第二章 z 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

第二章 z 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

2.5 几何法画频率响应(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

回顾：系统频率响应的几何确定法

$$|H(e^{j\omega})| = A \cdot \frac{\prod_{r=1}^{M}(c_r B)}{\prod_{r=1}^{N}(d_r B)}$$

① 当<u>**B点**</u>转到<u>极点附近</u>时，幅度可能出现<u>峰值</u>。

★极点越靠近单位圆，幅值越大。

★若极点出现在单位圆$e^{j\omega}$上，则$H(e^{j\omega})$幅值为∞，系统不稳定。

② 当<u>**B点**</u>转到<u>零点附近</u>时，幅度可能出现<u>谷值</u>。

★零点越靠近单位圆，幅值越小。

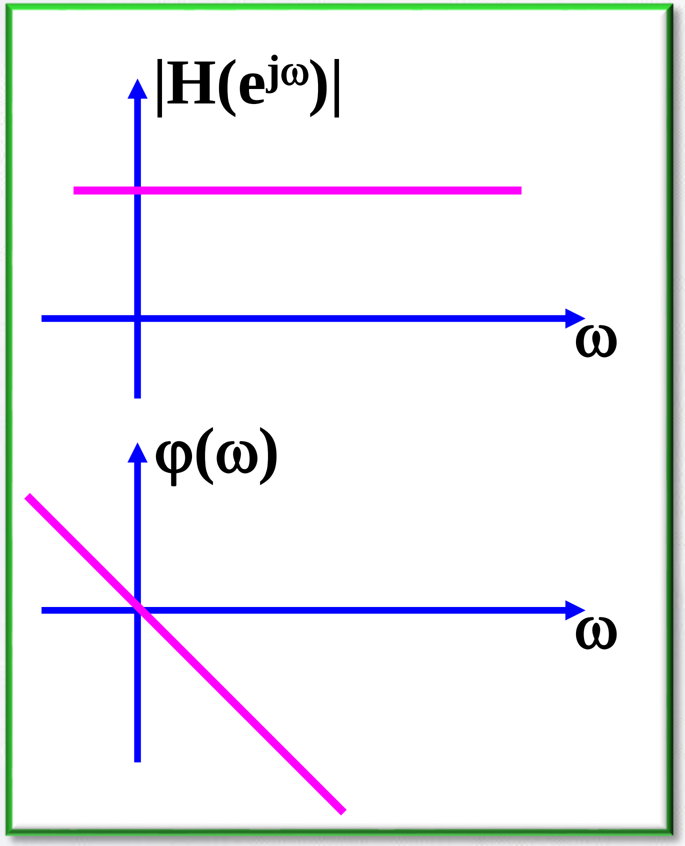
★若零点出现在单位圆$e^{j\omega}$上，则$H(e^{j\omega})$幅值为0。

几何法画系统频率响应举例

例：已知 $H(z) = z^{-1}$，分析其频率响应$H(e^{j\omega})$的特性。

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = e^{-j\omega} = |H(e^{j\omega})|\, e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\begin{cases} |H(e^{j\omega})| = 1 \\ \varphi(\omega) = -\omega \end{cases}$$



说明：① 从系统函数$H(z)= z^{-1}$来看，该系统只有一个在原点的极点$|z|=0$。

② 当ω从0～2π变化时，极点矢量的长度始终为1，所以：$|H(e^{j\omega})|=1$。

③ 处在原点处的极点和零点，由于其矢量长度均为1，所以原点处的零、极点不影响幅频响应$|H(e^{j\omega})|$。

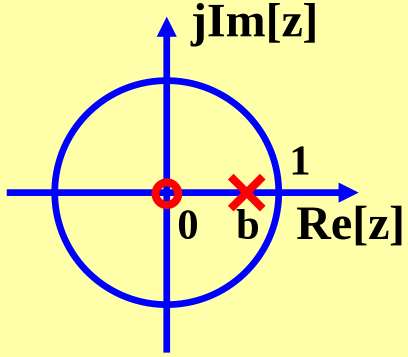
几何法画系统频率响应举例

例：设一阶系统的差分方程为：$y(n)=by(n-1)+x(n)$。试分析其幅频特性(其中，$0<b<1$)。

解：先求系统函数$H(z)$，对差分方程两边作z变换，得：

$$Y(z)=bz^{-1}Y(z)+X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-bz^{-1}}=\frac{z}{z-b}$$



