

两种流体模型在库埃特与泊肃叶流下的数值模拟情况

马坤

2020.1.7

1 平行区域

平行区域流体指的是管道中第一层为粘性较大的流体，第二层为粘性较小的流体，第三层为粘性较大的流体，如图1，其中区域1和区域三粘性一样。

假设我们模拟的区域高度为 $H = 1$ （同样假设模拟区域长度 $L = 1$ ），那么有刻画流体区域的示性函数 ϕ :

$$\phi = \begin{cases} 0.5[-\tanh \frac{y-1/3}{W} + 1], y \leq H/2 \\ 0.5[\tanh \frac{y-2/3}{W} + 1], y > H/2 \end{cases}$$

ϕ 理应（ W 较小）粘性较大流体里面（ $y < H/3$ 或者 $y > 2H/3$ ）为1，理应（ W 较小）在粘性较小流体里面（ $H/3 < y < 2H/3$ ）为0。

模拟中我们假设粘性比 $\frac{\eta_s}{\eta_l} = rate$ ，其中 η_s 为较大的粘性，无维度化后的粘性系数 η 有如下表达式：

$$\eta = 1 + rate * \phi - \phi. \quad (1)$$

上述两个表达式上面两个表达式中的 $W, rate$ 都是待定的参数，接下来会通过实验选取较好的值。实验中假设的流体的密度均为 $\rho = 1$ ，所以有 $\eta = \nu$ 。

1.1 库埃特流

在这一节中我们将考察库埃特流，即上面板具有速度，假设为 $u_{up} = 0.1$ ，下面板速度为 $u_{bottom} = 0$ 。流体流动的过程中我们不考虑外力。第一小节是改变 W ，第二小节为改变 $rate$ 。

1.1.1 改变 W

如果只考虑单一流体，那么流体的流速应该为线性增长的，但是本文考虑的为大小大流体模型，所以流速图会有所差异。此小节的实验，选用的 $rate = 50$ ，对照黄老师论文，我们选取了 $Re = 500$ ，结果图2。

观察图2可见，当 W 较大时流速趋于一条直线，尤其是 $W = 0.5$ 。这是因为当 W 过大时，示性函数 ϕ 已经不能较好的反应流体的性质了，这导致了流体粘性比小于希望的值；而当 W 较小时示性

函数 ϕ 较好的反应了流体的性质。观察 $W = 0.001$ 图像，靠近下面板的大粘性流体速度几乎为0，而靠近上面板的流速为近似为0.1，可以理解为粘性大的流体和面板粘在一起。

1.1.2 改变 $rate$

此小节我们选取的 $W = 0.01$ ，然后考察流体稳定后的流速与 $rate$ 之间的关系。此时，虽然改变了 $rate$ 的值，按照黄老师的对应关系， Re 也应该改变，但是这里仍然固定 $Re = 500$ 。可以看见当流体粘性比越小时，流速越趋于一条直线，这我们的理解是相同的。当 $rate = 1$ 时，无维度 η 就是一个常数，与位置无关，此时画出来图片理应为一条直线，与库埃特流精确解一致。但是由于收敛太慢了，达到此过程之前就最大时间停机了。结果见图3。

1.2 泊肃叶流

在这一节中我们将考察泊肃叶流，即上下面板没有速度， $u_{up} = u_{bottom} = 0$ 。流体流动的过程中我们考虑外力，其中我们外力的选取为 $F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_s}{H^2}$ ，其中 $u_{peak} = 0.1$ 。如果是单一成分流体，并且流体的粘性为 η_s ，那么流速应该是一个抛物线，并且峰值为0.1。同样的，第一小节是改变 W ，第二小节为改变 $rate$ 。

1.2.1 改变 W

同库埃特流一样，当 W 较大时流速趋于一条抛物线，尤其是 $W = 0.5$ ，但是峰值不是0.1。这是因为当 W 过大时，示性函数 ϕ 已经不能较好的反应流体的性质了，这导致了流体粘性比小于希望的值，图像进而类似抛物线，而峰值不为0.1的原因因为我们外力相对于粘性小的流体来说太大了；而当 W 较小时示性函数 ϕ 较好的反应了流体的性质。随着 W 的减小，大粘性流体的速度趋于精确解，但小粘性的流体的流速却不停的增大，也许会稳定下来。结果见图4。

1.2.2 改变 $rate$

此图的参数选取与库埃特流的第二小节一样， $Re = 500, W = 0.1$ ，不过我们这里改变了 $rate$ ，所以进而力也会改变。这个图像就不那么好理解了，尤其是 $rate = 100$ 时，流体流速很反常，但是当 $rate = 1$ 时流体速度和抛物线还是很接近的，这和预期也是很相符。但还是当我们取 $W = 0.01, W = 0.5$ 时，情况有所变化。结果分别为图5、图6、图7。图8为了查看 $rate = 100$ ，在不同的 W 的情况下是否还是会出现反常的情况

2 圆形区域

在流体中的圆形固体指的是在正方形流体区域有一个圆心在中心的固体，我们在此模拟中可将其看成一个粘性较大的流体。假设正方形区域高为 $H = 1$ ，长为 $L = 1$ 。圆形位于 $(1/2, 1/2)$ ，半径长 $R = 1/4$ ，如图9。

进一步假设刻画流体区域的示性函数，

$$\phi = 0.5[-\tanh \frac{2.4(r-1/4)}{W} + 1], r = \sqrt{(x-1/2)^2 + (y-1/2)^2}$$

ϕ 理应 (W 较小) 粘性较大流体 (圆形区域内 $r < R$) 里面为1, 理应 (W 较小) 在粘性较小流体 (圆形区域外 $r > R$) 里面为0。

模拟中我们假设粘性比 $\frac{\eta_s}{\eta_l} = rate$, 其中 η_s 为较大的粘性 (圆形的区域内的流体), η_l 为较小的粘性 (圆形的区域外的流体), 无维度化后的粘性系数 η 有如下表达式:

$$\eta = 1 + rate * \phi - \phi. \quad (2)$$

上述两个表达式上面两个表达式中的 $W, rate$ 都是待定的参数, 接下来会通过实验选取较好的值。实验中假设的流体的密度均为 $\rho = 1$, 所以有 $\eta = \nu$ 。

2.1 库埃特流

面对库埃特流实验了一个情况, $W = 0.1, rate = 50$ 。下图为3维的情况与2维的情况。其中2维图中 $x = 0, x = 0.5$ 意味着截取的平面为长的开始点 $(0,0)$ 与中间点 $(L/2,0)$, 即图7中的坐标系下的坐标。结果见图10、图11。

2.1.1 W变化

此时我们考察的是在圆形区域库埃特流情况下, 固定 $rate = 50$, 流体速度随着 W 的变化情况。由于此时的速度是一个二元函数, 所以在这只能给出速度某些截面的速度分布, 类似于图9的方法。截取的平面分别为 $x = 0, x = 0.25, x = 0.5$, 具体结果见图12、图13、图14。

2.1.2 rate变化

此时我们考察的是在圆形区域库埃特流情况下, 固定 $W = 0.1$, 流体速度随着 $rate$ 的变化情况。类似2.1.1节的情况, 截取的平面分别为 $x = 0, x = 0.25, x = 0.5$, 具体结果见图15、图16、图17。

