

第4章

第4章

混沌

主讲人：肖人彬

(人工智能与自动化学院)

rbxiao@163.com

上帝是如何掷骰子的？

教学重点

重点掌握几个内容：

- ✓ 非线性动力系统的基本概念
- ✓ 逻辑斯蒂映射
- ✓ 从倍周期分岔到混沌
- ✓ 混沌的结构特征及规律性
- ✓ 混沌的应用领域及哲学思想

复杂性科学
基础



- 十九世纪正当大多数的科学家和哲学家为牛顿定律的种种精确预言所欢欣鼓舞，甚至要预言未来时，1890年，法国数学家庞加莱(Poincare)在研究特殊的三体运动时发现，系统状态中微小的不确定因素，都可能使结果产生很大变化，从而使未来的状态不可预测。从而，第一次向传统的决定论提出了挑战，开创了混沌研究的先河。



法国数学家 庞加莱

蝴蝶效应

- 一只蝴蝶在巴西扇动一下翅膀，就可以在美国得克萨斯州引起一场龙卷风。
- 初始条件的微小差别在最后的现象中产生了极大的差别；前者的微小误差促成了后者的巨大误差。
1963年，洛仑兹研究天气预报时发现，重复模拟结果随计算时间的增加而彼此分离，以至后来结果变得毫无相似。
- 1963年1月7日，其论文《确定性的非周期论》在《大气科学杂志》上发表，标志着混沌科学的诞生

天气预报说今天晴天，怎么下冰雹了？

- 20世纪70年代，生物学家发现人类心脏中存在混沌现象
- 1975年，美国华人学者李天岩和美国数学家约克发表文章描述了从有序到混沌的演变过程
- 1987年，詹姆斯·格雷克的论著《混沌：开创新科学》
- 我们身边的混沌现象
 - 香烟燃烧轨迹
 - 自来水龙头滴水
 - 油管内流动油的性质
 - 闪电

- 大气和云雨是非线性系统。闪电之前，云雨通过相互摩擦和静电感生作用，会产生电子雪崩现象，从而在云层间或云层与地面间形成弯弯曲曲并且分叉的粒子通道。



自然多奇妙啊！

➤ 混沌是由确定性动力学系统产生的一种貌似无规则的、类似随机的现象

- 混沌不是简单的无序而是没有明显的周期和对称，但却具有丰富的内部层次的有序结构
- 混沌要求非线性，但非线性并不保证有混沌

➤ 混沌学

- 研究确定性的非线性动力学系统所表现出来的复杂行为产生的机理、特征的表述，从有序到无序的演化及其反演化的规律及其控制的科学
- 关于过程的科学，而非状态；关于演化，而非存在

▶ 研究混沌的三个目的

- 对于一个给定的动力系统，如何判断是否为混沌系统
- 对于一个混沌系统如何定性定量描述
- 对于一个混沌系统如何进行控制，如何利用混沌，如何利用历史数据对混沌进行预测

上帝不掷骰子。

——爱因斯坦

4.2.1 相空间与相轨迹

- 通过状态变量建立微分方程组描述的系统——动力系统

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

其中 X 是 N 维状态向量, $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$

相空间

相空间运动轨迹为相轨道或相轨迹

N 维相空间中, 相轨道表示系统的运动状态随时间的发展过程

若 F_i 是 X_i 的非线性函数, 则称为非线性动力系统

4.2.1 相空间与相轨迹

- 在离散情况下，迭代产生了动力系统，迭代产生了复杂性。
- 数学中的一切递推关系都是迭代

4.2.1 相空间与相轨迹

- 刘维（Liouville）定理——保守系统在运动过程中相空间体积保持不变；而耗散系统的相空间体积，在运动过程中逐渐收缩，相空间的相轨迹要从 N 维收缩到小于 N 的 m 维数上
- 对于不同初始条件，只要观测时间足够长，耗散系统在相空间的运动收缩到的有限区域，称为吸引子

4.2.1 相空间与相轨迹

- 非线性动力系统的长时间行为在相空间的三种可能形式
 - 轨线趋于一个定点，称为定态吸引子，对应于系统处于稳定状态
 - 轨线趋于一个闭合曲线，称为周期吸引子，对应于系统做周期振荡运动
 - 在一定控制参数范围内，轨线在相空间被吸引到一个有限的区域，在这个区域内，既不趋于一点，也不趋于一个环，而做无规则的随机运动，称为奇怪吸引子，系统的这种状态就是混沌

4.2.2 混沌的初值敏感性

- 考虑一个离散非线性动力系统的差分方程

$$x(n+1) = \begin{cases} 2x(n) & 0 \leq x(n) < 0.5 \\ 2x(n) - 1 & 0.5 \leq x(n) \leq 1 \end{cases}$$

- 其中 x 为状态变量，取初值 $x(0)=11/32$ ，二进制记作 $x(0)=0.01011$

逐步迭代可得

$$x(1)=0.1011$$

$$x(2)=0.011$$

$$x(3)=0.11$$

迭代一次，原信息损失一次
若有 n 位，则迭代 n 次完全损失

4.2.2 混沌的初值敏感性

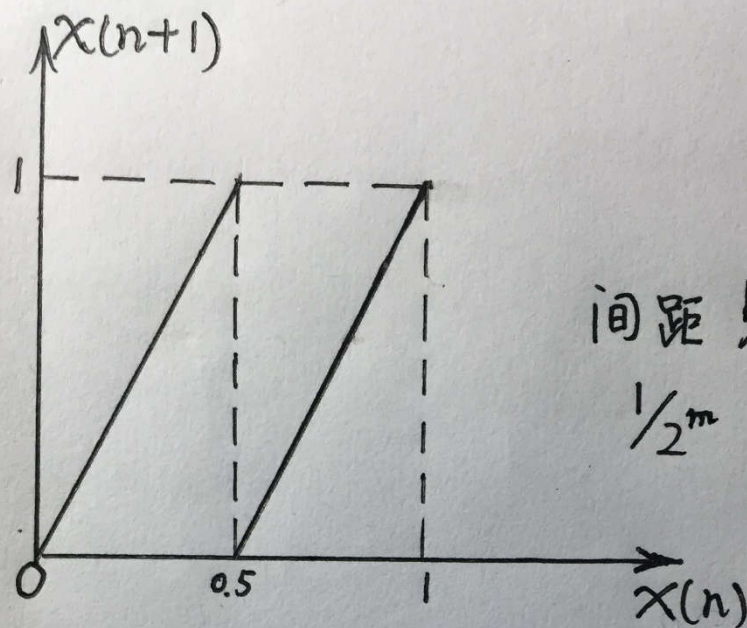
➤ 基于锯齿映射的分析

$$x(n+1) = \begin{cases} 2x(n) & 0 \leq x(n) < 0.5 \\ 2x(n) - 1 & 0.5 \leq x(n) \leq 1 \end{cases}$$

