**Ασκηση 1**

**Ερώτηση 1** Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

**Απάντηση:** Για την τυχαία μεταβλητή, έχουμε

Επομένως, για την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας θα έχουμε ότι

**Ερώτηση 2** Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *rand(·)* της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

**Απάντηση:** Όσο αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων παρατηρούμε ότι η αριθμητική μέση τιμή τείνει στην στοχαστική μέση τιμή που υπολογίσαμε προηγουμένως θεωρητικά, δηλαδή στο 0.

|  |
| --- |
|  |
|  |

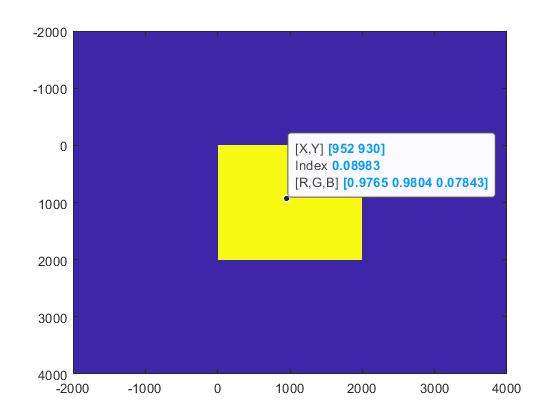
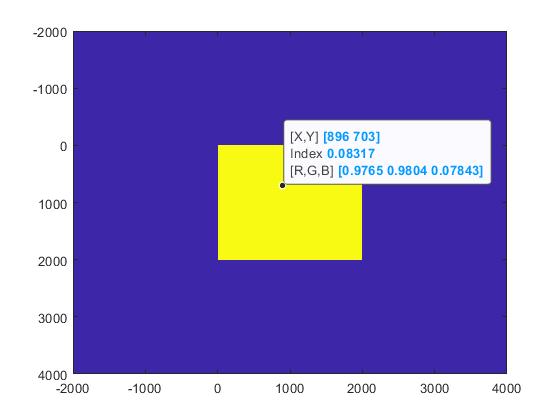
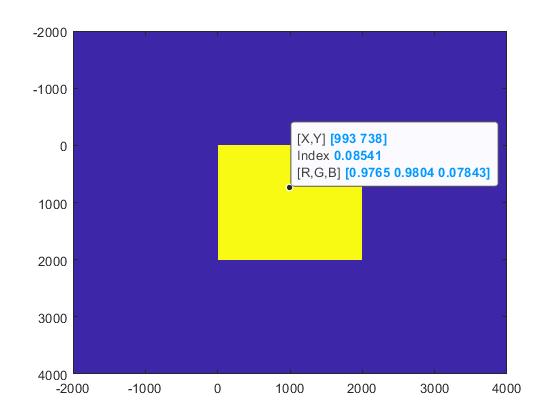
**Ερώτηση 3** Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Είναι η παραπάνω διαδικασία “λευκή”; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

**Απάντηση:** Για να δούμε αν η παραπάνω διαδικασία είναι λευκή πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Για έχουμε

Άρα η

Συνεπώς η παραπάνω διαδικασία δεν είναι λευκή διότι η ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασία σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές δεν είναι 0.

**Ερώτηση 4** Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Ερωτήματος 2, εκτιμήστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης. Τι παρατηρήτε καθώς αυξάνει ο αριθμός K των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;

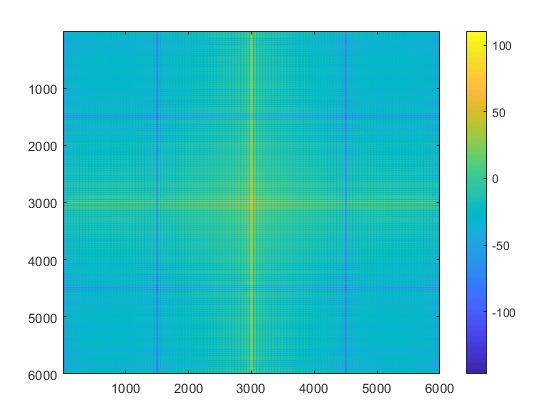
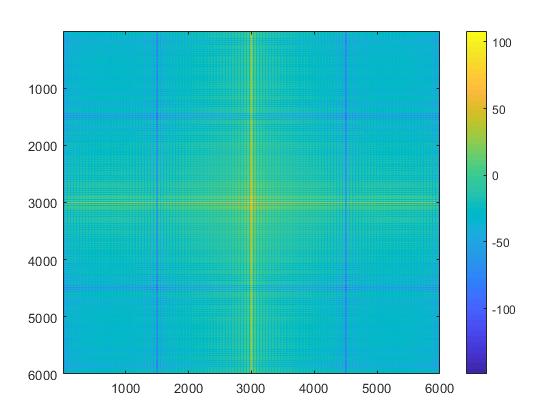
**Απάντηση:** Όπως φαίνεται και στην απεικόνιση της αυτοσυσχέτισης, όσο το Κ μεγαλώνει τόσο η τιμή της αυτοσυσχέτισης, στα σημεία που δεν είναι 0, πλησιάζει την τιμή που υπολογίσαμε θεωρητικά, δηλαδή .

