TP1

November 18, 2020

[271]:
```
from __future__ import print_function
import matplotlib.pyplot as plt
import random
import numpy as np
import seaborn as sns
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy import stats
from matplotlib import colors
from ipywidgets import interact, interactive, fixed, interact_manual
import ipywidgets as widgets
from IPython.core.display import HTML
plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True,
    "font.family": "sans-serif",
    "font.sans-serif": ["Helvetica"]})
```

1 Ejercicio 1

a) Implementar un Generador Congruencial Lineal (GCL) de módulo 2^{32}, multiplicador 1013904223, incremento de 1664525 y semilla igual a la parte entera del promedio de los números de padrón de los integrantes del grupo.

[243]:
```
SEED = int((99423 + 99616 + 97649 + 99131)/4)
random.seed(SEED)
GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
```

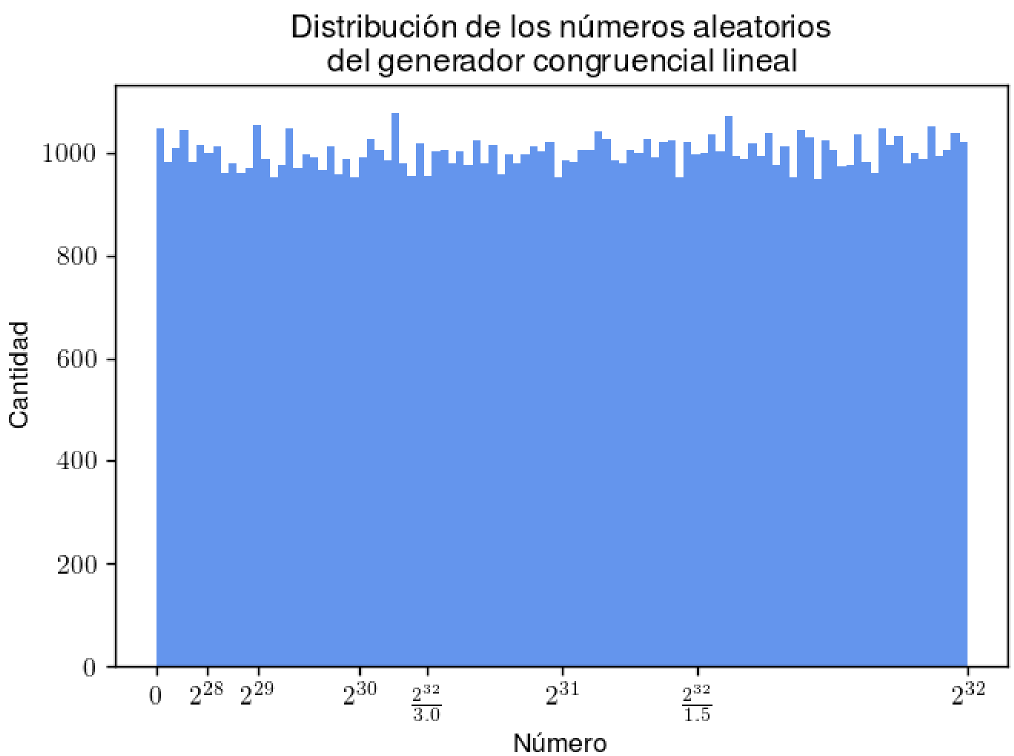
[244]:
```
def gcl_generator() -> int:
    global GCL_PREVIOUS_STATE
    new_number = (1013904223 * GCL_PREVIOUS_STATE + 1664525) % 2**32
    GCL_PREVIOUS_STATE = new_number
    return new_number
```

b) Modificar el GCL implementado en el punto a) para que devuelva números al azar entre 0 y 1

[245]:
```
def gcl_between_0_and_1() -> float:
    return gcl_generator()/2**32
```

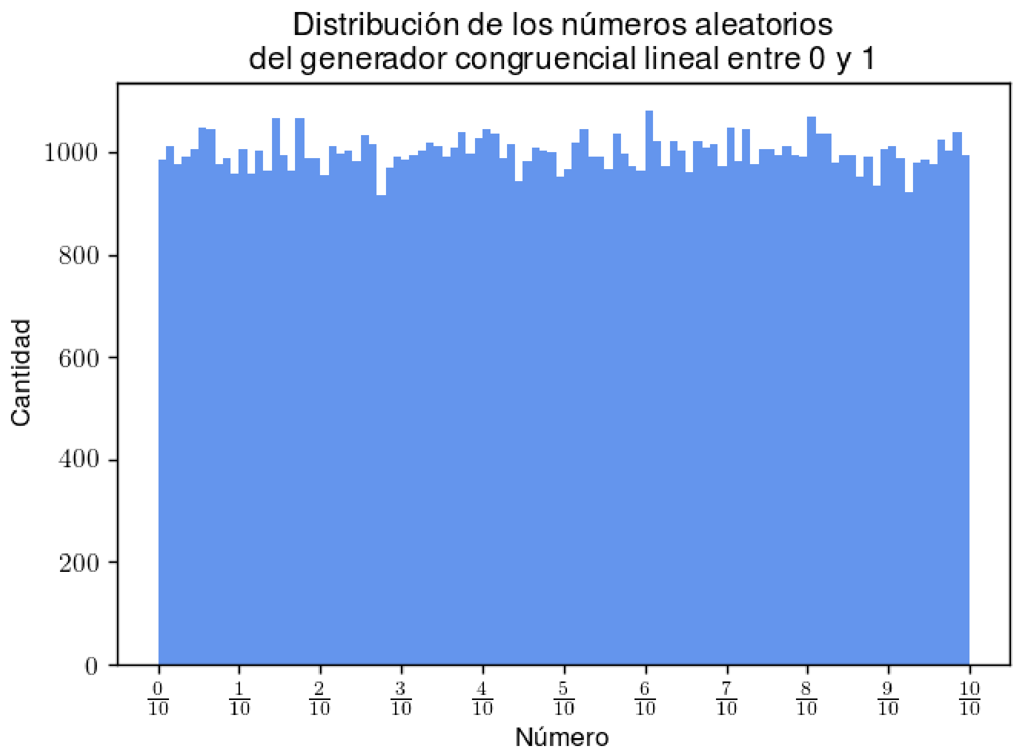
c) Realizar los gráficos que considere necesarios para mostrar las distribuciones de números al azar generados en los puntos a) y b)

[246]:
```
samples_gcl = [gcl_generator() for _ in range(100000)]
plt.figure(dpi=125)
plt.title('Distribución de los números aleatorios\n del generador congruencial␣
 ↪lineal')
plt.hist(samples_gcl, bins=100, color="cornflowerblue")
plt.ylabel("Cantidad")
plt.xticks([0]+[2**i for i in range(28,33)]+[2**32/i for i in [3,1.5]],
           [r"$0$"]+[r"$2^{%d}$"%i for i in range(28,33)]+[r"$\frac{2^{32}}{%.
 ↪1f}$"%i for i in [3,1.5]])
plt.xlabel("Número")
plt.show()
```



[247]:
```
samples_gcl = [gcl_between_0_and_1() for _ in range(100000)]
plt.figure(dpi=125)
plt.title('Distribución de los números aleatorios\n del generador congruencial␣
 ↪lineal entre 0 y 1')
```

```
plt.hist(samples_gcl, bins=100, color="cornflowerblue")
plt.ylabel("Cantidad")
plt.xticks([i/10 for i in range(0, 11)], [r"$\frac{%d}{10}$"%i for i in␣
↪range(0, 11)])
plt.xlabel("Número")
plt.show()
```



2 Ejercicio 2

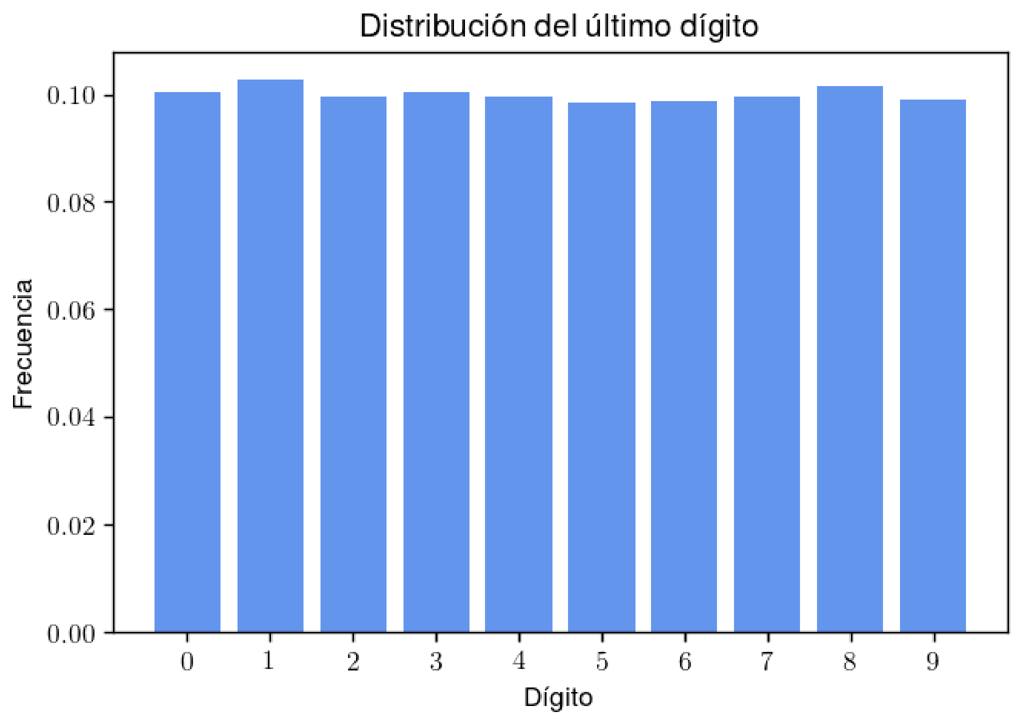
Proponer, y realizar, al menos 2 tests sobre el generador congruencial lineal implementado en el Ejercicio 1. Evaluar e interpretar los resultados de cada uno.

2.0.1 Primer test

Realizamos un test chi cuadrado sobre el último dígito del generador con una significancia del 1% y una muestra de tamaño 100.000 a partir de las siguientes hipótesis:

- H0: La distribución es uniforme
- H1: La distribución no es uniforme

```
[248]: from collections import Counter
GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
sample = [str(gcl_generator())[-1] for i in range(100000)]
occurence_counter = Counter(sample)
plt.figure(dpi=125)
plt.title(r"Distribución del último dígito")
plt.bar([r"$%d$"%i for i in range(0,10)],
        [occurence_counter["%d"%i]/sum(occurence_counter.values()) for i in␣
 ↪range(0,10)],
        color="cornflowerblue")
plt.xlabel("Dígito")
plt.ylabel("Frecuencia")
plt.show()
```



Como tenemos 10 clases tenemos trabajamos con 9 grados de libertad

$$X^2_{9,0.99} = 21.66$$

Sabemos que la probabilidad de cada dígito debiera ser $p_i = \frac{1}{10}$, calculamos:

$$D^2 = \sum_{i=0}^{9} \frac{(n_{obsi} - Np_i)^2}{Np_i}$$

[249]:
```python
d_squared = 0
sample_size = sum(occurence_counter.values())
for k in [str(i) for i in range(10)]:
    d_squared += ((occurence_counter[k]-sample_size*0.1)**2)/(sample_size*0.1)
print("D squared is: ", d_squared)
```

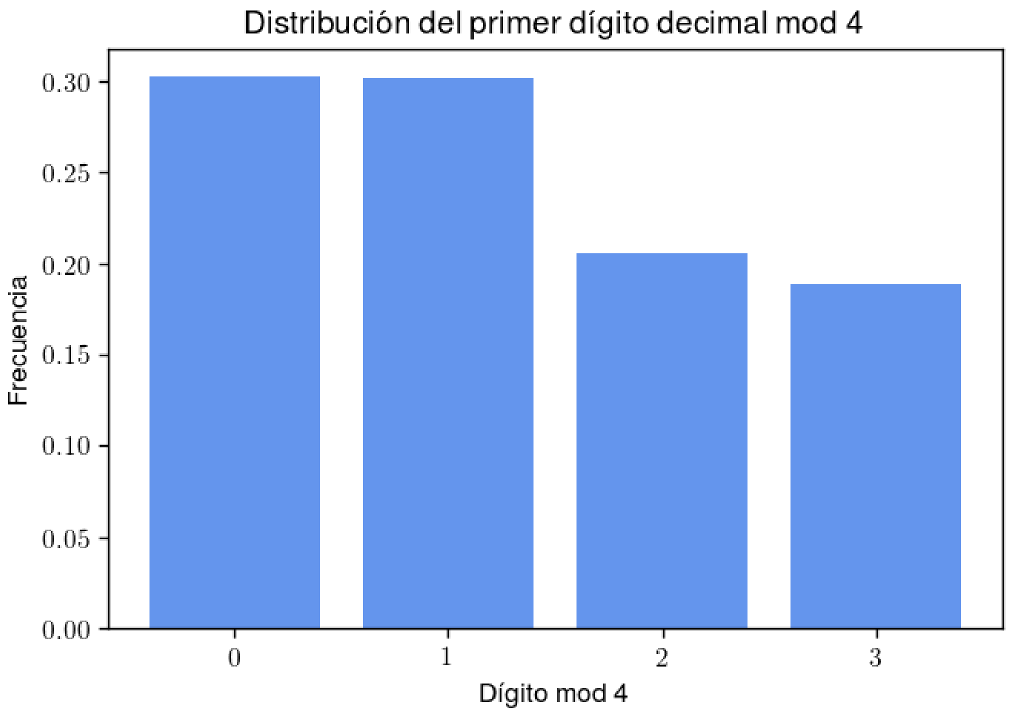
```
D squared is:  16.9624
```

Como $D^2 = 16.9624 < D = 21.66$ no somos capaces de rechazar **H0**.