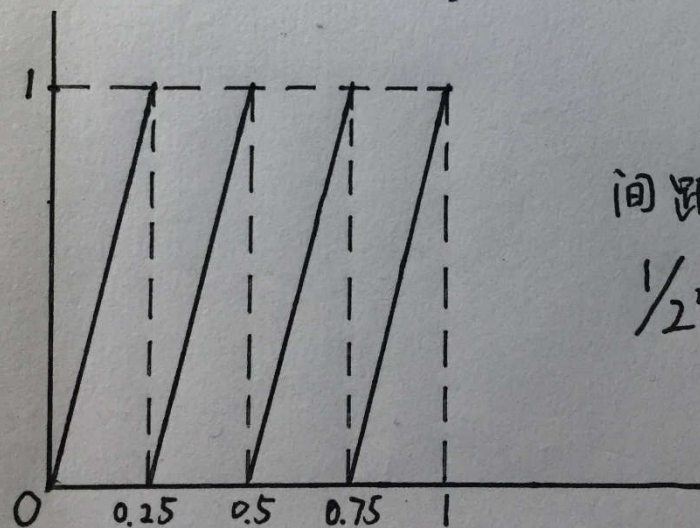
➤ 为什么是锯齿映射？

第4章

4.2.



间距 $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}^m$ ($m=1$)



间距 $\frac{1}{4}$
 $\frac{1}{2}^m$ ($m=2$)

第4章

4.2.

$$x(n) < 0.5$$

$$x(n) = 0.0xxxxxx \dots$$

$$\rightarrow x(n+1) = 0.xxxxxxx \dots$$

$$x(n) \geq 0.5$$

$$x(n) = 0.1xxxxxx \dots$$

$$\rightarrow 2x(n) = 1.xxxxxxx \dots$$

$$\rightarrow x(n+1) = 0.xxxxxxx \dots$$

4.2.2 混沌的初值敏感性

➤ 基于锯齿映射的分析

$$x(n+1) = \begin{cases} 2x(n) & 0 \leq x(n) < 0.5 \\ 2x(n) - 1 & 0.5 \leq x(n) \leq 1 \end{cases}$$

➤ 锯齿映射等价于每次小数点向右移动一位的移位映射

4.2.2 混沌振动产生的数学机理

- 非线性系统对初始条件的微小差别十分敏感
- “初始条件的微小差别，最终导致根本不同的现象，未来难以预测”——庞加莱
- 这就是混沌产生的数学机理
- 其本质就是系统对初值的敏感依赖性
- 迭代系统可发生在连续时间，也可发生在离散时间

流

映射

4.3.1 不动点及其稳定性

➤ 逻辑斯蒂映射（虫口模型）

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

➤ 特点：

归一化

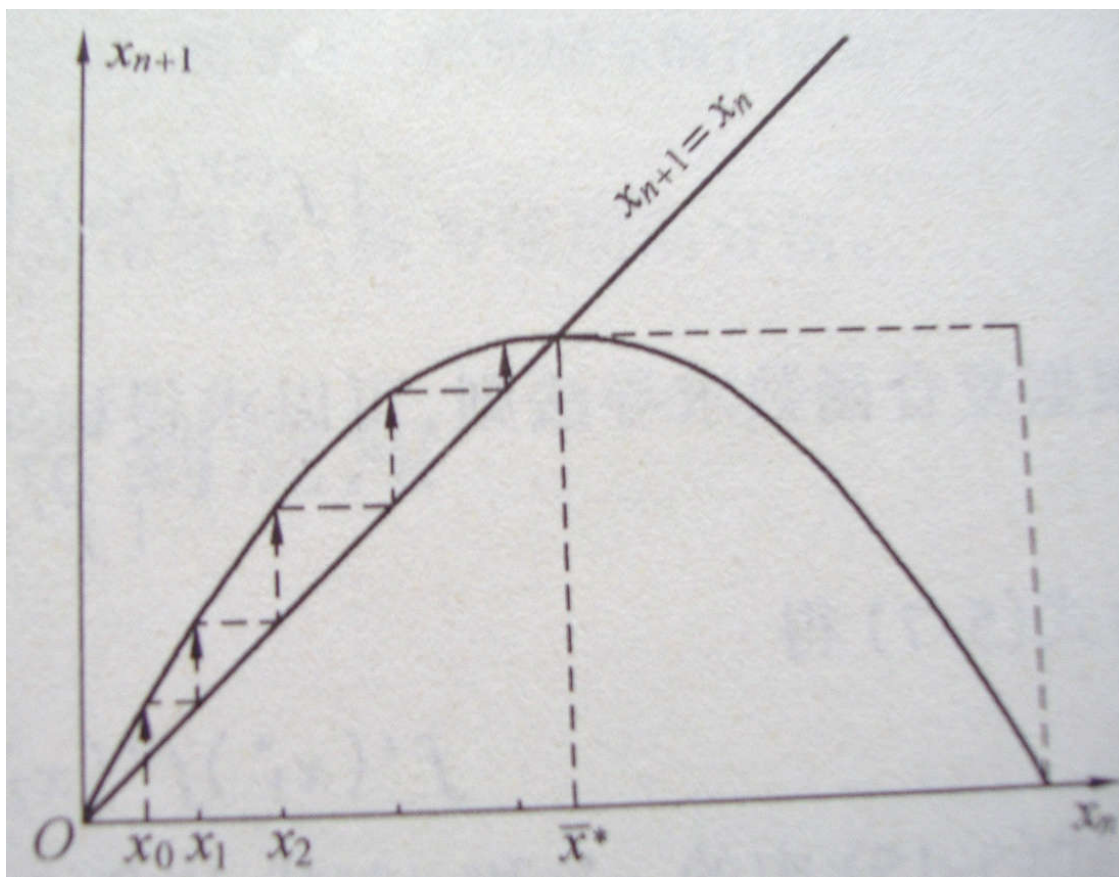
考虑阻尼作用

控制参数的取值范围？（请思考）

$$\mu = 0.5, \quad x_0 = 0.5$$

4.3.1 不动点及其稳定性

➤ 两个不动点的情况



考虑 $\mu=2$, $x_0=0.1$ 迭代情况
曲线与直线有两个交点, 分别是不动点 $x^*=0$ 和 $x^*=1-1/\mu$, 这两个不动点与初值 x_0 无关。

