单个圆形固体颗粒悬浮于库埃特流

马坤

2019.11.5

在这个情况下，上固体板以速度为$U_0 = 0.1$移动，圆形固体颗粒的圆心处于库埃特流体模拟区域的中央；其半径为$r = H/4$,$H = 1$是模拟区域的宽度，模拟区域的长度为$L = H = 1$；流体与颗粒的密度都假设为$\rho = 1$；此次模拟中我们假设$W = 0.1$。我们的ϕ形式如下：

$$\phi = 0.5[-\tanh\frac{2.4(r-1/4)}{W} + 1], r = \sqrt{(x-L/2)^2 + (y-H/2)^2}. \tag{1}$$

ϕ应该是一个二元函数，图1.a为其三维图片，图1.b为ϕ在$x = 0.5$或者$y = 0.5$ 处的投影。在给出的数值的情况下，ϕ在固体颗粒里面$(r < H/4)$ 为1，在固体外面的液体里面$(r > H/4)$为0，固液交界面$(r = H/4)$为0.5。

模拟中我们假设$\frac{\eta_s}{\eta_l} = 50$,我们的粘性系数$\eta$有如下表达式：

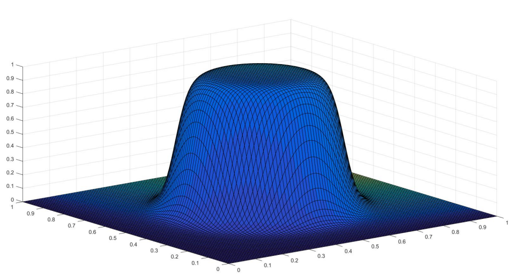
$$\eta = 1 + \frac{\eta_s}{\eta_l}\phi - \phi. \tag{2}$$

可以知道我们的η的极大值为50，为了和黄老师的论文进行匹配，在数值模拟中雷诺数$Re = 500$。

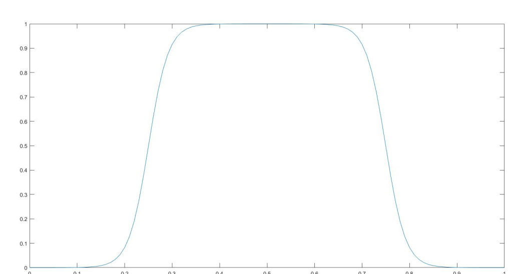
由于假设的流体与颗粒的密度都假设为$\rho = 1$，所以有$\eta = \nu$，这会在数值模拟中用到。库埃特流的控制方程与解可以写为：

$$\nabla p = \nabla \cdot (\eta \nabla u). \tag{3}$$

$$u_x = U_0\frac{y}{H}, u_y = 0. \tag{4}$$



(a) ϕ的3维图片



(b) ϕ在$x = 0.5(y = 0.5)$的投影

图 1: ϕ的图像

本来原始的库埃特流控制方程中$\nabla p = 0$，但是此处粘性系数是关于位置的函数，所以压强的梯度一定不为0。于是方程就和泊肃叶流的控制方程一致，化简控制方程(3)得到：

$$\nabla p = (\nabla u)\nabla\eta + \eta\triangle u. \tag{5}$$

其中

$$\nabla u = \begin{pmatrix} 0 & U_0/H \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

$$\triangle u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$$\nabla\eta = (\frac{\eta_s}{\eta_l} - 1)\nabla\phi. \tag{8}$$

我们可以利用ϕ, η定义表达式(1), (2)计算得到：

$$\nabla\eta = (\frac{\eta_s}{\eta_l} - 1)\{-0.5[1 - \tanh^2\frac{2.4(r - 1/4)}{W}]\frac{2.4}{W}\nabla r\}$$

$$where \nabla r = \begin{pmatrix} \dfrac{x - L/2}{\sqrt{(x - L/2)^2 + (y - H/2)^2}} \\ \dfrac{y - H/2}{\sqrt{(x - L/2)^2 + (y - H/2)^2}} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

将(6)(7)(8)(9)代入(5)，得到：

$$\nabla p = \begin{pmatrix} U_0(\frac{\eta_s}{\eta_l} - 1)\{-0.5[1 - \tanh^2\frac{2.4(r-1/4)}{W}]\frac{2.4}{W}\frac{y-H/2}{\sqrt{(x-L/2)^2+(y-H/2)^2}}\}/H \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

由于外力与压强有如下关系$F = -\nabla p$，再代入所有实验数值，我们可以得到外力的精确表达式，由于压强的y方向梯度为0，在y方向没有力，下面表达式只写x方向的力。

$$F = 58.8(y - 1/2)[1 - \tanh^2 24(r - 1/4)]/r. \tag{11}$$

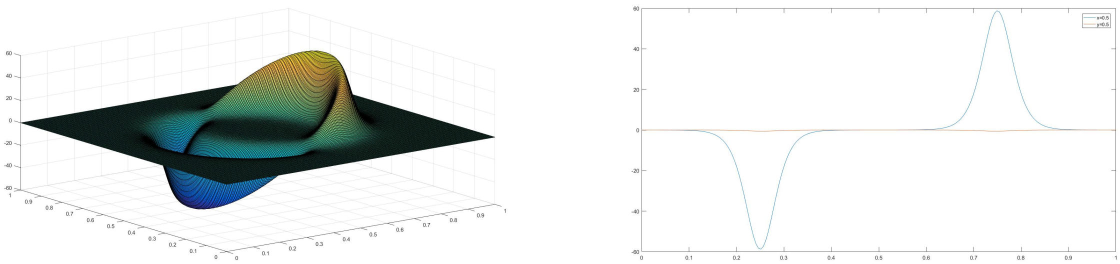
图2是力在给定的数值下的图像，图2.a为力的三维图像，图2.b为F在 $x = 0.5(y = 0.5)$的投影。可以发现力的最大值为58.8，最小值为-58.8，负值出现的位置为圆形颗粒的上下边界附近，左右边界没有负值。从图像上来看整个系统并不是完全对称的，所以力在上下边界和左右边界有所不同也很正常。

REMARK:对于库埃特流，其是具有不稳定库埃特流的精确解，其形式如下：

$$u = U_0 y/H - \frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n^2\pi^2\nu t/H^2}\sin[n\pi(1 - \frac{y}{H})]$$

针对本文模拟的数值实力，我们验证就算是带入截断的不稳定库埃特流的精确解的情况下，力的表达式也不会发生改变。首先需要利用NS方程：

$$\rho[\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u] = -\nabla p + (\nabla u)\nabla\eta + \eta\triangle u$$



(a) F的3维图片　　　(b) F在$x = 0.5 (y = 0.5)$的投影

图 2: F的图像

由于模拟选取的密度密度都假设为$\rho = 1$，所以有$\eta = \nu$。将截断的不稳定库埃特流的精确解表达式代入NS方程，我们可以计算发现$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \triangle u$。

最后我们验证对流项为0，即$(u \cdot \nabla) u = 0$。u的分量表达式为：

$$u = \begin{pmatrix} u_x(y) \\ u_y = 0 \end{pmatrix}$$

利用u的分量表达式，可以清晰的看见$u \cdot \nabla = 0$。于是NS方程即被化简为

$$0 = -\nabla p + (\nabla u) \nabla \eta$$

可见此数值算例中力的表达式在截断的不稳定库埃特流也是一样的。