第 8 章

复杂系统的结构建模

主讲人：肖人彬

人工智能与自动化学院

rbxiao@163.com

教学重点

重点掌握几个内容：

- 系统模型谱系
- 同构性与同态性
- 概念模型
- 结构模型与结构建模

复杂性科学基础

8.1 系统的描述

- 我们在进行系统建构与分析时，总要对系统进行描述。
- 人们最初用来描述客观世界的是自然语言。但自然语言的结构比较松散，很难达到精确化和明晰化。
- 最早从自然语言中分化出来的科学语言是科学术语。它具有单义性，但在使用时又离不开自然语言体系这一母体，其精确性和明晰性仍然受到限制。

8.1 系统的描述

- 于是，人们开始使用符号语言，符号的信息承载量大大增加。例如：使用字母和符号来描述和运算方程式。
- 除了符号语言外，图形语言也应用很广。
- 自然语言与符号语言的沟通。在系统分析中，那些能用符号语言的尽量用符号语言，特别是可以用数学描述的尽量用数学方法定量描述，而对那些难以用符号语言描述的（特别是情景和人的态度的描述），尽可能用自然语言描述。

8.2 系统模型与系统建模过程

- 模型方法
- 系统模型的作用
- 系统建模的原则
- 系统模型的分类
- 系统模型谱系
- 系统建模过程

模型方法

- 模型是对现实世界的事物、现象、过程或系统的一种抽象的简化描述。
- 在科学研究中建立理想模型，突出事物和过程的主要特征，使所研究的具体问题得到更简单的表述，将有利于逻辑推理的判断。
- 模型方法是人类认识客观事物的桥梁。模型可以看作是一种科学语言，它比自然语言要更简练、更紧凑。

系统模型的作用

- 便于加深对系统的认识和理解。由于模型抽象地反映了系统主要的原理和规律，通过模型使人们容易认识和了解系统。
- 有利于进行系统分析。由于系统原型很难甚至不可能进行实验、测定或者修改方案，人们可以在模型上进行。
- 有利于开发者之间以及与用户之间的沟通。因为模型抓住了系统的本质，可以从大处着眼进行研究讨论。