若初值 $x^*=0$, 则昆虫因没有卵, 就不会产生新一代虫。
只要 x_0 不完全为0, 迭代的结果 \bar{x}_n 就会逐年增加, 最终趋向稳定的不动点 x^*

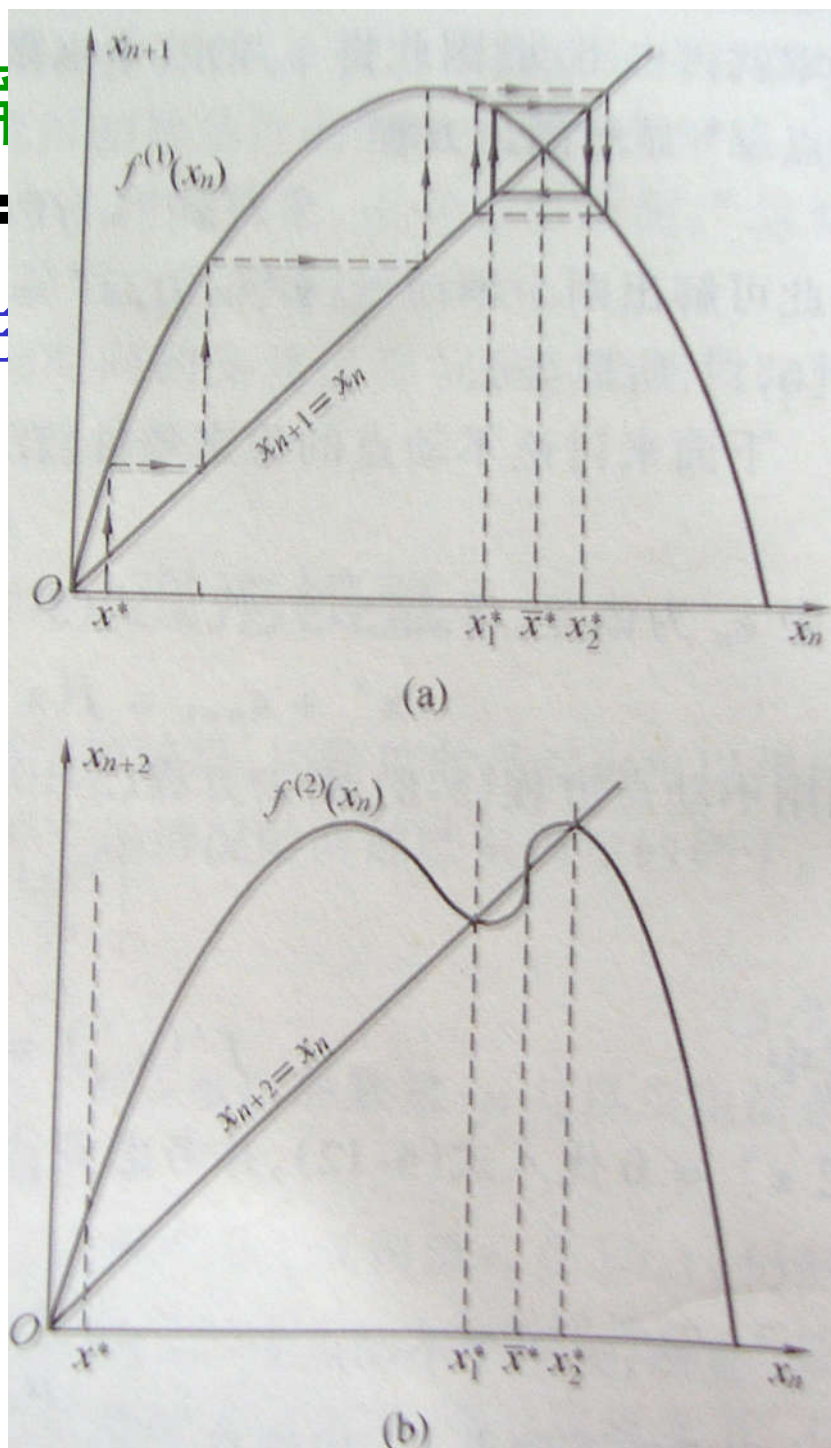
第4章

4.3 逻辑斯蒂

4.3.2 周期点及其稳定性

➤ 二周期点的情况

两个周期点的作图法



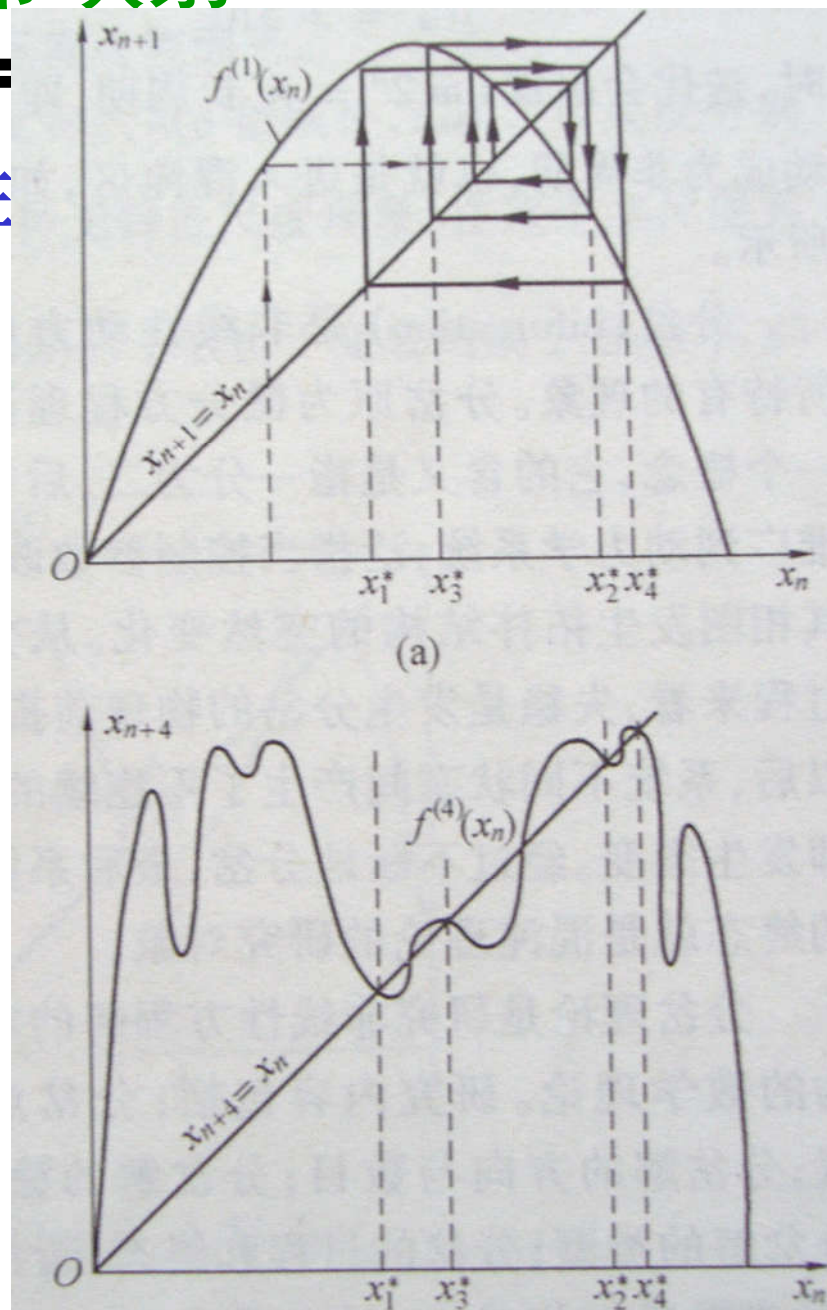
第4章

4.3 逻辑斯蒂映射

4.3.2 周期点及其稳定性

➤ 四周期点的情况

