

低粘性流体中间夹高粘性泊肃叶流体

马坤

2019.10.16

本实验选用的二维泊肃叶流作为模拟的对象，选取 $U_0 = 0.1$ 作为流体的峰值速度，上下固体板速度均为0。模拟的范围为 $H = L = 1$ 的矩形区域，流体密度均是 $\rho_0 = 1$ ，由于是泊肃叶流，所以有其对应的控制方程与解，形式如下：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\eta \frac{\partial u}{\partial y}). \quad (1)$$

$$u = 4U_0 \frac{y}{H}(1 - \frac{y}{H}). \quad (2)$$

低粘性流体中间夹高粘性流体，我们采用示性函数 ϕ 来表示，其定义如下：

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{2}[\tanh \frac{y-H/3}{W} + 1], y \leq H/2 \\ \frac{1}{2}[-\tanh \frac{y-2H/3}{W} + 1], y > H/2 \end{cases}$$

在大粘性流体中为1，在小粘性流体中为0，在边界 ($y = H/3, y = 2H/3$)上为0.5。数值模拟中，我们分别选取了 $W = 1, W = 0.1$ 的情况。利用 ϕ 可以定义流体各处的粘性系数（无维度化后的结果，其与真实的粘性系数节差一个 η_l ）：

$$\eta = 1 + \frac{\eta_s}{\eta_l} \phi - \phi. \quad (3)$$

模拟中我们均采取了高低粘性系数流体的粘性比为50，并取 $Re = 500$ 使得粘性系数最大值与黄老师的数值匹配。

泊肃叶流体中力和压强梯度有一个替代的关系： $F = -\frac{\partial p}{\partial x}$ ，于是我们将(2)(3) 代入(1)就可以计算得到力的表达式：

$$F = -\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

将上述表达式代入,有 F 的精确表达式。其中图1我们给出 $W = 0.1$ 时的 $F(y)$ 的图像。

数值模拟中，我们将区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 划分为了 200×200 个网格点。也即是网格间距为 $\Delta x = \frac{1}{199}$ ，时间步长取为 $\Delta t = 0.1 \Delta x = \frac{0.1}{199}$ 。图2为 $W = 1$ 算到两时间步之间的误差小于 10^{-6} 的图片。图3为 $W = 0.1$ 算到达到最大迭代步（ 10^6 步）停机的图片

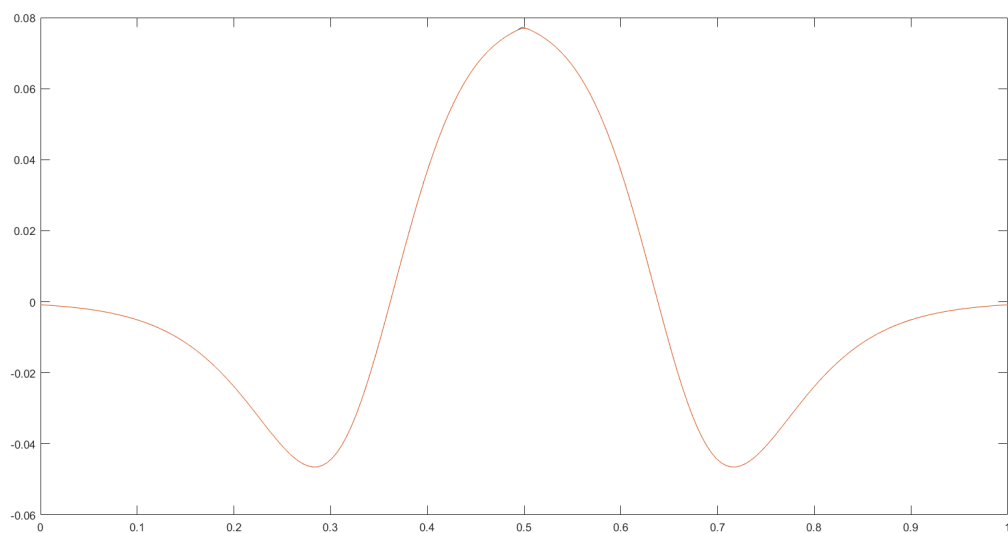


图 1: $W = 0.1$ 时, $F(y)$ 的图像(横坐标为 y 方向, 纵坐标为 F 的大小)

