第 5 章

分 形

主讲人：肖人彬

（人工智能与自动化学院）

rbxiao@163.com

英国海岸线有多长？

教学重点

重点掌握几个内容：

- ✓自然界分形现象
- ✓分形与多尺度系统
- ✓从拓扑维到分数维
- ✓规则分形、不规则分形
- ✓分形的应用领域及哲学思想

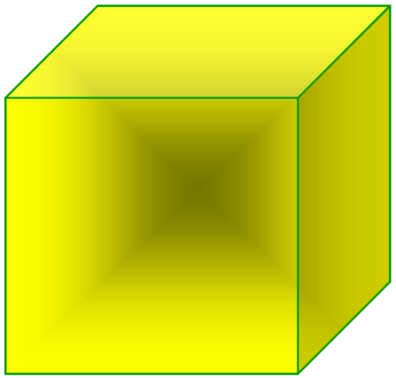
复杂性科学

基础

5.1 从欧氏几何到分形几何

5.1.1 欧氏几何

- 两千多年前，希腊数学家欧几里得创立几何学——欧氏几何
- 研究空间图形的形状、大小和位置的相互关系
- 欧氏空间维数***n***表示空间的维数
- $n = 0,1,2,3$分别对应点、线段、平面、空间几何体所需要的空间维数



l

定常度量

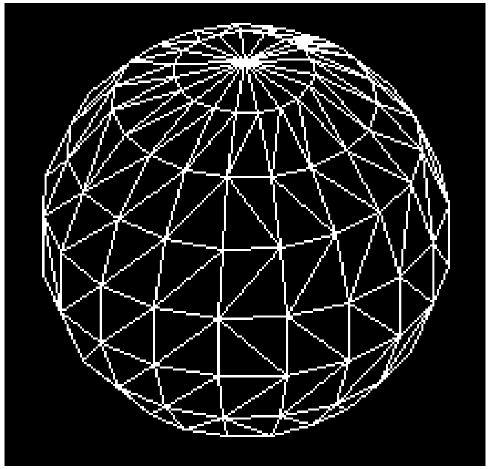
长度$=l$

面积$=l^2$

体积$= l^3$

5.1 从欧氏几何到分形几何

5.1.1 欧氏几何



定常度量

长度（半径）$=r$ ，面积$=\pi r^2$

体积$= 4\pi r^3/3$

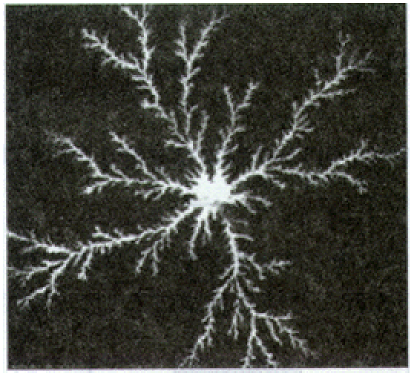
- 长度、面积和体积的量纲分别是长度单位的**1,2,3**次方，恰好与图形所在的欧氏空间维数相等
- 总结欧氏几何对规则几何图形的测量，可用下式表示