四个周期点的作图法

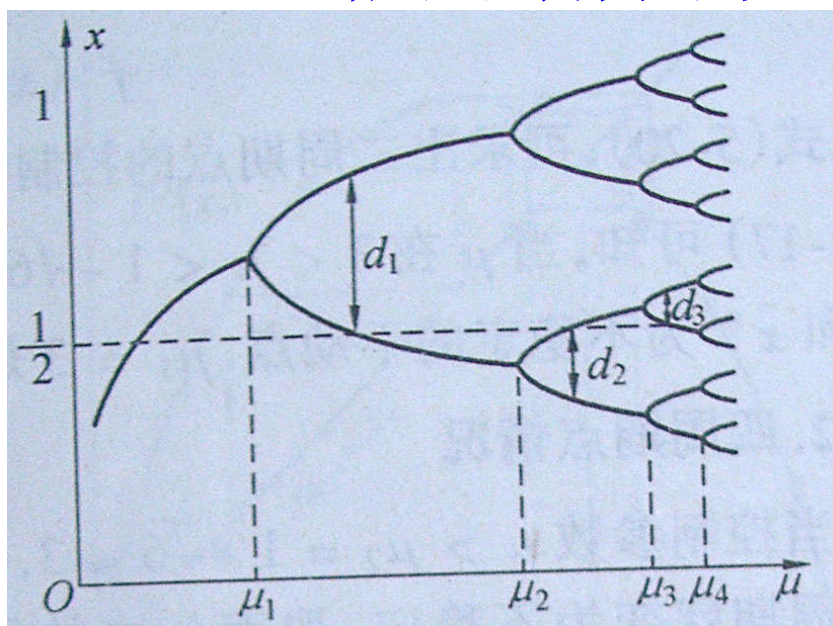


4.4.1 倍周期分岔

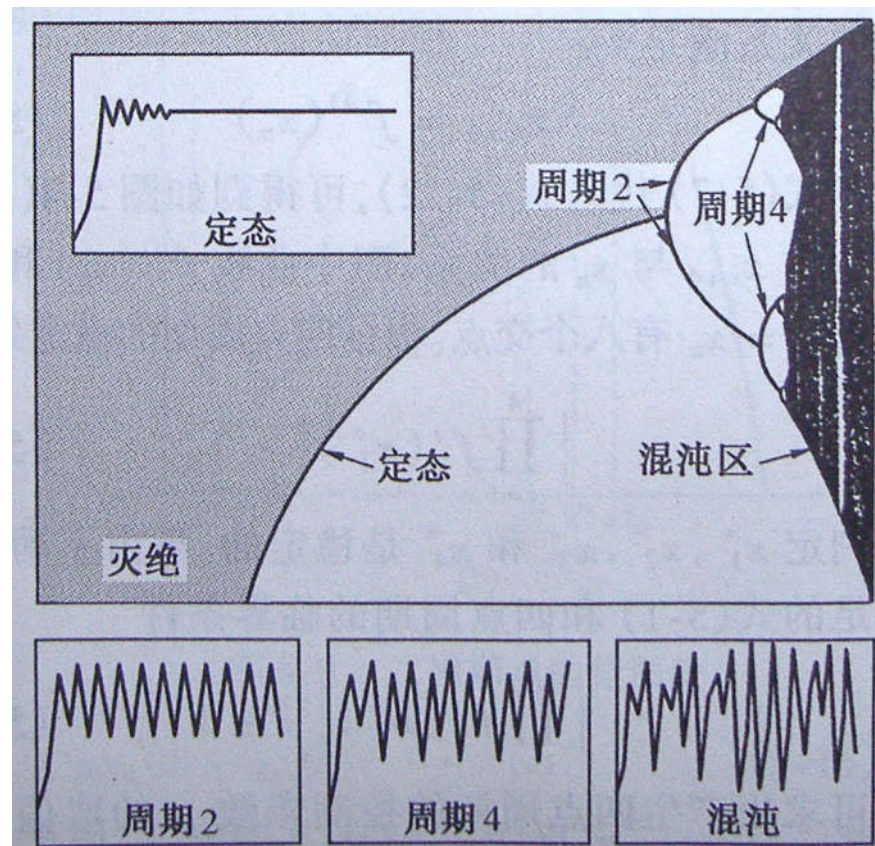
- Logistic映射过程中，当控制参数 μ 值增加到 $\mu_1 = 3$ 时，出现2点周期；当 μ 值增加到 $\mu_2 = 1 + \sqrt{6}$ ，出现4点周期；当 μ 值增加到 $\mu_3 = 3.544$ 时，出现8点周期；当 μ 值增加到 $\mu_4 = 3.564$ 时，出现16点周期等。