系统建模的原则

- 实用性
- 真实性
- 简明性
- 针对性

系统模型的分类

- 实物模型和抽象模型
- 静态模型和动态模型
- 功能模型和结构模型
- 定性模型和定量模型（数学模型）
- 描述性模型和规范性模型

系统模型谱系

- 硬系统：综合得出系统整体的模型。
- 软系统：可以建立定性模型，不一定能建立定量模型。

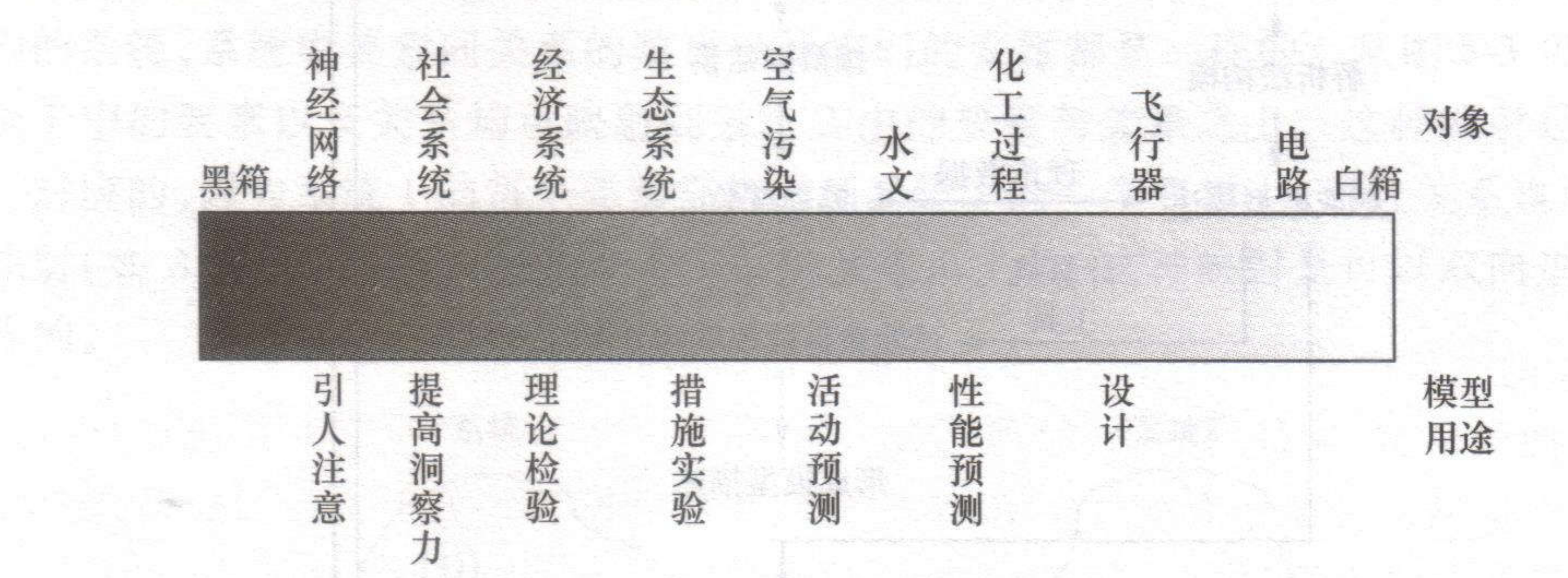

图 8-1 系统模型谱系

系统建模过程

- 系统建模过程是一个学习过程，需要系统分析人员与有关专业人员协同进行。
- 系统的建模经常需要经过多次反复才能完成。

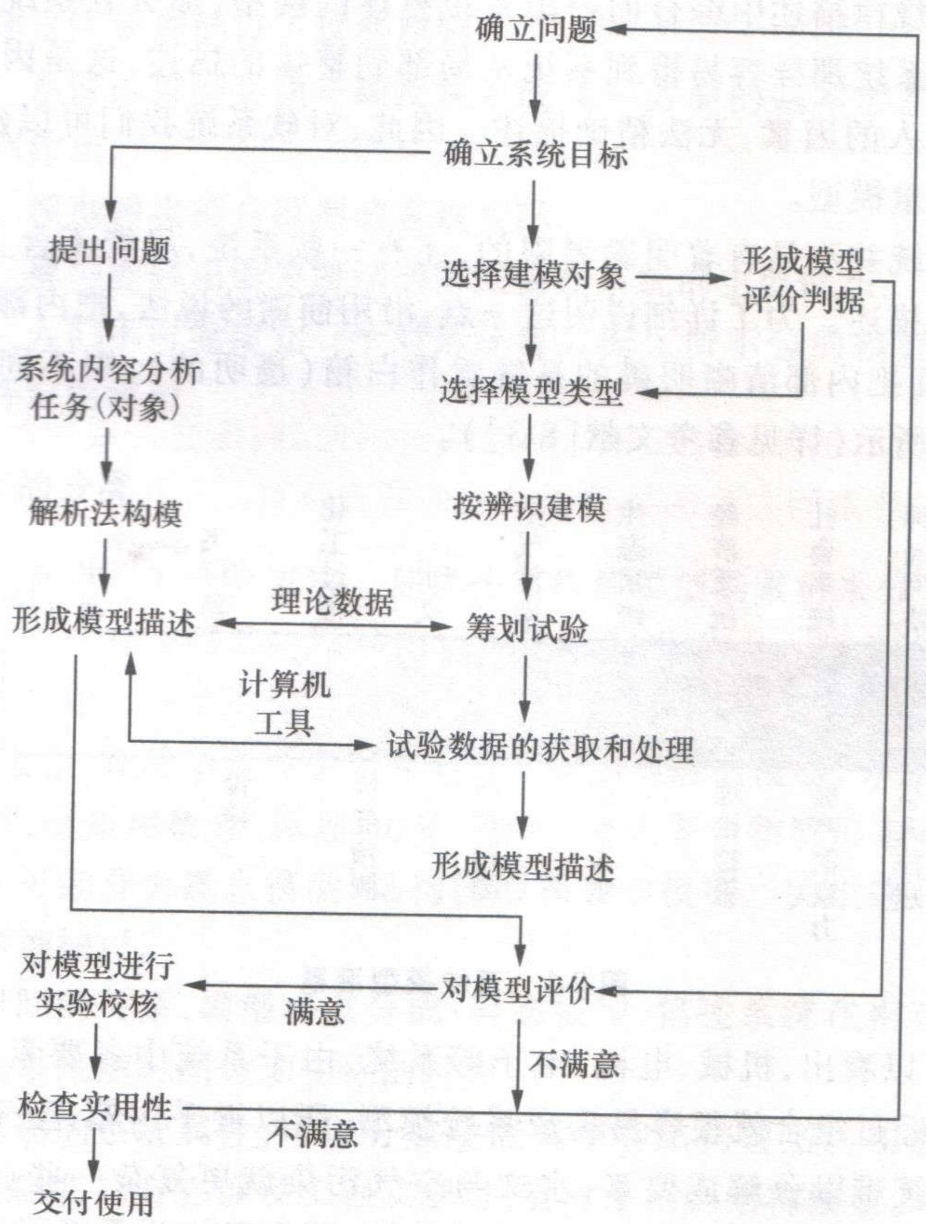
确立问题
确立系统目标
提出问题
选择建模对象
形成模型
评价判据
系统内容分析
任务(对象)
选择模型类型
解析法构模
按辨识建模
形成模型描述
理论数据
筹划试验
计算机
工具
试验数据的获取和处理
形成模型描述
对模型进行
实验校核
满意
对模型评价
不满意
检查实用性
不满意
交付使用

