

大小大流体在库埃特与泊肃叶流下的数值模拟情况

马坤

2020.1.7

大小大流体指的是管道中第一层为粘性较大的流体，第二层为粘性较小的流体，第三层为粘性较大的流体。假设我们模拟的区域高度为 $H = 1$ （同样假设模拟区域长度 $L = 1$ ），那么有刻画流体区域的示性函数 ϕ :

$$\phi = \begin{cases} 0.5[-\tanh \frac{y-1/3}{W} + 1], y \leq H/2 \\ 0.5[\tanh \frac{y-2/3}{W} + 1], y > H/2 \end{cases}$$

ϕ 理应（ W 较小）粘性较大流体里面（ $y < H/3$ 或者 $y > 2H/3$ ）为1，理应（ W 较小）在粘性较小流体里面（ $H/3 < y < 2H/3$ ）为0。

模拟中我们假设粘性比 $\frac{\eta_s}{\eta_l} = rate$ ，其中 η_s 为较大的粘性，无维度化后的粘性系数 η 有如下表达式：

$$\eta = 1 + rate * \phi - \phi. \quad (2)$$

上述两个表达式上面两个表达式中的 $W, rate$ 都是待定的参数，接下来会通过实验选取较好的值。实验中假设的流体的密度均为 $\rho = 1$ ，所以有 $\eta = \nu$ 。

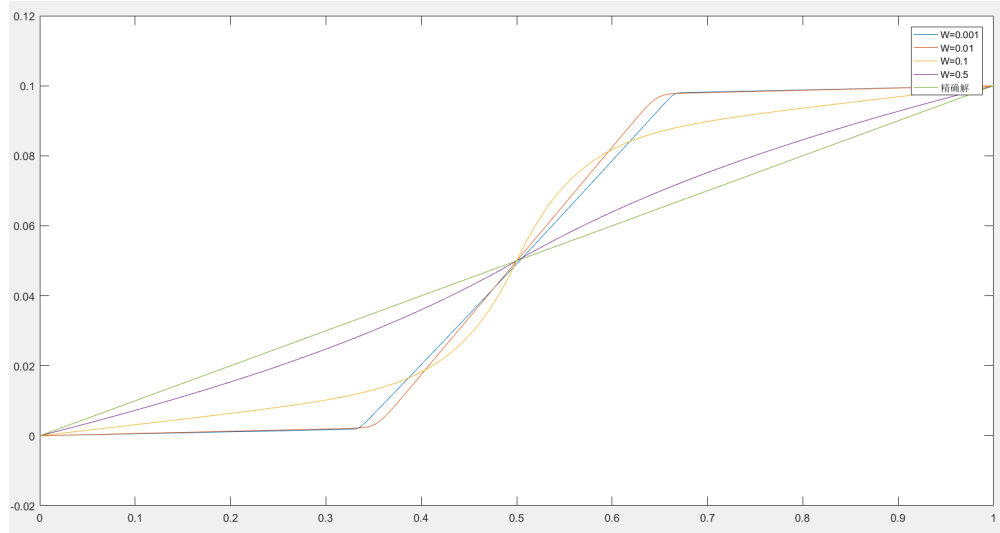
1 库埃特流

在这一节中我们将考察库埃特流，即上面板具有速度，假设为 $u_{up} = 0.1$ ，下面板速度为 $u_{bottom} = 0$ 。流体流动的过程中我们不考虑外力。第一小节是改变 W ，第二小节为改变 $rate$ 。

1.1 改变 W

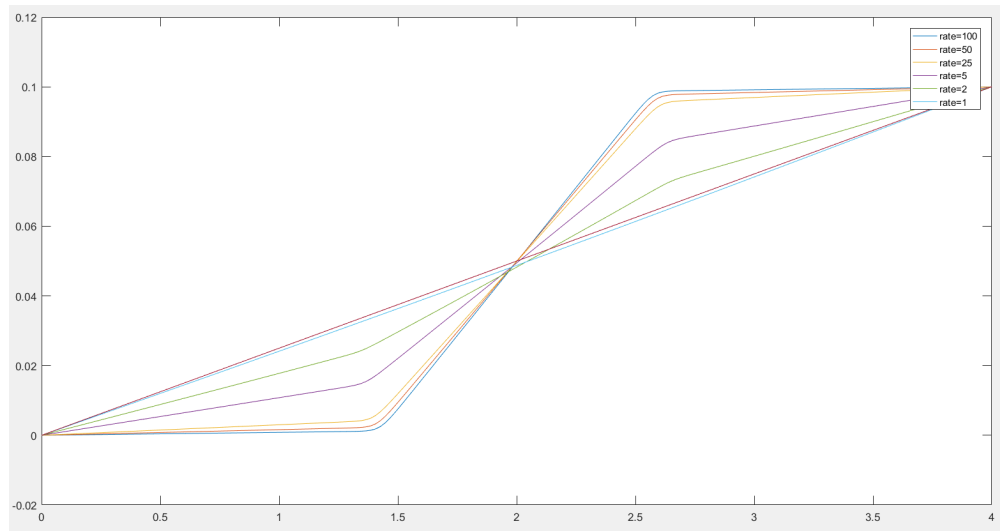
如果只考虑单一流体，那么流体的流速应该为线性增长的，但是本文考虑的为大小大流体模型，所以流速图会有所差异。此小节的实验，选用的 $rate = 50$ ，对照黄老师论文，我们选取了 $Re = 500$ 。