2.0.2 Segundo test

Realizamos un test chi cuadrado sobre el primer dígito decimal mod 4 despues de la coma del generador [0,1] con una muestra de 1000 y significacion del 10% * H0: La distribución es uniforme * H1: La distribución no es uniforme

[250]:
```python
from collections import Counter
GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
sample = [int(str(gcl_between_0_and_1())[2]) % 4 for i in range(1000)]
occurence_counter = Counter(sample)
plt.figure(dpi=125)
plt.title(r"Distribución del primer dígito decimal mod 4")
plt.bar([r"$%d$"%i for i in range(0,4)],
        [occurence_counter[i]/sum(occurence_counter.values()) for i in␣
 ↪range(0,4)],
        color="cornflowerblue")
plt.xlabel(r"Dígito mod 4")
plt.ylabel(r"Frecuencia")
plt.show()
```



Como tenemos 4 clases trabajamos con 3 grados de libertad:

$$X^2_{3,0.9} = 7.7794$$

Ahora las p_i esperadas para cada dígito son:

$p_0 = p_1 = \frac{3}{10}$ y $p_2 = p_3 = \frac{2}{10}$

Calculamos:

$$D^2 = \sum_{i=0}^{4} \frac{(n_{obsi} - Np_i)^2}{Np_i}$$

[251]:
```
expected_proba = {0: 3/10, 1: 3/10, 2: 2/10, 3: 2/10}
d_squared = 0
sample_size = sum(occurence_counter.values())
for k in range(4):
    d_squared += (occurence_counter[k]-sample_size*expected_proba[k])**2/
 ↪(sample_size*0.1)
print("D squared is: ", d_squared)
```

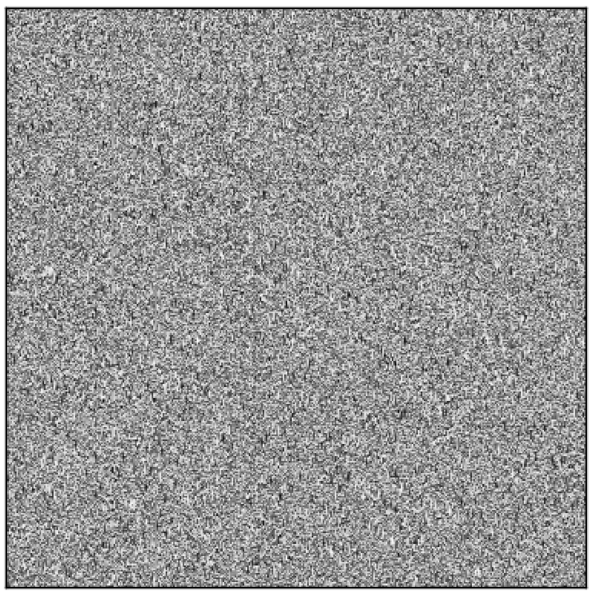
```
D squared is:  1.7
```

Como $D^2 = 1.7 < D = 7.7794$ no somos capaces de rechazar **H0**.

2.0.3 Tests empíricos

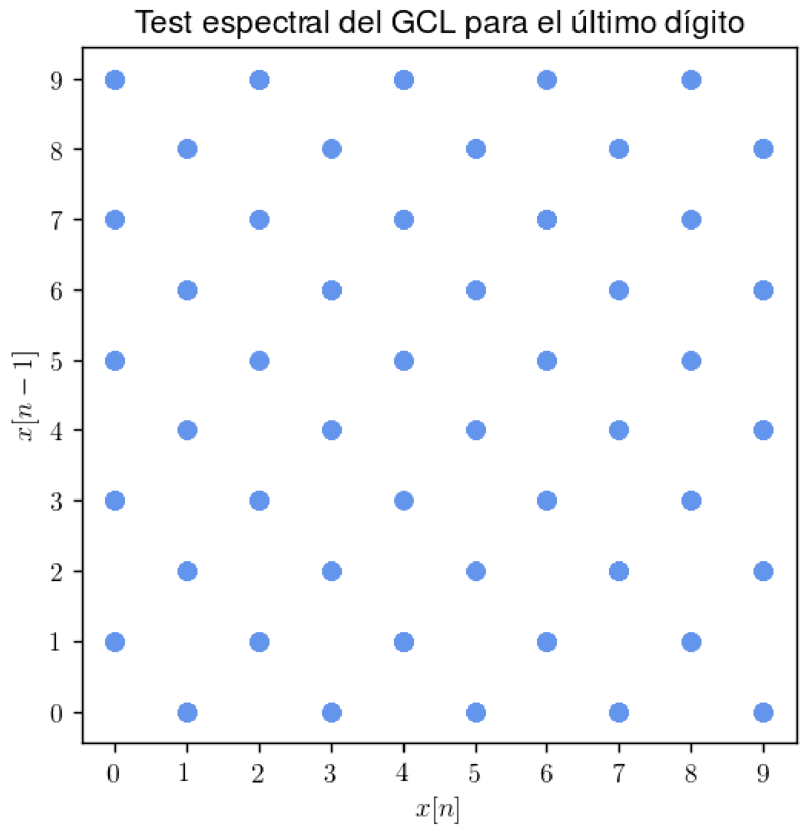
[274]:
```
GRID_SIZE = 512

GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
grid = np.array([[gcl_between_0_and_1() for __ in range(GRID_SIZE)] for _ in␣
 ↪range(GRID_SIZE)])
plt.figure(dpi=125)
plt.imshow(grid, cmap='Greys')
plt.yticks([], [])
plt.xticks([], [])
plt.title("GCL $\mathcal{U} \sim (0,1)$ bitmap")
plt.show()
```

GCL $\mathcal{U} \sim (0,1)$ bitmap



[294]:
```
GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
SAMPLE_SIZE = 512
sample = [gcl_generator()%10 for _ in range(SAMPLE_SIZE)]
x = []
y = []
for i in range(1, SAMPLE_SIZE):
    x.append(sample[i])
    y.append(sample[i-1])
plt.figure(dpi=125, figsize=(4.8,4.8))
plt.scatter(x, y, color='cornflowerblue')
plt.ylabel("$x[n-1]$")
```

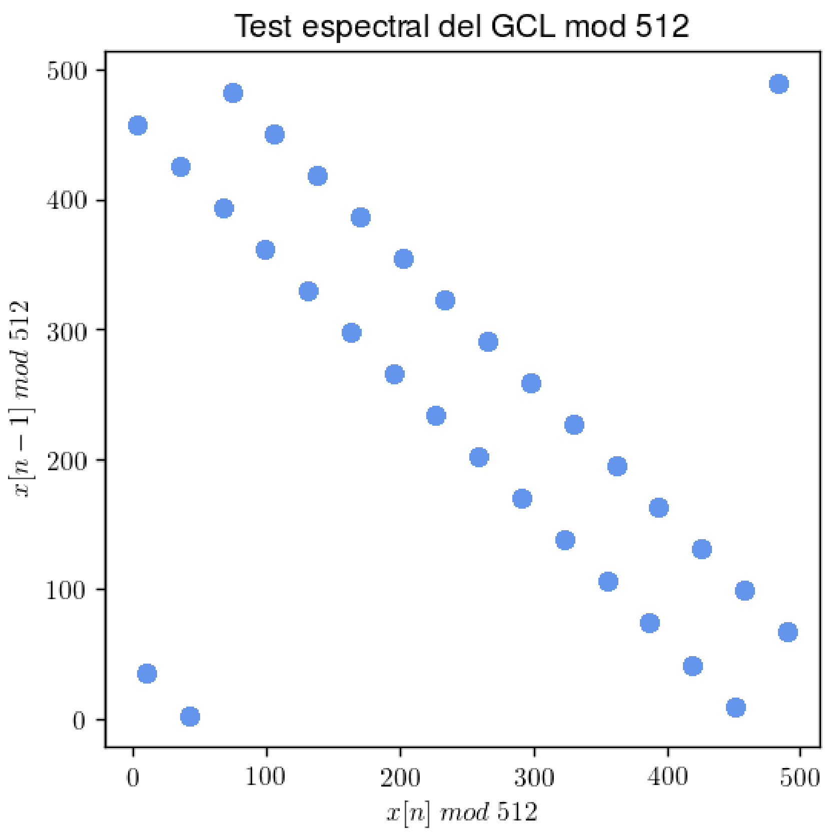
```
plt.xlabel("$x[n]$")
plt.xticks([i for i in range(10)],["$%d$"%i for i in range(10)])
plt.yticks([i for i in range(10)],["$%d$"%i for i in range(10)])
plt.title("Test espectral del GCL para el último dígito")
plt.show()
```



[314]:

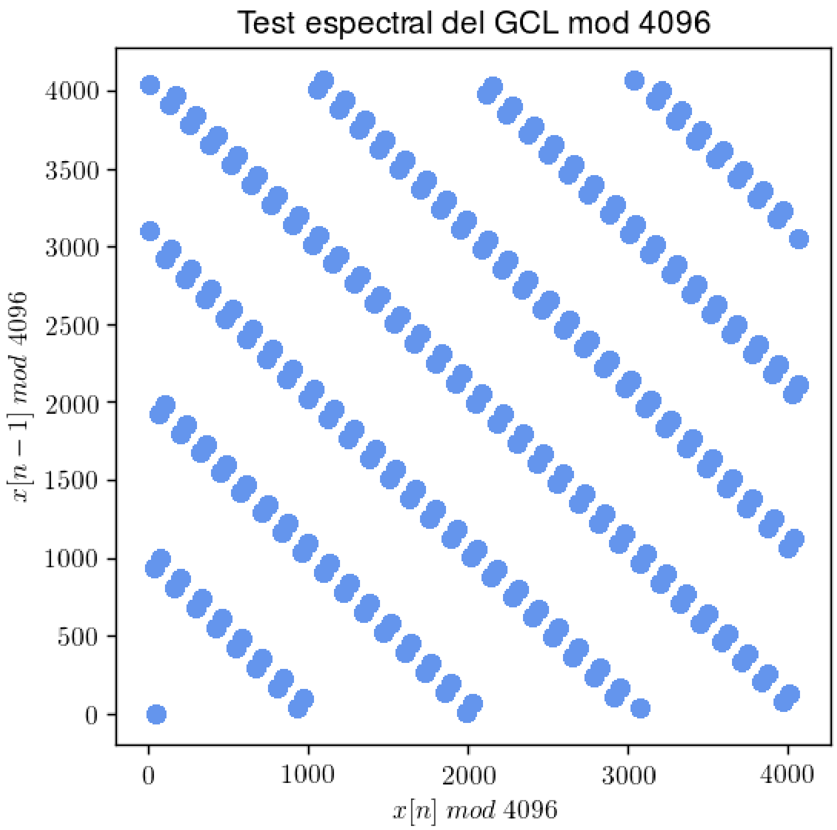
```
GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
MOD = 512
SAMPLE_SIZE = 10000
sample = [gcl_generator()%MOD for _ in range(SAMPLE_SIZE)]
x = []
y = []
for i in range(1, SAMPLE_SIZE):
    x.append(sample[i])
    y.append(sample[i-1])
plt.figure(dpi=125, figsize=(4.8,4.8))
plt.scatter(x, y, color='cornflowerblue')
plt.ylabel("$x[n-1]\ mod\ %d$"%MOD)
plt.xlabel("$x[n]\ mod\ %d$"%MOD)
plt.title("Test espectral del GCL mod %d"%MOD)
```

```
plt.show()
```



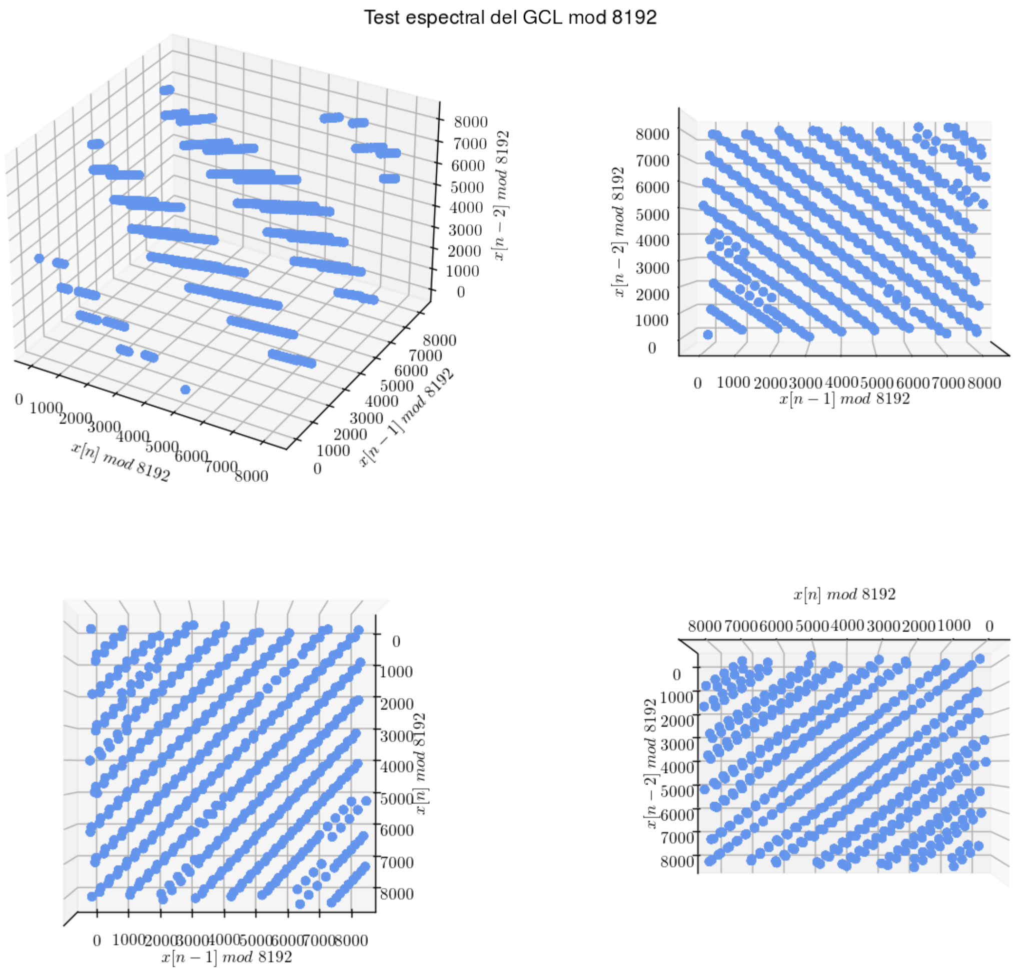
[315]:

```
GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
MOD = 4096
SAMPLE_SIZE = 10000
sample = [gcl_generator()%MOD for _ in range(SAMPLE_SIZE)]
x = []
y = []
for i in range(1, SAMPLE_SIZE):
    x.append(sample[i])
    y.append(sample[i-1])
plt.figure(dpi=125, figsize=(4.8,4.8))
plt.scatter(x, y, color='cornflowerblue')
plt.ylabel("$x[n-1]\ mod\ %d$"%MOD)
plt.xlabel("$x[n]\ mod\ %d$"%MOD)
plt.title("Test espectral del GCL mod %d"%MOD)
plt.show()
```