图 8-2　建模过程

8.3 同构性与同态性

- 同构性是系统建模的基础。

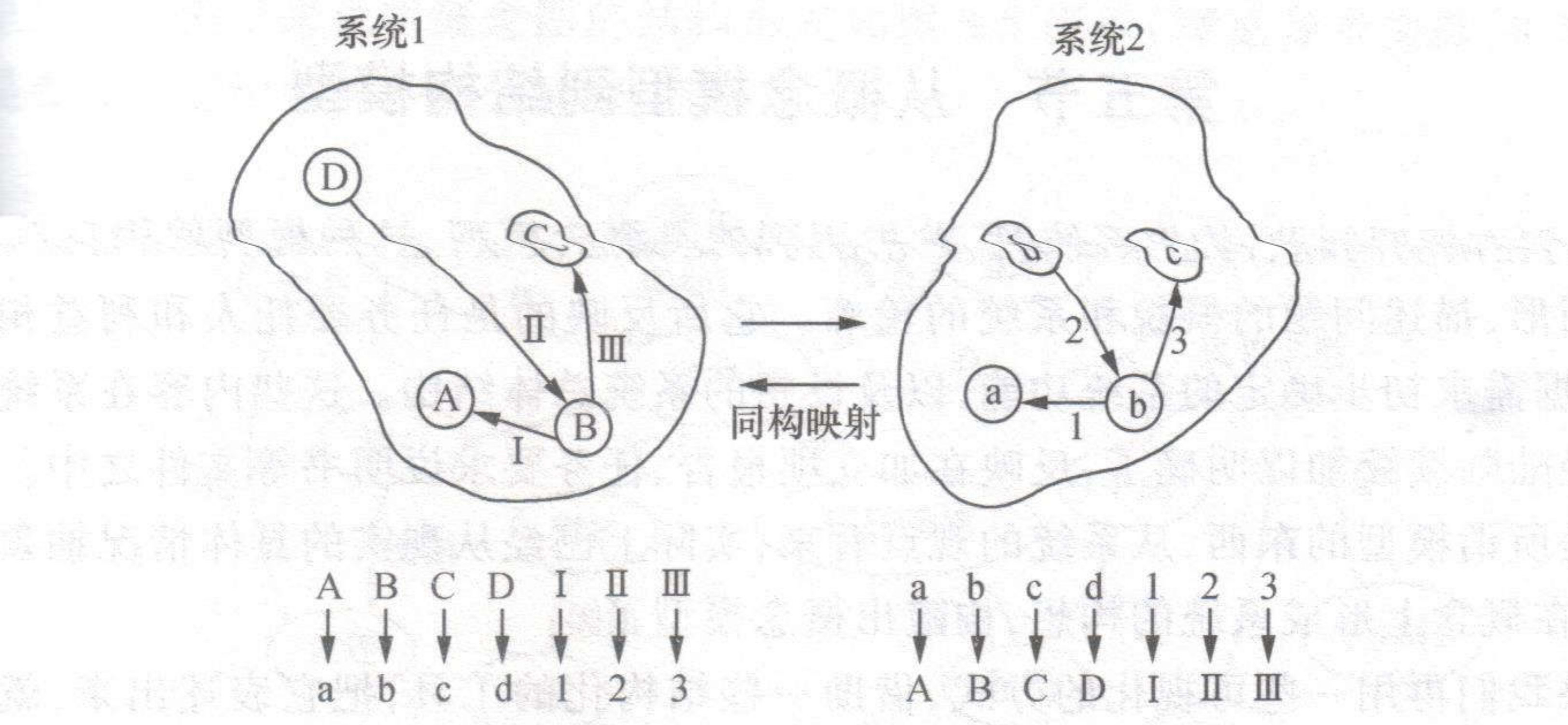

图 8-3　同构性

8.3 同构性与同态性

- 同态性基于同态映射，它是“多对一”映射。

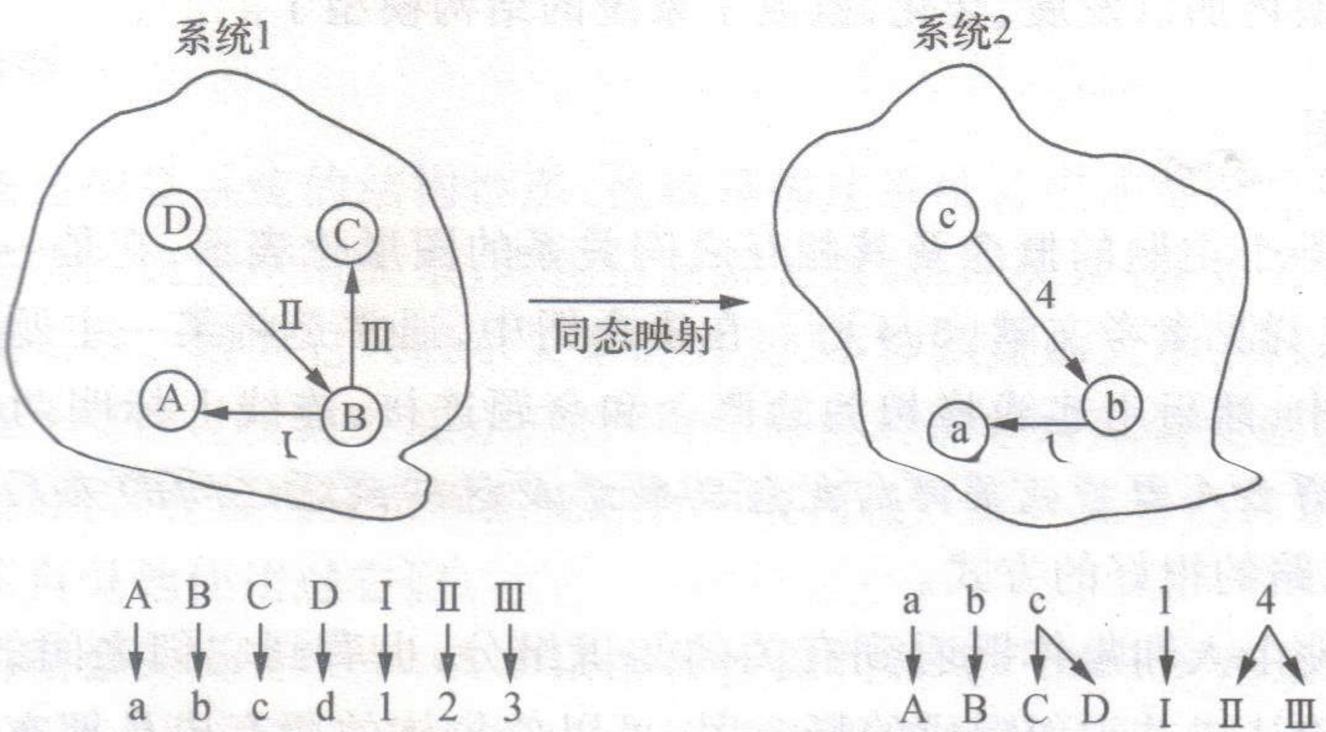

图 8-4 同态性

8.3 同构性与同态性

- 同构性可以看作是同态性的一种特殊情况。
- 一般来说，日常用到的模型多半是同态模型，但同构性是研究建模的出发点。
- 同构性和同态性都是系统建模的基本思想。

8.4 从概念模型到结构模型

- 人们在阐明问题、构思系统时，首先用到的是概念模型。

概念图

- 概念图是某个主题的概念及其相互之间关系的图形化表示，它是一种用来组织和表达知识的工具。

从概念模型到结构模型

结构模型

- “成功”的力学模型

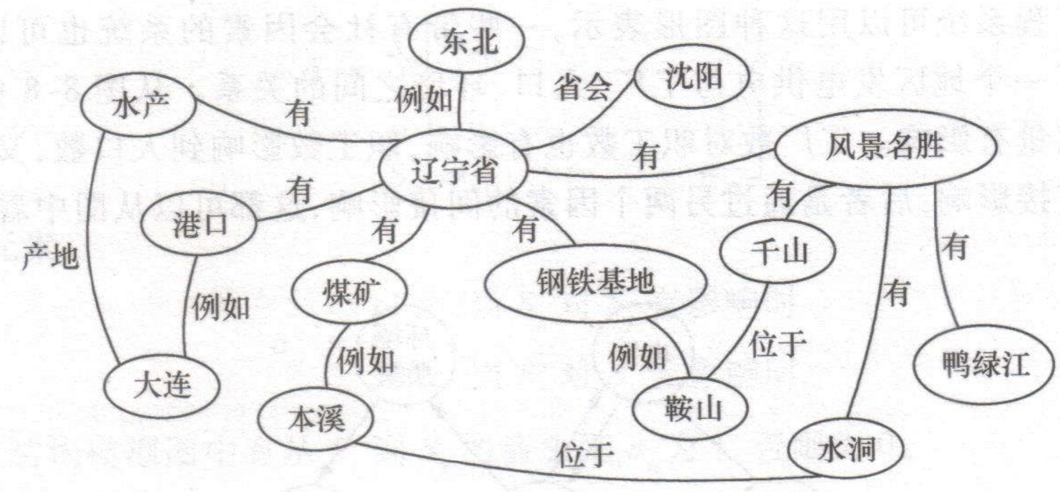

图 8-5 概念图的一个例子

二、结构模型

结构模型描述的是系统的结构性态，也就是描述系统各组成部分之间以及它们与外界环境之间的关系。这里所谓关系，既包括因果关系、顺序关系、联系关系、隶属关系，也包括优劣对比关系等。