这样一分为二，二分为四，四分为八...
的周期加倍的分岔现象，称为倍周期分岔。

4.4.1 倍周期分岔



倍周期分岔



倍周期分岔一直进行到 μ 取极限值 $\mu_{\infty} = 3.570$ 时，迭代会出现 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ 长周期，即表明运动成为非周期，也就是进入混沌区

4.4.2 费根鲍姆普适常数

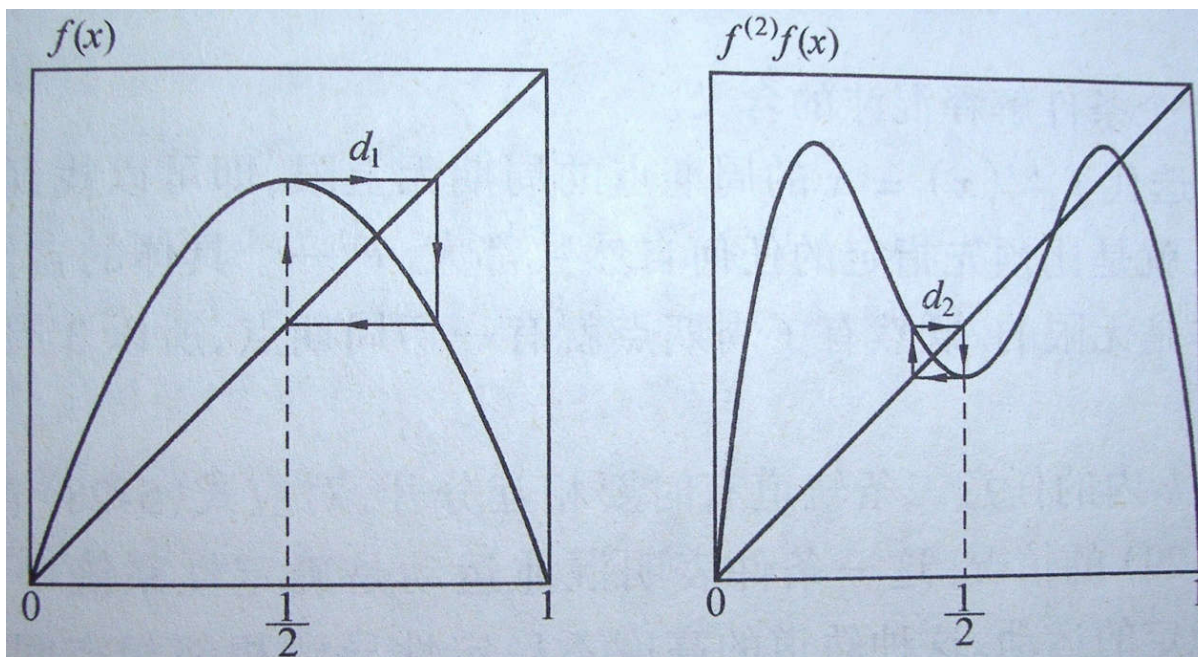
费根鲍姆常数

倍周期分岔区域中，相邻倍周期轨道之间的距离是收敛的，如在 $x=1/2$ 处倍周期距离 d 满足普适关系


$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = 2.502 \dots$$

标度变换因子

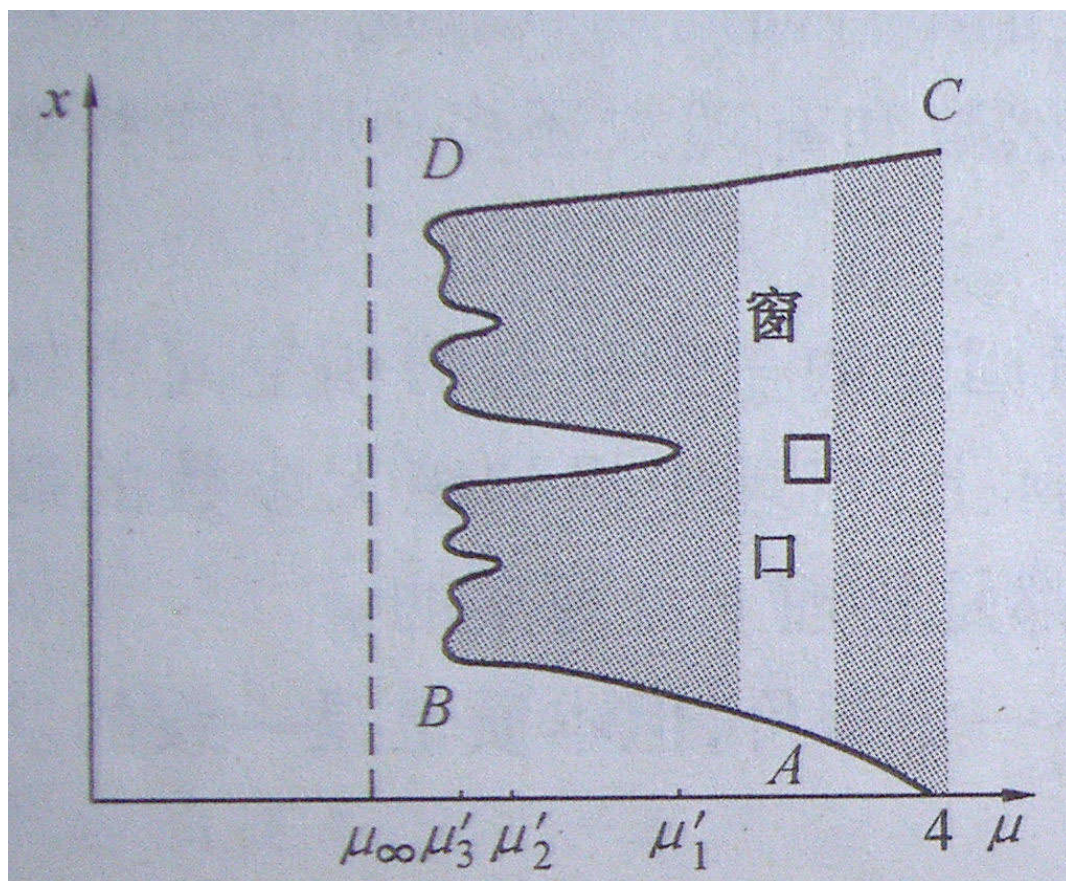
$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 4.699$$