[363]:
```
GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
MOD = 4096*2
SAMPLE_SIZE = 10000
sample = [gcl_generator()%MOD for _ in range(SAMPLE_SIZE)]
x = []
y = []
z = []
for i in range(2, SAMPLE_SIZE):
    x.append(sample[i])
    y.append(sample[i-1])
    z.append(sample[i-2])
fig = plt.figure(dpi=125, figsize=(6.4*2,4.8*2))
plt.subplots_adjust(left = 0.125,  # the left side of the subplots of the figure
right = 0.9,    # the right side of the subplots of the figure
bottom = 0.1,  # the bottom of the subplots of the figure
top = 0.99,     # the top of the subplots of the figure
wspace = 0.1,  # the amount of width reserved for space between subplots,
              # expressed as a fraction of the average axis width
hspace = 0.1)
fig.suptitle("Test espectral del GCL mod %d"%MOD)
```

```
ax = fig.add_subplot(221, projection='3d')
ax.scatter(x, y, z, color='cornflowerblue', alpha=0.7)
ax.set_zlabel("$x[n-2]\ mod\ %d$"%MOD)
ax.set_ylabel("$x[n-1]\ mod\ %d$"%MOD)
ax.set_xlabel("$x[n]\ mod\ %d$"%MOD)
ax = fig.add_subplot(222, projection='3d')
ax.scatter(x, y, z, color='cornflowerblue', alpha=0.7)
ax.set_zlabel("$x[n-2]\ mod\ %d$"%MOD)
ax.set_ylabel("$x[n-1]\ mod\ %d$"%MOD)
ax.set_xlabel("")
ax.set_xticks([])
ax.view_init(0, 0)
ax = fig.add_subplot(223, projection='3d')
ax.scatter(x, y, z, color='cornflowerblue', alpha=0.7)
ax.set_ylabel("$x[n-1]\ mod\ %d$"%MOD)
ax.set_xlabel("$x[n]\ mod\ %d$"%MOD)
ax.set_zlabel("")
ax.set_zticks([])
ax.view_init(90, 0)
ax = fig.add_subplot(224, projection='3d')
ax.scatter(x, y, z, color='cornflowerblue', alpha=0.7)
ax.set_zlabel("$x[n-2]\ mod\ %d$"%MOD)
ax.set_xlabel("$x[n]\ mod\ %d$"%MOD)
ax.set_ylabel("")
ax.set_yticks([])
ax.view_init(180, 90)
plt.show()
```



2.1 Interpretación de los resultados

No *logramos* rechazar H0 para los tests propuestos y muestras tomadas. Si los tests son lo suficientemente rigurosos para nuestras exigencias, (en diseño del test, significancia y en tamaño de la muestra) no deberíamos notar diferencia entra una distribución uniforme y nuestro generador, por lo que podriamos usarlas indistintamente siempre y cuando no dependamos de que el orden de la muestra tambien se comporte como una uniforme, esto implica:

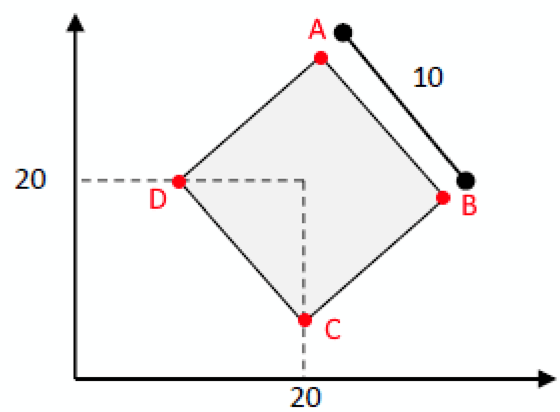
$$X_1, \ldots, X_n \sim GCLP(X_n = x_n | X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) \neq P(X_n = x_n)$$

3 Ejercicio 3

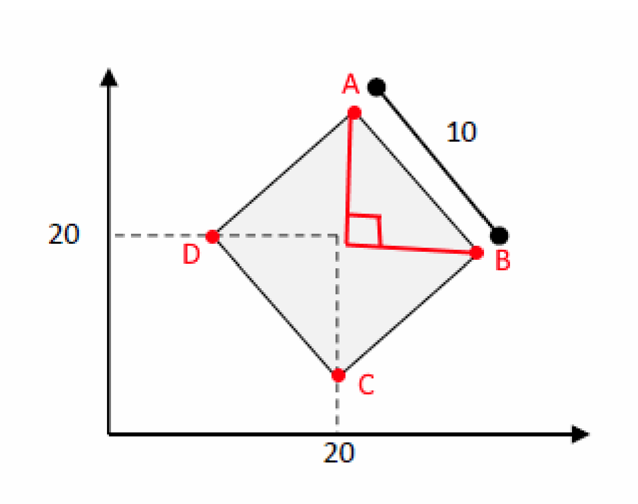
Se desea generar puntos al azar con distribución uniforme dentro del área descripta en el gráfico utilizando los siguientes generadores de números al azar:

a) Generadores de números al azar con distribución uniforme, provistos por el lenguaje elegido para resolver el tp

Queremos encontrar los vertices del cuadrado para hallar las rectas que delimitan su interior.



Para esto podemos plantear un triangulo rectángulo en donde ambos catetos tienen la misma longitud:



$10^2 = c^2 + c^2 \rightarrow 10^2 = 2 * c^2 \rightarrow 50 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{50} \vee c = -\sqrt{50}$

Como sabemos que c>0 entonces c es la raiz de 50.

Entonces los puntos A, B, C y D son:

$\vec{A} = (20, 20 + \sqrt{50})$, $\vec{B} = (20 + \sqrt{50}, 20)$, $\vec{C} = (20, 20 - \sqrt{50})$ y $\vec{D} = (20 - \sqrt{50}, 20)$

Habiendo encontrado estos puntos, podemos calcular la recta correspondiente a los segmentos AB, BC, CD y DA:

$$y = m * x + bm = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces las rectas nos quedan:

$$y_{\vec{AB}}(x) = -x + 40 + \sqrt{50}y_{\vec{BC}}(x) = x - \sqrt{50}y_{\vec{CD}}(x) = -x + 40 - \sqrt{50}y_{\vec{DA}}(x) = x + \sqrt{50}$$

Un punto del plano genérico (x, y) es válido si y solo si $x > 20 - \sqrt{50} \wedge x < 20 + \sqrt{50}$ y además:

$$y \leq \begin{cases} y_{\vec{AB}}(x) & x \geq 20 \\ y_{\vec{DA}}(x) & x < 20 \end{cases} \quad y \geq \begin{cases} y_{\vec{BC}}(x) & x \geq 20 \\ y_{\vec{CD}}(x) & x < 20 \end{cases}$$

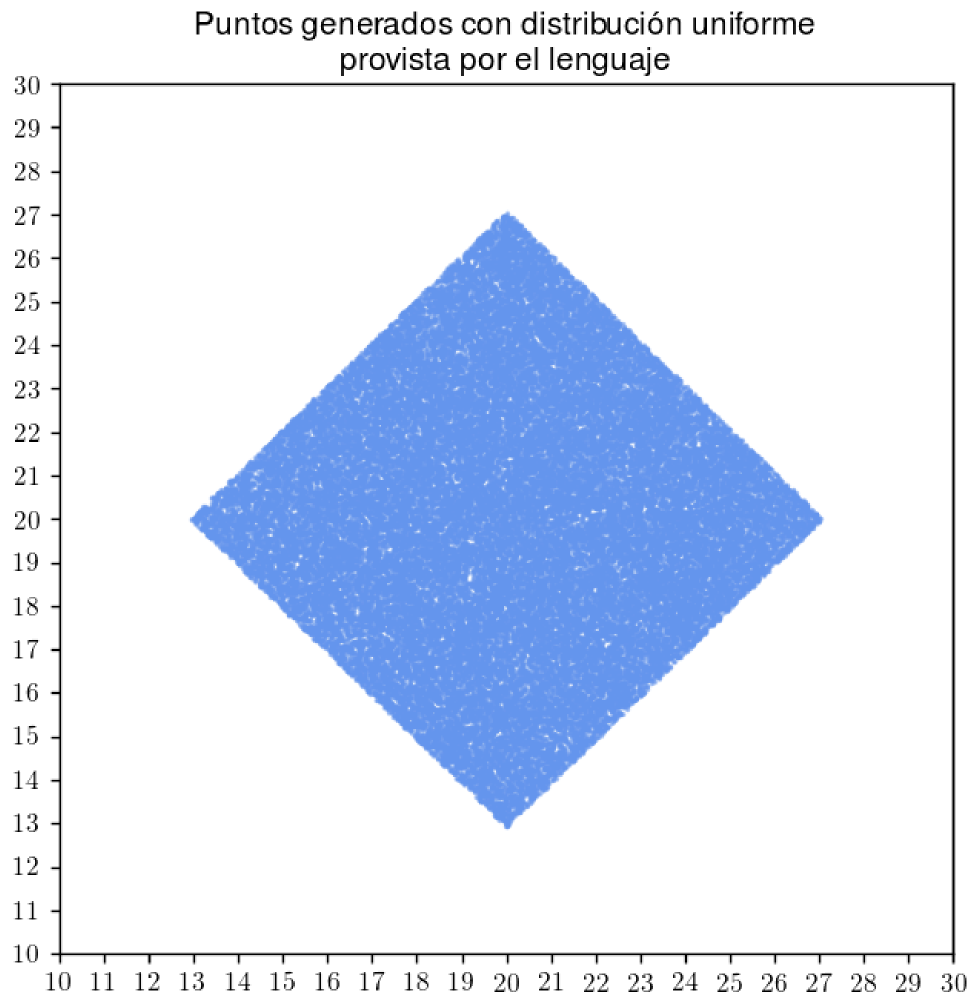
Dadas estas relaciones que deben cumplirse, se programarán funciones en Python para que dado un punto del plano (x, y), se indique si este se encuentra o no dentro de la figura. Utilizaremos el método de Aceptación/Rechazo, aceptando aquellos números que efectivamente caigan dentro del área circunscripta por los lados del cuadrado y rechazando aquellos que no lo hagan.

[11]:
```
def yab(x):
    return -x + 40 + 50**(1/2)

def ybc(x):
    return x - 50**(1/2)

def ycd(x):
    return -x + 40 - 50**(1/2)

def yda(x):
    return x + 50**(1/2)

def point_valid(x,y) -> bool:
    if x<20-50**(1/2) or x>20+50**(1/2):
        return False
    if x>=20:
        return y>=ybc(x) and y<=yab(x)
    else:
        return y>=ycd(x) and y<=yda(x)
```

Generamos ahora la figura pedida utilizando dos uniformes $[20 - \sqrt{50}, 20 + \sqrt{50}]$

[12]:
```
random.seed(SEED)
points = []
for i in range(100000):
    x = random.uniform(20-50**(1/2), 20+50**(1/2))
```

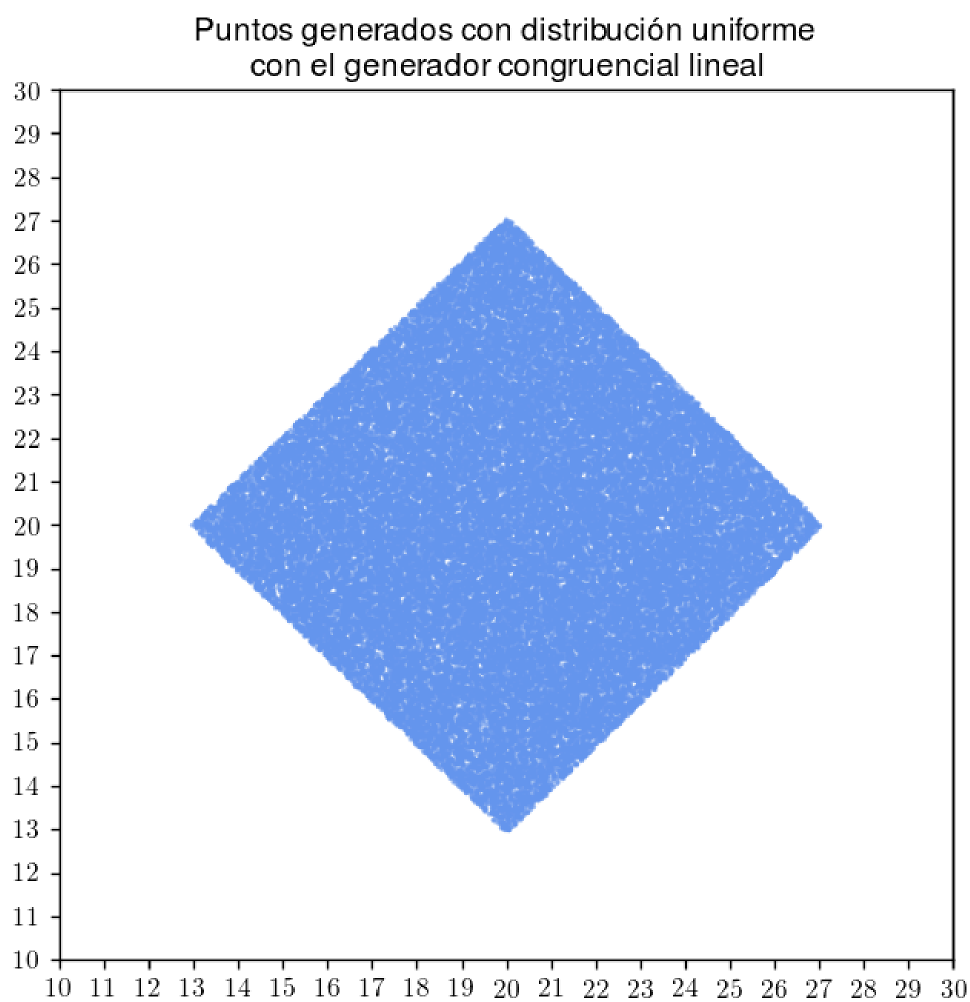
```
    y = random.uniform(20-50**(1/2), 20+50**(1/2))
    if point_valid(x,y):
        points.append((x,y))
plt.figure(dpi=125, figsize=(6, 6))
plt.scatter([p[0] for p in points], [p[1] for p in points],␣
 ↪color="cornflowerblue", alpha=0.5, s=1)
plt.xticks([i for i in range(10,31)],[r"$%d$"%i for i in range(10,31)])
plt.yticks([i for i in range(10,31)],[r"$%d$"%i for i in range(10,31)])
plt.title("Puntos generados con distribución uniforme\n provista por el␣
 ↪lenguaje")
plt.show()
```



b) Generadores de números al azar implementados con el algoritmo del ejercicio 1.

Volvemos a generar puntos en dos dimensiones, simulando dos valores correspondientes a un punto en el plano (x, y), solamente que utilizamos nuestro generador. Volvemos a hacer uso del método de Aceptación/Rechazo.