因为它只表示关系的有无，不涉及量的大小，所以比较简单直观。它是从系统的概念模型过渡到定量分析的中介，即使对那些难以量化的系统说来也可以建立结构模型，所以在系统分析和系统综合中应用很广泛。在各门科学中，人们已经以不同形式自觉不自觉地使用过它们。

系统结构模型的类型很多，其中以解释性结构模型（ISM）应用最广（详见参考文献[8-3、8-6]），下面主要对其进行介绍（以下简称结构模型）。

系统的结构模型描述的是系统各单元之间有无联系。一种最方便的描述方式是利用图形。让我们用一个例子来说明。图 8-6 是一个混合器，料液从上面流入，流量为 F_1，从下面流出，流量为 F_2，液面高度为 H，容器内气体的密度为 D，压力为 P。H 的大小要受到

第 8 章

从概念模型到结构模型

F_1 与 F_2 的影响，而 H 又反过来影响 F_2，H 和 D 都会影响 P。为了表述这种影响关系，我们可以画出像图 8-7 那样的图形。从图中可以看出，每一个圆圈代表一个物理量（一个因素），圆圈中标有该物理量符号，带有箭头的线段表示影响，例如从 F_1 到 H 的箭头线段表示 F_1 对 H 有影响。在 F_2 与 H 之间有两个带箭头的线段，箭头方向相反，这表示 F_2 对 H 有影响，而 H 对 F_2 也有影响。