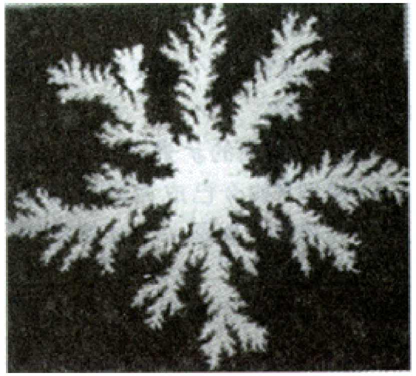
长度$= l$， 面积$A=al^2$ ， 体积$V=bl^3$

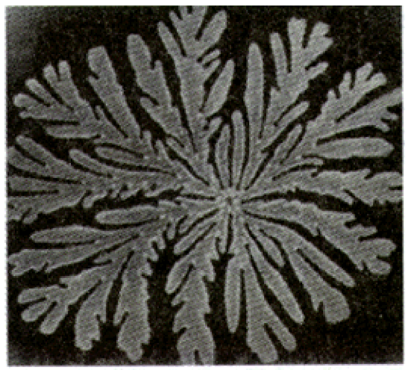
5.1 从欧氏几何到分形几何

5.1.2 分形几何

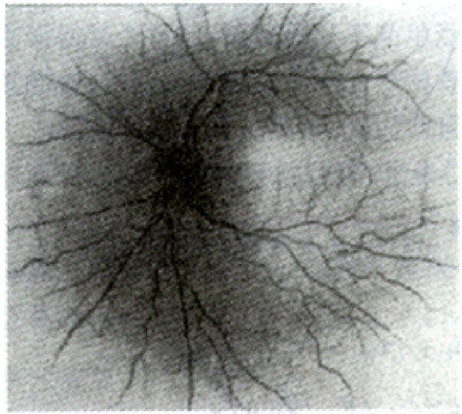
- 自然界中的分形


电解沉积

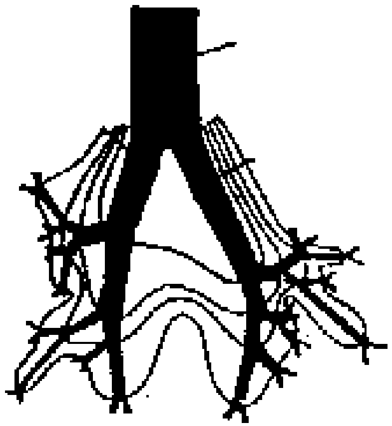

细菌群落


黏性指进


多孔介质的化学溶解


视网膜血管

人体血管总体积<5%



肺的总面积>网球场

第 5 章

5.1 从欧氏几何到分形几何

5.1.2 分形几何

- **1967年，美国IBM数学家曼德布罗特研究了“英国海岸线究竟有多长”这个数学难题，建立了海岸线模型，在计算机上生成了海岸线的分形图形**

- **1973年，曼德布罗特首先提出分维和分形的设想**

5.1 从欧氏几何到分形几何

5.1.2 分形几何

- 分形的三个特点：
  - 从整体上看处处不规则
  - 在不同尺度上的规则性又是相同的，即局部形状和整体形态有自相似性
  - 无特征尺度和标度

第 5 章

5.1 从欧氏几何到分形几何

5.1.2 分形几何

- 数学
  - 数量(逻辑思维)
    - 确定性量——经典数学(二值逻辑)：代数(初等代数、高等代数、线性代数、微分代数)、微积分、实分析、复分析…
    - 不确定性量
      - 随机变量—概率论、统计学(二维逻辑)
      - 模糊变量—模糊数学(模糊逻辑)
  - 形体(形象思维)
    - 规则形体——欧氏几何(整数维)：平面几何、立体几何、解析几何、射影几何、微分几何、代数几何…
    - 不规则形体——分形几何(分数维)

从数学中研究数与形两大分支看分形几何

5.1 从欧氏几何到分形几何

5.1.3 研究分形几何的意义

- 擅长描述自然界普遍存在的非规则景物
- 分形几何的图形具有自相似性和递归性，适合于计算机迭代生成
- 运用分形几何对复杂系统进行建模

5.2 分形现象与多尺度系统

5.2.1 分形现象

- 规则的人造物体，可以用欧氏几何中的直线、面、圆、圆锥、球等表示
- 自然界许多景物具有自相似性的性质
- 研究这些具有自相似性结构的几何形体引进了分形的概念——组成部分以某种方式与整体相似的形体

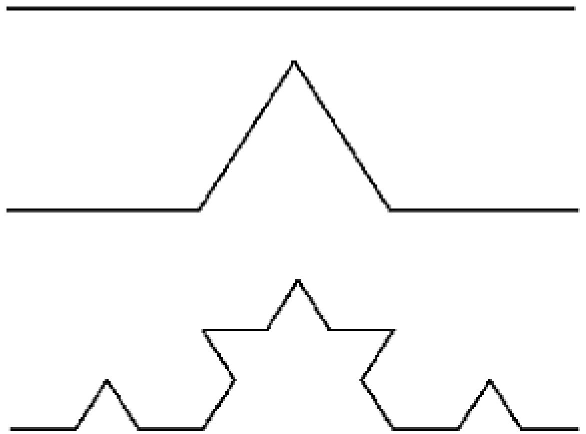
5.2 分形现象与多尺度系统

5.2.2 多尺度系统

- 特征尺度——某一事物在空间或时间方面具有特定的数量级
- 从漩涡套漩涡的现象看，这类现象发生在不同的尺度范围上，有时尽管相差9个数量级，但不能将其中的某个漩涡取出来
- 将尺度相差好几个数量级的系统称为多尺度系统，又称为无特征尺度系统

5.2 分形现象与多尺度系统

5.2.3 一种海岸线模型



(a) 线段L=1

(b) 海岸线

(c) 海岸线

对a情况，不管用什么尺度r测量，长度总是1，即$L=r^0=1$

对b情况，若用r=1/3长度尺子量，长度L(1/3)=4/3

对c情况，若用r=1/3长度尺子量，比1/3小的弯曲处无法测量而丢失，测量长度L(1/3)=4/3，若用r=1/9尺子量，测量长度$L(1/9)=(4/3)^2$

5.2 分形现象与多尺度系统

5.2.3 一种海岸线模型

- 海岸线不断生成下去，不断缩小尺子长度继续测量，得出如下结论：尺子的长度r越小，测量出的海岸线长度L就越长。
- 若设海岸线的长度L和尺子r之间的关系为

$$L = r^{\mu} = N \cdot r \qquad N\text{为海岸线中的段数}$$

直线维数D=1，所以直线长度不随r改变，对海岸线1－D<0，故海岸线的长度随尺子r减小而增加

有 $$\left(\frac{4}{3}\right)^{n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n\cdot\mu} \qquad n=1,2,\ldots.$$

对上式两边取对数得 $n(\ln 4 - \ln 3) = n\mu(\ln 1 - \ln 3)$ 求出

$$\mu = 1 - \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1 - D = -0.262$$