2.2 泊肃叶流

面对泊肃叶流实验了一个情况, $W = 0.1, rate = 50$ 。正如之前, 此时力是恒定的, 所以其选取就有了一定麻烦。当力取得较大 $F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_s}{H^2}$ 时, 数值算法崩溃了, 当取得较小时 $F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_l}{H^2}$, 稳定结果, 但是结果也有一些问题。其中2维图中 $x = 0, x = 0.5$ 意味着截取的平面为长的开始点 $(0,0)$ 与中间点 $(L/2,0)$ 。结果见图18、图19。

2.2.1 W变化

此时我们考察的是在圆形区域泊肃叶流情况下, 固定 $rate = 50$, 流体速度随着 W 的变化情况。由于此时的速度是一个二元函数, 所以在这只能给出速度某些截面的速度分布, 类似于图9的方

法。截取的平面分别为 $x = 0, x = 0.25, x = 0.5$ ，具体结果见图20、图21、图22。前面几节的结果是当 W 越大得到的解更接近抛物线，可是这里却有所不同—— W 越大曲线越趋于扁平。我认为这是由于 F 取值较小导致的结果，至于更深入的解释为什么 F 取较小的值会如此暂时没有有所结果。

2.2.2 rate变化

此时我们考察的是在圆形区域泊肃叶流情况下，固定 $W = 0.1$ ，流体速度随着 $rate$ 的变化情况。类似2.1.1节的情况，截取的平面分别为 $x = 0, x = 0.25, x = 0.5$ ，具体结果见图23、图24、图25。

3 MATLAB模拟

此节的目的是利用matlab的bvp4c函数来解决两点边值ode问题，验证LBM是否真的解决了对应的物理问题。我们先给出合适的两点边值问题的形式，此处我们只测试了平行区域，因为只有平行区域是ode，圆形区域是pde问题。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \begin{cases} 0, \text{cutte flow} \\ F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_s}{H^2}, \text{Poiseuille flow} \end{cases}$$

$$u(0) = 0, u(1) = \begin{cases} 0, \text{cutte flow} \\ u_{peak}, \text{Poiseuille flow} \end{cases}$$

此处给出了具体的两点边值表达式以及边值条件，注意表达式中 η 是一个分段函数，具体的表达式是等式1。接下来是利用 matlab中bvp4c解ode以及对比LBM的计算结果。具体结果参考图??，图??。

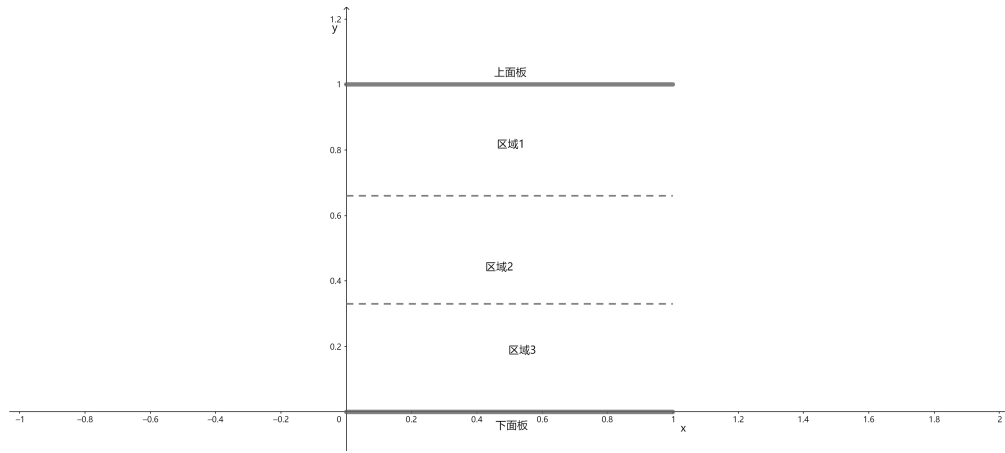


图 1: 平行区域示意图: x 为水平轴, y 为垂直轴, 由于模拟区域为 $H = L = 1$, 所以数值算法模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 。

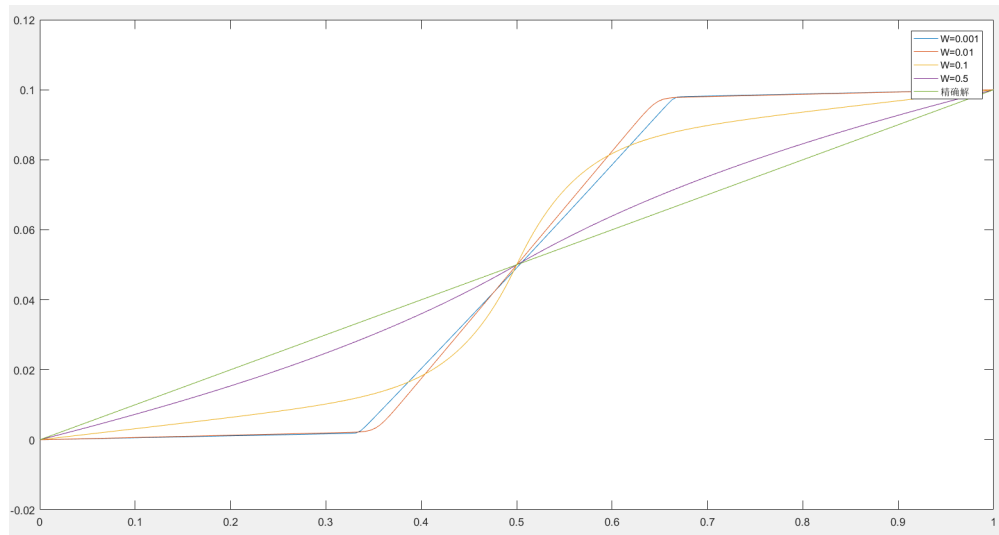


图 2: 平行区域下库埃特流随着 W 变化的图像: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中固定 $rate = 50$, 选取 $Re = 500, F = 0$ 。

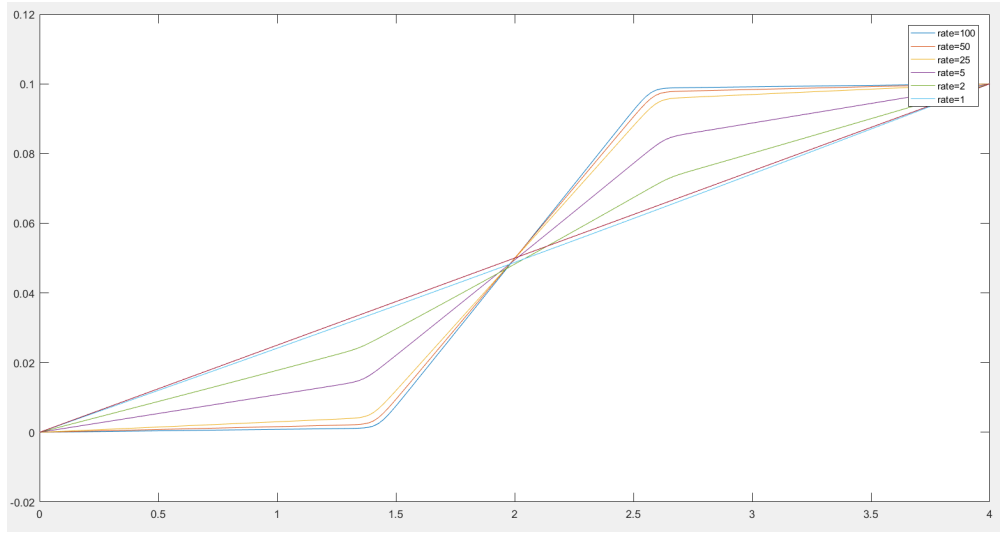


图 3: 平行区域下埃特流随着 $rate$ 变化的图像: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中固定 $W = 0.01$, 选取 $F = 0$, 其中选取 $Re = 500$ 。

