变粘性模型

马坤

2020.6.12

1　将二阶力格式应用到非标准LBM中

之前变粘性模型，利用的是$\nu = c_s^2\tau$将变粘性直接引入LBM程序中。但是这样的做法在粘性变化很激烈、变化范围不太理想时，会使得数值算法不稳定。于是我们采用了将变粘性转化为力的方式，引入LBM。由于采用的并不是标准的LBM格式，所以需要重新做一次$C-E$分析。

基础的离散速度分布方程

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}(\mathbf{x},t) + \mathbf{e}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{x},t) = \Theta_\alpha + F_\alpha, \quad \alpha = 0,1,\cdots,8, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0,T) \tag{1}$$

由于方程已经是标准的LBM的一阶泰勒展开式了，所以我们对其做$C-E$分析之前不需要再做额外的泰勒展开了。于是我们做如下的参数假设，然后考虑参数应该如何选取。

$$\rho\mathbf{u} \equiv \sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha f_\alpha + m\mathbf{F}\Delta t$$

$$F_\alpha = \omega_\alpha \left[A + \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_\alpha}{c_s^2} + \frac{\mathbf{C} : \left(\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\alpha - c_s^2\alpha\right)}{2c_s^4} \right]$$

$$\sum_\alpha F_\alpha = A, \quad \sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha F_\alpha = \mathbf{B} = nF_\alpha, \quad \sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\alpha F_\alpha = c_s^2 A\mathbf{I} + \frac{1}{2}\left[\mathbf{C} + \mathbf{C}^T\right]$$

Chapman展开有

$$f_\alpha = f_\alpha^{eq} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)}, F_\alpha = \epsilon F_\alpha^{(1)}$$

$$\partial_t = \epsilon\partial_t^{(1)} + \epsilon^2\partial_t^{(2)}, \nabla = \epsilon\nabla^{(1)}$$

然后将其带入离散速度方程，匹配尺度就得到下面两个展开方程

$$\partial_t^{(1)} f_\alpha^{eq} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla_{(1)} f_\alpha^{eq} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)} + F_\alpha^{(1)}$$

$$\partial_t^{(2)} f_\alpha^{eq} + \partial_t^{(1)} f_\alpha^{(1)} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla_{(1)} f_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(2)}$$

再对两个方程求矩，利用到的等式有

$$\sum_\alpha f_\alpha^{(k)} = 0, k = 1,2$$

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} = \rho$$

$$\sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} = \rho \mathbf{u}, \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)} = m \triangle t \mathbf{F}, , \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha}^{(2)} = \mathbf{0}$$

我计算发现，当参数取为$\mathbf{A}=0, n=1, m=0$以及参数$\mathbf{C}=\mathbf{uF}+\mathbf{Fu}$就可以较为精确的还原$N-S$方程。至此二阶精度的力格式在表达式1下的格式就完全推导出来了，接下来就是如何将变粘性转化为力引入LBM。

2 利用力的模型处理变粘性问题

首先方法是借鉴了论文A lattice Boltzmann approach for the non-Newtonian effect in the blood flow，论文中我将表达式24改写为

$$\sigma_{\alpha\beta} = -P\delta_{\alpha\beta} + 2\nu_0 S_{\alpha\beta} + 2\mu_0 (\nu - 1) S_{\alpha\beta}$$

其中ν_0, ν是假定的常值粘性与变粘性函数，α, β下标为方向，i为速度集的第i个量。于是就有等效的粘性力$F = \partial_\alpha 2\mu_0 (\nu - 1) S_{\alpha\beta}$，显然我们就需要计算$S_{\alpha\beta}, \partial_\alpha S_{\alpha\beta}$，这两个表达式论文中都给出了分别是表达式17与表达式28。

$$\partial_\alpha S_{\alpha\beta} = \frac{1}{6\Delta x} \sum_{i=0}^{8} c_{i\alpha} S_{\alpha\beta} (x + c_i \Delta x)$$

$$S_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\tau c_s^2 \rho} \sum_{i=0}^{8} c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(1)}$$

表达28很好验证，就是采用了中心差分的思想。而表达式17就需要利用在$C-E$分析的到的表达式，我们需要计算得到

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = \sum_{i=0}^{8} c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(1)}$$

然而其计算方法在LBM英语书上和论文Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method都有方法，其计算结果为

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = & -\tau \left[(\mathbf{u}_\alpha \mathbf{F}_{1\beta} + \mathbf{u}_\beta \mathbf{F}_{1\alpha}) + c_s^2 \rho (\nabla_{1\alpha} \mathbf{u}_\beta + \nabla_{1\beta} \mathbf{u}_\alpha) \right. \\ & \left. \left. -\frac{1}{2} (\mathbf{C}_{1\alpha\beta} + \mathbf{C}_{1\beta\alpha}) \right] \right)\end{aligned}$$

将$\mathbf{C}$的选取结果带入以后我们就可以发现

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = -\tau c_s^2 \rho (\nabla_{1\alpha} \mathbf{u}_\beta + \nabla_{1\beta} \mathbf{u}_\alpha)$$

进一步就可以得到

$$S_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\tau c_s^2 \rho} \sum_{i=0}^{8} c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(1)}$$