其中，无理数$D = \dfrac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618\ldots$称为海岸线的分数维

5.3 从拓扑维到分数维

5.3.1 拓扑维

- 欧氏空间中，一个几何对象的维数等于确定其中一个点的位置所需要的独立坐标数目。这样定义的维数称为欧氏维数，又称为拓扑维数，简称拓扑维
- 欧氏空间中，直线或曲线的拓扑维数为1，平面图形的拓扑维数2，空间图形的拓扑维数3
- 拓扑维的一般测算方法：

$N(r)$小盒子数目

$$d = \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{r}}$$

r为尺子

5.3 从拓扑维到分数维

5.3.2 豪斯道夫维数

- 拓扑维的两个特点：
  - 拓扑维数d为整数
  - 盒子数$N(r)$随尺子r变小而不断增大，但几何对象的总长度（总面积，总体积）不变
- 将拓扑维数的定义推广到分数维，一要突破d必须是整数的限制，二是对上式取极限，记为

$$D_0 = \lim_{r \to 0} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{r}}$$

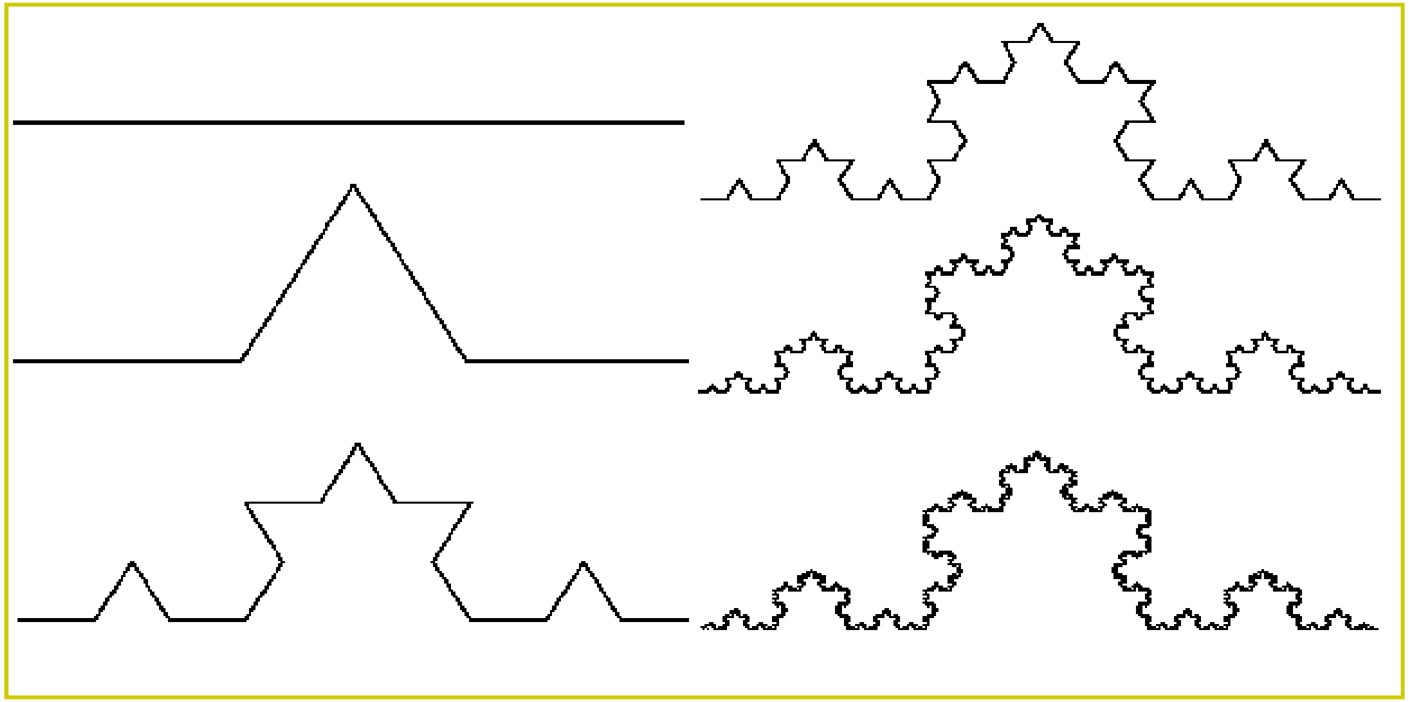
豪斯道夫(Hausdorff)维数

D_0是无特征尺度系统中的一个不变量

5.4 规则分形

5.4.1 经典的规则分形图

①科赫曲线



$$D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.262$$

5.4 规则分形

5.4.1 经典的规则分形图

②**Sierpinski**三角形/正方形

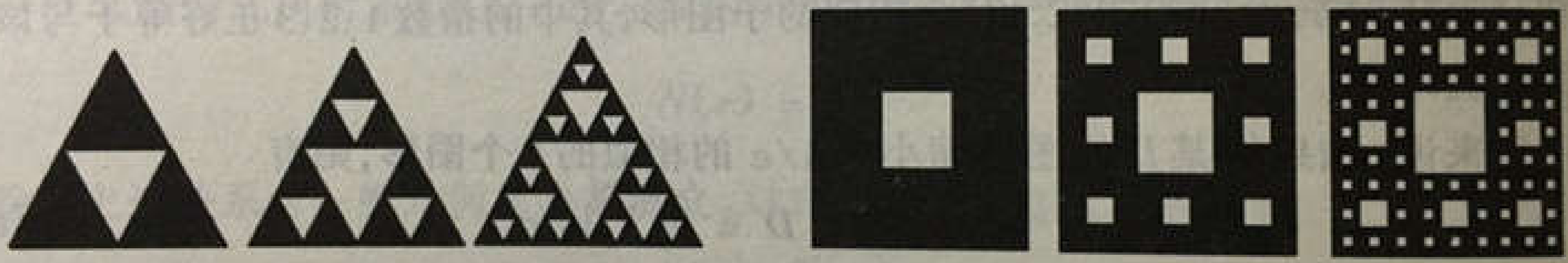
$$D = \ln 3 / \ln 2 \approx 1.585$$

$$D = \ln 8 / \ln 3 \approx 1.893$$

5.4 规则分形

5.4.1 经典的规则分形图

②Sierpinski三角形/正方形



(a) Sierpinski三角形 ($N=3$)　　(b)Sierpinski 正方形 ($N=3$)

图 6-4　Sierpinski 分形图

同样地，用尺寸为$(1/3)^n$的正方形测量正方形时，可得到 Sierpinski 正方形数 $N=8^n$，因此它的分维数

$$D = \ln 8/\ln 3 = 1.893$$

5.4 规则分形

5.4.1 经典的规则分形图

③Sierpinski-Menger海绵立方体

$$D = \ln 20/\ln 3 \approx 2.777$$

5.4 规则分形

5.4.1 经典的规则分形图

③Sierpinski-Menger海绵立方体

3. Sierpinski-Menger 海绵立方体

