

单个圆形固体颗粒悬浮流体

马坤

2019.11.5

在这个情况下，圆形固体颗粒的圆心处于泊肃叶流体(流体以峰值速度为 $U_0 = 0.1$ 流动)模拟区域的中央；其半径为 $r = H/4, H = 1$ 是模拟区域的宽度，模拟区域的长度为 $L = H = 1$ ；流体与颗粒的密度都假设为 $\rho = 1$ ；此次模拟中我们假设 $W = 0.1$ 。我们的 ϕ 形式如下：

$$\phi = 0.5[-\tanh \frac{2.4(r - 1/4)}{W} + 1], r = \sqrt{(x - L/2)^2 + (y - H/2)^2}. \quad (1)$$

ϕ 应该是一个二元函数，图1.a为其三维图片，图1.b为 ϕ 在 $x = 0.5$ 或者 $y = 0.5$ 处的投影。在给出的数值的情况下， ϕ 在固体颗粒里面($r < H/4$) 为1，在固体外面的液体里面($r > H/4$)为0，固液交界面($r = H/4$)为0.5。

模拟中我们假设 $\frac{\eta_s}{\eta_l} = 50$,我们的粘性系数 η 有如下表达式：

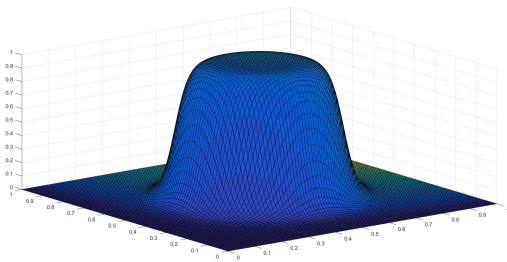
$$\eta = 1 + \frac{\eta_s}{\eta_l} \phi - \phi. \quad (2)$$

可以知道我们的 η 的极大值为50，为了和黄老师的论文进行匹配，在数值模拟中雷诺数 $Re = 500$ 。

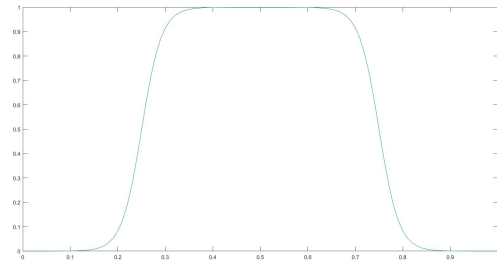
由于假设的流体与颗粒的密度都假设为 $\rho = 1$ ，所以有 $\eta = \nu$ ，这会在数值模拟中用到。泊肃叶流的控制方程与解可以写为：

$$\nabla p = \nabla \cdot (\eta \nabla u). \quad (3)$$

$$u_x = 4U_0 \frac{y}{H} (1 - \frac{y}{H}), u_y = 0. \quad (4)$$



(a) ϕ 的3维图片



(b) ϕ 在 $x = 0.5(y = 0.5)$ 的投影

图 1: ϕ 的图像

化简(3)得到:

$$\nabla p = (\nabla u)\nabla\eta + \eta\Delta u. \quad (5)$$

其中

$$\nabla u = \begin{pmatrix} 0 & 4U_0(1-2y)/H \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

$$\Delta u = \begin{pmatrix} -8U_0/H^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

$$\nabla\eta = \left(\frac{\eta_s}{\eta_l} - 1\right)\nabla\phi. \quad (8)$$

我们可以利用 ϕ, η 定义表达式(1), (2)计算得到:

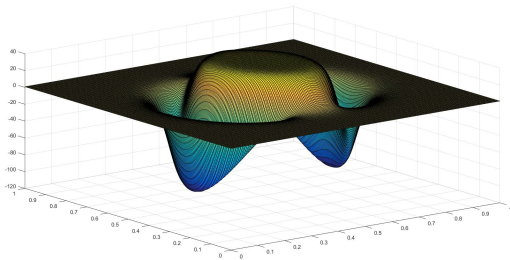
$$\begin{aligned} \nabla\eta &= \left(\frac{\eta_s}{\eta_l} - 1\right)\left\{-0.5\left[1 - \tanh^2 \frac{2.4(r-1/4)}{W}\right]\frac{2.4}{W}\nabla r\right\} \\ \text{where } \nabla r &= \begin{pmatrix} \frac{x-L/2}{\sqrt{(x-L/2)^2 + (y-H/2)^2}} \\ \frac{y-H/2}{\sqrt{(x-L/2)^2 + (y-H/2)^2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

将(6)(7)(8)(9)代入(5), 得到:

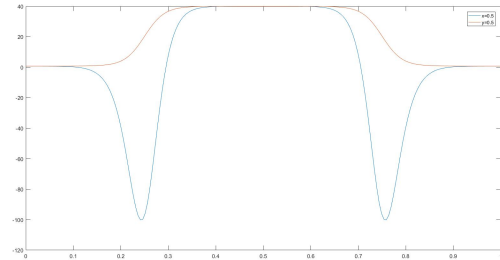
$$\nabla p = \begin{pmatrix} 4U_0(1-2y)\left(\frac{\eta_s}{\eta_l} - 1\right)\left\{-0.5\left[1 - \tanh^2 \frac{2.4(r-1/4)}{W}\right]\frac{2.4}{W}\frac{y-H/2}{\sqrt{(x-L/2)^2 + (y-H/2)^2}}\right\}/H - 8\eta U_0/H^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

由于外力与压强有如下关系 $F = -\nabla p$, 再代入所有实验数值, 我们可以得到外力的精确表达式, 由于压强的 y 方向梯度为0, 在 y 方向没有力, 下面表达式只写 x 方向的力。

$$F = -470.4(y-1/2)^2[1 - \tanh^2 24(r-1/4)]/r + 0.8(1 + 24.5[1 - \tanh 24(r-1/4)]). \quad (11)$$



(a) F 的3维图片



(b) F 在 $x = 0.5(y = 0.5)$ 的投影

图 2: F 的图像

图2是力在给定的数值下的图像，图2.a为力的三维图像，图2.b为 F 在 $x = 0.5(y = 0.5)$ 的投影。可以发现力的最大值为40，最小值为负值，负值出现的位置为圆形颗粒的上下边界附近，左右边界没有负值。从图像上来看整个系统并不是完全对称的，所以力在上下边界和左右边界有所不同也很正常。