[13]:
```
GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
points = []
for i in range(100000):
    x = 20-50**(1/2) + gcl_between_0_and_1()*2*(50**(1/2))
    y = 20-50**(1/2) + gcl_between_0_and_1()*2*(50**(1/2))
    if point_valid(x,y):
        points.append((x,y))
plt.figure(dpi=125, figsize=(6, 6))
plt.scatter([p[0] for p in points], [p[1] for p in points],␣
 ↪color="cornflowerblue", alpha=0.5, s=1)
plt.xticks([i for i in range(10,31)],[r"$%d$"%i for i in range(10,31)])
plt.yticks([i for i in range(10,31)],[r"$%d$"%i for i in range(10,31)])
plt.title("Puntos generados con distribución uniforme\n con el generador␣
 ↪congruencial lineal")
plt.show()
```



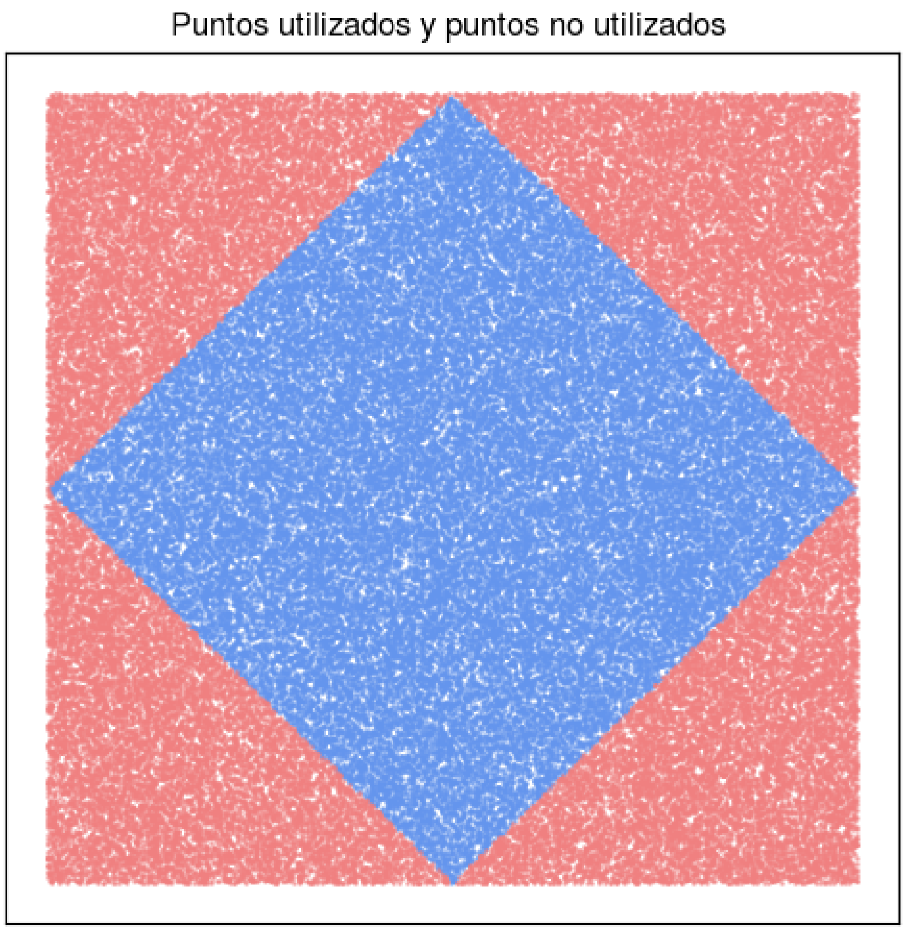
c) Calcule el factor de rendimiento del método.

Sea R el factor de rendimiento que queremos calcular; sea P_a el total de puntos aceptados dada una simulación; y sea P_g el total de puntos generados en toda la simulación. Podemos calcular R como:

$$R = \frac{P_a}{P_g}$$

Procedemos a realizar este cálculo.

[14]:
```
random.seed(SEED)
points = []
unused_points = []
for i in range(100000):
    x = random.uniform(20-50**(1/2), 20+50**(1/2))
    y = random.uniform(20-50**(1/2), 20+50**(1/2))
    if point_valid(x,y):
        points.append((x,y))
    else:
        unused_points.append((x,y))
plt.figure(dpi=100, figsize=(6, 6))
plt.scatter([p[0] for p in points], [p[1] for p in points],␣
 ↪color="cornflowerblue", alpha=0.5, s=1, label="Puntos útiles")
plt.scatter([p[0] for p in unused_points], [p[1] for p in unused_points],␣
 ↪color="lightcoral", alpha=0.5, s=1, label="Puntos no utilizados")
plt.xticks([],[])
plt.yticks([],[])
plt.title("Puntos utilizados y puntos no utilizados")
plt.show()
```



Como la densidad es proporcional al área total solo debemos calcular:

$$R_{teorico} = \frac{Area\ util}{Area\ total}$$

Donde el area útil es la correspondiente a la de un cuadrado de 10x10, osea 100. El area total generada con las uniformes es la correspondiente a un cuadrado de lado $2\sqrt{50} = 14.1421$, por lo que el área es 200.

El factor de rendimiento calculado teóricamente entonces es:

$$R_{teorico} = \frac{100}{200} = 0.5$$

[15]:
```
print("R: ", len(points) / (len(points) + len(unused_points)))
```

```
R:  0.50142
```

Calculando el factor de rendimiento en forma empírica a partir de los puntos generados, vemos que el valor práctico se asemeja al valor teórico:

$$R_{empirico} = \frac{P_a}{P_g} = 0.50142$$

d) Proponga el test que considere necesario para demostrar que los números generados siguen la distribución pedida.

Si rotamos los puntos generados 45° respecto del centro del cuadrado original, ubicado en el punto de coordenadas (20,20), obtendremos un nuevo cuadrado tal que:

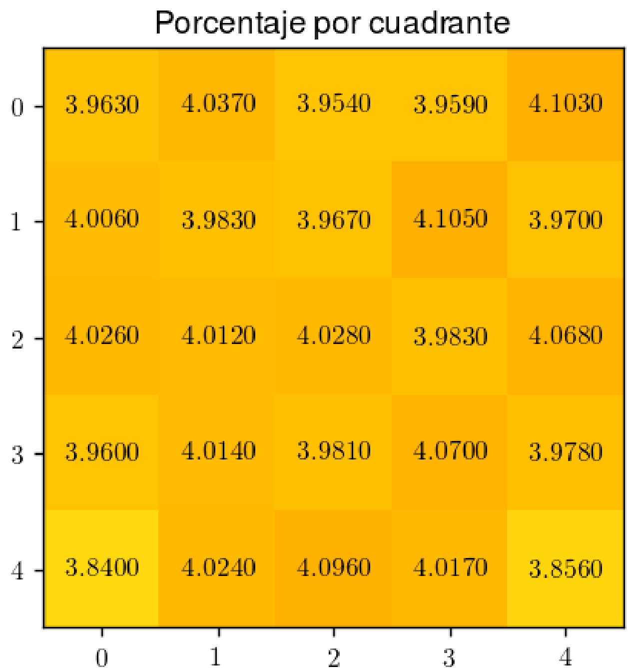
$$y \geq 20 - \sqrt{50} \wedge y \leq 20 + \sqrt{50} x \geq 20 - \sqrt{50} \wedge x \leq 20 + \sqrt{50}$$

Podemos dividir este cuadrado en una grilla de cuadrantes de 5x5, en donde la probabilidad de que un punto generado pertenezca a uno de los cuadrantes es la misma que para todos los demás (es decir, es equiprobable). A partir de esta división, podemos hacer un test chi-cuadrado con significacia 10% y 100000 muestras para ver si se cumple que los puntos generados se reparten equiprobablemente en estos cuadrantes.

- H0: La distribución es uniforme
- H1: La distribución no es uniforme

[16]:
```
import math
def transform_in_unitary_square(x,y):
    new_x = (x-20)*math.cos(math.pi/4)-(y-20)*math.sin(math.pi/4)
    new_y = (x-20)*math.cos(math.pi/4)+(y-20)*math.sin(math.pi/4)
    new_x /= 10
    new_y /= 10
    new_x += 0.5
    new_y += 0.5
    return new_x, new_y

def get_quadrant_tuple(x,y):
    x, y = transform_in_unitary_square(x,y)
    x_q = 4
    y_q = 4
    if x<(1/5):
        x_q = 0
    elif x>=(1/5) and x<(2/5):
        x_q = 1
    elif x>=(2/5) and x<(3/5):
        x_q = 2
    elif x>=(3/5) and x<(4/5):
        x_q = 3
    x = None

    if y<(1/5):
        y_q = 0
```

```
    elif y>=(1/5) and y<(2/5):
        y_q = 1
    elif y>=(2/5) and y<(3/5):
        y_q = 2
    elif y>=(3/5) and y<(4/5):
        y_q = 3

    return x_q, y_q

GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
points = []
while len(points)<100000:
    x = 20-50**(1/2) + gcl_between_0_and_1()*2*(50**(1/2))
    y = 20-50**(1/2) + gcl_between_0_and_1()*2*(50**(1/2))
    if point_valid(x,y):
        points.append((x,y))

quadrants = []
for p in points:
    quadrants.append(get_quadrant_tuple(p[0], p[1]))
quadrant_occurences = Counter(quadrants)
quadrant_matrix = np.zeros((5,5))
for i in range(5):
    for j in range(5):
        quadrant_matrix[i][j] = quadrant_occurences[(i,j)]
plt.figure(dpi=125)
plt.title("Porcentaje por cuadrante")
plt.imshow(quadrant_matrix/quadrant_matrix.sum(), cmap="Wistia",vmin=0.
↪035,vmax=0.045)
for i in range(5):
    for j in range(5):
        plt.gca().text(j, i, r"$%.4f$"%(100*quadrant_matrix[i][j]/
↪quadrant_matrix.sum()),
                       ha="center", va="center", color="black")
```



Como tenemos 25 clases tenemos trabajamos con 24 grados de libertad

$$X^2_{24,0.9} = 33.1962$$

Las p_i para cada cuadrante son:

$p_i = \frac{1}{25}$

Calculamos:

$$D^2 = \sum^2 4_{i=0} \frac{(n_{obsi} - Np_i)^2}{Np_i}$$

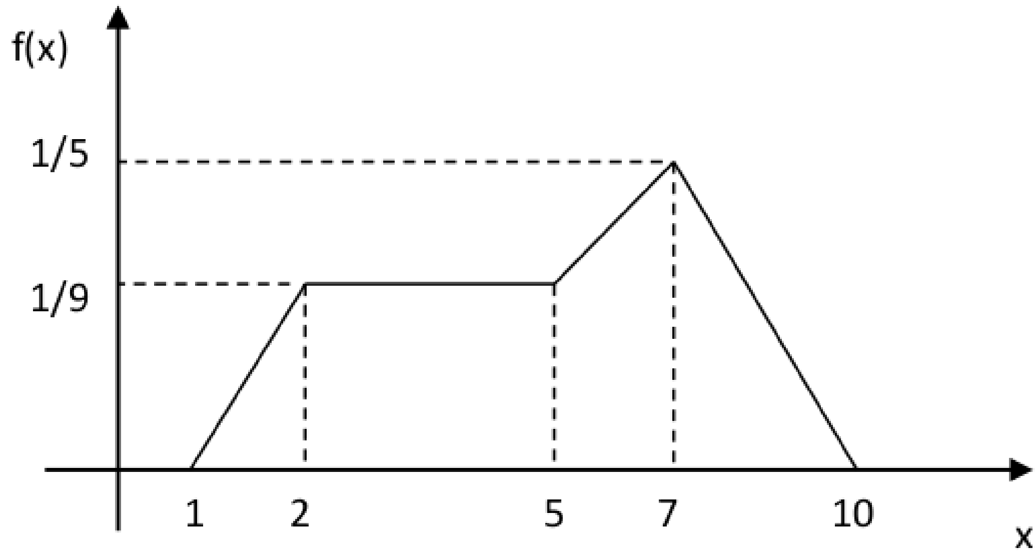
[17]:
```
expected_proba = 1/25
d_squared = 0
sample_size = sum(quadrant_occurences.values())
for i in range(5):
    for j in range(5):
        d_squared += (quadrant_occurences[(i,j)]-sample_size*expected_proba)**2/
↪(sample_size*0.1)
print("D squared is: ", d_squared)
```

```
D squared is:  10.0958
```

Como $D^2 = 10.0958 < D = 33.1962$ no somos capaces de rechazar **H0**.

4 Ejercicio 4

Para la siguiente densidad de probabilidad, se pide:



a) Definir la función de densidad de probabilidad.

La funcion densidad de probabilidad es:

$$f_x(x) = \begin{cases} (x-1) * \frac{1}{9} & x > 1 \wedge x < 2 \\ \frac{1}{9} & x \geq 2 \wedge x < 5 \\ (x-5) * \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{9}}{2} + \frac{1}{9} & x \geq 5 \wedge x < 7 \\ (x-7) * \frac{-1}{15} + \frac{1}{5} & x \geq 7 \wedge x < 10 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Verificamos que es una función de densidad válida:

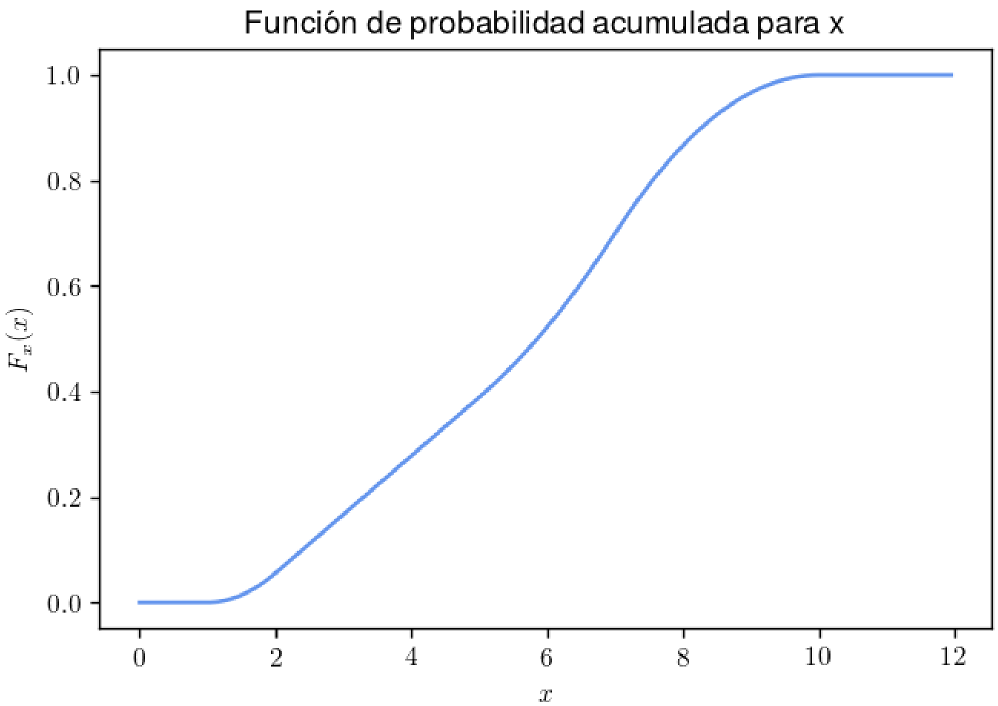
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = \int_1^2 (x-1)*\frac{1}{9}\,dx + \int_2^5 \frac{1}{9}\,dx + \int_5^7 (x-5)*\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{9}}{2} + \frac{1}{9}\,dx + \int_7^{10} (x-7)*\frac{-1}{15} + \frac{1}{5}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} +$$

b) Calcular y graficar la función de probabilidad acumulada y su inversa.