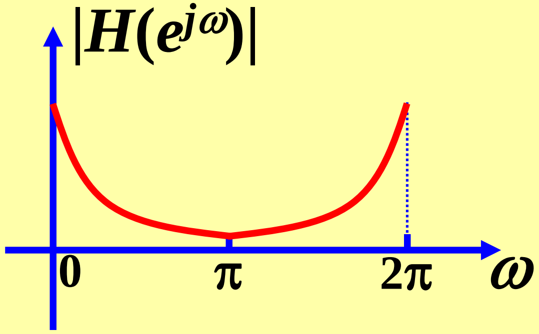
从$H(z)$看出，系统有一个极点$z=b$，一个零点$z=0$。

当单位圆上的点B由$\omega=0$到$\omega=2\pi$旋转时，有：

① 在$\omega=0$时，极点矢量最短(分母最小)，形成波峰。

② 在$\omega=\pi$时，极点矢量最长(分母最大)，形成波谷。

③ 由于零点在原点处，所以不影响幅频响应。



几何法画系统频率响应举例

例：已知$H(z) = 1\text{-}z^{-N}$，试定性画出系统的幅频响应。

$$\boxed{H(z)=1-z^{-N}=\frac{z^N-1}{z^N}}$$

① $H(z)$的极点为$z=0$(N阶)，因为$z=0$，所以不影响$|H(e^{j\omega})|$。

② $H(z)$的零点也有N个：

$$z^N-1=0$$

应将z看作是复变量

$$\Rightarrow z^N=1$$

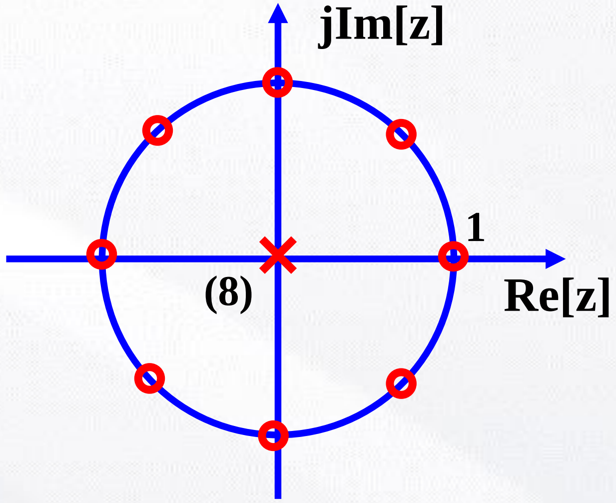
$$\Rightarrow z^N=e^{j2\pi k} \quad k=0,1,2\ldots N-1$$

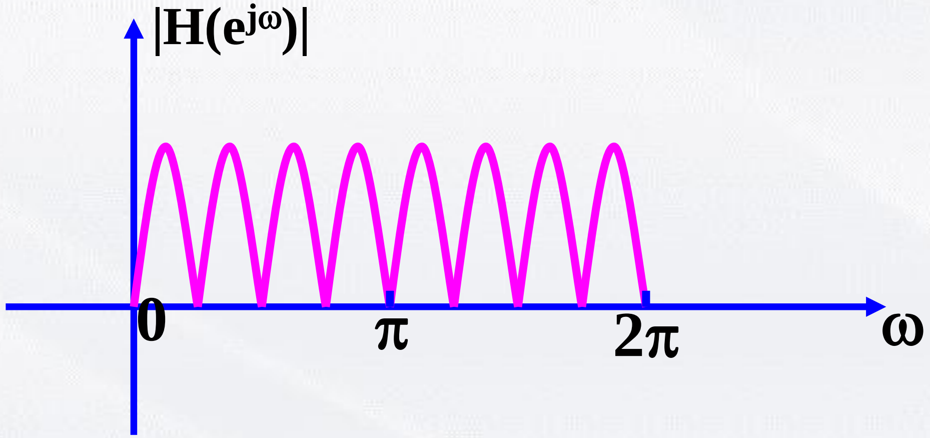
$$\Rightarrow z=e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k=0,1,2\ldots N-1$$

几何法画系统频率响应举例

$$z = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0,1,2\ldots N-1$$

上式说明这N个零点等间隔地分布在单位圆上，设N=8，有下图：





说明：① 由于极点在z=0处，不影响幅频特性，故只需考虑零点即可。

② 每遇到一个零点，$|H(e^{j\omega})|$幅度降为0，在两个零点之间，幅度最大，形成峰值。

③ 由于幅度响应像一把梳子，所以该系统又称<u>梳状滤波器</u>。 *Comb filter*

几何法画系统频率响应举例

例：若LSI系统差分方程为 $y(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(n-4)]$，求其幅频响应：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{2}\left(1+z^{-4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^4}\right)$$

① $H(z)$的极点为$z=0$(4阶)。

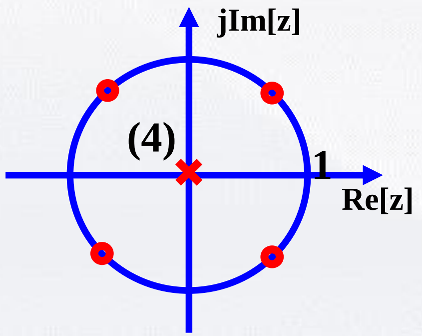
② $H(z)$的零点也有4个：

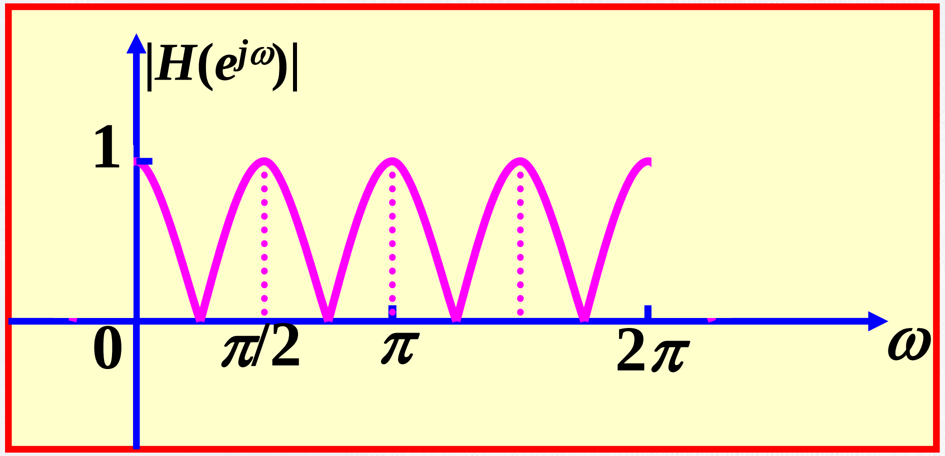
$$z^4+1=0$$

$$z^4=-1$$

$$z^4=e^{j(2\pi k+\pi)} \qquad k=0,1,2,3$$

$$z=e^{j(\frac{2\pi}{4}k+\frac{\pi}{4})} \qquad k=0,1,2,3$$





第二章 z 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

2.5 几何法画频率响应(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