$f(x)$ 与 $f^{(2)}(x)$ 中 $\frac{1}{2}$ 处的尺度 d_1 和 d_2

- 
- 混沌的产生经历了一个从无序到有序，又从有序到无序的过程
 - 混沌是系统在远离平衡态的状态，在其无序中，还包含着有序
 - 混沌是一种有结构的无序，表面上看起来杂乱无规则的混沌是有着其内在规律性的

4.5.1 混沌带倍周期逆分岔



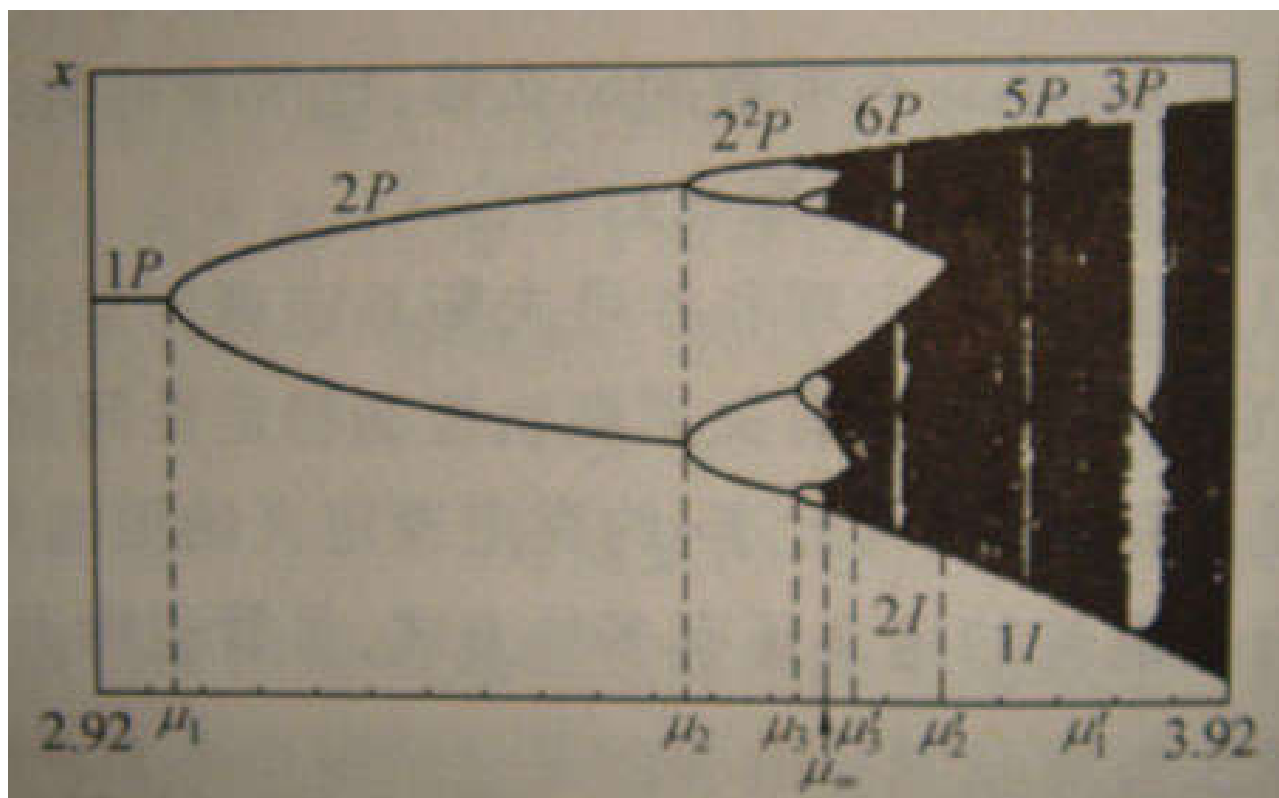
混沌带倍周期逆分岔

(坐标不按比例)