观察图片可见，当 W 较大时流速趋于一条直线，尤其是 $W = 0.5$ 。这是因为当 W 过大时，示性函数 ϕ 已经不能较好的反应流体的性质了，这导致了流体粘性比小于希望的值；而当 W 较小时示性函数 ϕ 较好的反应了流体的性质。观察 $W = 0.001$ 图像，靠近下面板的大粘性流体速度几乎为0，而靠近上面板的流速为近似为0.1，可以理解为粘性大的流体和面板粘在一起。

图 1: 库埃特流随着 W 变化的图像

1.2 改变 $rate$

此小节我们选取的 $W = 0.01$ ，然后考察流体稳定后的流速与 $rate$ 之间的关系。此时，虽然改变了 $rate$ 的值，按照黄老师的对应关系， Re 也应该改变，但是这里仍然固定 $Re = 500$ 。可以看见当流体粘性比越小时，流速越趋于一条直线，这在我们的理解是相同的。当 $rate = 1$ 时，无维度 η 就是一个常数，与位置无关，此时画出来图片理应为一条直线，与库埃特流精确解一致。但是由于解收敛太慢了，达到此过程之前就最大时间停机了。

图 2: 库埃特流随着 $rate$ 变化的图像

2 泊肃叶流

在这一节中我们将考察泊肃叶流，即上下面板没有速度， $u_{up} = u_{bottom} = 0$ 。流体流动的过程中我们考虑外力，其中我们外力的选取为 $F = \frac{8\rho u_{peak}\eta_s}{H^2}$ ，其中 $u_{peak} = 0.1$ 。如果是单一成分流体，并且流体的粘性为 η_s ，那么流速应该是一个抛物线，并且峰值为0.1。同样的，第一小节是改变 W ，第二小节为改变 $rate$ 。

2.1 改变 W

同库埃特流一样，当 W 较大时流速趋于一条抛物线，尤其是 $W = 0.5$ ，但是峰值不是0.1。这是因为当 W 过大时，示性函数 ϕ 已经不能较好的反应流体的性质了，这导致了流体粘性比小于希望的值，图像进而类似抛物线，而峰值不为0.1的原因我们外力相对于粘性小的流体来说太大了；而当 W 较小时示性函数 ϕ 较好的反应了流体的性质。随着 W 的减小，大粘性流体的速度趋于精确解，但小粘性的流体的流速却不停的增大，也许会稳定下来。