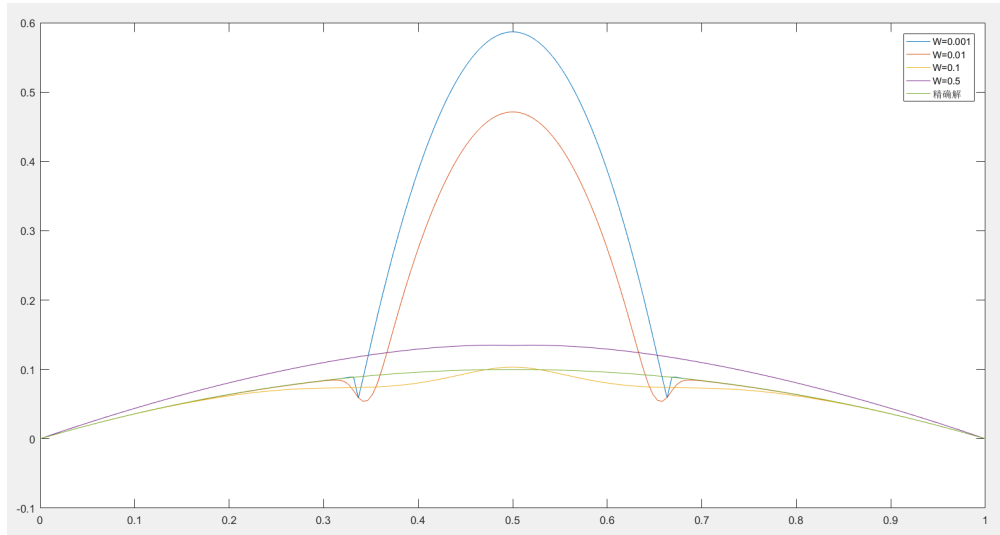


图 4: 平行区域下泊肃叶流随着 W 变化的图像: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中固定 $rate = 50$, 选取 $Re = 500$, $F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_s}{H^2}$, 其中 $u_{peak} = 0.1$ 。

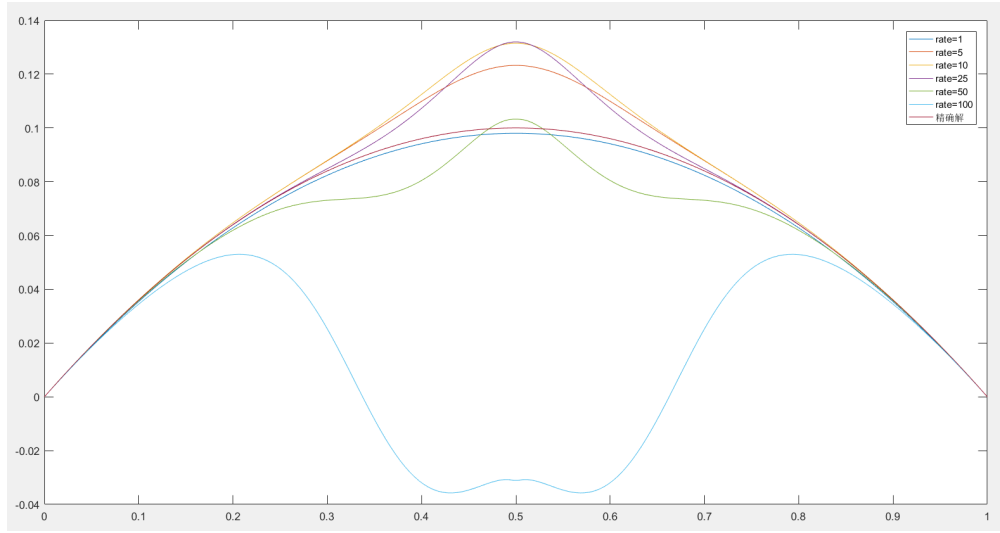


图 5: 平行区域下泊肃叶流随着 $rate$ 变化的图像: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中固定 $W = 0.1$, 选取 $Re = 500, F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_s}{H^2}$, 其中 $u_{peak} = 0.1$ 。

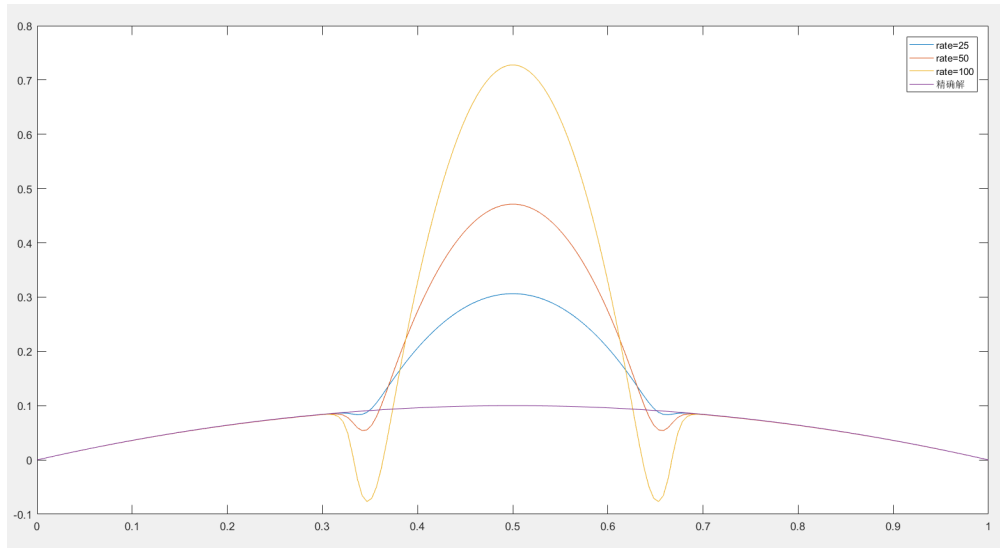


图 6: 平行区域下泊肃叶流随着 $rate$ 变化的图像: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中固定 $W = 0.01$, 选取 $Re = 500, F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_s}{H^2}$, 其中 $u_{peak} = 0.1$ 。