当 μ 从4减小时， x_n 历经的趋于逐步缩小，**AB**和**CD**这两条历经区域的边界方程分别是

$$\begin{cases} x_{AB} = \mu(1 - \mu/4) \\ x_{CD} = \mu/4 \end{cases}$$

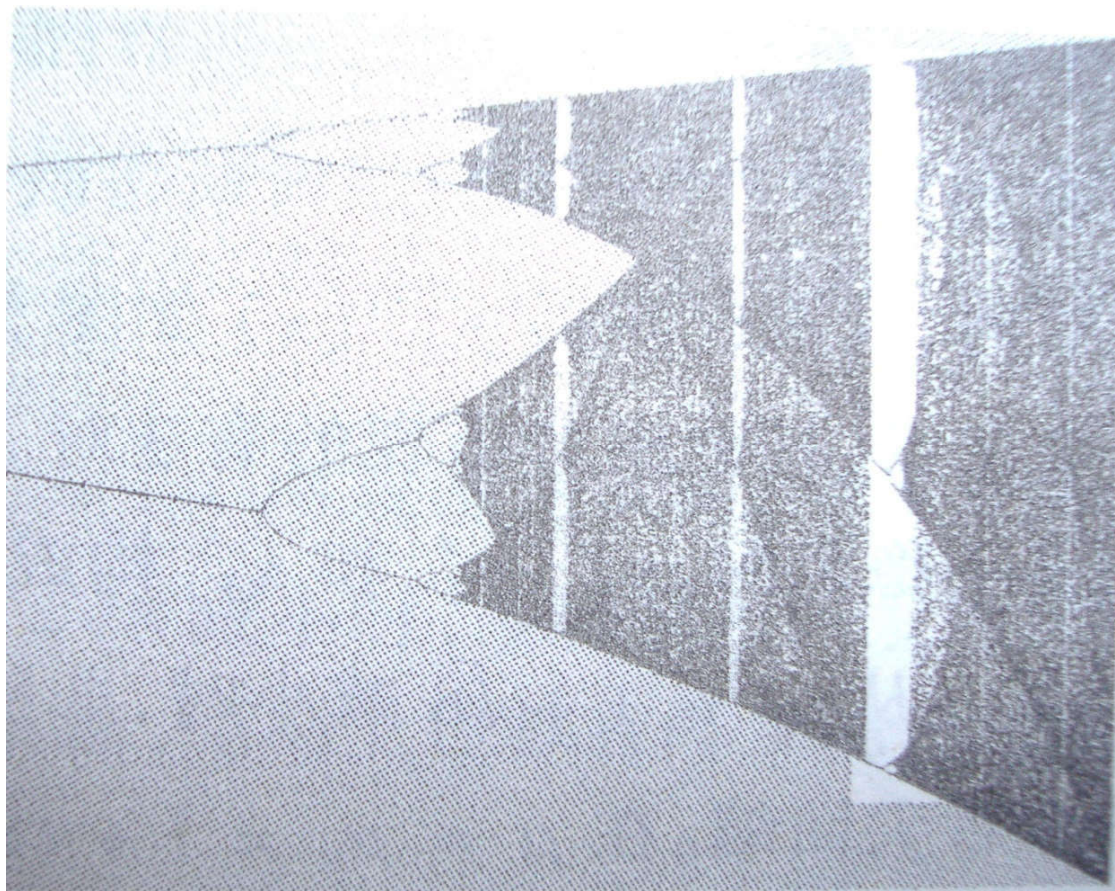
4.5.1 混沌帶倍周期逆分岔



倍周期分岔与混沌带倍周期逆分岔

当 $n \rightarrow \infty$ 时，倍周期分岔序列 nP （ P 表示周期或点）与混沌带倍周期逆分岔序列 nI （ I 表示相反或岛），分别从左边和从右边相向地收敛于它们的共同极限 μ_∞