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\ dx = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ (\frac{x^2}{2} - x) * \frac{1}{9}|_1^x & x \geq 1 \wedge x \leq 2 \\ (\frac{x^2}{2} - x) * \frac{1}{9}|_1^2 + \frac{x}{9}|_2^x & x > 2 \wedge x \leq 5 \\ (\frac{x^2}{2} - x) * \frac{1}{9}|_1^2 + \frac{x}{9}|_2^5 + \frac{1}{45}(x^2 - 5x)|_5^x & x > 5 \wedge x \leq 7 \\ (\frac{x^2}{2} - x) * \frac{1}{9}|_1^2 + \frac{x}{9}|_2^5 + \frac{1}{45}(x^2 - 5x)|_5^7 + (\frac{2x}{3} - \frac{x^2}{30})|_7^x & x > 7 \wedge x \leq 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

[18]:
```
def barrow(fun, inf, sup):
    return fun(sup)-fun(inf)

assert round(barrow(lambda x: ((x**2)/2-x)*(1/9), 1, 2), 5) == round((1/18), 5)
assert round(barrow(lambda x: (x/9), 2, 5), 5) == round((1/3), 5)
assert round(barrow(lambda x: (1/45)*(x**2-5*x), 5, 7), 5) == round((14/45), 5)
assert round(barrow(lambda x: ((2*x/3)-(x**2/30)), 7, 10), 5) == round((3/10),␣
↪5)

def pmf_x(x):
    if x<=1:
        return 0
    elif x>1 and x<=2:
        return barrow(lambda x: ((x**2)/2-x)*(1/9), 1, x)
    elif x>2 and x<=5:
        return pmf_x(2) + barrow(lambda x: (x/9), 2, x)
    elif x>5 and x<=7:
        return pmf_x(5) + barrow(lambda x: (1/45)*(x**2-5*x), 5, x)
    elif x>7 and x<=10:
        return pmf_x(7) + barrow(lambda x: ((2*x/3)-(x**2/30)), 7, x)
    return 1
```

[19]:
```
points = np.arange(0, 12, 0.05).tolist()
values = [pmf_x(p) for p in np.arange(0, 12, 0.05)]
plt.figure(dpi=125)
plt.plot(points, values, color="cornflowerblue")
plt.title("Función de probabilidad acumulada para x")
plt.xlabel(r"$x$")
plt.ylabel(r"$F_x(x)$")
plt.show()
```

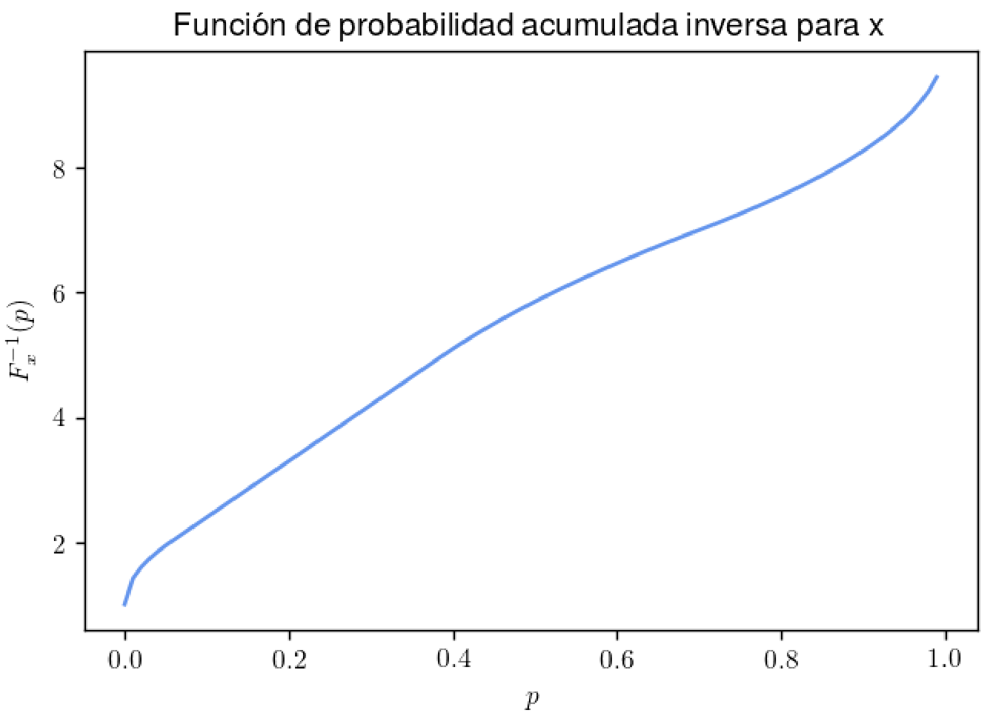


Continuamos con la función inversa. Debido a la complejidad analítica de la función de probabilidad acumulada utilizaremos una aproximación basada en el algoritmo de búsqueda binaria con una precisión fija de 5 decimales.

[20]:
```
def approximate_inverse_pmf(pmf, p, minimum=-1000, maximum=1000):
    sup_pivot = maximum
    inf_pivot = minimum
    x = (inf_pivot+sup_pivot)/2
    actual_p = pmf(x)
    while round(actual_p, 5) != round(p, 5):
        if actual_p < p:
            inf_pivot = x
        else:
            sup_pivot = x
        x = (inf_pivot+sup_pivot)/2
        actual_p = pmf(x)
    return x

assert round(approximate_inverse_pmf(pmf_x, 7/18, 1, 11)) == round(5, 5)
assert round(approximate_inverse_pmf(pmf_x, 7/10, 1, 11)) == round(7, 5)
```

[21]:
```
points = np.arange(0, 1, 0.01).tolist()
values = [approximate_inverse_pmf(pmf_x, p, 1, 11) for p in np.arange(0, 1, 0.
↪01)]
```

```python
plt.figure(dpi=125)
plt.plot(points, values, color="cornflowerblue")
plt.title("Función de probabilidad acumulada inversa para x")
plt.xlabel(r"$p$")
plt.ylabel(r"$F^{-1}_x(p)$")
plt.show()
```



c) Utilizando el generador de números aleatorios con distribución uniforme [0,1] implementado en el ejercicio 1 y aplicando el método de la transformada inversa, genere números al azar con la distribución propuesta.

Para generar números con el método de la transformada inversa a partir de una $\mathcal{U} \sim (0,1)$ con la distribucion de X se debe:

1. Obtener un número u_i de la uniforme
2. Con la función de probabilidad acumulada de la uniforme F_u calcular la probabilidad acumulada de ese número $F_u(u_i)$
3. Con la probabilidad $F_u(u_i) = p_i$ obtener un número x_i calculando de $F_x^{-1}(p_i)$

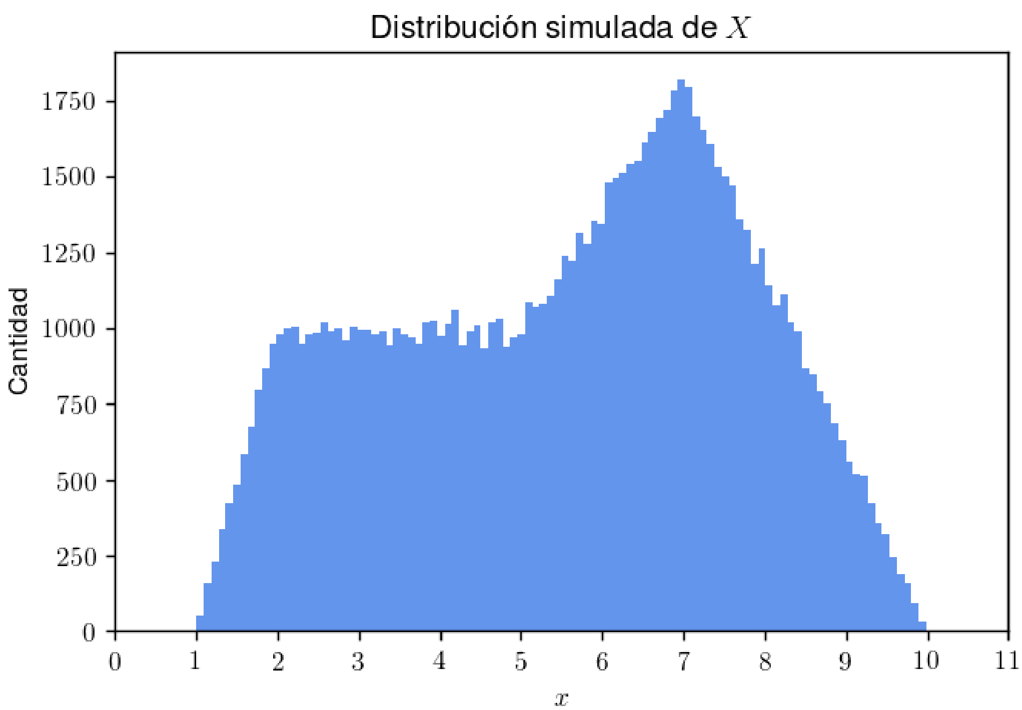
Este procedimiento se debe repetir para cuantos números se deseen generar. Obtendremos cien mil números de la distribución de X. Sabemos que la PMF de la $\mathcal{U} \sim (0,1)$ es $F_u(u) = u$

[22]:
```python
GCL_PREVIOUS_STATE = SEED
x_samples = []
for i in range(100000):
```

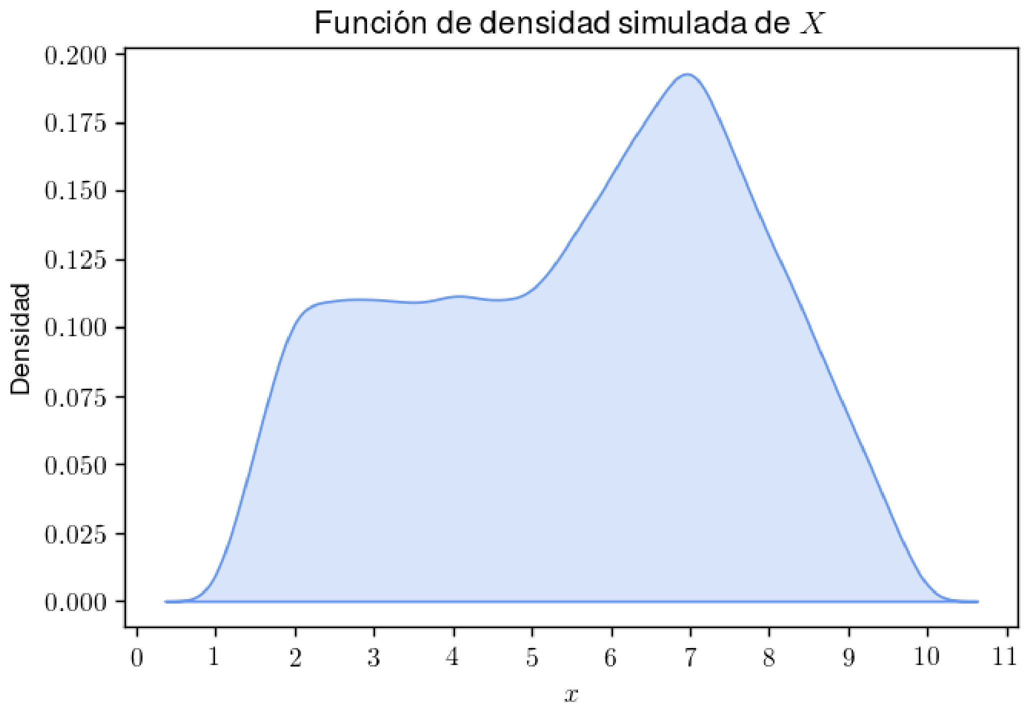
```
    ui = gcl_between_0_and_1()
    pi=ui
    xi=approximate_inverse_pmf(pmf_x, pi, 1, 11)
    x_samples.append(xi)
```

d) Realice los gráficos que considere necesarios para mostrar la distribución de números al azar generados.

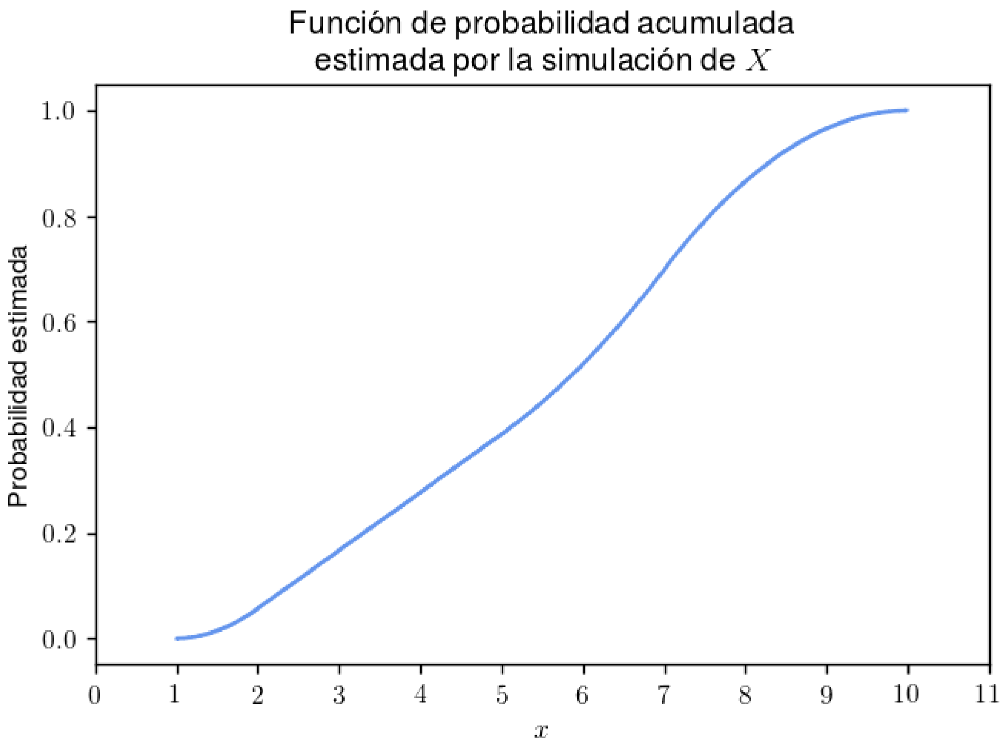
[23]:
```
plt.figure(dpi=125)
plt.hist(x_samples, bins=100, color="cornflowerblue")
plt.title(r"Distribución simulada de $X$")
plt.xticks(list(range(12)), [r"$%d$"%i for i in range(12)])
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("Cantidad")
plt.show()
```



[24]:
```
fig, ax = plt.subplots(dpi=125)
sns.kdeplot(x_samples, color="cornflowerblue", fill=True, ax=ax)
plt.title("Función de densidad simulada de $X$")
plt.xticks(list(range(12)), ["$%d$"%i for i in range(12)])
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("Densidad")
plt.show()
```



