# 可求解差分方程的 Maple 实现

JMx

2021 年 5 月 12 日

这里我们记录一下使用 Maple 计算可求解差分方程 (存在显式解的差分方程) 的程序实现。

首先，我们要求解的是关于 $A$ 的形如下面的差分方程

$$A_m + F(\cdots, A_{-1}, A, \cdots, A_{m-1}) = G_p, \tag{1}$$

其中 $A_m = A(n+m)$，$F$ 是关于 $A_{m-k}, k \geq 1$ 的有理函数 (一般为变系数多项式)。等式中与 $A$ 无关的项全部归于 $G_p$。在给出程序之前，我们首先考虑如何求解此类问题。考虑一个简单的方程

$$A^+ + A = u^{++} - u. \tag{2}$$

其解自然是 $A = u^+ - u$(这里我们不考虑“积分常数”)。我们思考一下我们是如何“自然”给出解的。观察等式两端，显然 $u^{++}$ 必然出自于 $A^+$，因此我们不妨做变换 $A^+ = A'^+ + u^{++}$，代入方程得

$$A'^+ + A' = -u^+ - u. \tag{3}$$

同理，我们做变换 $A'^+ = A''^+ - u^+$，则

$$A''^+ + A'' = 0. \tag{4}$$

由于我们不考虑“积分常数”，此时 $A''$ 自然为 0。从而

$$A = A' + u^+ = A'' + u^+ - u = u^+ - u. \tag{5}$$

我们发现以上的求解步骤中，遵循一个原则，即等式右端位移算子指数最大项 $g_p$，来自于 $A_m$。然后我们做变换 $A_m = A'_m + g_p$，得到新的方程

$$A'_m + F(\cdots, A'_{-1}, A', \cdots, A'_{m-1}) = G'_{p-1}, \tag{6}$$

重复上述步骤，即可得到

$$A_m^{'\cdots'} + F(\cdots, A_{-1}^{'\cdots'} A, \cdots, A_{m-1}^{'\cdots'}) = 0, \tag{7}$$

从而取 $A_m^{'\cdots'} = 0$，得 $A_m = A'_m + g_p = A''_m + g_p + g'_{p-1} = \cdots$。如果不能经过有限次得到上式，那么我们认为该方程没有显式解。

下面我们考虑用 Maple 实现上述的算法。上述的讨论也即我们的算法思想，其中的关键在于获取 $G_p$ 中位移算子指数最大项 $g_p$。幸运的是，我们可以通过 Maple 内置的 ‘op’ 函数计算 $g_p$。这里我们简单说明如果利用 ‘op’ 函数计算 $g_p$。对于一个由有理分式组成的“多项式”形如

$$expr = \frac{u^{++}u^{+++}u^{++++}}{v^{++}v^{+++++}v^{++++}} - \frac{u^{++}}{v^{++}v^{+++++}} + \frac{\left(u^{++}\right)^2 u^{+++}}{\left(v^{++}\right)^2 v^{++++}} \tag{8}$$

经 ‘op’ 作用

```
op(expr);
```

可将上述“多项式”分解为多个单项式，即按加法 (减法可变为加法) 拆分

$$\frac{u^{++}u^{+++}u^{++++}}{v^{++}v^{+++++}v^{++++}}, \quad -\frac{u^{++}}{v^{++}v^{+++++}}, \quad +\frac{\left(u^{++}\right)^2 u^{+++}}{\left(v^{++}\right)^2 v^{++++}} \tag{9}$$

而对于一个有理分式单项式，即形如

$$expr = \frac{u^{++}u^{+++}u^{++++}}{v^{++}v^{+++++}v^{++++}} \tag{10}$$

经 ‘op’ 作用可将其按乘法 (除法可变为乘法) 拆分，变为单个函数 (对于倒数，需要再经 op 作用一次)

$$u^{++}, \quad u^{+++}, \quad u^{++++}, \quad \left(v^{++}\right)^{-1}, \quad \left(v^{+++}\right)^{-2}, \quad \left(v^{+++++}\right)^{-1}, \quad \left(v^{++++}\right)^{-1} \tag{11}$$

最后，对于单个函数，经 op 作用可提取函数的自变量。如对 $u(n+2)$，经 op 作用，得 $n+2$。特别地，op 作用于数字不变。利用此特点，我们取定 $n$ 为一个足够大的数 (这里是因为出现倒数时，我们要多一次 op 作用，因此我们对所有的项都做最大次 (5 次) 的 op 叠加，这样对于没有出现倒数的项，如果不取定 $n$，则自变量会被进一步分解，如 $n+2$ 分解为 $n, 2$，这样就无法判断大小)，然后经 5 次 op 作用，我们就可以获取多项式中位移算子的最大指数项。

上述算法对于变系数差分方程，存在一定的问题，如对于

$$A^{+} - \frac{v^{+}}{v^{++}}A^{--} = u^{+} - \frac{v^{+}}{v^{++}}u^{--}. \tag{12}$$

显然，它的解为 $A^+ = u^+$，然而，位移算子的最大指数项是 $\dfrac{v^+u^{--}}{v^{++}}$，这导致算法无法求解。原因在于变系数对算法造成了干扰，目前我们还没有找到行之有效的方法避免这种情况。当然，如果我们将上述算法改为取位移算子的最小指数项，那么该问题就解决了。但是对于其它问题必然也会出现上述的情况。当然，对于一些问题，可以交叉使用两者。

我们将程序放在Github 代码库，这里不在附上。