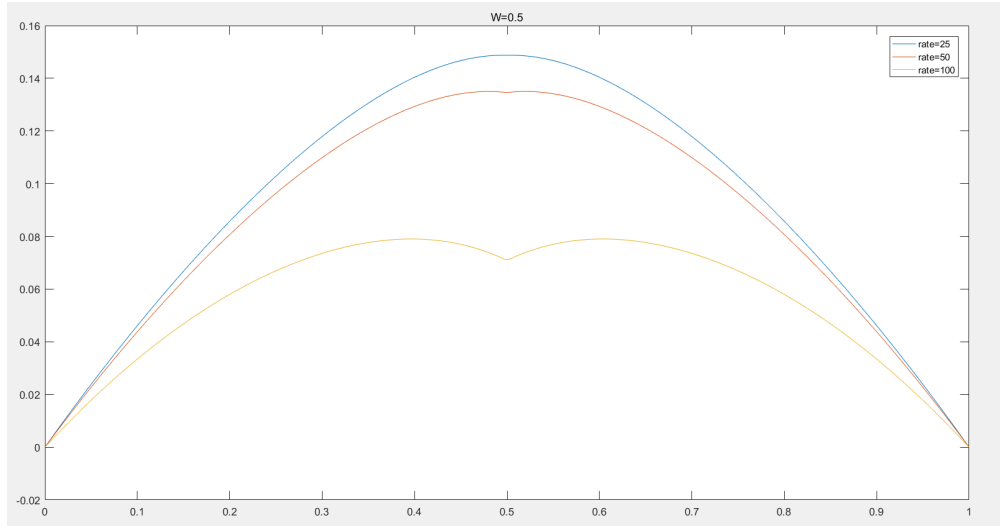


图 7: 平行区域下泊肃叶流随着 $rate$ 变化的图像: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中固定 $W = 0.5$, 选取 $Re = 500, F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_s}{H^2}$, 其中 $u_{peak} = 0.1$ 。

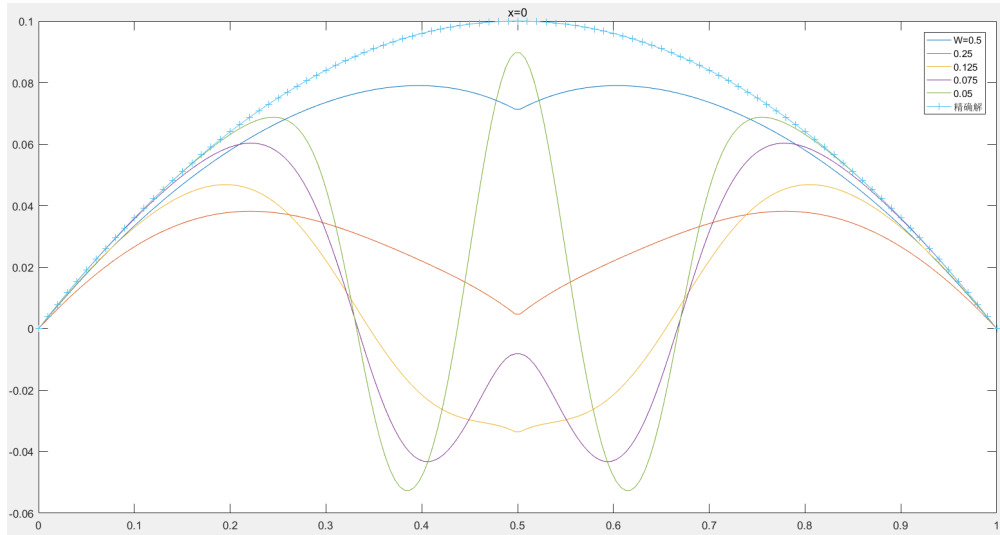


图 8: 平行区域下泊肃叶流固定 $rate = 100$, 随着 W 变化的图像: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中固定 $rate = 100$, 选取 $Re = 500, F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_s}{H^2}$, 其中 $u_{peak} = 0.1$ 。

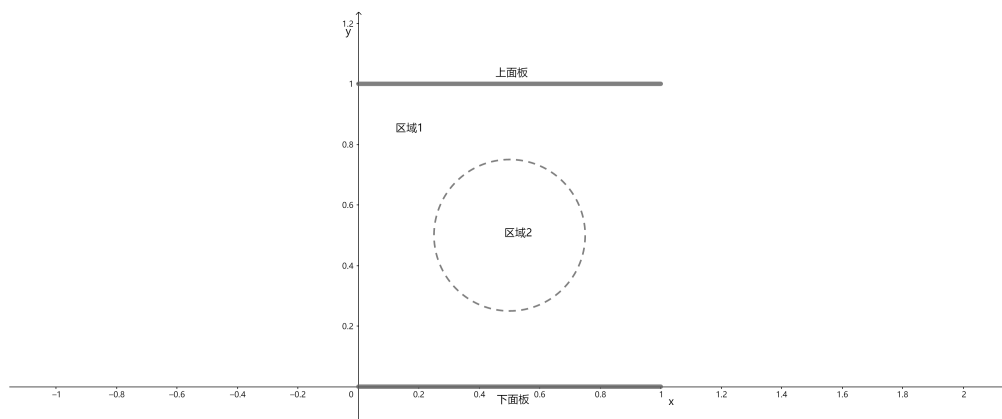


图 9: 圆形区域示意图: x 为水平轴, y 为垂直轴, 由于模拟区域为 $H = L = 1$, 所以数值算法模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 。

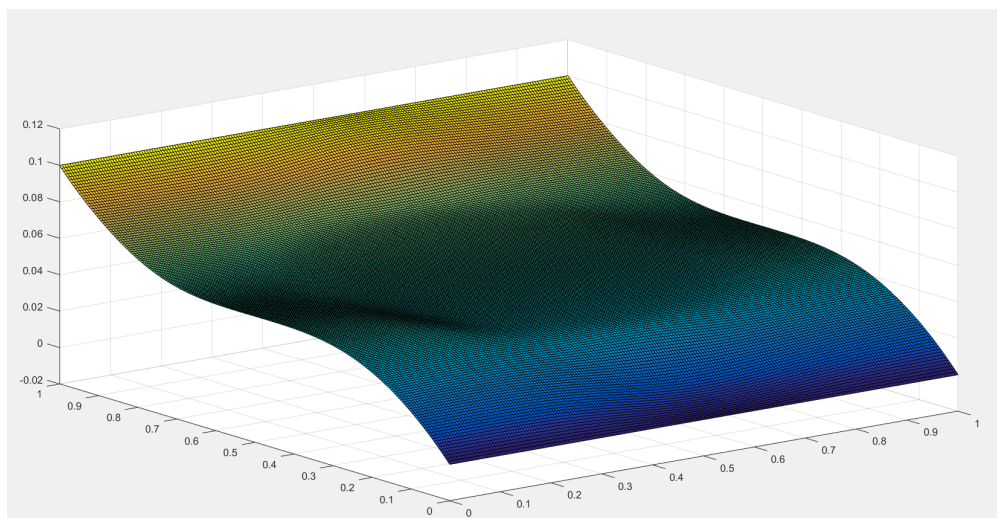


图 10: 圆形区域下库埃特流的3D图像: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $W = 0.1, rate = 50, Re = 500, F = 0$ 。