Κ=100000

Κ=1000

Κ=10

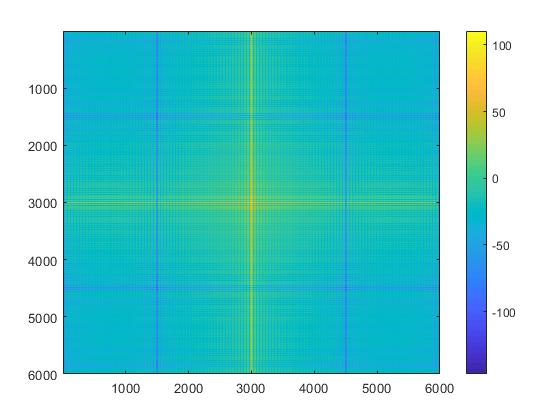
**Ερώτηση 5** Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K;

**Απάντηση:** Γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα φάσματος της διαδικασίας είναι ο μετασχηματισμός Fourier της αυτοσυσχέτισης. Επομένως, έχουμε ότι:

K=10

K=1000

K=100000



**Ασκηση 2**

**Ερώτηση 1** Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

**Απάντηση:** , επειδή από την εκφώνηση έχουμε ότι η ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0.

**Ερώτηση 2** Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *rand(·)* της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρήτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

**Απάντηση:** Όσο αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων παρατηρούμε ότι η αριθμητική μέση τιμή τείνει στην στοχαστική μέση τιμή που υπολογίσαμε προηγουμένως θεωρητικά, δηλαδή στο 0.

|  |
| --- |
|  |
|  |

**Ερώτηση 3** Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Είναι η παραπάνω διαδικασία “λευκή”; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

**Απάντηση:** Για να δούμε αν η παραπάνω διαδικασία είναι λευκή πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Για έχουμε

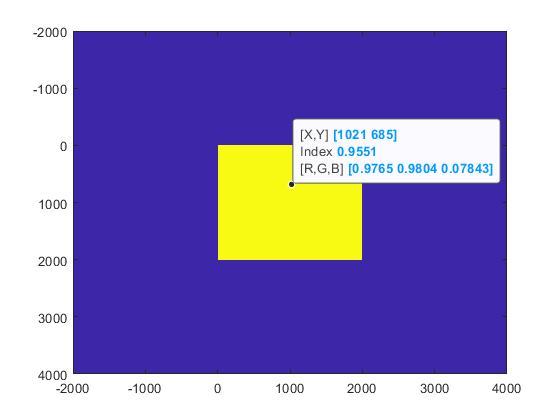
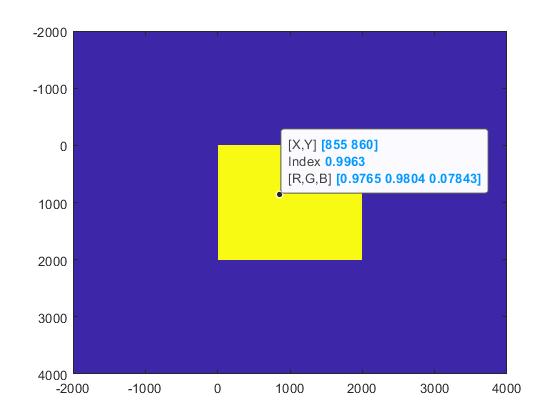
. (1)

Επίσης από την εκφώνηση έχουμε ότι

Άρα

Συνεπώς η παραπάνω διαδικασία δεν είναι λευκή διότι η ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασία σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές δεν είναι 0.

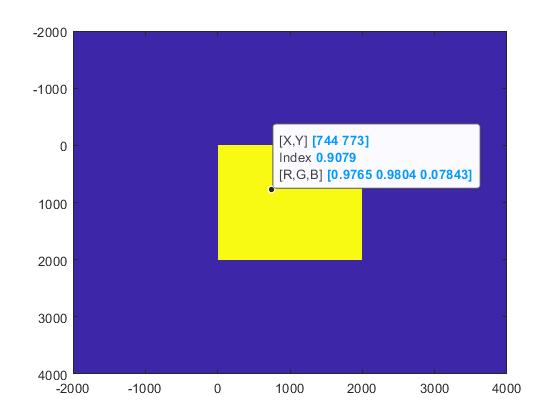
**Ερώτηση 4** Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Ερωτήματος 2, εκτιμήστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης. Τι παρατηρήτε καθώς αυξάνει ο αριθμός K των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;

**Απάντηση:** Όπως φαίνεται και στην απεικόνιση της αυτοσυσχέτισης, όσο το Κ μεγαλώνει τόσο η τιμή της αυτοσυσχέτισης, στα σημεία που δεν είναι 0, πλησιάζει την τιμή που υπολογίσαμε θεωρητικά, δηλαδή στο 1.

