第一章 离散时间信号与系统

Discrete-time signals and systems

1.4 连续时间信号的抽样

时域采样定理(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

时域采样定理

- 问题的引入
- 理想时域采样过程
- 理想采样后信号在频域发生的变化
- 时域采样定理

一、时域采样问题的引入

$$
\begin{tikzcd}
x_a(t) \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{FT}"] \arrow[d, "t = nT"'] & X_a(j\Omega) \arrow[d, leftrightarrow, "?"] \\
x(n) = \hat{x}_a(t) \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{FT}"] & \hat{X}_a(j\Omega)
\end{tikzcd}
$$

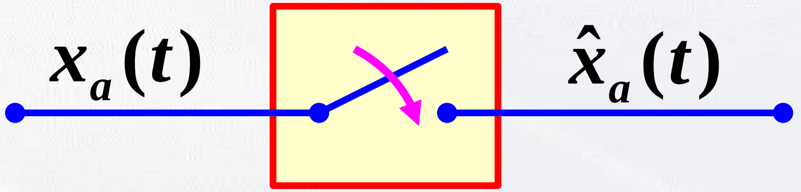
问题：信号被采样后在频域会发生什么变化？

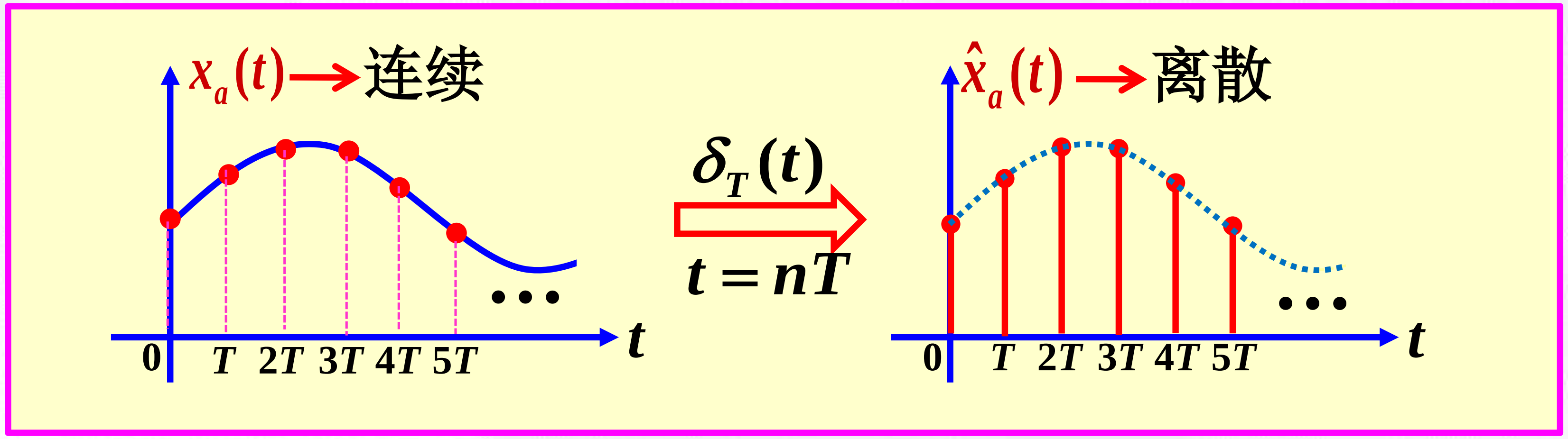
Frequency domain

二、理想时域采样过程

采样：利用周期性理想冲激函数序列 $\delta_T(t)$，从连续信号 $x_a(t)$ 中抽取一系列的离散值，得到 $\hat{x}_a(t)$。

采样器：相当于一个电子开关，开关每隔 T 秒（采样间隔）闭合一次，使时间离散。

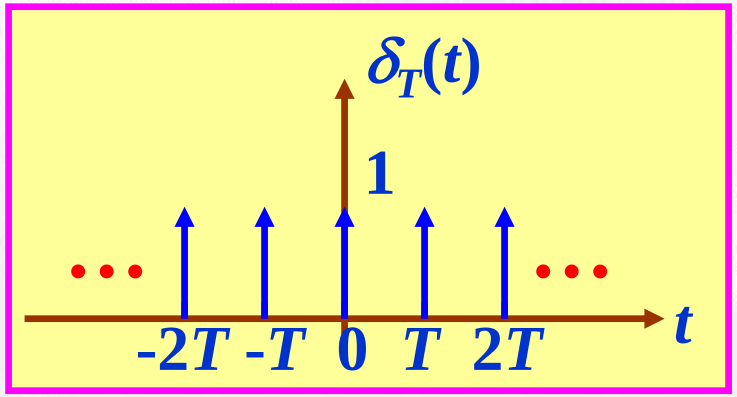




二、理想时域采样过程

就理想采样而言，周期性冲激函数序列 $\delta_T(t)$ 的各冲激函数准确地出现在采样瞬间上，采样后的信号完全与输入信号$x_a(t)$在采样瞬间的幅度相同。