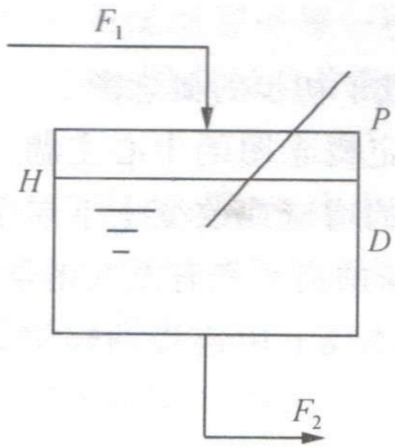

图 8-6　混合器

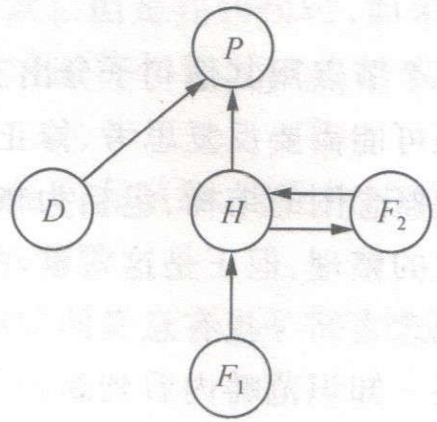

图 8-7　混合器的结构模型

第 8 章

模型

$$\begin{array}{c|ccccc} & P & D & H & F_2 & F_1 \\ \hline P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ F_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ F_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

这是一个 5 × 5 的方阵，它的每一行和每一列都对应图中一个节点（一个物理量或因素），如果某一个量（例如 D）对另一个量有直接影响作用（例如对 P 有影响），则 D 行 P 列的元素为 1，如没有影响（例如 D 对 H），则该元素（D 行 H 列）为 0。由于它表示的是各邻接单元的直接关系，所以矩阵叫作邻接矩阵。这是一个布尔矩阵，它的元素只能是 0 或 1。

在一般情况下，系统 S 共有 n 个单元，即：

$$\boldsymbol{S} = [S_1, S_2, \cdots, S_n]$$

则邻接矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

其中的各个元素

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } S_i \text{ 对 } S_j \text{ 有影响时} \\ 0, & \text{当 } S_i \text{ 对 } S_j \text{ 无影响时} \end{cases}$$

也就是说，在结构模型图中有从 S_i 到 S_j 的箭头则 a_{ij} 为 1，否则为 0。

三、可达矩阵

邻接矩阵表示了各单元的直接联系，但我们对邻接矩阵进行某些运算，可以得到更多的有关系统结构的信息。由于它是布尔矩阵，所以在进行运算前，先介绍一下布尔矩阵的运算法则。

如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $n \times n$ 布尔矩阵，则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的逻辑为

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{C}$ 也是 $n \times n$ 布尔矩阵。$\boldsymbol{C}$ 的各元素 c_{ij} 与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 各元素 a_{ij}、b_{ij} 的关系是

$$c_{ij} \triangleq a_{ij} \cup b_{ij} \triangleq \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$$

后式表示取 a_{ij} 与 b_{ij} 中最大的一个。只要两个中有一个是 1，c_{ij} 就是 1，a_{ij}、b_{ij} 全为 0 时，c_{ij} 才为 0。

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的逻辑乘为：

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{C}$ 也是 $n \times n$ 布尔矩阵。它的元素

第 8 章

模型

$$c_{ij} \triangleq a_{ij} \cap b_{ij} \triangleq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}$$

后式表示取 a_{ij} 与 b_{ij} 中最小的一个。元素逻辑乘可简写为 $a_{ij}b_{ij}$。

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积(注意它和 $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ 不同)为：

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{D}$$

也是 $n \times n$ 布尔矩阵，$\boldsymbol{D}$ 的各元素与 A、B 各元素 a_{ij}、b_{ij} 的关系为：

$$\begin{aligned} d_{ij} &\triangleq a_{i1}b_{1j} \cup a_{i2}b_{2j} \cup \cdots \cup a_{in}b_{nj} = \bigcup_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\ &= \max\{\min(a_{i1}, b_{1j}), \min(a_{i2}, b_{2j}), \cdots, \min(a_{in}, b_{nj})\} \end{aligned}$$

现在我们来研究邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一些性质：

(1) 邻接矩阵和系统结构模型图是一一对应的，有了图，邻接矩阵就唯一确定了，反之亦然。

(2) 邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 转置后得到的矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是结构模型图所有箭头反过来之后的图所对应的邻接矩阵。

(3) 在邻接矩阵中如果有一列元素(例如第 i 列)全是 0，则 S_i 是系统的原点，例如图 8-7 中的 D、F_1；如果有一行(例如第 k 行)元素全为 0，则 S_k 是系统的汇点，例如图 8-7 中的 P。

(4) 如果从 S_i 出发，经过 K 段支路到达 S_j，我们说 S_i 和 S_j 间有"长度"为 K 的通路存在。我们计算 $\boldsymbol{A}^K$，得出 $n \times n$ 方阵中各元素表示的便是相应各单元间有无长度为 K 的通路存在。

就拿图 8-7 的例子来看，

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

表明了系统中有哪些长度为 2 的通路，例如第三行第三列的 1 表明 H 对 H 有经过 F_2 的间接影响，H 对 H 本身的影响成了一个回路。第四行第一列的 1 表明 F_2 对 P(经过 H)的间接影响……同样如果再计算

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}^2 \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