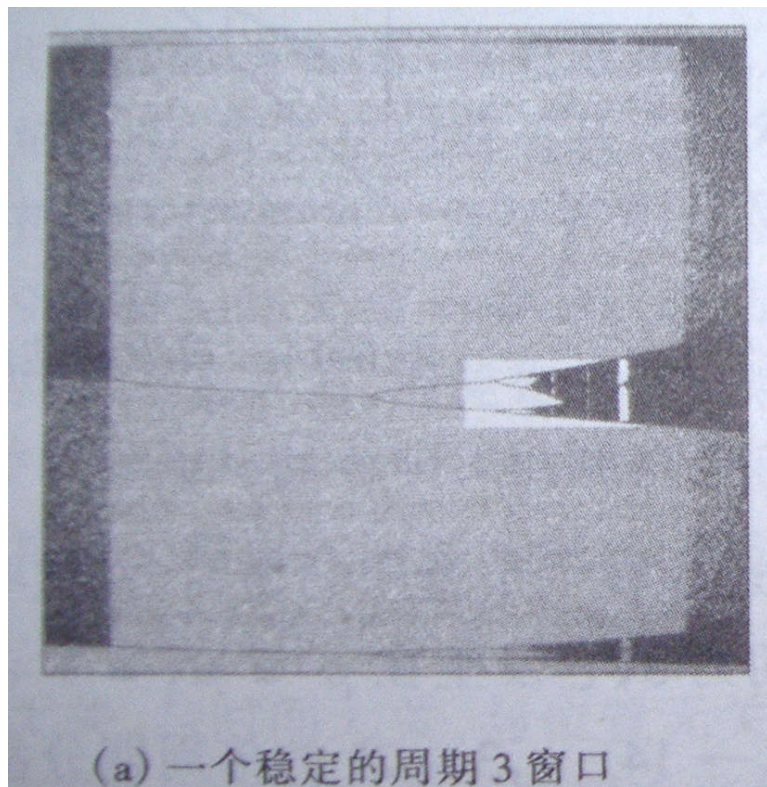
4.5.2 混沌区中的周期窗口



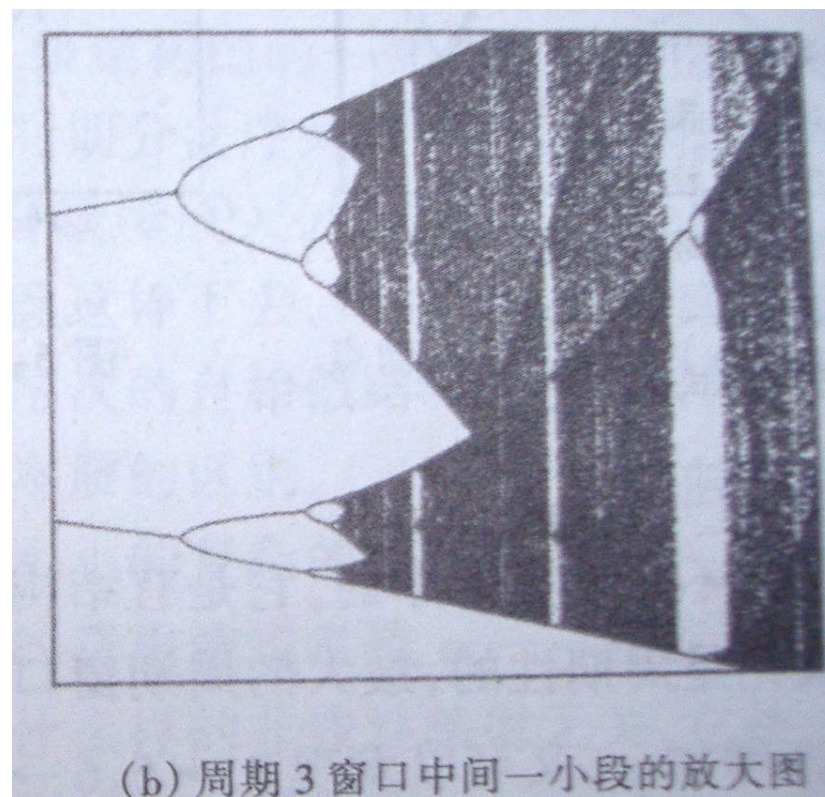
混沌中的周期窗口

倍周期分岔开始首先产生周期2，4，8，16，...然后混沌开始，便是没有规则的周期。在此以后系统被加强驱动后，出现一些奇数周期窗口


4.5.2 混沌区中的周期窗口



混沌结构形式具有无穷的层次，任何一小部分被放大后，看起来都与整个图相像



混沌窗口的放大图

- 
- 混沌带中存在着无穷层次的自相似结构。
 - 混沌具有无穷层次的嵌套结构，在大大小小的自相似图形中，标度变化是普适的，从小到大的自相似放大比率是一个不变的费根鲍姆常数，它的大小与尺寸无关，与时间无关，与位置无关，与用什么样的非线性映射无关。揭示了混沌中存在着无穷层次自相似结构的内在规律性。

4.5.3 混沌的基本特性

- 各态历经性
- 轨道的不稳定性
- 对初始条件的敏感性
- 具有分形的性质

4.6.1 混沌时间序列在预测中的应用

➤ 电力系统短期负荷预测

- 电力系统负荷过载，失去结构稳定存在局部的或者全局的分岔，可以用混沌理论加以分析和研究

➤ 经济系统动力学预测

- 经济混沌的定性预测
- 经济混沌的定量预测

4.6.1 混沌时间序列在预测中的应用

- 研究的问题包括财政、金融在内的经济和管理，特别是有关证券市场股价指数、汇率变化等方面

➤ 基于神经网络的时间序列预测

- 任何一个时间序列都可以看成是一个由非线性机制确定的输入输出系统

4.6.2 混沌在信息处理、智能自动化领域中的应用

- 智能信息处理
- 保密通讯
- 图像数据压缩
- 高速检索

4.6.2 混沌在信息处理、智能自动化领域中的应用

- 混沌优化
- 混沌学习
- 模式识别与故障诊断
- 激光混沌

4.6.3 混沌在振动、旋转、冲击等机械工程中的应用

- 卫星的混沌振摆
- 单摆的混沌振动
- 高速转子混沌振动
- 切削机床混沌振动

4.6.3 混沌在振动、旋转、冲击等机械工程中的应用

- 打印机的混沌振动
- 混沌振动设备
- 混沌在其他领域的应用

4.7.1 从牛顿力学到混沌学

➤ 牛顿力学→相对论力学→量子力学→混沌学

- 牛顿力学：关于“存在”的机械自然观
- 相对论力学：对牛顿力学的重大突破，运动的相对性原理和光速不变原理

4.7.1 从牛顿力学到混沌学

➤ 牛顿力学→相对论力学→量子力学→混沌学

- 量子力学：微观粒子运动并不遵从牛顿力学的规律，呈现出特有的波粒二重性，服从统计性规律
- 混沌学：有序和无序的对立统一，复杂性和规律性的辩证统一

4.7.1 从牛顿力学到混沌学

➤ 牛顿力学的突破与普适常数

- 牛顿力学的两个边界条件：速度不能太大；质量不能太小
- 混沌力学打破了初始条件和边界条件已知后，就可以预知一切的观念
- 混沌学的研究表明，我们周围物质世界的运动是一个有序与无序伴生，确定性与随机性统一，简单与复杂的统一

道可道，非常道。
名可名，非常名。
玄之又玄，众妙之门。
《老子》八十一章

4.7.2 混沌问题的哲学思考

- 有序与无序的对立统一
- 确定性与随机性的对立统一
- 普适性与复杂性的统一
- 驱动力与耗散力的对立统一

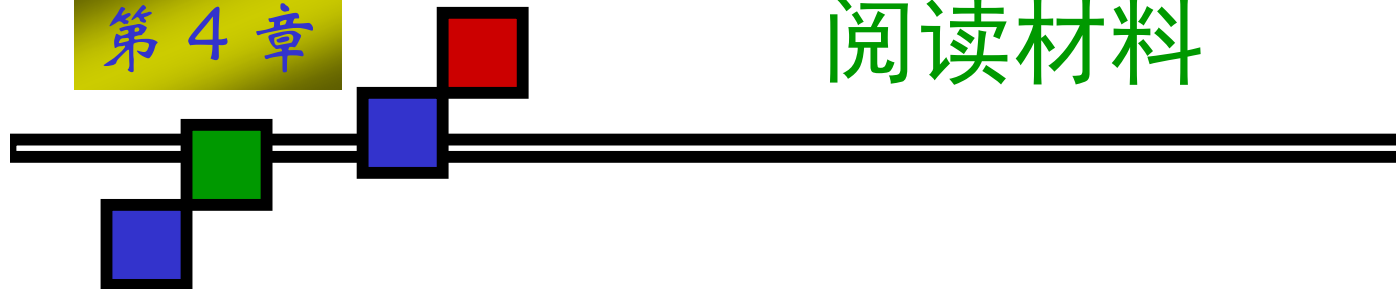
天下万物生於有，
有生於无
《老子》八十一章

4.7.3 混沌研究的启示


- 普适性的启示
- 对初始敏感依赖性的人生启示
- 走向混沌的途径

4.7.3 混沌研究的启示

- 从有序到复杂到混沌
- 从混沌走向混沌的边缘



- 非线性提供了一种新的思维方式，科学技术与辩证法，2003年，第20卷，第2期
- Logistic映射

- 
- 组织系统的混沌性质， 郑州航空工业管理学院学报， 2009年， 第27卷， 第5期
 - 趋势与对策： 公共危机及其管理的混沌哲学解析， 求索， 2013年， 第8期