将立方体三个方向均三等分，分成 27 个相同的小立方体，再挖去 1 个体心和 6 个面心位置上的 7 个小立方体，剩下 20 个小立方体，如此继续挖下去，可得到如图 6-5 所示的 Sierpinski-Menger 海绵立方体。

利用立方体为测量单元并不断地缩小其尺寸为 $(1/3)^n$，可以得到 $N = 20^n$ 个小单元立方体，于是可计算出它的分形维数

$$D = \ln 20/\ln 3 = 2.777$$

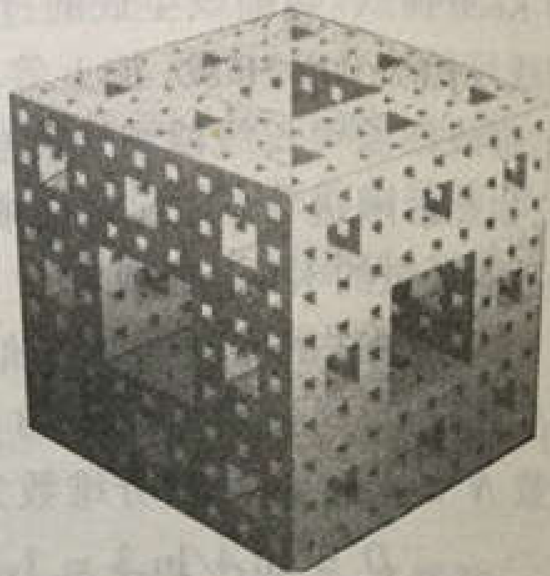


图 6-5 Sierpinski-Menger 海绵

4. Cantor 集合

Cantor 集合是德国数学家康托尔(G. Cantor, 1845—1918)19 世纪提出来的。Cantor 集合是一个

5.4 规则分形

5.4.1 经典的规则分形图

④Cantor集合

$$D = \ln 2 / \ln 3 \approx 0.631$$

5.4 规则分形

5.4.1 经典的规则分形图

④Cantor集合

4. Cantor 集合

Cantor 集合是德国数学家康托尔(G. Cantor, 1845—1918)19 世纪提出来的。Cantor 集合是一个点集，它的构造方法是先三等分一线段，挖去中段，再把剩下的二段各三等分挖去中段，如此无限地进行下去，如图 6-6 所示。Cantor 集的分维为

$$D_0 = \ln 2/\ln 3 = 0.631$$

把 Cantor 集与实际问题联系起来的是 IBM 公司的高级研究人员 Mandelbrot。长期困扰该公司工程师们的一个问题是

图 6-5　Sierpinski-Menger 海绵

图 6-6　Cantor 集合

5.4 规则分形

5.4.2 规则分形的分维

几种典型规则分形和它们的分维情况对比

分形名称	分形的构造方法	分形的极限结构	拓扑维数	豪斯道夫维数
Cantor集	三等分一线段，挖去中段剩下的二段各三等分挖去中段，如此无限进行下去	无限多点形成的点集，其总长度趋于**0**	**0**	**0.631 < 1**
Koch曲线	挖去线段**1/3**中段，加上等边三角形的两边，形成四段等长线段组成的折线，如此无限进行下去	长度趋于无穷大，但面积为**0**	**1**	**1.262 > 1**
Sierpinski三角形	正三角形等分成四个小三角形，挖去中间的一个，把剩下的三个小三角形四等分挖去中间的一个…	平面图线长趋于无穷大，面积趋于**0**	**1**	**1.585 < 2**
Sierpinski-Menger海绵	立方体三个方向均三等分，形成**27**个小立方体，再挖去**1**个体心和**6**个面心位置的**7**个小立方体，剩下**20**个小立方体…	海绵体面积趋于无穷大，体积趋于**0**	**2**	**2.777 < 3**