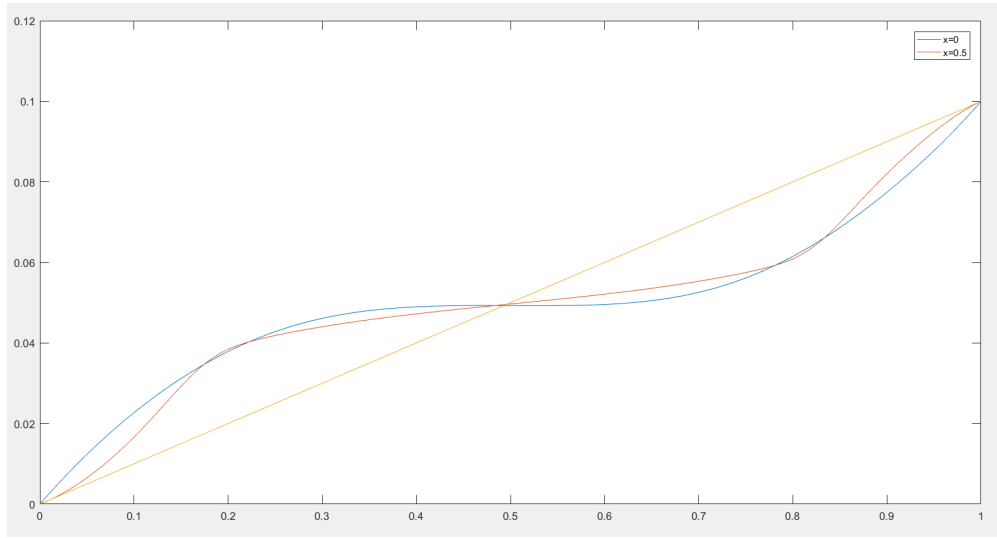


图 11: 圆形区域下库埃特流的2D图像: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $W = 0.1, rate = 50, Re = 500, F = 0$, 图例中 $x = 0, x = 0.5$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

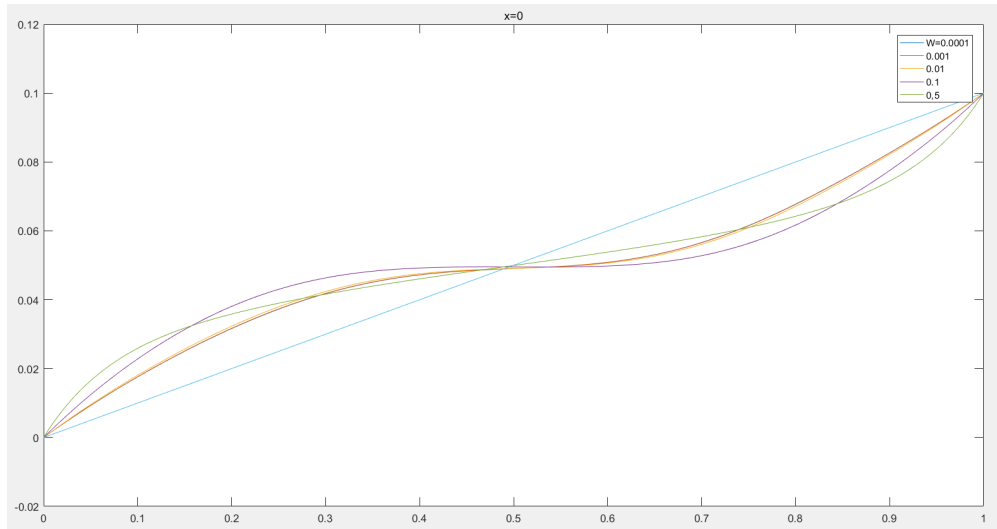


图 12: 圆形区域下库埃特流速度随着 W 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $rate = 50, Re = 500, F = 0$, 标题中 $x = 0$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

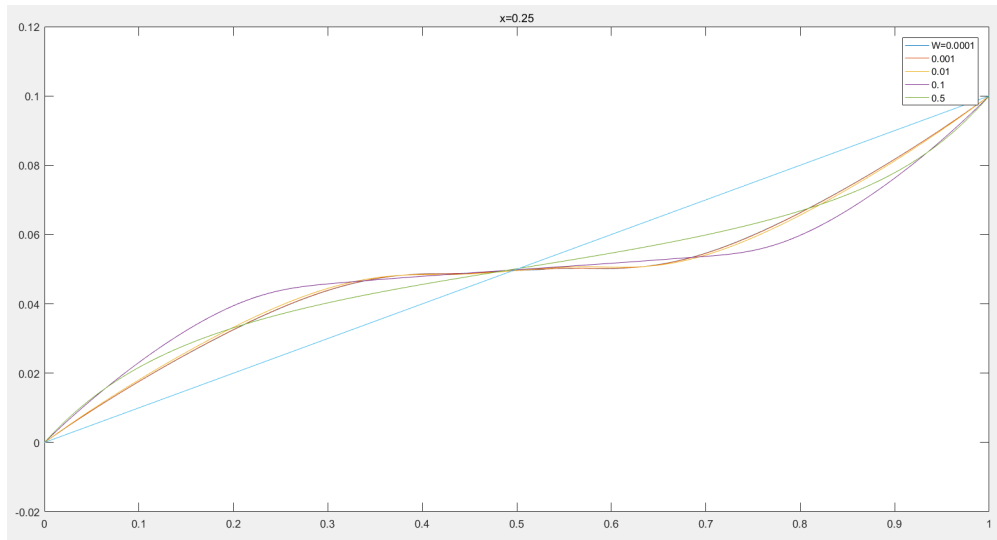


图 13: 圆形区域下库埃特流速度随着 W 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $rate = 50, Re = 500, F = 0$, 标题中 $x = 0.25$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

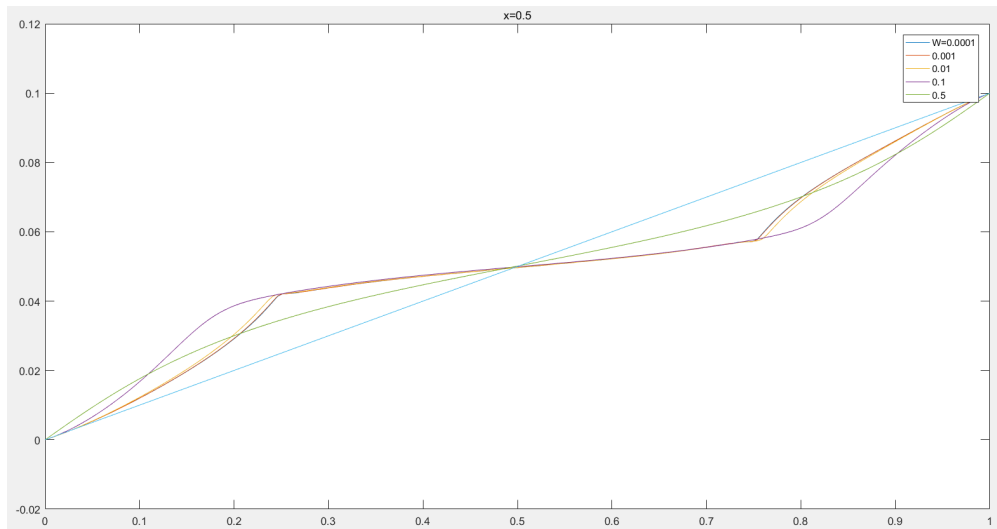


图 14: 圆形区域下库埃特流速度随着 W 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $rate = 50, Re = 500, F = 0$, 标题中 $x = 0.5$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