[25]:
```
fig, ax = plt.subplots(dpi=125)
sns.ecdfplot(x_samples, color="cornflowerblue", ax=ax)
plt.title("Función de probabilidad acumulada\n estimada por la simulación de␣
 ↪$X$")
plt.xticks(list(range(12)), ["$%d$"%i for i in range(12)])
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("Probabilidad estimada")
plt.show()
```



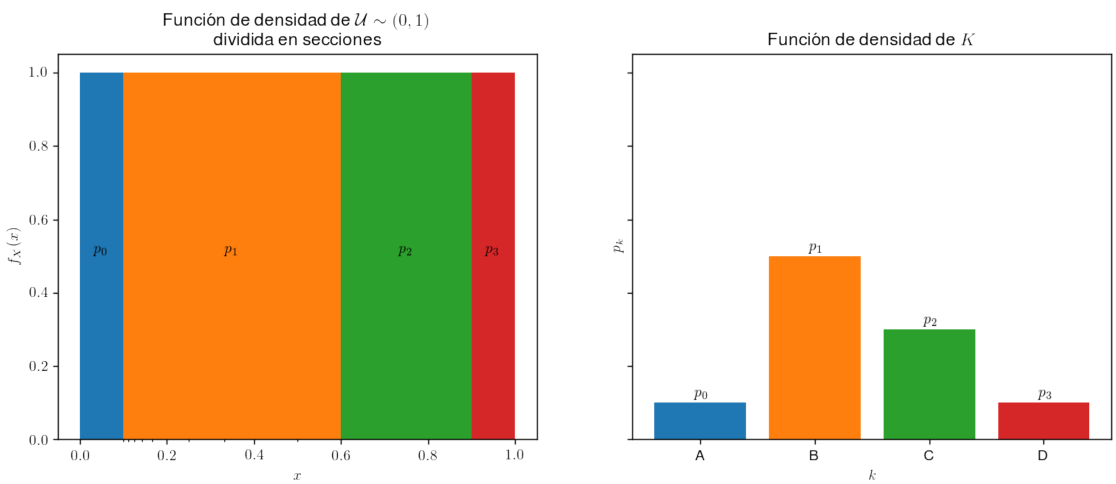
5 Ejercicio 5

a) Desarrolle un algoritmo para generar la distribución de probabilidad anterior utilizando el generador de números aleatorios implementado en el ejercicio 1

Para generar la variable pedida dividimos el espacio muestral de nuestra uniforme tal que la probabilidad de caer en una de las divisiones coincida con la probabilidad del valor correspondiente de la distribución discreta. Para el caso particular de la $\mathcal{U} \sim (0,1)$ una probabilidad discreta puede ser asociada con un intervalo de la misma longitud de la distribución.

[26]:
```
fig, axs = plt.subplots(1, 2, dpi=125, figsize=(6.4*2, 4.8), sharey=True)
axs[0].hist([0.05], bins=[0, 0.1])
axs[0].hist([0.2], bins=[0.1, 0.6])
axs[0].hist([0.7], bins=[0.6, 0.9])
axs[0].hist([0.95], bins=[0.9, 1])
axs[0].text(0.05-0.02, 0.5, "$p_0$")
axs[0].text(0.35-0.02, 0.5, "$p_1$")
axs[0].text(0.75-0.02, 0.5, "$p_2$")
axs[0].text(0.95-0.02, 0.5, "$p_3$")
axs[0].set_title("Función de densidad de $\mathcal{U} \sim (0,1)$\n dividida en␣
↪secciones")
axs[0].set_xlabel("$x$")
```

```
axs[0].set_ylabel("$f_X(x)$")
axs[0].set_xticks([1/i for i in range(1,11)], ["$\frac{1}{%d}$"%i for i in␣
↪range(1,11)])
b1= axs[1].bar(["A"], [0.1])
b2= axs[1].bar(["B"], [0.5])
b3= axs[1].bar(["C"], [0.3])
b4= axs[1].bar(["D"], [0.1])
i=0
for rect in b1 + b2 + b3 + b4:
    height = rect.get_height()
    plt.text(rect.get_x() + rect.get_width()/2.0, height, '$p_%d$' % i,␣
↪ha='center', va='bottom')
    i+=1
axs[1].set_title("Función de densidad de $K$")
axs[1].set_ylabel("$p_k$")
axs[1].set_xlabel("$k$")
plt.show()
```



Entonces para simular la variable: 1. Tomamos una muestra x_i de la uniforme. 2. Nos fijamos en cual de los intervalos intervalo cae. 3. Según el intervalo donde cayó, asignamos esa muestra al correspondiente k_i.

Repetimos este proceso las veces que sean necesarias, en este caso tomaremos una muestra de tamaño 100mil.

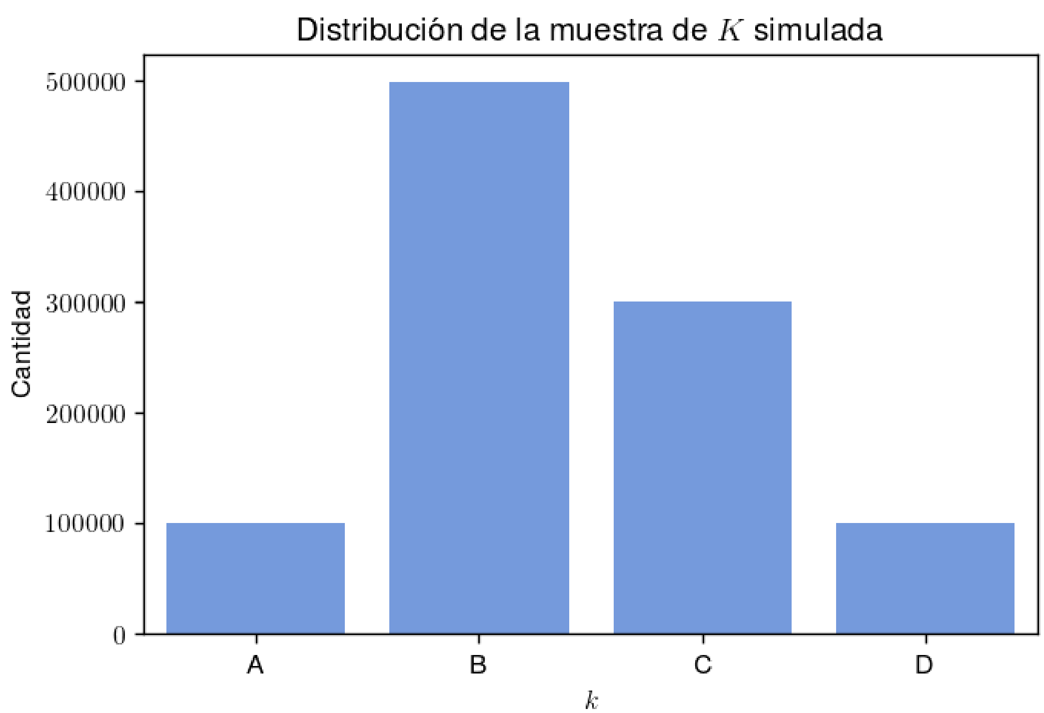
[27]:
```
GCL_PREVIOUS_STATE=SEED
k_samples = []
for _ in range(1000000):
    xi = gcl_between_0_and_1()
    if xi<= 0.1:
        k_samples.append("A")
```

```
    elif xi<=0.6:
        k_samples.append("B")
    elif xi<=0.9:
        k_samples.append("C")
    else:
        k_samples.append("D")
```

b) Mostrar la distribución obtenida en un histograma.

[28]:
```
plt.figure(dpi=125)
sns.countplot(k_samples, color="cornflowerblue", order=["A", "B", "C", "D"])
plt.xlabel("$k$")
plt.ylabel("Cantidad")
plt.title("Distribución de la muestra de $K$ simulada")
plt.show()
```

```
/home/urielkelman/.local/lib/python3.6/site-packages/seaborn/_decorators.py:43:
FutureWarning: Pass the following variable as a keyword arg: x. From version
0.12, the only valid positional argument will be `data`, and passing other
arguments without an explicit keyword will result in an error or
misinterpretation.
  FutureWarning
```



c) Proponga un test para aplicarle a los números al azar generados, y evalúe si los mismos pueden ser aceptados.

Proponemos el test chi cuadrado con una significancia del 1% para las siguientes hipótesis: * H0: La distribución simulada se distribuye como K * H1: La distribución simulada no se distribuye como K

Al tener 4 valores posibles tenemos 3 grados de libertad por lo que

$$X^2_{3,0.99} = 11.345$$

Sabemos que la probabilidad de cada dígito debiera ser p_k, calculamos:

$$D^2 = \sum_A^D \frac{(n_{obsk} - Np_k)^2}{Np_k}$$

[29]:
```
k_frequencies = Counter(k_samples)
expected_proba = {"A": 0.1, "B": 0.5, "C": 0.3, "D": 0.1}
d_squared = 0
sample_size = sum(k_frequencies.values())
for k in k_frequencies.keys():
    d_squared += (k_frequencies[k]-sample_size*expected_proba[k])**2/
 ↪(sample_size*0.1)
print("D squared is: ", d_squared)
```

```
D squared is:  9.33826
```

Como $D^2 = 9.33826 < D = 11.345$ no somos capaces de rechazar **H0**

6 Ejercicio 6

a) Generar 2 distribuciones normales independientes. Una con media 10 y desvío 2, y la otra con media 20 y desvío 15.

Para generar las muestras de la primer variable gaussiana utilizaremos el método de Aceptación Rechazo II. Generaremos muestras para una variable normal estándar (media 0 y desvío 1), y luego realizaremos un escalamiento y una traslación, multiplicando por el desvío deseado y sumando la media deseada respectivamente. Empecemos describiendo el método.

Conocemos como generar una variable aleatoria Y con función densidad de probabilidad $f_y(t)$. Para generar la variable aleatoria X con función densidad de probabilidad $f_x(t)$, seguimos los siguientes pasos:

1 - Encontramos una variable aleatoria Y tal que $f_y(t) > 0 \Leftrightarrow f_x(t) > 0$. Sea c una constante tal que:

$$\frac{f_x(t)}{f_y(t)} \leq c, \forall t : f_x(t) > 0$$

2 - Generamos una instancia t de Y.

3 - Con probabilidad $\frac{f_x(t)}{c \cdot f_y(t)}$, se acepta $X = t$. Caso contrario, se rechaza t y se vuelve al paso 2.

Para generar la variable aleatoria, queremos que $f_x(t) \leq c \cdot f_y(t)$.

Buscaremos entonces generar muestras para la gaussiana con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$. Una buena idea es generar $X = |N|$, y luego multiplicar N por -1 con probabilidad 0.5. Para esto, elegimos que Y se distribuya como una exponencial de media 1 ($\lambda = 1$).

Busquemos entonces la constante c. Para esto, calculamos el cociente entre las funciones de densidad de X e Y:

$\frac{f_x(t)}{f_y(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{e^{-t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}+t}$

Y buscamos maximizarlo. Está claro que el cociente será máximo cuando maximicemos la exponencial. Esto, a su vez, implica maximizar el exponente $t - \frac{t^2}{2}$:

$\frac{d}{dt}(t - \frac{t^2}{2}) = 1 - t =>$ El máximo de la función cuadrática se da en $t = 1$, punto el cual podemos calcular la constante c:

$c = \frac{f_x(1)}{f_x(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{e^{-1}} = \sqrt{\frac{e}{2\pi}}$

Habiendo encontrado c, podemos realizar una simulación siguiendo el método previamente descripto para encontrar la normal estándar:

[30]:
```
np.random.seed(SEED)
c = np.sqrt((np.exp(1) / (2 * np.pi)))
probabilidad_de_aceptacion = lambda t: np.exp(-t**2/2) / np.sqrt(2*np.pi) * 1 /␣
 ↪(c * np.exp(-t))
muestra_exponencial = np.random.exponential(1, 100000)
muestra_normal_estandar = []
for t in muestra_exponencial:
    aux_prob_1 = np.random.uniform()
    if aux_prob_1 < probabilidad_de_aceptacion(t):
        aux_prob_2 = np.random.uniform()
        if aux_prob_2 < 0.5:
            muestra_normal_estandar.append(t)
        else:
            muestra_normal_estandar.append(-t)
print("Total de muestras generadas:", len(muestra_normal_estandar))
```

```
Total de muestras generadas: 75915
```

[31]:
```
#Esta bien el desvio o deberiamos poner 4 en vez de 2?
desvio = 2
media = 10
muestra_normal_2_10 = np.add(np.multiply(np.array(muestra_normal_estandar),␣
 ↪desvio), media)
```

Para generar la segunda de nuestras normales utilizaremos el método de superposición en combinación con el Teorema Central del Límite. El método de superposición nos dice que ciertas variables aleatorias pueden escribirse como la suma de las variables aleatorias individuales que la componen:

$X = X_1 + X_2 + .. + X_N$

El Teorema Central del Límite enuncia lo siguiente. Sea S_n la suma de n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media finita $E[X] = \mu$ y varianza finita σ^2, y sea Z_n la variable aleatoria de media cero definida por:

$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$

Entonces, se cumple que:

$lim_{n\to\infty} P[Z_n \leq z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$

Esto quiere decir que si tomamos n lo suficientemente grande, podemos generar muestras de una normal estándar a partir de muestras de otra variable aleatoria que sepamos generar utilizando el método de superposición.