各元素表明长度为 3 的通路，从中可看出，这种通路已在 H、F_2 间绕圈子了。当然还可再算下去，对有回路的系统来说，当 K 增大时，$\boldsymbol{A}^K$ 形成一定的周期性重复情况(绕圈子)。

(5) 如果我们需要知道从某一单元 S_i 出发都可能到达哪一些单元，则可以把 $\boldsymbol{A}$(直接的)、$\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{A}^3 \cdots$(间接的)结合在一起来进行研究，取

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}^2 \cup \boldsymbol{A}^3 \cup \cdots \cup \boldsymbol{A}^n$$

有时为了方便起见，我们认为任何 S_i 到它本身也是可以达到的，这样应再加一个单位阵，取

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \cup \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}^2 \cup \boldsymbol{A}^3 \cup \cdots \cup \boldsymbol{A}^n$$

我们把 $\boldsymbol{R}$ 叫作系统的可达矩阵(reachability matrix)。$\boldsymbol{R}$ 也是 $n \times n$ 方阵。它的每个元素 r_{ij} 表明 S_i 能否达到 S_j(不论路有多长)。

像上面的例子，它的可达矩阵是

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I} \cup \boldsymbol{A})^5 = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]^5$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

它表明，P 只能到达它本身；D 可以达到 P 与 D 本身；H 与 F_2 都能到达 P 和它们本身；F_1 可到达 P、H、F_2 和它本身。

如果有回路存在，$\boldsymbol{R}$ 中必然有子矩阵是满阵。例如上面的 $\boldsymbol{R}$ 中第三、第四行与第三、第四列四个元素都是 1，对应于 H 与 F_2 的回路。我们把从 H 到 F_2 与 F_2 到 H 都有连接的关系叫作强连接。

8.5 结构模型的建立

- 结构模型的建立要通过以下5种划分才能完成。

8.7 结构模型的建立（2）

上一节介绍了怎样求取可达矩阵，这里介绍怎样由可达矩阵寻求结构模型。可达矩阵给出了各单元之间的关系，为了构成结构模型，我们需要把这些关系加以划分，以明确系统的层次和结构细节。

在下面介绍的方法中，共进行 5 种划分。

8.7.1 关系划分 $\Pi_1(S\times S)$

这种划分就是把所有各个单元之间是否可达的关系划分成两大类：Z 与 $\overline{Z}$。Z 类包括所有可达关系，$\overline{Z}$ 类包括所有不可达关系。有次序的一对单元 S_i 与 S_j，如果 S_i 可达 S_j，则这一关系属于 Z 类；如果 S_i 不可达 S_j，则这一关系属于 $\overline{Z}$ 类。其实，从可达矩阵各元素是 1 还是 0 就可很容易地进行划分。

这种划分用公式表示就是

$$\Pi_1(S\times S)=\{Z\};\ \{\overline{Z}\}$$

我们试用一个例子来加以说明。设某一系统的可达矩阵已求得为

第 8 章

立

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\
\hline
S_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
S_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
S_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
S_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
S_6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
S_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

其中共有 49 个元素，有 15 个 1 和 34 个 0。划分后

$\Pi_1(S\times S)=\{Z\}$；$\{\bar{Z}\}$

$=\{(1,1),(1,5),(1,7),(2,2),(3,3),(3,5),(3,6),(4,2),(4,4),(5,5),(6,3),(6,5),(6,6),(7,5),(7,7)\}$；$\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(3,1),(3,2),(3,4),(3,7),(4,1),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),(6,1),(6,2),(6,4),(6,7),(7,1),(7,2),(7,3),(7,4),(7,6)\}$

8.7.2　级别划分 $\Pi_2(S)$

对于每一个单元 S_i，我们把 S_i 可以到达的单元汇集成一个集合，称为 S_i 的可达集（或后果集）$R(S_i)$；再把所有可能到达 S_i 的单元汇集成一个集合，称为 S_i 的前因集 $A(S_i)$，即

$$R(S_i)=\{S_j\in S|r_{ij}=1\}$$

$$A(S_i)=\{S_j\in S|r_{ji}=1\}$$

其中，S 是全部单元的集合；r_{ij} 是可达矩阵的元素。

从可达矩阵很容易得到这两个集合。顺着矩阵的 S_i 行横看过去，凡是元素为 1 的列所对应的单元都在 $R(S_i)$ 之内；再顺着可达矩阵 S_i 这一列竖看下来，凡是元素为 1 的行所对应的单元都在 $A(S_i)$ 之内。

对于上面举过的例子来说，表 8-1 的第二列给出了各单元的 $R(S_i)$，第三列给出了各单元的 $A(S_i)$。

在一个多级结构的最上一级（最后一级）的单元中，没有更高的级可以到达，所以它的可达集 $R(S_i)$ 中只能包括它本身和与它同级的某些强连接的单元。这个最上一级的单元的前因集 $A(S_i)$，则包括它自己、可以到达它的下级各单元，以及它上面的强连接单元。这样一来，$A(S_i)$ 与 $R(S_i)$ 的交集，对最上一级的单元来说，就和它的 $R(S_i)$ 是一样的。因为如果不是最上一级中的单元，它的可达集中还有更高级中的单元，这不会出现在它的可达集与前因集的交集之内。所以我们可得出 S_i 为最上一级单元的条件为

$$R(S_i)=R(S_i)\cap A(S_i)$$

得出最上一级各单元后，把它们暂时去掉，再用同样方法便可求得次一级（也就是去掉上一级后的最上一级）诸单元，一直这样做下去，便可一级级地把各单元划分开。如果我们用 $L_1\cdots L_k$ 表示从上到下的各级，级别划分可用下式表示

