

单摆法测重力加速度

房杰 PB23061234

中国科学技术大学 信息科学技术学院，合肥 230026

摘要

通过测量单摆摆动周期和摆长，在指定测量精度下对测量数据进行分析，综合利用不确定度减小实验数据测量的误差，利用公式粗略计算出合肥本地重力加速度。

关键词

单摆，重力加速度，不确定度

1. 实验原理

1.1. 重力加速度与摆长和周期的关系

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

其中 T 为单摆周期， l 为摆长。

1.2. 不确定度计算公式

重力加速度的不确定度合成公式：

$$u_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}u_T\right)^2}$$

$$\frac{u_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2u_T}{T}\right)^2}$$

2. 实验内容

2.1. 实验器材

钢卷尺、电子秒表、单摆（带标尺、平面镜；摆线长度可调，其可调的上限约为 100 cm）、智能手机（自备）。

2.2. 实验方案设计

2.2.1. 重力加速度的不确定度评定

当要求重力加速度测量的不确定度要优于 1% 时，由 $\Delta g/g < 1\%$ ， g 取 9.8 m/s^2 得

$$\frac{u_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2u_t}{nT}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.2/3}{70}\right)^2 + \left(2 \times \frac{0.2/3}{n \times 1.68}\right)^2} < \frac{1\%}{3}$$

计算出 $n > 26$ ，所以在实验中应该测量 30 个周期的累积时间 $30T$ 。

2.2.2. 测量周期和摆长测量重力加速度

定摆长并测量，摆开小球约 5 度，测量单摆 25 个来回的时间，计算出单次摆动周期；重复进行六次，记录数据并分析。

2.2.3. 改变摆长测重力加速度

改变每次实验单摆的摆长，摆开小球约 5 度，测量单摆 25 个来回的时间，计算出单次摆动周期；改变摆长六次，记录数据并分析。

3. 实验结果与讨论

3.1. 原始数据处理

3.1.1. 用周期和摆长测量重力加速度

表 1 周期和摆长测量数据

次序	顶端到球顶的长 (cm)	顶端到球底的长 (cm)	摆长 l_0 (cm)	25t (s)	t_0 (s)
1	58.08	60.31	59.20	38.75	1.55
2	58.11	60.29	59.20	38.84	1.5536
3	58.15	60.30	59.23	38.68	1.5472
4	58.12	60.26	59.19	38.71	1.5484
5	58.16	60.32	59.24	38.79	1.5516
6	58.19	60.30	59.25	38.79	1.5516
平均值	58.135	60.30	59.22	38.76	1.5504

由以上摆长和周期均值求得 $g=9.731 \text{ m/s}^2$ 。

(1)摆长的不确定度评定

对于 l_0 ，用 A 类方法来评定其不确定度，其标准不确定度 u_{l_0} 为：

$$u_{l_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}{n(n-1)}} = 3.712 \times 10^{-4} \text{m}$$

(2)周期的不确定度分析

对于 t_0 ，用 A 类方法来评定其不确定度，其标准不确定度 u_{t_0} 为：

$$u_{t_0} = \sqrt{\frac{\sum_i^n (t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}} = 1.19 \times 10^{-3} \text{s}$$

(3)重力加速度 g 的标准不确定度

重力加速度 g 的标准不确定度为：

$$u_g = g \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2u_T}{T}\right)^2} = 0.016 \text{m/s}^2.$$

即重力加速度的测量结果可表示为：

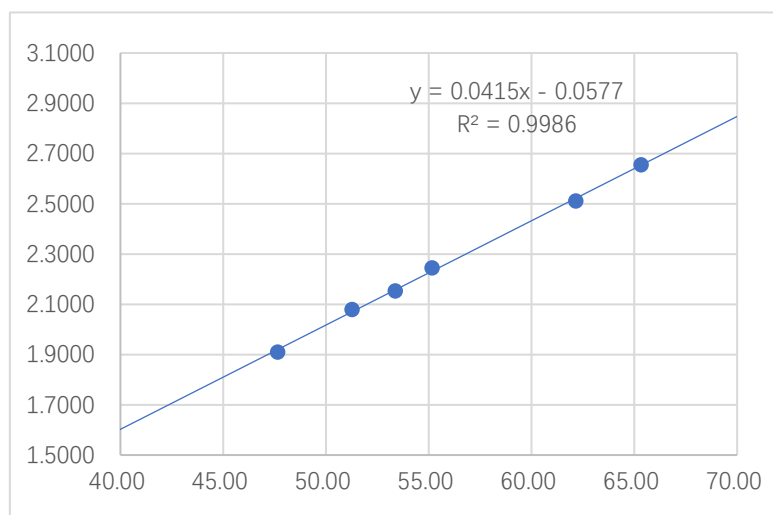
$$g=9.731(16) \text{m/s}^2.$$

3.1.2. 改变摆长测重力加速度

表 2 不同摆长对应单摆周期测量数据

次序	顶端到球顶的长(cm)	顶端到球底的长(cm)	摆长(cm)	25T(s)	T(s)	T*T(s*s)
1	46.64	48.68	47.66	34.54	1.3816	1.9088
2	50.20	52.31	51.26	36.05	1.4420	2.0794
3	52.30	54.41	53.36	36.68	1.4672	2.1527
4	54.10	56.20	55.15	37.46	1.4984	2.2452
5	61.10	63.18	62.14	39.62	1.5848	2.5116
6	64.21	66.42	65.32	40.73	1.6292	2.6543