Entonces, llevemos adelante el experimento utilizando muestras de una variable distribuida uniformemente:

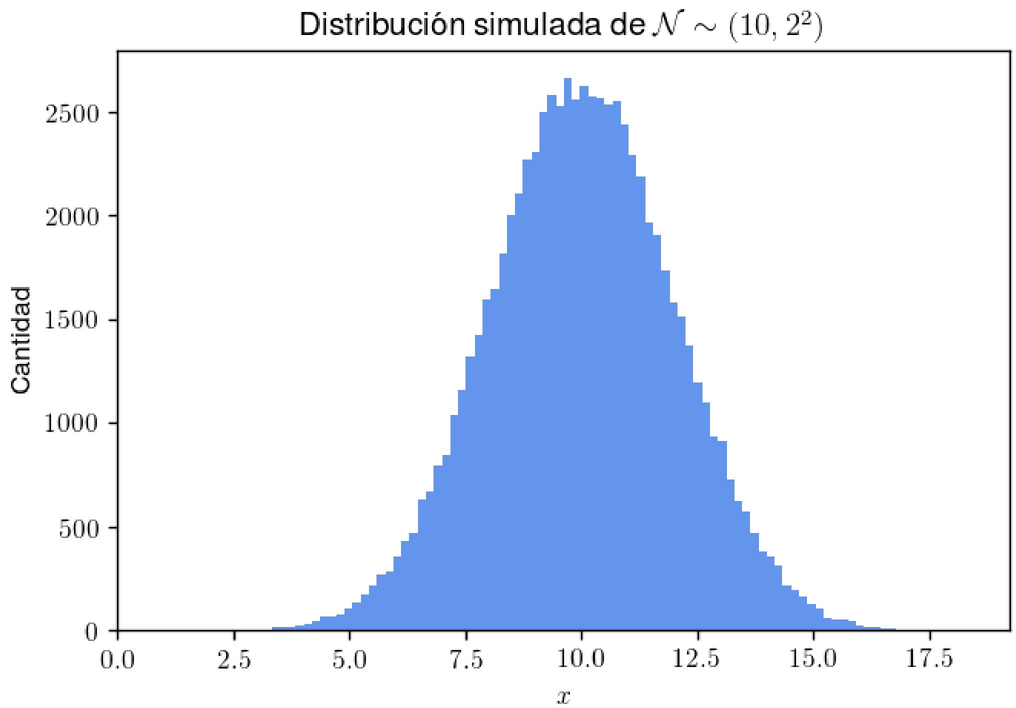
[32]:
```
n = 10000
media_uniforme = 1/2
desvio_uniforme = np.sqrt(1/12)
muestras_normal_estandar_2 = [(np.sum(np.random.uniform(0, 1, n)) - n *␣
 ↪media_uniforme) / (desvio_uniforme * np.sqrt(n)) for _ in range(100000) ]
```

[33]:
```
desvio = 15
media = 20
muestra_normal_15_20 = np.add(np.multiply(np.array(muestras_normal_estandar_2),␣
 ↪desvio), media)
```

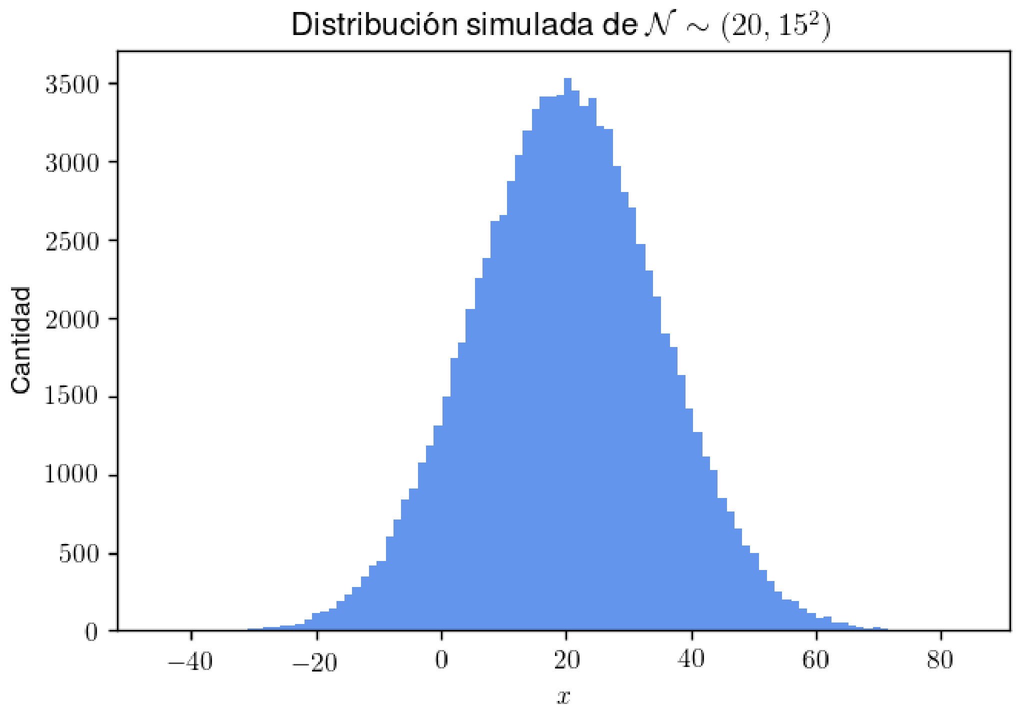
b) Muestre gráficamente las distribuciones de números al azar generadas.

Graficamos los histogramas para cada una de las muestras. Esperamos ver que tengan la forma de las gaussianas especificadas en el enunciado.

[34]:
```
plt.figure(dpi=125)
plt.hist(muestra_normal_2_10, bins=100, color="cornflowerblue")
plt.title(r"Distribución simulada de $\mathcal{N} \sim (10,2^{2})$")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("Cantidad")
plt.show()
```



[35]:
```
plt.figure(dpi=125)
plt.hist(muestra_normal_15_20, bins=100, color="cornflowerblue")
plt.title(r"Distribución simulada de $\mathcal{N} \sim (20,15^{2})$")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("Cantidad")
plt.show()
```



c) Calcular la media y la varianza de la distribución obtenida y compararlos con los valores teóricos.

Sean $\mathcal{X}_\infty \sim N(10, 2^2)$ y $\mathcal{X}_\in \sim N(20, 15^2)$ las variables generadas en el inciso anterior. Buscamos calcular $\overline{X_1}, \overline{S_1}^2, \overline{X_2}, \overline{S_2}^2$, es decir los estimadores puntuales para la media y la varianza de la distribución, y los comparamos con sus valores teóricos.

[36]:
```
x_1 = np.sum(muestra_normal_2_10) / len(muestra_normal_2_10)
print("La media de la primer variable simulada es:", x_1)
s_1 = np.sum([(x_i - x_1)**2 for x_i in muestra_normal_2_10]) /␣
 ↪len(muestra_normal_2_10)
print("La varianza de la segunda variable simulada es:", s_1)
```

```
La media de la primer variable simulada es: 10.013805157536451
La varianza de la segunda variable simulada es: 4.000221264738542
```

Vemos que tanto la media $\overline{X_1}$ como la varianza $\overline{S_1}^2$ coinciden, excepto por algunos decimales, con los valores esperados para la variable que se quiso simular.

Ahora, realicemos los mismos cálculos para la distribución obtenida en la segunda gaussiana simulada:

[37]:
```
x_2 = np.sum(muestra_normal_15_20) / len(muestra_normal_15_20)
print("La media de la primer variable simulada es:", x_2)
```

```
s_2 = np.sum([(x_i - x_2)**2 for x_i in muestra_normal_15_20]) /␣
↪len(muestra_normal_15_20)
print("La varianza de la segunda variable simulada es:", s_2)
```

```
La media de la primer variable simulada es: 20.019910344564064
La varianza de la segunda variable simulada es: 224.65450745368403
```

Tal como para la primera simulación, la media $\overline{X_2}$ como la varianza $\overline{S_2}^2$ coinciden, con los valores esperados (a excepción de algunos decimales) para la variable que se quiso simular.

d) Utilizar las distribuciones generadas en el punto a) para generar una distribución normal bivariada.

En la sección anterior fueron generadas distribuciones gaussianas en forma independiente. Esto implica que están conjuntamente distribuidas en forma normal. Matemáticamente, significa que el par $(\mathcal{X} \sim N(20, 15^2), \mathcal{X} \sim N(10, 2^2))$ debe tener una distribución normal bivariada. Por lo tanto, para generar la distribución multivariada solicitada, podemos simplemente hacer un *stacking* de las distribuciones generadas previamente.

[38]:
```
multivariada = np.vstack((muestra_normal_2_10[:min(len(muestra_normal_2_10),␣
↪len(muestra_normal_15_20))], muestra_normal_15_20[:
↪min(len(muestra_normal_2_10), len(muestra_normal_15_20))]))
```

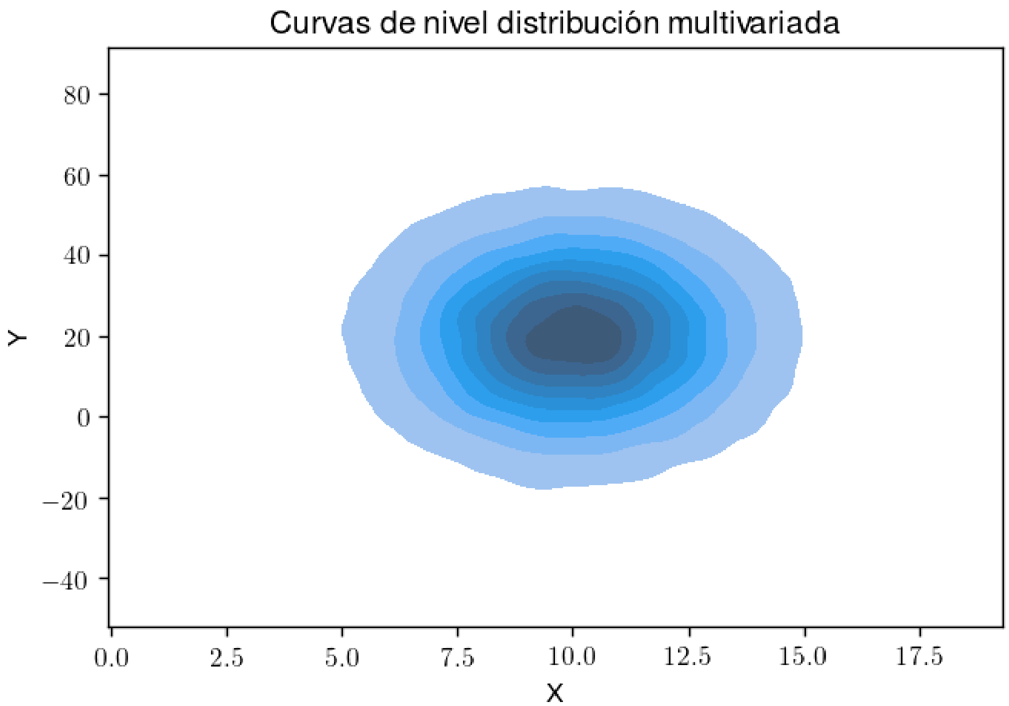
e) Graficar la distribución obtenida en el punto d).

Para comenzar, realizamos un gráfico de las curvas de nivel de la distribución que obtuvimos.

[39]:
```
plt.figure(dpi=125)
sns.kdeplot(multivariada[0], multivariada[1], fill=True).set(title='Curvas de␣
↪nivel distribución multivariada', xlabel='X', ylabel='Y')
```

```
/home/urielkelman/.local/lib/python3.6/site-packages/seaborn/_decorators.py:43:
FutureWarning: Pass the following variable as a keyword arg: y. From version
0.12, the only valid positional argument will be `data`, and passing other
arguments without an explicit keyword will result in an error or
misinterpretation.
  FutureWarning
```

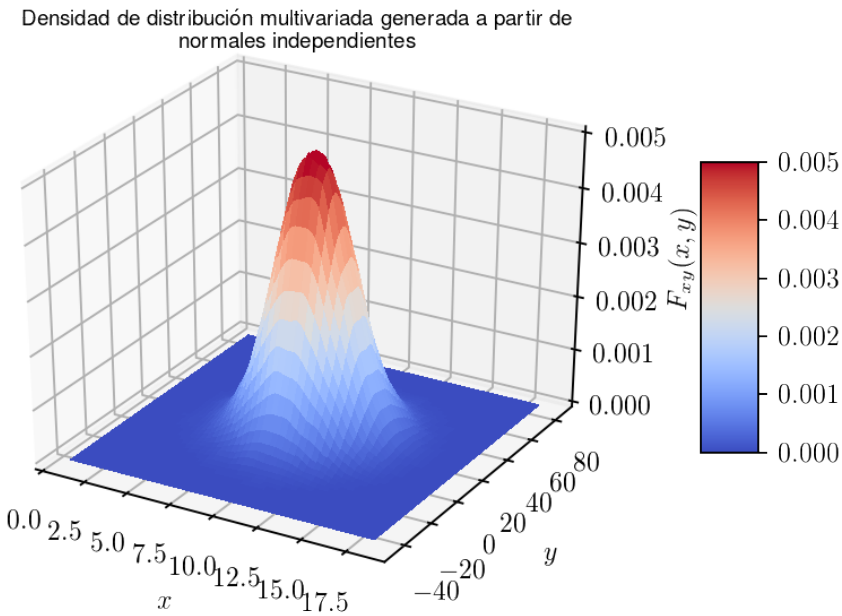
[39]:
```
[Text(0, 0.5, 'Y'),
 Text(0.5, 0, 'X'),
 Text(0.5, 1.0, 'Curvas de nivel distribución multivariada')]
```



Finalmente, realizamos un gráfico de la función obtenida en tres dimensiones.

[40]:
```
X, Y = np.mgrid[min(multivariada[0]):max(multivariada[0]):100j,␣
 ↪min(multivariada[1]):max(multivariada[1]):100j]
positions = np.vstack([X.ravel(), Y.ravel()])
kernel = stats.gaussian_kde(multivariada)

Z = np.reshape(kernel(positions).T, X.shape)
```

[41]:
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm

fig = plt.figure(dpi=170)
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surface = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.coolwarm,
                       linewidth=0, antialiased=False, vmin = 0, vmax = 0.005)
plt.title("Densidad de distribución multivariada generada a partir de \n␣
 ↪normales independientes", size=8)
plt.xlabel(r"$x$")
plt.ylabel(r"$y$")
ax.set_zlabel(r"$F_{xy}(x,y)$")
ax.set_zlim(0, 0.005)
fig.colorbar(surface, shrink=0.5, aspect=5)
plt.show()
```



7 Ejercicio 7

Aplicar el test de Kolmogorov-Smirnov a uno de los generadores de números al azar con distribución normal univariada generado en el ejercicio 6. Utilizar un nivel de significación del 5%, y probar con distintos tamaños de muestras, analizar el resultado, e indicar si la distribución puede o no ser aceptada.

Dada una cantidad finita de observaciones de la variable continua X, con distribución normal univariabda, obtenemos la aproximación empírica a la función acumulativa

$$F(x) \approx \hat{F}(x) = \frac{\#x_i \leq x}{n}$$

Medimos la distancia a la función real $F(x)$

$$q = max_x \mid \hat{F}(x) - F(x) \mid$$

[42]:
```
#Funciones auxiliares
from scipy.stats import norm

def generate_empiric_distribution_values(sample):
    empiric_distribution_values = []
    for i in range(len(sample)):
        empiric_distribution_values.append((i + 1)/ len(sample))
```

```
    return empiric_distribution_values

def generate_expected_distribution_values(sample):
    expected_distribution_values = []
    for xi in sample:
        expected_distribution_values.append(norm(20, 15).cdf(xi))

    return expected_distribution_values

def calculate_q(empiric_distribution_values, expected_distribution_values):
    distributions_differences = []

    for i in range(len(empiric_distribution_values)):
        distributions_differences.append(abs(empiric_distribution_values[i] -␣
 ↪expected_distribution_values[i]))

    return max(distributions_differences)

def calculate_q_alpha(alpha, n):
    return (-1/(n*2) * math.log(alpha/2))**(1/2)
```

[43]:
```
#Test de Kolmogorox-Smirnov
def kolmogorov_smirnov_test(alpha, sample):
    sample = sorted(sample)
    empiric_distribution_values = generate_empiric_distribution_values(sample)
    expected_distribution_values = generate_expected_distribution_values(sample)

    q = calculate_q(empiric_distribution_values, expected_distribution_values)
    q_alpha = calculate_q_alpha(alpha, len(sample))

    print('Test Kolmogorov-Smirnov con alpha: {} y {} samples'.format(alpha,␣
 ↪len(sample)))
    print('\tq:', q)
    print('\tq_alpha:', q_alpha)

    print('Este test Kolmogorov-Smirnov nos permite rechazar la hipotesis nula:␣
 ↪{}'.format(not (q > q_alpha)))
```

Ahora probamos con distintos tamanos de muestras

[44]:
```
alpha = 0.05 #por enunciado

kolmogorov_smirnov_test(alpha, muestra_normal_15_20[:1000])
print()
kolmogorov_smirnov_test(alpha, muestra_normal_15_20[:20000])
print()
kolmogorov_smirnov_test(alpha, muestra_normal_15_20)
```