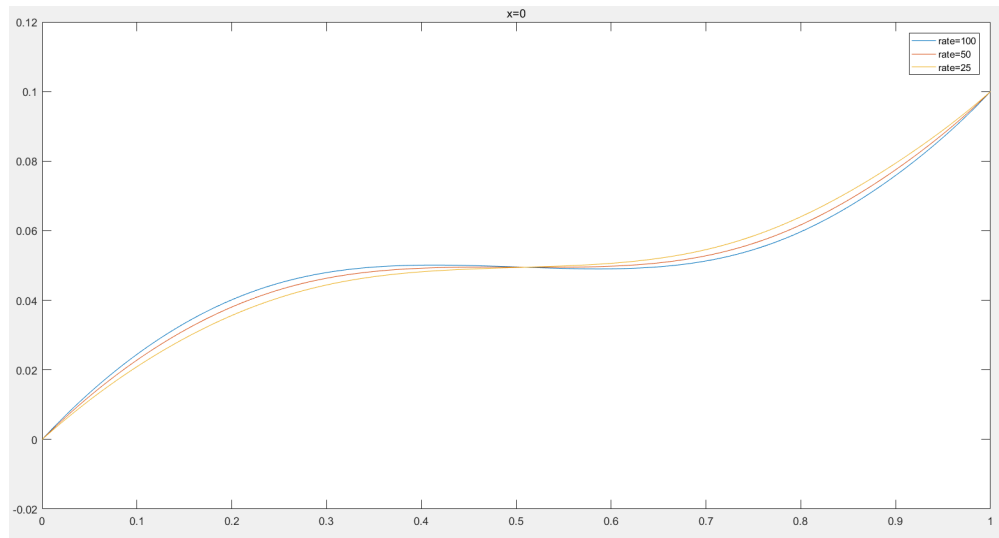


图 15: 圆形区域下库埃特流速度随着 $rate$ 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $W = 0.1, Re = 500, F = 0$, 标题中 $x = 0$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

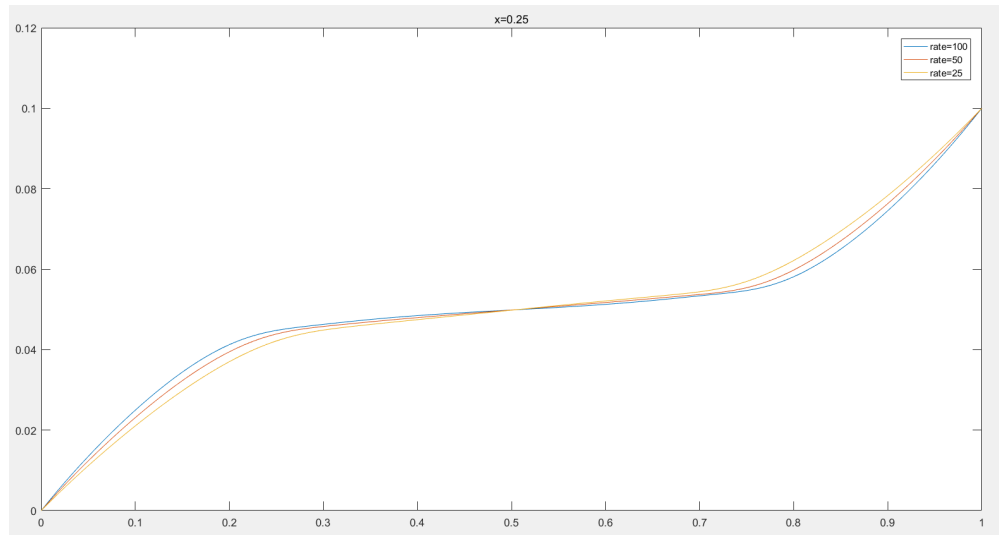


图 16: 圆形区域下库埃特流速度随着 $rate$ 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $W = 0.1, Re = 500, F = 0$, 标题中 $x = 0.25$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

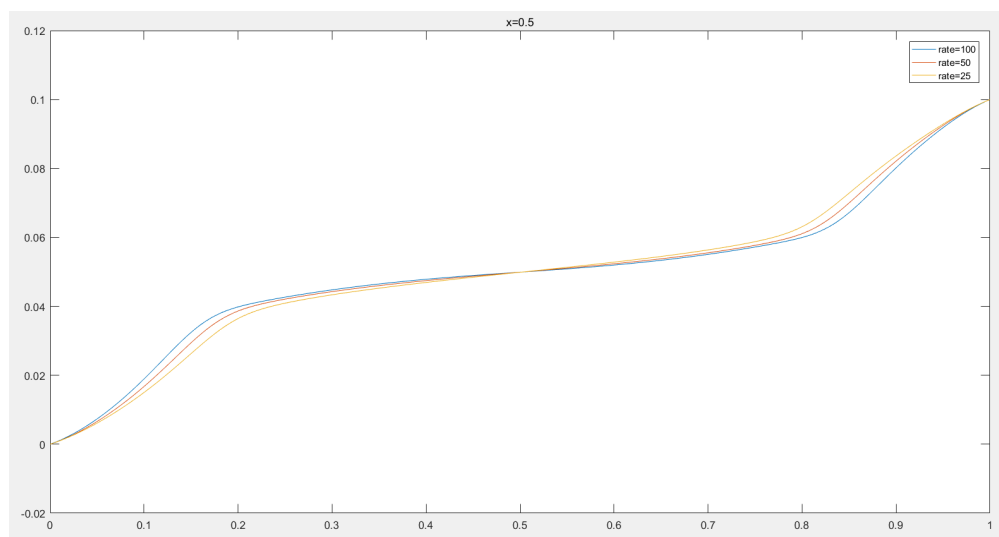


图 17: 圆形区域下库埃特流速度随着 $rate$ 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $W = 0.1, Re = 500, F = 0$, 标题中 $x = 0.5$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