5.5 不规则分形

随机分形

- 将生成过程中具有随机性的分形称为随机分形
- 可以将规则分形在构造过程中随机去掉某一部分来生成随机的分形图形

5.5 不规则分形

➢ 布朗运动

- **1817**年，布朗在显微镜下发现悬浮花粉粒子在液体中无规则的运动
- **1916**年，**Perrin**对布朗运动观察发现，间隔时间后，轨迹的曲线程度和前者相同，二者之间具有统计的自相似性
- 布朗运动估计的分维数D与其所处的欧氏空间维数d是无关的，但几何结构与其所处的空间维数d有着密切的关系

5.5 不规则分形

自回避随机行走

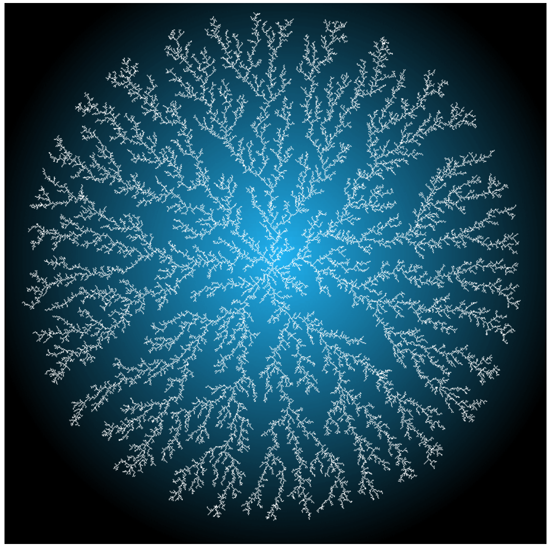
- 不允许一个格点被重复访问，当要走向已被占据的格点时放弃这一步，再由新的随机数决定走另一个方向——与随机行走（布朗运动）的区别
- 自回避随机行走在一维下无法进行，其模型维数上限是d=3，在四维以上空间自由度的增加使其不再起作用