Κ=100000

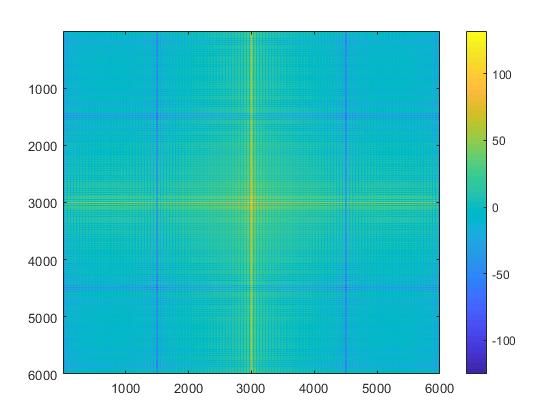
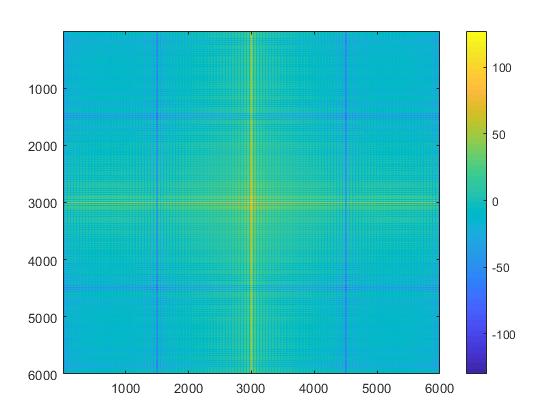
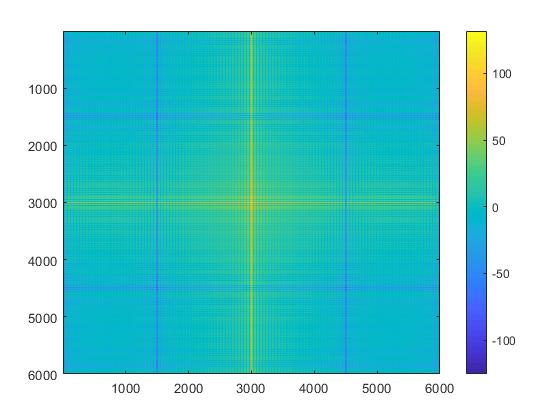
Κ=1000

Κ=10



**Ερώτηση 5** Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K;

**Απάντηση:** Γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα φάσματος της διαδικασίας είναι ο μετασχηματισμός Fourier της αυτοσυσχέτισης. Επομένως, έχουμε ότι:



Κ=10

Κ=100000

Κ=1000

**Ασκηση 3**

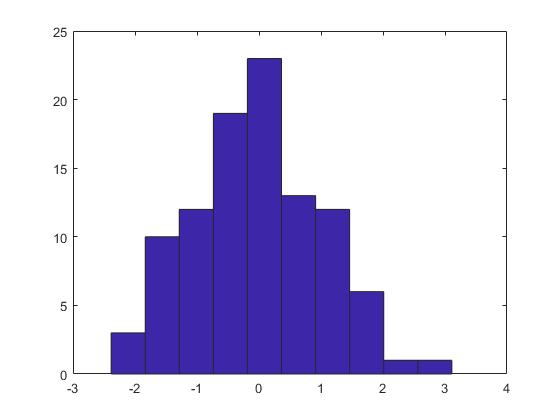
**Ερώτηση 1** Χρησιμοποιήστε αποδοτικά τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και αποκαλύψτε την εικόνα που κρύβεται στην ακολουθία. Εκτιμήστε την διασπορά του θορύβου καθώς και την κατανομή του.

**Απάντηση:** Για την προσέγγιση του θορύβου αφαιρέσαμε την παρακάτω εικόνα από μία τυχαία υλοποίηση και βρήκαμε την διασπορά του 4.0103 και την μέση τιμή -0.0164.

|  |
| --- |
|  |
|  |

**Ερώτηση 2** Χρησιμοποιώντας την εικόνα που αποκαλύψατε, επιβεβαιώστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

**Απάντηση:** Όπως φαίνεται από το ιστόγραμμα η ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

****