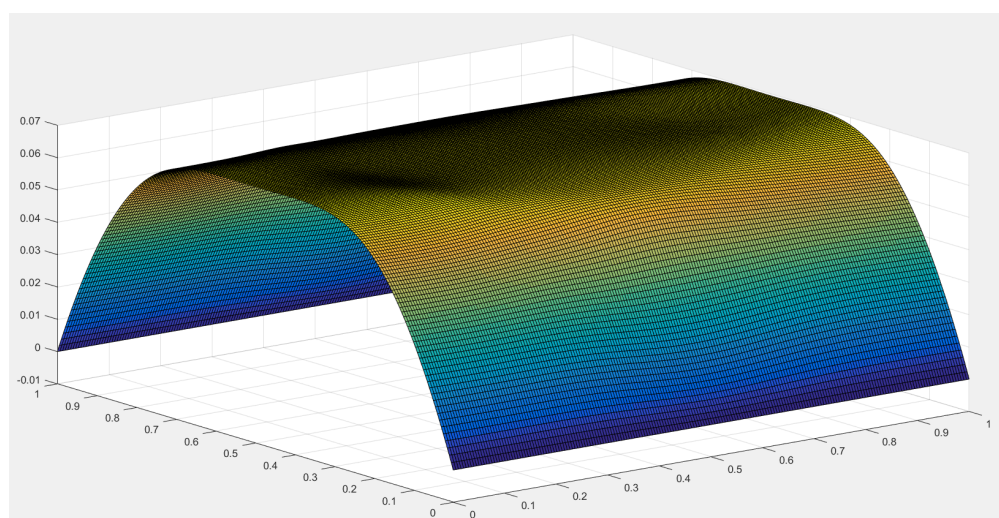


图 18: 圆形区域下泊肃叶流的2D图像

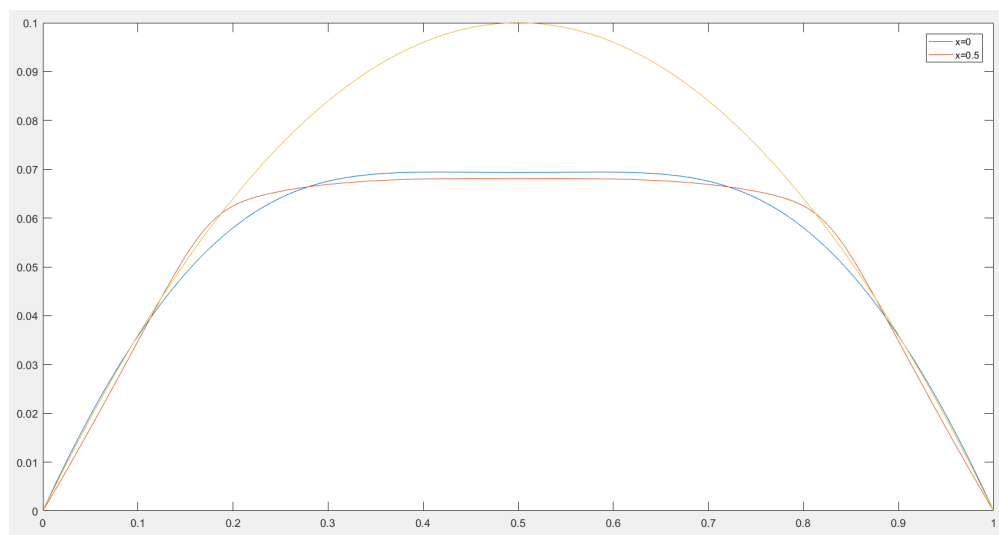


图 19: 圆形区域下泊肃叶流的2D图像

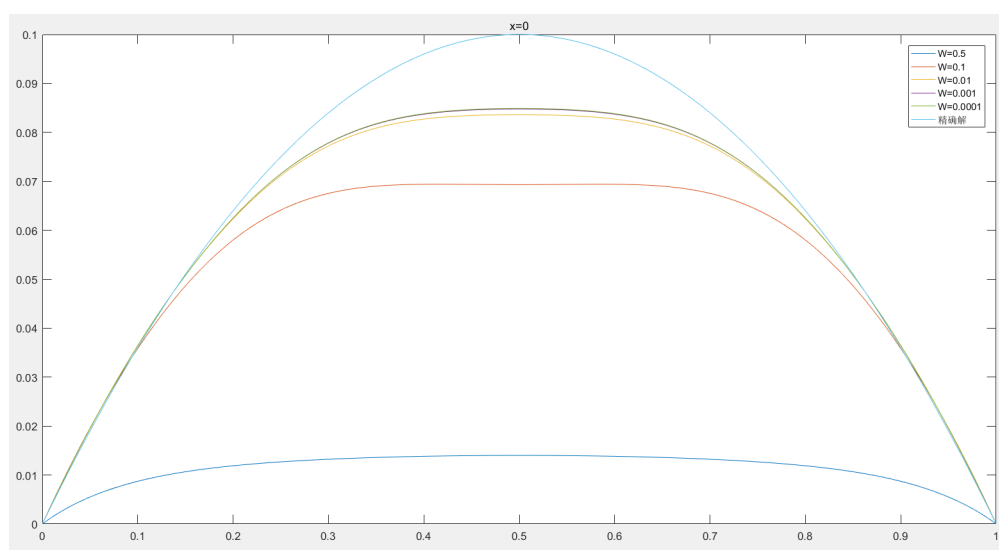


图 20: 圆形区域下泊肃叶流速度随着 W 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $rate = 50$, $Re = 500$, $F = \frac{8\rho u_{peak}\eta l}{H^2}$, 注意力的大小选取和之前不同, 标题中 $x = 0.5$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

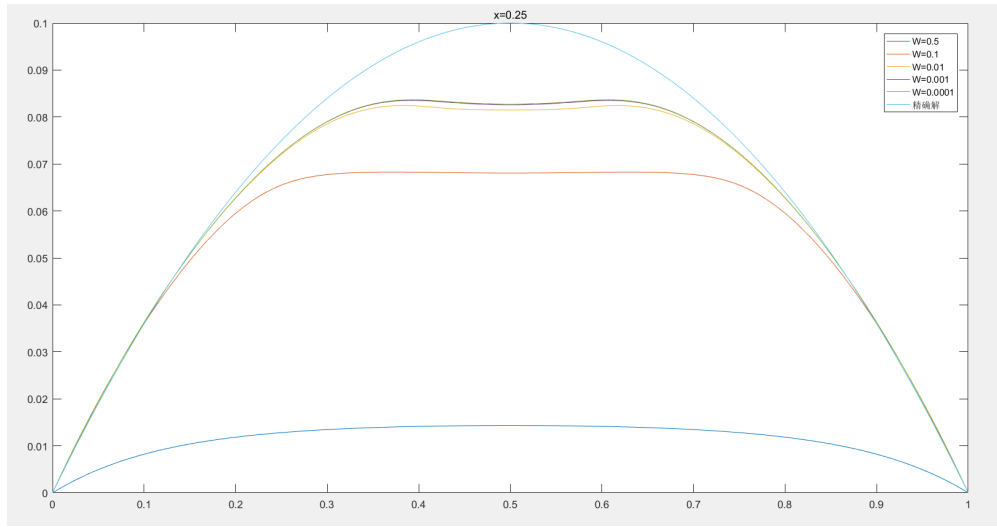


图 21: 圆形区域下泊肃叶流速度随着 W 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $rate = 50$, $Re = 500$, $F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_l}{H^2}$, 注意力的大小选取和之前不同, 标题中 $x = 0.5$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