5.5 不规则分形

凝聚现象的分形生长

- 自然界中的凝聚现象
- **DLA**模型

粒子随机走动，遇到种子粒子，便粘在一起形成凝聚态，如此循环最后形成自相似的分形结构



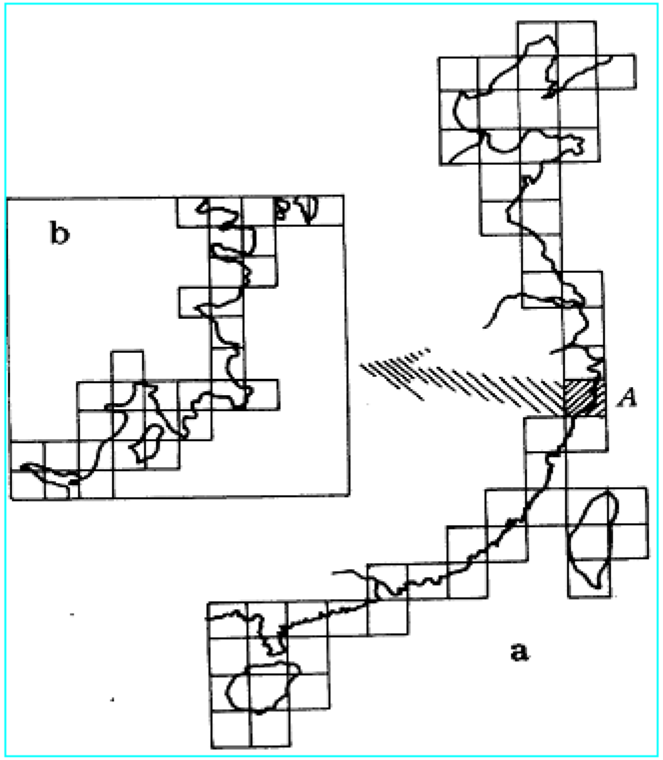
DLA模型的计算机模拟结果

5.6 分形的应用领域

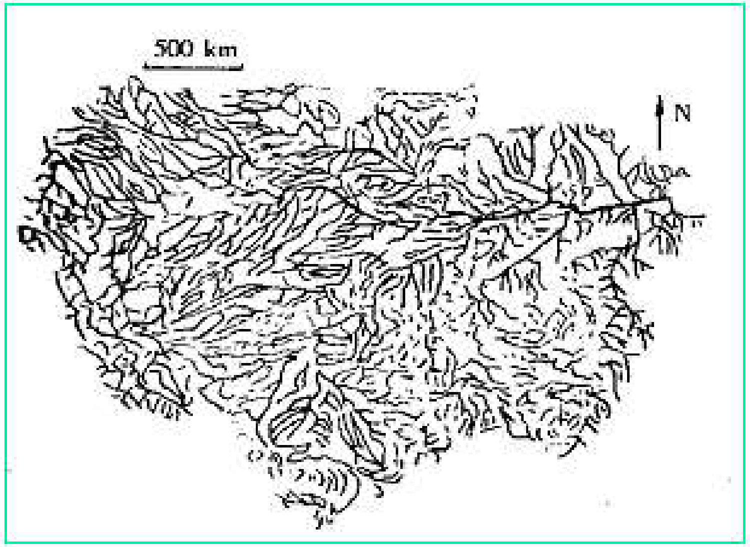
5.6.1 在地球科学中的应用

➢ 海岸线与河流的分形

❖海岸线



❖河流

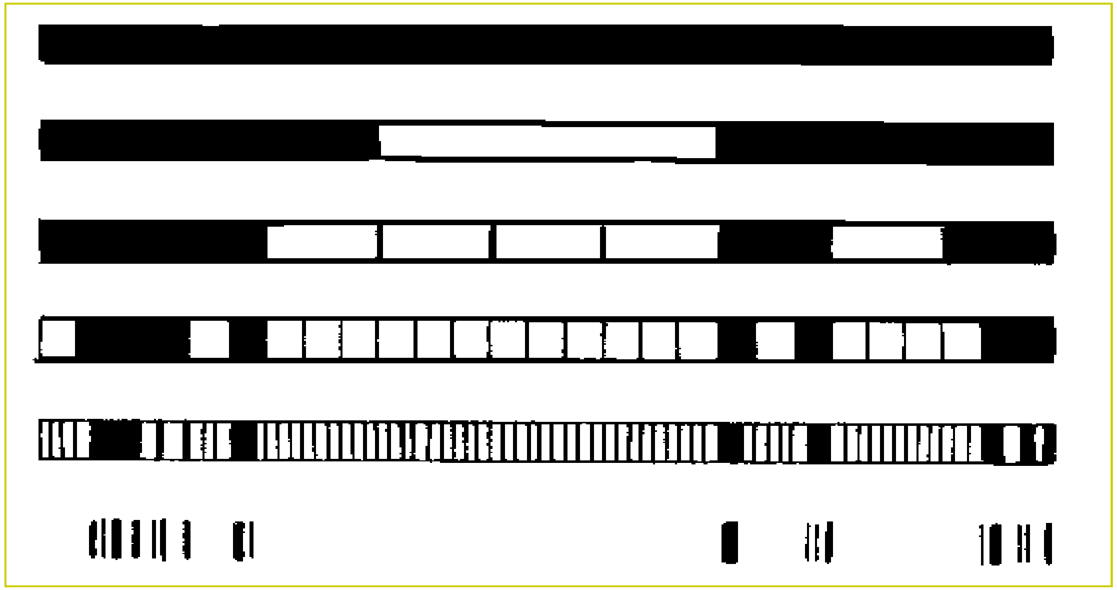


河流的主流分形维数为1.2——1.3之间

5.6 分形的应用领域

5.6.1 在地球科学中的应用

- 地震分形



震级大于M的地震数目N满足经验关系 $\lg N=a-bM$

震级能量E与震级M $\lg E=\alpha+\beta M$

参数b值具有普适性、差异性、物理意义、具有预报价值

5.6 分形的应用领域

5.6.1 在地球科学中的应用

- 矿藏分形
  - 自然界中的矿藏分布具有统计上的自相似性
  - 矿物平均含量C与其矿石吨位M存在统计关系

$$C \propto M^{-D_0/3}$$

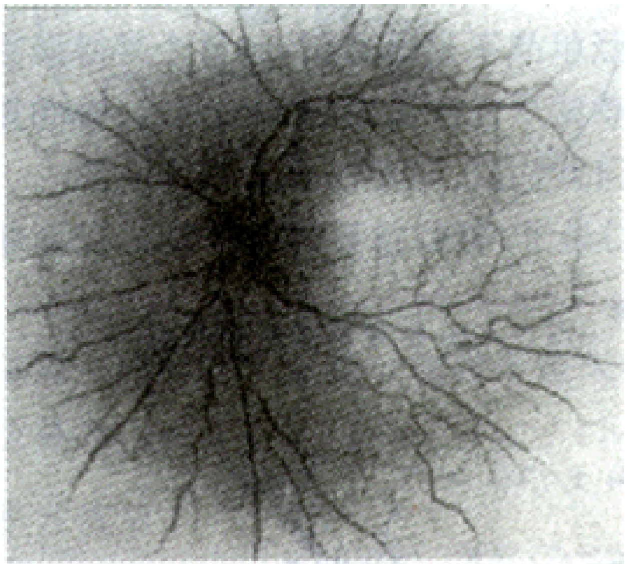
D_0反映了矿物储量的内在规律

- 降水量的分维
  - 气候变化在不同时间尺度上的具有自相似性
  - 可以推断本时段之外的更长时间气候变化趋势
  - 可以用长时段样本资料推断短时段气候波动趋势