第 8 章

立

$$\Pi_2(S)=\{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$$

如果我们为了表达方便，再引入一个零级 L_0，它是一个空集 $L_0=\varnothing$，则各级中元素的迭代求法可用下式表述

$$L_j=\{S_i\in S-L_0-L_1-\cdots-L_{j-1} \mid R_{j-1}(S_i)=R_{j-1}(S_i)\cap A_{j-1}(S_i)\}$$

其中，$R_{j-1}(S_i)$与 $A_{j-1}(S_i)$分别表示从$(S-L_0-L_1-\cdots-L_{j-1})$子集中求得的 S_i 的可达集与前因素。这个公式的实际应用以列表最为方便醒目，例如上面例子的计算，第一级情况如表 8-1 所示。

表 8-1

单元 S_i	可达集 $R(S_i)$	前因集 $A(S_i)$	$R(S_i)\cap A(S_i)$
1	1，5，7	1	1
2	2	2，4	2
3	3，5，6	3，6	3，6
4	2，4	4	4
5	5	1，3，5，6，7	5
6	3，5，6	3，6	3，6
7	5，7	1，7	7

从表中可以看出，单元 2 与 5 是上一级的单元，即

$$L_1=\{2, 5\}$$

现在暂时去掉 L_1，求$(S-L_0-L_1)$的最上一级单元，也就是去掉 2 和 5 两个单元，而只考虑 1、3、4、6、7 单元。我们仍旧用列表的方法求解，得出表 8-2。

表 8-2

单元 S_i	可达集 $R(S_i)$	前因集 $A(S_i)$	$R(S_i)\cap A(S_i)$
1	1，7	1	1
3	3，6	3，6	3，6
4	4	4	4
6	3，6	3，6	3，6
7	7	1，7	7

从表中可以看出，单元 3、4、6、7 是这时的最上一级，也就是总的第二级：

$$L_2=\{3, 4, 6, 7\}$$

然后再去掉 3、4、6、7，按照$(S-L_0-L_1-L_2)$去找，这时因只有一个单元 1，排出来很简单，如表 8-3 所示。

表 8-3

单元 S_i	可达集 $R(S_i)$	前因集 $A(S_i)$	$R(S_i)\cap A(S_i)$
1	1	1	1

因此

第 8 章

立

$$L_3=\{1\}$$

这样一来，7 个单元都已划分完毕，最后划分结果为

$$\Pi_2(S)=\{[2, 5]; \quad [3, 4, 6, 7]; [1]\}$$

也就是说分成了三级。

8.7.3　分部划分 $\Pi_3(S)$

有的系统从结构上可以划分成几个部分，每个部分之间相互独立，没有什么直接或间接的联系。分部划分 $\Pi_3(S)$ 就是进行这种划分的。

如果说，级别划分是自上而下来考虑的，那么分部划分则是自下而上来考虑的。为此我们先定义一种底层单元，所谓底层单元，就是那些前因集 $A(S_i)$ 和它的前因集 $A(S_i)$ 与可达集 $A(S_i)$ 的交集相同的单元：

$$A(S_i)=A(S_i)\cap R(S_i)$$

这是显而易见的，如果 S_i 是底层单元，则前因集 $A(S_i)$ 中包含它本身以及与 S_i 有关的强连接单元。可达集包含它本身、与 S_i 有关的强连接单元和可从 S_i 到达的单元。如果有一个单元在 S_i 的下层，它只能包含在 $A(S_i)$ 中而不能包含在 $A(S_i)\cap R(S_i)$ 中。所以符合上述条件的一定是底层单元。

应该注意的是在一个级数为 l 的多级系统中，底层单元并不都是在第 l 级，它可能在任何一个 $k<l$ 上，只要它下面不再有单元。

如果有两个底层单元的可达集是相同的，那么这两个单元在一个部分之内（也就是在一个有向图之中），否则就不在一个部分内。

现在我们来进行分部划分，如果该系统可以划分成 m 个部分：

$$\Pi_3(S)=\{D_1, D_2, \cdots, D_m\}$$

则先来找出底层单元集 B：

$$B=\{S_i\in S \mid A(S_i)=A(S_i)\cap R(S_i)\}$$

例如在上面那个例子里，从表 8-1 可以看出，1、3、4、6 这四个单元合乎 $A(S_i)$ 与 $A(S_i)\cap R(S_i)$ 相同条件，所以它们是底层单元：

$$B=\{1, 3, 4, 6\}$$

然后我们从这些单元出发，寻找哪些单元和它们是在一个部分（有向图）之内。

我们知道，S_i、S_j 两个单元，如果它们的可达集有共同的单元，也就是它们的可达集 $R(S_i)$、$R(S_j)$ 的交集不是空集：

$$\{R(S_i)\cap R(S_j)\}\neq\varnothing$$

则它们是在一个部分之内。

例如在上例中，$R(1)$、$R(3)$、$R(6)$ 中有共同单元 S_5，即

$$R(1)\cap R(3)\cap R(6)=\{5\}\neq\varnothing$$

所以 S_1、S_3、S_6、S_5 在一个部分里。但 $R(S_4)$ 中与 S_1，S_3，S_6 无共同的单元，所以可以肯定 S_4 不在这一部分之内：

$$\{R(1)\cap R(4)\}=\{R(3)\cap R(4)\}=\{R(6)\cap R(4)\}=\varnothing$$

我们再根据各可达矩阵中的单元，就可以确定，S_5 与 S_7 是在 S_1、S_3、S_6 那一部分里，S_2

第 8 章

立

在 S_4 那一部分里，因此

$$\Pi_3(S)=\{[1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7];\ [2,\ 4]\}$$