图 1 T^2-l ($y(s^2)-x(cm)$) 拟合曲线



周期平方 T^2 与摆长 l 的关系如图 1 所示，对实验数据进行了线性拟合，得到斜率 k 的数值为 $0.0415s^2/cm$ ，其标准不确定度 u_k （标准差）为 $0.9986s^2/cm$ 。

单摆周期公式可以改写成以下形式：

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g}$$

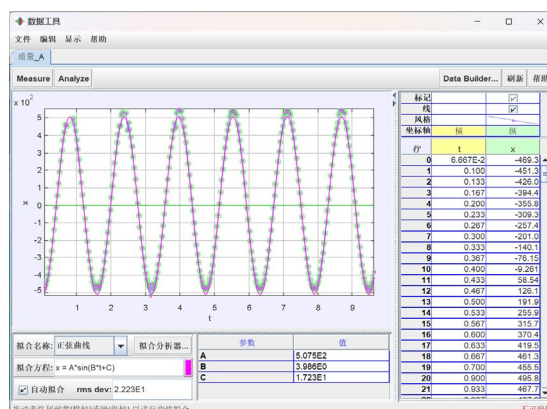
$$\text{由此可得重力加速度 } g = \frac{4\pi^2}{k} \times 10^{-2} = \frac{4 \times 3.1416 \times 3.1416}{0.0415} = 9.513 m/s^2.$$

$$\text{其标准不确定 } u_g = 4\pi^2 \times u_k \times 10^{-2} = 4 \times 3.14 \times 3.14 \times 0.9986 \times 10^{-2} = 0.3938 m/s^2.$$

3.1.3. 使用 Tracker 研究大摆角的单摆

将手机固定在实验室提供的手机支架上，录制了一段帧率为 30 FPS 的大角度单摆（摆角约为 10° ）视频，并使用 tracker 软件进行自动追踪分析。Tracker 从该视频中获取有效数据点 283 个，并进行正弦三角函数拟合。

图 2 Tracker 软件对单摆视频进行自动追踪分析



拟合结果给出单摆的摆动周期 T 为 1.58s。利用卷尺测得的单摆摆长为 0.611m。带

入未修正的单摆测重力加速度的公式可得：

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = 9.66\text{m/s}^2.$$

如果考虑大摆角的修正，则重力加速度为：

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2 = 9.806\text{m/s}^2.$$

修正后的结果与合肥的重力加速度参考值 $g = 9.795\text{m/s}^2$ 更加接近。

4. 结论

本文基于单摆实验装置利用三种不同的方案测量了合肥的重力加速度，测量结果分别为： 9.731m/s^2 、 9.513m/s^2 和 9.806m/s^2 ，与参考值的偏差均小于 5%。在 10° 的大摆角情况下研究了摆角和空气阻力对单摆周期的影响，结果表明考虑摆角修正后测得的重力加速度更接近参考值，修正对测量结果的影响约为 1%；而阻力对单摆周期的修正远小于 1%。因此，小角度摆动条件下在实验测量精度的范围内完全可以忽略相关因素对测量结果的影响。

参考文献：

- [1]. 单摆法测重力加速度. 实验讲义. 2024
- [2]. 单摆实验参考报告. 2024



谢雨欣

房杰

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei, Anhui, 230026 The People's Republic of China

一:

次数	摆长 (cm)	nT (s) (25次)
1	$(58.08 + 60.31) \text{ cm} / 2$	$38'' 75$
2	$(58.11 + 60.29) \text{ cm} / 2$	$38'' 84$
3	$(58.15 + 60.30) \text{ cm} / 2$	$38'' 68$
4	$(58.12 + 60.26) \text{ cm} / 2$	$38'' 71$
5	$(58.16 + 60.32) \text{ cm} / 2$	$38'' 79$
6	58.7 $(58.19 + 60.30) \text{ cm} / 2$	$38'' 79$

张洲 3.22

二:

次数	摆长	nT (s) 25次
1	$(46.64 \text{ cm} + 48.68 \text{ cm}) / 2$	34.54 $34'' 54$
2	$(50.20 + 52.31) \text{ cm} / 2$	$36'' 05$
3	$(52.30 + 54.41) \text{ cm} / 2$	$36'' 68$
4	$(54.10 + 56.20) \text{ cm} / 2$	$37'' 46$
5	$(61.10 + 63.18) \text{ cm} / 2$	$39'' 62$
6	$(64.21 + 66.42) \text{ cm} / 2$	$40'' 73$