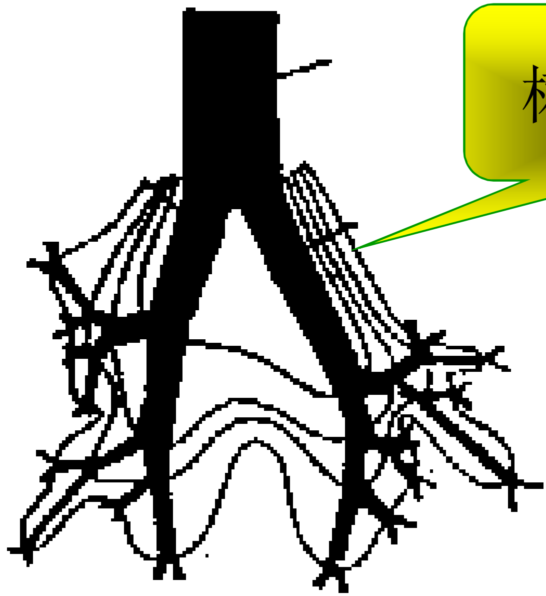
5.6 分形的应用领域

5.6.2 在生物学、物理学和化学中的应用

- 生物体的分形结构



视网膜血管



人体血管总体积<5%

肺的总面积>网球场

5.6 分形的应用领域

5.6.2 在生物学、物理学和化学中的应用

- 分形结构对超导性能的影响
  - 分形结构上的振动元激发是分形子
  - 分形结构可能是非晶超导体的一种结构模型
  - 在分形结构上，电子一分形子相互作用下既影响超导临界温度，又影响正常态的电阻率

- 表面的分形特征
  - 大多数固体表面也具有分形特征
  - 化学活性表面布满了极其丰富的孔隙，极其复杂的皱褶结构，催化剂表面的复杂程度可用分维来表征

5.6 分形的应用领域

5.6.3 在材料科学中的应用

- 材料裂纹的分形结构
  - 材料中裂纹的扩展往往是按Z字形前进，每一步都是不规则，大小不等，方向不同，而且在大的Z形裂纹上又有小Z形裂纹，有不同层次的嵌套结构，具有自相似性
  - 临界裂纹扩展力与分形维数有关系

- 材料中的多度域分形
  - 同一种材料中可能存在多种分形结构，如沿晶裂纹、穿晶裂纹、位错线、空位团、沉积相等，都有各自的度域范围，这些度域范围有的还相互交叠，统称为多度域分形

5.6 分形的应用领域

5.6.4 在计算机图形学与图像处理中的应用

- 植物树木的分形结构
  - 分形几何学为自然界千姿百态的景物进行逼真的描述提供了工具

- 分形图像处理
  - 自然界中不同种类的形态物质一般具有不同的维数
  - 自然界中分形与图像的灰度表示之间有着一定的对应关系
  - 分维数与传统的方法结合起来处理自然背景下的人造物体的识别

计算机模拟树

5.6 分形的应用领域

5.6.4 在计算机图形学与图像处理中的应用

- 分形图像压缩
  - 分形图像压缩的基础是分形变换
  - 对图像划块后用局部的仿射变化进行压缩
  - 分形图像压缩的基本方法是带灰度映射的局部迭代函数系统

5.6 分形的应用领域

5.6.5 在经济学和金融领域中的应用

- 经济系统的分形原理
  - 经济系统的结构分形
  - 经济系统的状态分形
  - 经济发展过程的分形
  - 经济系统的分形特性从一定程度上反映了经济系统整体与其部分之间的关系