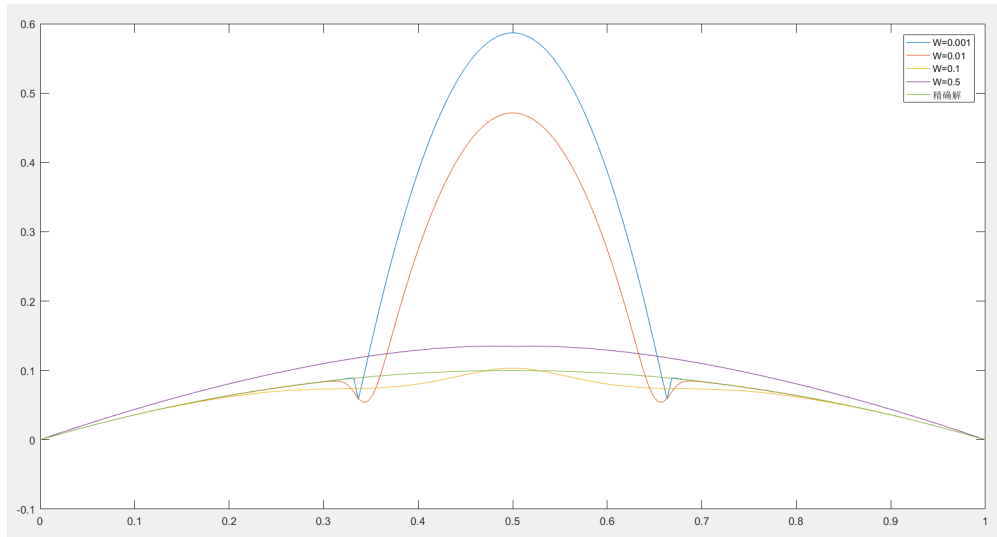


图 3: 泊肃叶流随着 W 变化的图像

2.2 改变 $rate$

此图的参数选取与库埃特流的第二小节一样， $Re = 500, W = 0.1$ ，不过我们这里改变了 $rate$ ，所以进而力也会改变。这个图像就不那么好理解了，尤其是 $rate = 100$ 时，流体流速很反常。但还是当我们取 $W = 0.01$ 时，情况有所变化。

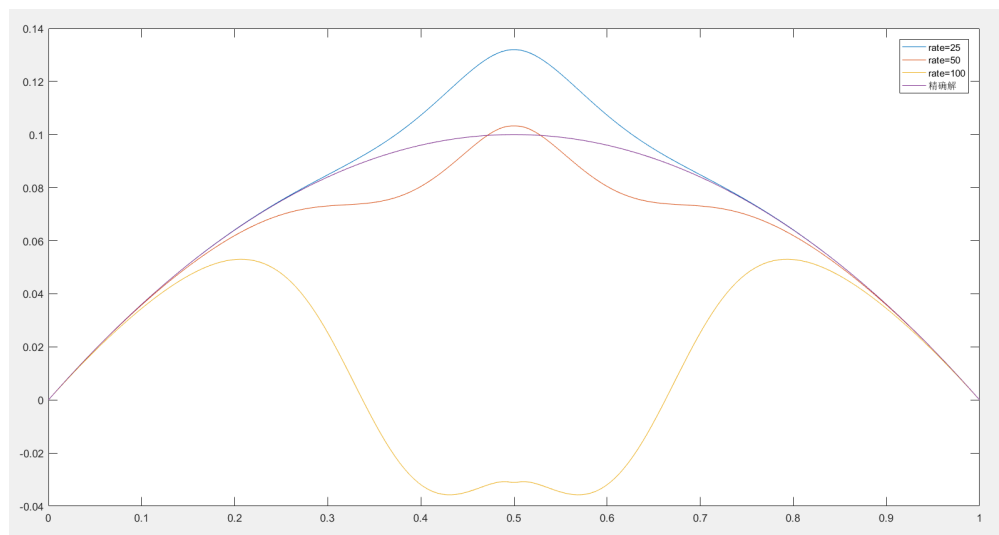


图 4: 泊肃叶流随着 $rate$ 变化的图像($W = 0.1$)

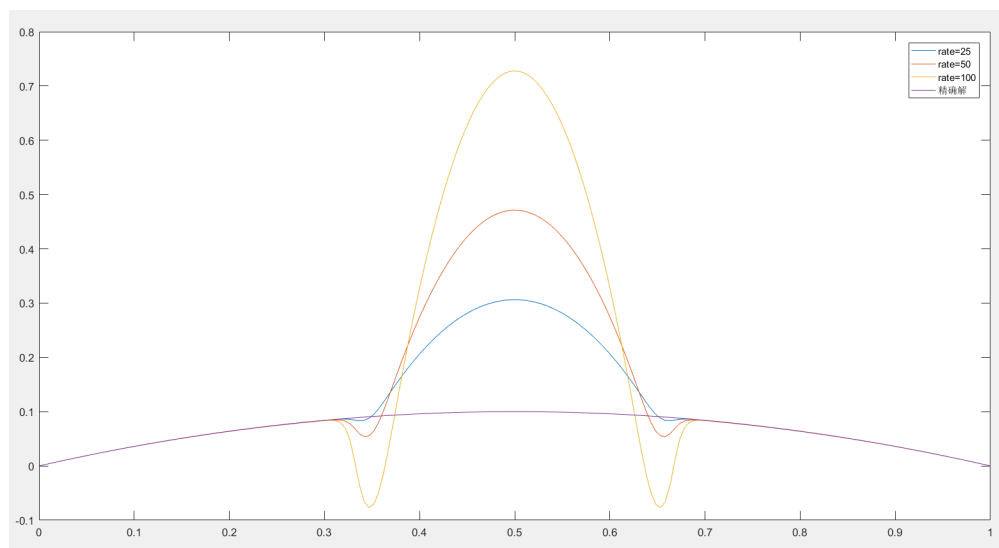


图 5: 泊肃叶流随着 $rate$ 变化的图像($W = 0.01$)