表示当前时刻的速度值，dt 为更新的时间间隔。

IMU 偏移更新方程：

$$\delta v_b^{k+1} = \delta v_b^k \tag{7}$$

$$dv_{k+1}^b = dvz_k \tag{8}$$

地磁更新方程：

$$m_n^{k+1} = m_n^k \tag{9}$$

机体磁更新方程：

$$m_b^{k+1} = m_b^k \tag{10}$$

2.3 更新方程各个变量求解

预测误差和观测变量的残差的表达式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}_{x_k} = x_k - \tilde{x}_k \\ \tilde{e}_{z_k} = z_k - \tilde{z}_k \end{array} \right. \tag{11}$$

公式中（11）上面的式子中 x_k 为状态变量的真实值，是无法准确知道的，是我们需要估计的对象。同样，在下面的式子中 z_k 为观测变量的真实值，也是无法准确知道的。结合公式（3）和公式（11），可以得到公式（12）。

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}_{x_k} \approx A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \epsilon_k \\ \tilde{e}_{z_k} \approx H\tilde{e}_{x_k} + \eta_k \end{array} \right. \tag{12}$$

在公式（12）中，ϵ_k 和 η_k 分别代表具有零均值和协方差矩阵为 WQW^T 和 VRV^T 的独立随机变量。

扩展卡尔曼滤波器时间更新方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \\ P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T \end{array} \right. \tag{13}$$

公式（13）中的第一个方程中 $\hat{x}_{k-1}$ 表示先验的值，也即上一次后验估计值，$\hat{x}_k^-$ 为先验的预测值，即根据上一次后验估计值预测得到的值。P_k^- 为先验估计值 $\hat{x}_k^-$ 的协方差。

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{da^x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{da^y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{da^z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{dv^x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{dv^y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{dv^z} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$WQW \tag{15}$$

2.4 EKF 观测方程

NED 坐标系 GPS 观测方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = v_k \\ z_2 = p_k \end{array} \right. \tag{16}$$

NED 坐标系空速观测方程：

$$z_3 = vw \tag{17}$$

b 系磁场观测方程：

$$z_4 = m_b \tag{18}$$

光流传感器观测方程：

超声波高度观测方程：

$$z_5 = p_z \tag{19}$$

2.5 EKF 测量更新方程

卡尔曼增益计算公式：

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k^- V_k^T)^{-1} \tag{20}$$

由观测变量 z_k 进行更新：

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \tag{21}$$

更新协方差矩阵：

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \tag{22}$$