我们把 7 个单元划分两块（分成两个有向图）。如果说级别划分从纵的方面排出了级次，那么这里就从横的方面划分了部组。

8.7.4 是否强连接单元的划分 $\Pi_4(S)$

当按 $\Pi_2(S)$ 进行级别划分之后，在每一层内的各单元有可能是强连接部分的单元，也可能不是。如果某单元不属于强连接部分，则对本层来说，它的可达集正是它本身，即

$$S_i=R_{Lk}(S_i)$$

其中 R_{Lk} 的下标 Lk 表明只是对第 k 级这一层来说的。这样，我们把各层（各级）单元分成两类：一类是不在强连接内的，称为 I 类；另一类是在强连接内的，称为 K 类，即

$$\Pi_4(L_k)=\{I,\ K\}$$

在 I 和 K 中，很有可能有一个是空集，但不会都是空集。

在上例中，对第一级来说

$$R_{L1}(2)=2;\ R_{L1}(5)=5$$

而这一集只有 S_2、S_5 两个单元，所以

$$\Pi_4(L_1)=\{[2,\ 5];\ [\varnothing]\}$$

对第二级来说

$$R_{L2}(3)=\{3,\ 6\};\ R_{L2}(7)=7;$$

$$R_{L2}(4)=4;\ R_{L2}(6)=[3,\ 6]$$

因此

$$\Pi_4(L_2)=\{[4,\ 7];\ [3,\ 6]\}$$

对第三级来说

$$R_{L3}(1)=1$$

因此

$$\Pi_4(L_3)=\{[1];\ [\varnothing]\}$$

从上面的划分可以看出，1、2、4、5、7 全不在强连接内，3、6 在强连接之内。而 3、6 又在第二级，所以第二级有一个强连接。

8.7.5 强连接子集的划分 $\Pi_5(S)$

利用 $\Pi_4(S)$ 可以划分出哪些单元属于强连接，这里的划分则是要把具有强连接的子集（回路）划分出来：

$$\Pi_5(S)=\{c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_y\}$$

其中 c_i（i=1,2,…,y）表示一个最大回路集，y 表示这种集的数目，这里所谓的“最大”是指如果在这个集合中再增加一个元素，就会破坏回路的性质，而回路已如前面所讲，就是指构成它的元素中互相都是可达而且互为前因的，这可从可达矩阵识别出。构成回路最少的元素数目是 2，例如上例中 3、6 就是一个最起码的回路。

第 8 章

结构模型的建立

有了以上五种划分，就可以构成结构模型了。例如在前面的例子中

（1）从$\Pi_2(S)$划分已知 7 个单元分在三级之内，如图 8-10 所示，2、5 在第一级，3、4、6、7 在第二级，1 在第三级；图中已按上下顺序画出。

（2）从$\Pi_3(S)$划分可知，该系统可分成两个独立的部分，即 1、3、5、 6、7 为一部分，2、4 为一部分；图中划分在左、右两边。

（3）从$\Pi_4(S)$与$\Pi_5(S)$划分可知，3、6 为强连接回路。

（4）再从$\Pi_4(S \times S)$可知，有下面这些关系。

$$1 \to 7;\ 3 \to 5;\ 6 \to 5;\ 7 \to 5;\ 4 \to 2$$

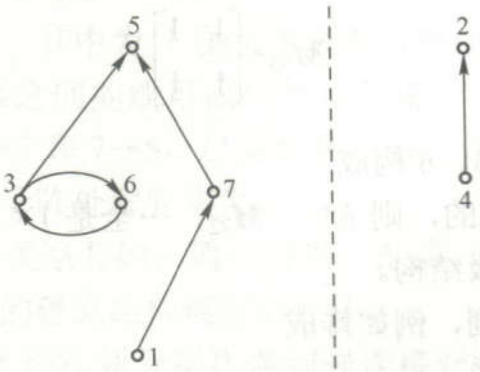

图 8-10

我们把它们利用起来，画到图上，便逐渐得到了待求的结构模型。

复杂系统的结构建模

思考题

- 在复杂系统的研究中，为什么要强调结构建模的重要性？
- 在你所学过的专业课程中，使用过哪些概念模型？
- 概念模型与结构模型有何异同？为什么说结构模型是从系统的概念模型到定量分析的中介？

复杂系统的结构建模

阅读材料

- 解释结构模型在专业课程体系结构解析中的应用. 数学的实践与认识，**2012(4)**
- 基于传递闭包的系统影响因素的结构分析方法. 水电能源科学，**2013(9)**