```
Test Kolmogorov-Smirnov con alpha: 0.05 y 1000 samples
        q: 0.021824541284108823
        q_alpha: 0.04294694083467376
Este test Kolmogorov-Smirnov nos permite rechazar la hipotesis nula: True

Test Kolmogorov-Smirnov con alpha: 0.05 y 20000 samples
        q: 0.007388005136935938
        q_alpha: 0.009603227913199208
Este test Kolmogorov-Smirnov nos permite rechazar la hipotesis nula: True

Test Kolmogorov-Smirnov con alpha: 0.05 y 100000 samples
        q: 0.0022719387644761224
        q_alpha: 0.004294694083467376
Este test Kolmogorov-Smirnov nos permite rechazar la hipotesis nula: True
```

No se rechaza la hipótesis H_0 si

$$q > \sqrt{-\frac{1}{2n} ln(\frac{\alpha}{2})}$$

Aplicando este test para muestras de distintos tamaños, se nos indica que debemos rechazar la hipótesis H_0 para un nivel de significación del 5%.

8 Ejercicio 8

[45]:

```
import random
import math
from typing import List, NamedTuple, Optional, NoReturn
import numpy as np

TAMAÑO_GRILLA = 250
PROBABILIDAD_CONTAGIO = 0.65
PROBABILIDAD_CONTAGIO_CUARENTENA = 0.15


def simularBernoulli(p) -> bool:
    return random.random() < p


def simularBernoulliMultivariada(probas: List[float]) -> int:
    numero = random.random()
    probas = sorted(probas)
    for i in range(len(probas)):
        if numero < probas[i]:
            return i
```

```python
class Salud:
    def __init__(self, sano: bool, dias_desde_contagio: Optional[int]):
        self.sano = sano
        self.dias_desde_contagio = dias_desde_contagio

    def enfermar(self, recontagio):
        if self.dias_desde_contagio and not recontagio:
            return
        self.sano = False
        self.dias_desde_contagio = 0


class Movimiento:
    def __init__(self, tipo: str, dias_desde_ultimo_movimiento: int, puede_mover: bool):
        self.tipo = tipo
        self.dias_desde_ultimo_movimiento = dias_desde_ultimo_movimiento
        self.puede_mover = puede_mover

    def debo_mover(self) -> bool:
        if not self.puede_mover:
            return False
        if self.tipo == "A":
            return True
        elif self.tipo == "B":
            return False if self.dias_desde_ultimo_movimiento >= 2 else True
        elif self.tipo == "C":
            return False if self.dias_desde_ultimo_movimiento >= 4 else True
        return False


class Persona:

    def __init__(self, alpha, beta, sano, tipo, puede_mover):
        self.estado = Salud(sano=sano, dias_desde_contagio=None)
        self.alpha = alpha
        self.beta = beta
        self.movimiento = Movimiento(tipo=tipo, dias_desde_ultimo_movimiento=0, puede_mover=puede_mover)

    def avanzar(self) -> NoReturn:
        self.movimiento.dias_desde_ultimo_movimiento += 1
        if self.estado.sano:
            if self.estado.dias_desde_contagio:
                self.estado.dias_desde_contagio += 1
            return
```

```python
        else:
            if self.estado.dias_desde_contagio:
                if self.estado.dias_desde_contagio >= self.alpha and simularBernoulli(self.beta):
                    self.estado.sano = True
                    return
                self.estado.dias_desde_contagio += 1
            else:
                self.estado.dias_desde_contagio = 1

    def sano(self) -> bool:
        return self.estado.sano

    def set_posicion(self, x, y):
        self.x = x
        self.y = y

    def mover(self, posiciones):
        if not self.movimiento.debo_mover():
            return
        posibles_movimientos = [(self.x+a, self.y+b) for a,b in [(1,0), (1,1), (0,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,0), (0,-1)]]
        posibles_movimientos = [(a,b) for a,b in posibles_movimientos if a>=0 and a<TAMAÑO_GRILLA and b>=0 and b<TAMAÑO_GRILLA]
        random.shuffle(posibles_movimientos)
        for mov in posibles_movimientos:
            if posiciones[mov[0]][mov[1]]==None:
                self.movimiento.dias_desde_ultimo_movimiento = 0
                posiciones[mov[0]][mov[1]] = self
                posiciones[self.x][self.y] = None
                self.x = mov[0]
                self.y = mov[1]

    def contagiar(self, posiciones, p, recontagio):
        if self.estado.sano:
            return
        posibles_movimientos = [(self.x+a*mult, self.y+b*mult) for a,b in [(1,0), (1,1), (0,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,0), (0,-1)] for mult in range(1,6)]
        posibles_movimientos = [(a,b) for a,b in posibles_movimientos if a>=0 and a<TAMAÑO_GRILLA and b>=0 and b<TAMAÑO_GRILLA]
        for mov in posibles_movimientos:
            if posiciones[mov[0]][mov[1]]==None:
                continue
            enferma = simularBernoulli(p)
            if enferma:
                posiciones[mov[0]][mov[1]].estado.enfermar(recontagio)
```

```
class SimuladorDePandemia:
    def __init__(self,N,alpha,beta,lambda_param,T,recontagio):
        sanos = int(math.floor(N*0.97))
        enfermos = N-sanos
        self.T = T
        self.personas = []
        self.recontagio = recontagio
        pueden_mover = [False for _ in range(int(lambda_param*N))]
        pueden_mover += [True for _ in range(N-len(pueden_mover))]
        random.shuffle(pueden_mover)
        for _ in range(sanos):
            multivariada = simularBernoulliMultivariada([0.1, 0.2, 0.7])
            persona = Persona(alpha, beta, True, ("C" if multivariada == 0 else␣
↪("B" if multivariada == 1 else "A") ), pueden_mover.pop(0))
            self.personas.append(persona)
        for _ in range(enfermos):
            multivariada = simularBernoulliMultivariada([0.1, 0.2, 0.7])
            persona = Persona(alpha, beta, False, ("C" if multivariada == 0␣
↪else ("B" if multivariada == 1 else "A") ), pueden_mover.pop(0))
            self.personas.append(persona)
        self.ubicaciones = [[None for _ in range(TAMAÑO_GRILLA)] for _ in␣
↪range(TAMAÑO_GRILLA)]
        ubicaciones_aux = np.asarray(self.ubicaciones)
        empty_positions = np.argwhere(ubicaciones_aux==None).tolist()
        random.shuffle(empty_positions)
        for p in self.personas:
            pos = empty_positions.pop(0)
            p.set_posicion(pos[0], pos[1])
            self.ubicaciones[pos[0]][pos[1]] = p

    def capturar_instante(self) -> List[List]:
        instante = [u.copy() for u in self.ubicaciones.copy()]
        for i in range(TAMAÑO_GRILLA):
            for j in range(TAMAÑO_GRILLA):
                instante[i][j] = (lambda x: "Vacio" if not x else ("Sano" if x.
↪sano() else "Enfer"))(instante[i][j])
        return instante

    def simular(self, pasos: int) -> List[List[List]]:
        instantes = []
        for i in range(pasos):
            for p in self.personas:
                p.avanzar()
            for p in self.personas:
                p.mover(self.ubicaciones)
```

```
            for p in self.personas:
                p.contagiar(self.ubicaciones, (PROBABILIDAD_CONTAGIO if i<self.
↪T else PROBABILIDAD_CONTAGIO_CUARENTENA), self.recontagio)
            instantes.append(self.capturar_instante())
        return instantes
```

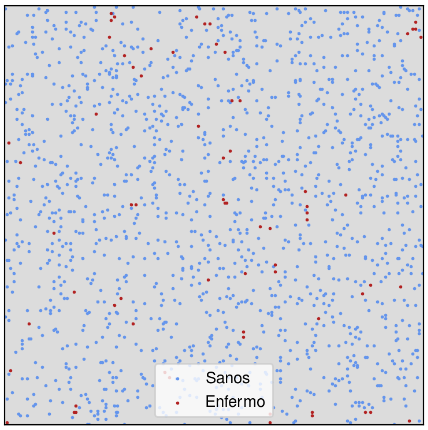
[47]:
```
PERSONAS = 1500
ALPHA = 14
BETA = 0.2
INMOVILES = 0
TIEMPO_CUARENTENA = 1000
RECONTAGIO = True
DIAS = 5000
```

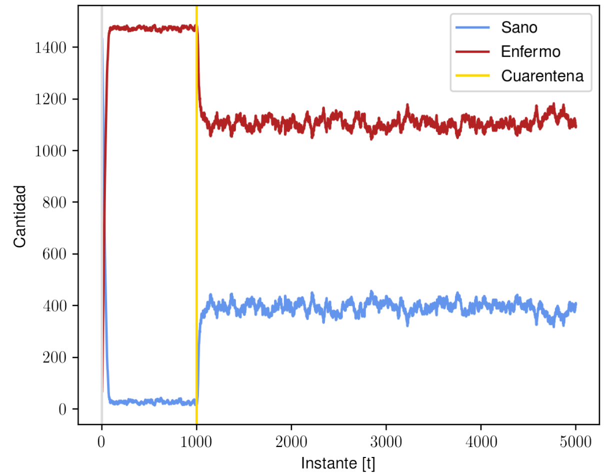
[48]:
```
simulador = SimuladorDePandemia(PERSONAS, ALPHA, BETA, INMOVILES,␣
↪TIEMPO_CUARENTENA, RECONTAGIO)
instantes = simulador.simular(DIAS)
```

[49]:
```
from collections import Counter

def plot_instant(x):
    translate_dict = {"Vacio": 0, "Sano": 1, "Enfer": 2}
    fig, axs = plt.subplots(1, 2, dpi=200, figsize=(6.4*2, 4.8))
    instante = np.array(instantes[x])
    axs[0].imshow(np.vectorize(translate_dict.get)(instante), cmap=colors.
↪ListedColormap(['gainsboro', 'cornflowerblue', 'firebrick']),␣
↪interpolation='none')
    axs[0].scatter(np.argwhere(instante=="Sano")[:,1], np.
↪argwhere(instante=="Sano")[:,0], color='cornflowerblue', label="Sanos", s=1)
    axs[0].scatter(np.argwhere(instante=="Enfer")[:,1], np.
↪argwhere(instante=="Enfer")[:,0], color='firebrick', label="Enfermo", s=1)
    axs[0].set_yticks([])
    axs[0].set_xticks([])
    axs[0].legend()
    contadores = {}
    for i in range(0, len(instantes)):
        flatten = [e for l in instantes[i] for e in l if e!= "Vacio"]
        contadores[i] = Counter(flatten)
    axs[1].plot(list(sorted(contadores.keys())), [contadores[i]["Sano"] for i␣
↪in range(0, len(instantes))], color='cornflowerblue', label="Sano")
    axs[1].plot(list(sorted(contadores.keys())), [contadores[i]["Enfer"] for i␣
↪in range(0, len(instantes))], color='firebrick', label="Enfermo")
    axs[1].axvline(x, color='gainsboro')
    axs[1].axvline(TIEMPO_CUARENTENA, color='gold', label="Cuarentena")
    axs[1].set_ylabel("Cantidad")
    axs[1].set_xlabel("Instante [t]")
```

```
    axs[1].legend()
    plt.show()

interact(plot_instant, x=widgets.IntSlider(min=0, max=len(instantes)-1, step=1,␣
↪value=0))
```

findfont: Font family ['sans-serif'] not found. Falling back to DejaVu Sans.





[49]: <function __main__.plot_instant>

8.1 Casos elegidos

8.1.1 Caso 1

```
PERSONAS = 1000
ALPHA = 14
BETA = 0.5
INMOVILES = 0.8
TIEMPO_CUARENTENA = 2500
RECONTAGIO = True
DIAS = 5000
```

8.1.2 Caso 2

```
PERSONAS = 1500
ALPHA = 14
BETA = 0.2
INMOVILES = 0
TIEMPO_CUARENTENA = 1000
```

```
RECONTAGIO = True
DIAS = 5000
```

8.1.3 Caso 3

```
PERSONAS = 600
ALPHA = 13
BETA = 0.4
INMOVILES = 0
TIEMPO_CUARENTENA = 500
RECONTAGIO = True
DIAS = 5000
```

8.1.4 Caso 4

```
PERSONAS = 1000
ALPHA = 100
BETA = 0.01
INMOVILES = 0.5
TIEMPO_CUARENTENA = 100
RECONTAGIO = False
DIAS = 5000
```

8.1.5 Observaciones

Entre los casos 1 y 2 se ve que al haber recontagio, las simulaciones llegan a una especie de estado de equilibrio donde se mantienen la cantidad de infectados, y aunque luego de aplicar la cuarentena disminuyen la cantidad de casos, no se llega a erradicar el virus, con el sistema tendiendo a un nuevo equilibrio.

El caso 2 se ve que es mucho mas grave que el primero (manteniendo mas enfermos que sanos), esto se lo podemos atribuir a la movilización de los individuos, ya que en este escenario ninguno se queda inmóvil y hay una mayor población.

Los parámetros del caso 3 son similares a los del 2, pero con la mayor diferencia de que la población es bastante menor (2/5 de su tamaño). Se aprecia que si bien inicialmente la enfermedad se esparce de forma similar a la del caso 1, luego de aplicar la cuarentena, cae en picada hasta erradicarse prontamente. Este hecho lo podemos atribuir a que al haber menos individuos estos estan mas distanciados entre si, disminuyendose las interacciones que provocan los contagios.

Finalmente en el caso 4 tenemos que el tiempo minimo que dura la enfermedad es mucho mayor al del resto, por lo que esperariamos una mayor tasa de contagios, pero debido a que en este caso no existe la posibilidad de recontagio, se observa que luego de aplicar la cuarentena la enfermedad se erradica rápidamente.

8.2 Conclusión

Teniendo en cuenta los escenarios que generamos, el factor más influyente para la esparcion de la enfermedad es la posibilidad de recontagio, ya que sin esta, eventualmente se erradicará inevitablemente.

Para hacer una simulación más real (haciendo referencia a la pandemia actual por COVID-19), creemos que aquellos infectados luego de curarse, tengan un plazo de tiempo en el que no se puedan contagiar debido a haber generado anticuerpos, y que luego de ese plazo