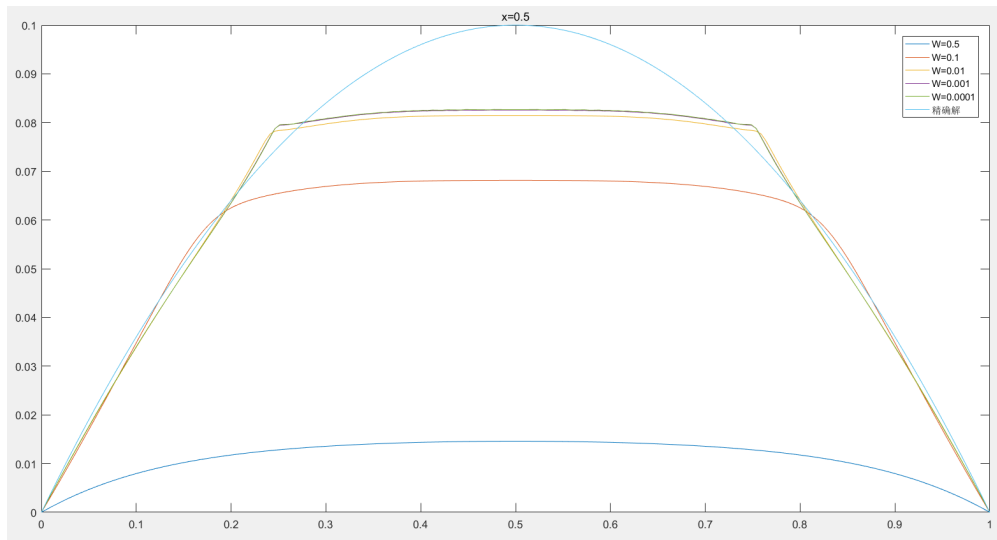


图 22: 圆形区域下泊肃叶流速度随着 W 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $rate = 50$, $Re = 500$, $F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_l}{H^2}$, 注意力的大小选取和之前不同, 标题中 $x = 0.5$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

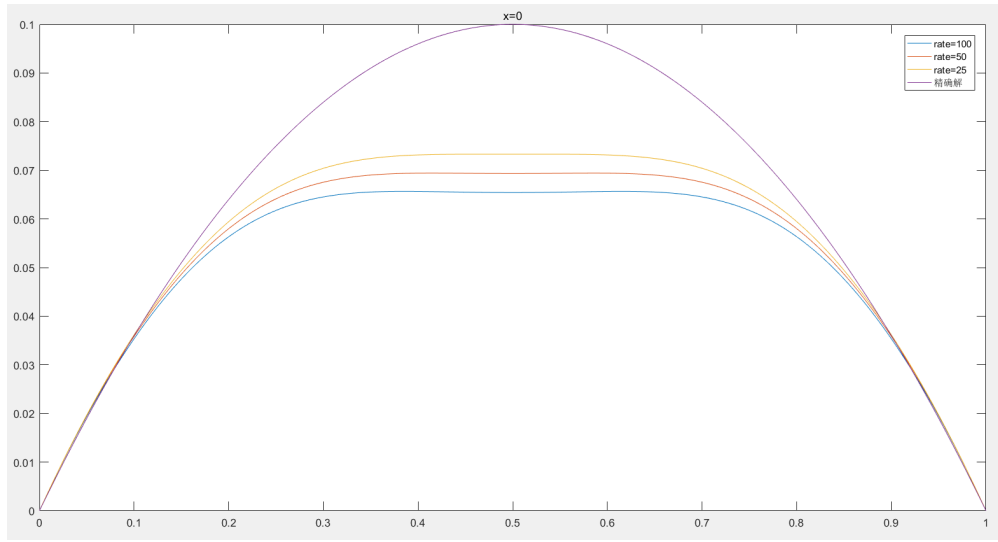


图 23: 圆形区域下泊肃叶流速度随着 $rate$ 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $W = 0.1, Re = 500, F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_l}{H^2}$, 注意力的大小选取和之前不同, 标题中 $x = 0.5$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

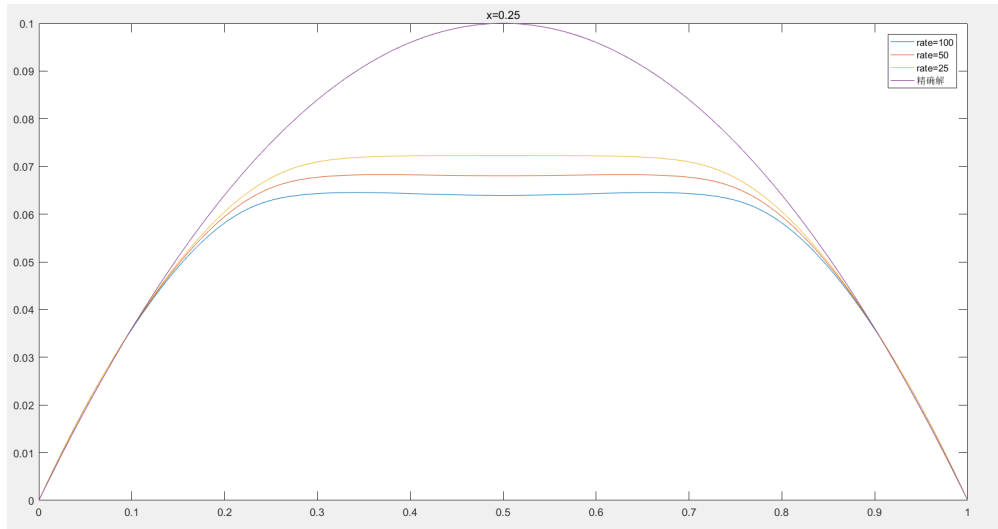


图 24: 圆形区域下泊肃叶流速度随着 $rate$ 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $W = 0.1, Re = 500, F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_l}{H^2}$, 注意力的大小选取和之前不同, 标题中 $x = 0.5$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。

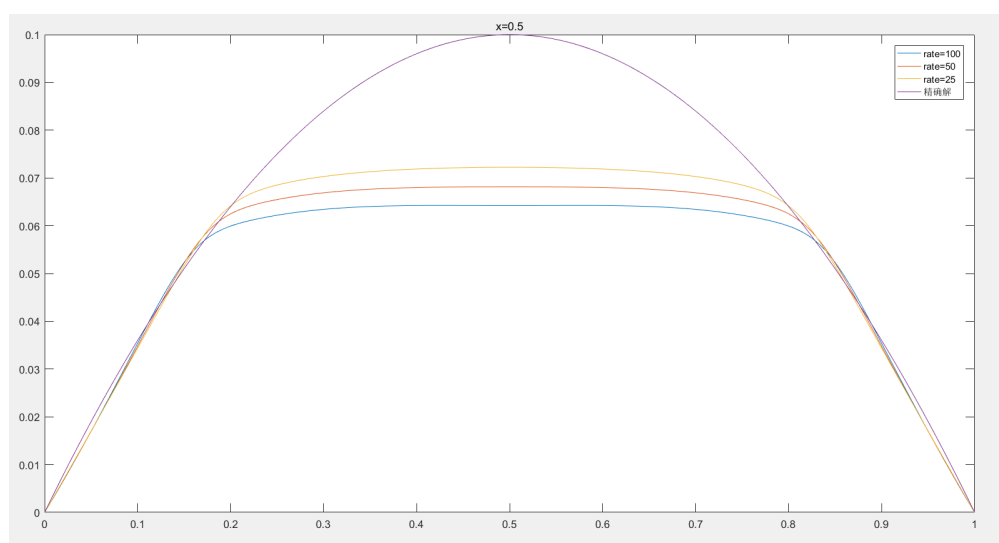


图 25: 圆形区域下泊肃叶流速度随着 $rate$ 的变化情况: 模拟区域为 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 其中 $W = 0.1$, $Re = 500$, $F = \frac{8\rho u_{peak}\eta l}{H^2}$, 注意力大小选取和之前不同, 标题中 $x = 0.5$ 表示曲线为在对应 x 轴位置的3维图形的截线。