5.6 分形的应用领域

5.6.5 在经济学和金融领域中的应用

- 经济收入分配的分维

  - 收入分配的规律关系式

$$N = N_0 X^{-b}$$

N_0为人口总数；X为收入水平；N为收入不少于X的人数。

用标度律可以得出收入分配的分维$D=b$

第 5 章

5.6 分形的应用领域

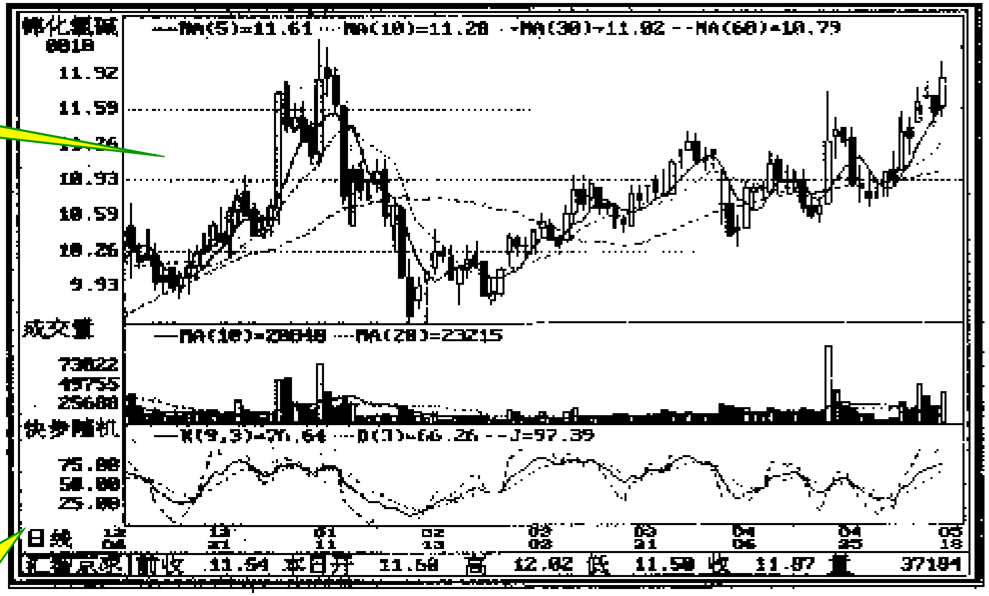
5.6.5 在经济学和金融领域中的应用

➢ 金融市场价格的分维

- 市场的变化规律不是严格随机的，价格的起伏是相关的，具有长程相关性，可以用分形理论来描述

单位时间股票价格的变动分布，服从特性指数$D≈1.7$的对称稳定分布

❖股票分时走势图



单位时间不论多大或多小，其分布也是相似的

5.6 分形的应用领域

5.6.6 在语言学和情报学中的应用

- 语言学中的词频分布分维
  - 词看成是从空白为结尾的字母随机序列，句子看成是用词来编码的词的序列，文章看成是由句子的增减过程形成的句子序列

- 情报学中的负幂律统计分形

$$f(x) \propto x^{-D}$$

其中D为情报学中的分维

$$D = \frac{\ln f(x)}{\ln(\frac{1}{x})}$$

5.7 分形理论的哲学思想

5.7.1 分形结构的普遍性

- 自然分形、时间分形、社会分形和思维分形四大类
  - 自然分形包括几何分形、功能分形、信息分形和能量分形
  - 时间分形表示在时间轴上具有自相似性的系统
  - 社会分形指人类社会活动和社会现象所表现出来的自相似现象
  - 思维分形指人类在认识、意识上所表现出的自相似特性
- 非线性、随机性以及耗散性是出现分形结构的必要物理条件
- 耗散系统的非稳定条件或远离平衡条件有可能成为产生奇异吸引子，即产生分形结构的充分条件

5.7 分形理论的哲学思想

5.7.2 分形结构与自组织

- 协同学认为，自组织系统的共性之一是结构的产生或新结构的出现往往由少数几个序参量所决定。
- 规则集与分形集、整数维与分数维之间的协同及其转化，可以通过迭代加以实现。
- 自组织的分形结构具有的特点：
  - 自同构
  - 自复制
  - 自催化

5.7 分形理论的哲学思想

5.7.3 尺度与分维的辨证关系

- 分形图形结构上的无限性与认识尺度上的有限性问题，实质上就是研究尺度和分维的辨证关系问题。
- 在分形维数的定义中，要求尺度趋于**0**的极限存在，但这难以实现。
- 把适用于无限层次分形体的公式用于实际有限层次的分形体，就有可能产生分维不确定性。

5.7 分形理论的哲学思想

5.7.4 分形理论的哲学意义

- 分形理论指出了客观物质世界部分与整体之间的辨证关系，打破了整体与部分之间的隔膜，找到了部分过渡到整体的媒介和桥梁，即整体与部分之间具有相似性。
- 分形理论使人们对整体与部分之间关系的认识由线性发展到非线性，并同系统论一起共同揭示了整体与部分之间多层面、多维度、全方位的联系方式。
- 分形理论提供了一种新的方法论，为人们从部分认识整体，从有限认识无限提供了依据。

5.7 分形理论的哲学思想

5.7.5 分形研究的启示

- 自相似性是分形的本质，分维数是量度自相似性的特征量。
- 有效挖掘分数维所包含的信息量并加以利用具有两方面的重要意义：
  - 一方面可以从测量获得的时间序列数据，测算关联维，由关联维估算建立动力学模型所需要实质性状态变量的数目——理论意义。
  - 具有自相似性的现象，可以把其局部看作是整体的缩影，整体可以看作局部的放大，而分数维正是这种放大或缩小自相似变换的不变量。

5.7 分形理论的哲学思想

5.7.5 分形研究的启示

- 根据分形规律，可以做的工作
  - 提高现有资料的分辨率，即由大尺度趋势来复原小尺度趋势，因为在无特征尺度区它们具有相似性。
  - 以降低分辨率为代价外推现有资料的样本时段或空间范围，即在无特征尺度区内由小尺度趋势复原大尺度趋势。
  - 如果一条复杂曲线其局部的复杂性与整体的复杂性相当，它就是一种分形，可以测量其分维。
- 预测气候变化，地震预报问题等

阅读材料

- 中国古典诗词的分形论解读，首都师范大学学报(社会科学版)，2012年，第6期