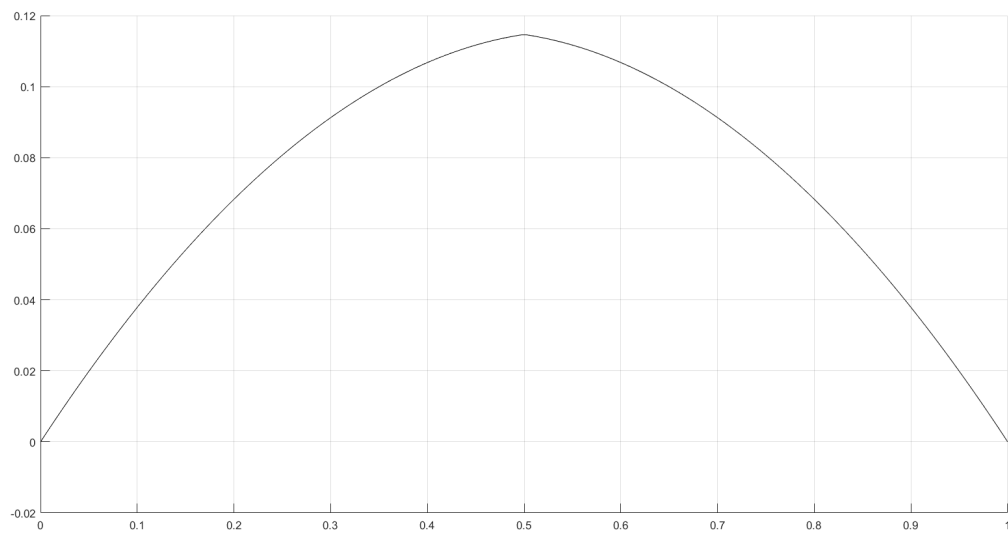


图 2: $W = 1$ 停机后的速度图像(横坐标为 y 方向, 纵坐标为 u 的大小)

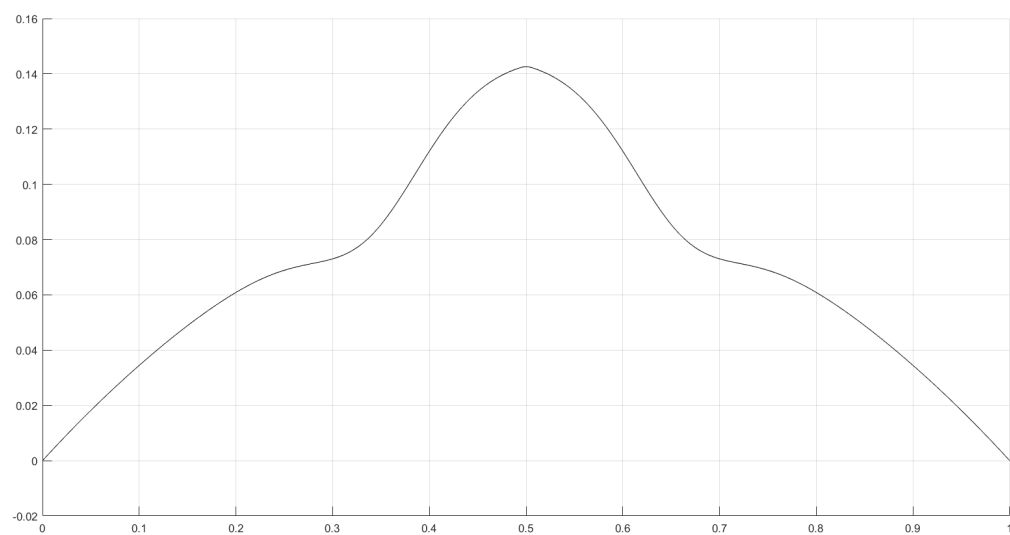


图 3: $W = 0.1$ 停机后的速度图像(横坐标为 y 方向, 纵坐标为 u 的大小)