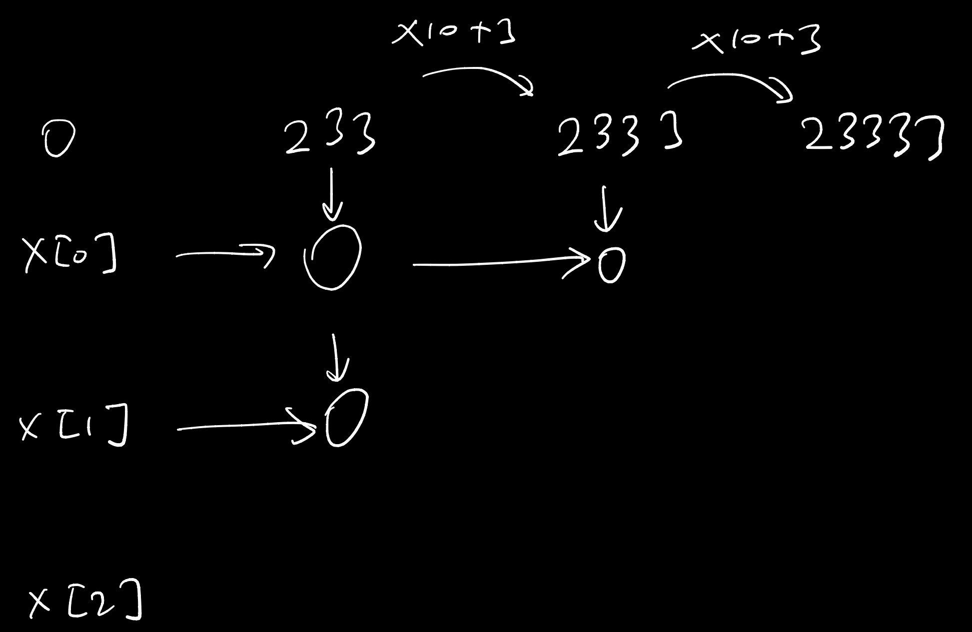
233 Matrix



因为存在这种递推关系，所以想到有可能能用矩阵快速幂。

矩阵快速幂 A $n\times n$ x $n\times 1$

$$A \cdot x = \overset{n\times 1}{ans}$$

快速幂 → $\boxed{\boxed{A^m} \cdot x = ans}$

类如： Fibonacci II $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}F_1\\ F_0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}F_n\\ F_0\end{bmatrix}$

然后看我们有什么 再看需求什么

$$\begin{matrix}0\\ x_0\\ x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix}\cdots\\ x_{0m}\\ x_{1m}\\ x_{2m}\\ \vdots\\ \boxed{x_{nm}}\end{matrix}$$ ← 答案

怎么去求呢？

寻找矩阵 A

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_{00} \\ x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ x_{0m} \\ x_{1m} \\ x_{2m} \\ \vdots \\ \boxed{x_{nm}} \end{pmatrix} \leftarrow \text{答案}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 233 \\ x_{01} \\ x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2333 \\ x_{02} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$$

我们同时注意到

$0 \to 233$ 和之后

$233 \xrightarrow{\times 10+3} 2333 \xrightarrow{\times 10+3} 23333$

的规则不一样。

因此直接从第2步开始、跳过初始状态

寻找矩阵 A

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & A & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 233 \\ x_{01} \\ x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & A & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2333 \\ x_{02} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

处理 233 → 2333

×10 简单。关键是如何 +3。这个只需要在每一列后面加上一个 3 就可以解决了。

经过这样处理

$233 \times 10 + 3 = 2333$

这样子就获得了第 1 个数字

寻找矩阵 A

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & A & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 233\times 10 \\ x_{01}\times 1 \\ x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \\ 3\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2333 \\ x_{02} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

然后看 x_{02} 是怎么来的。

$$x_{02}=x_{01}+2333$$

但是这时候我们还在计算这一列，不能直接用2333的值，因此需要看2333是如何得来的。

$$2333 = 233\times 10 + 3\times 1$$

所以 $x_{02}=x_{01}+2333$

$$= x_{01}\times 1 + 233\times 10 + 3\times 1$$

即可得到

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & A & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2333 \\ x_{02} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

寻找矩阵 A

然后看如何得到 x_{12}

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & & & \\ & & & A & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 233\times 10 \\ x_{01}\times 1 \\ x_{11}\times 1 \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \\ 3\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2333 \\ x_{02} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

同理

$x_{12} = x_{02} + x_{11}$

$\downarrow$

$233\times 10 + x_{01}\times 1$

$+ 3\times 1$

同理 $x_{12} = \underline{x_{02}} + x_{11}$

$= \underline{233\times 10 + x_{01}\times 1 + 3\times 1}$

$+ x_{11}\times 1$

寻找矩阵 A

最后看 3

$$
\begin{array}{cc}
 & n+2 \\
n+2 & \begin{bmatrix}
10 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
10 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\
10 & 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & \\
10 & 1 & 1 & 1 & \cdots & & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{matrix}
233 \\ x_{01} \\ x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \\ 3
\end{matrix}
$$

$$A$$

这样矩阵 A 就找到了。

$$A^0 \cdot \begin{bmatrix} 第 \\ 1 \\ 列 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 第 \\ 1 \\ 列 \end{bmatrix}$$

$$A^{m-1} \cdot \begin{bmatrix} 第 \\ 1 \\ 列 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 第 \\ m \\ 列 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 23 \cdots 3 \\ x_{01} \\ x_{11} \\ \vdots \\ \boxed{x_{nm}} \\ 3 \end{bmatrix} \leftarrow 答案$$