冲激函数序列：$\delta_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$



理想采样输出：$\boxed{\hat{x}_a(t)}=x_a(t)\cdot\delta_T(t)=x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-mT)=\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_a(mT)\delta(t-mT)}$$

三、理想采样后信号在频域发生的变化

$$x_a(t) \longrightarrow \boxed{\delta_T(t)} \longrightarrow \hat{x}_a(t) = x_a(t)\cdot\delta_T(t)$$

FT FT FT

$$\frac{1}{2\pi}\left[X_a(j\Omega) * \Delta_T(j\Omega)\right] = \hat{X}_a(j\Omega)$$

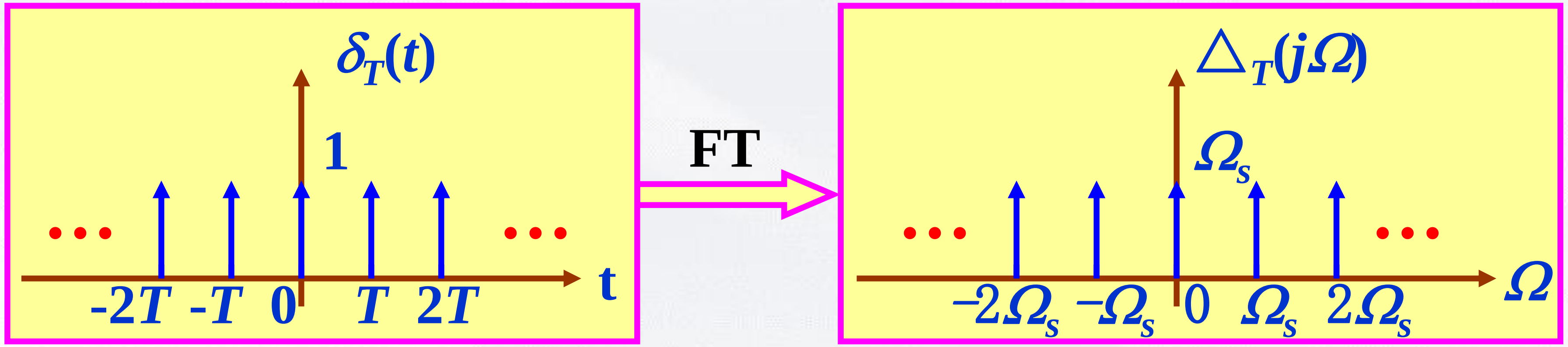
时域相乘 → 频域卷积

三、理想采样后信号在频域发生的变化

$$\boxed{\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\underline{X_a(j\Omega)}*\underline{\Delta_T(j\Omega)}\right]}$$

$$\underline{X_a(j\Omega)}=\mathrm{FT}[x_a(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\underline{x_a(t)}e^{-j\Omega t}dt$$

$$\underline{\Delta_T(j\Omega)}=\underline{\mathrm{FT}[\delta_T(t)]}=\boxed{\frac{2\pi}{T}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)=\boxed{\Omega_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)$$



三、理想采样后信号在频域发生的变化

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k e^{jk\Omega_s t}$$

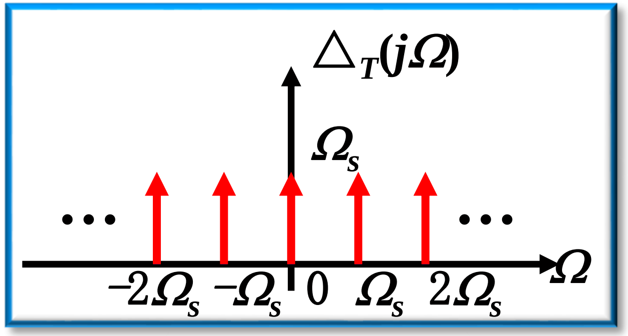
$\Omega_s=2\pi/T$，Ω_s称为采样角频率
$f_s=1/T$，f_s为采样频率

其中：
$$A_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)e^{-jk\Omega_s t}dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)e^{-jk\Omega_s t}dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jk\Omega_s t}dt=\frac{1}{T}$$

$$\therefore\ \delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{jk\Omega_s t}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\Omega_s t}$$

$$\because\ \mathrm{FT}[e^{jk\Omega_s t}]=2\pi\delta(\Omega-k\Omega_s)$$

$$\therefore\ \Delta_T(j\Omega)=\mathrm{FT}[\delta_T(t)]=\mathrm{FT}[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\Omega_s t}]$$
$$=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)$$
$$=\Omega_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)$$



$$\Delta_T(j\Omega)=\mathrm{FT}[\delta_T(t)]=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)$$

三、理想采样后信号在频域发生的变化

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}\left[X_a(j\Omega)*\Delta_T(j\Omega)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[X_a(j\Omega)*\boxed{\left(\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)\right)}\right]$$

$$=\boxed{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}X_a(j\theta)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s-\theta)\,d\theta}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X_a(j\theta)\boxed{\delta(\Omega-k\Omega_s-\theta)}d\theta=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$$

$$\boxed{\theta=\Omega-k\Omega_s}$$

三、理想采样后信号在频域发生的变化

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$$

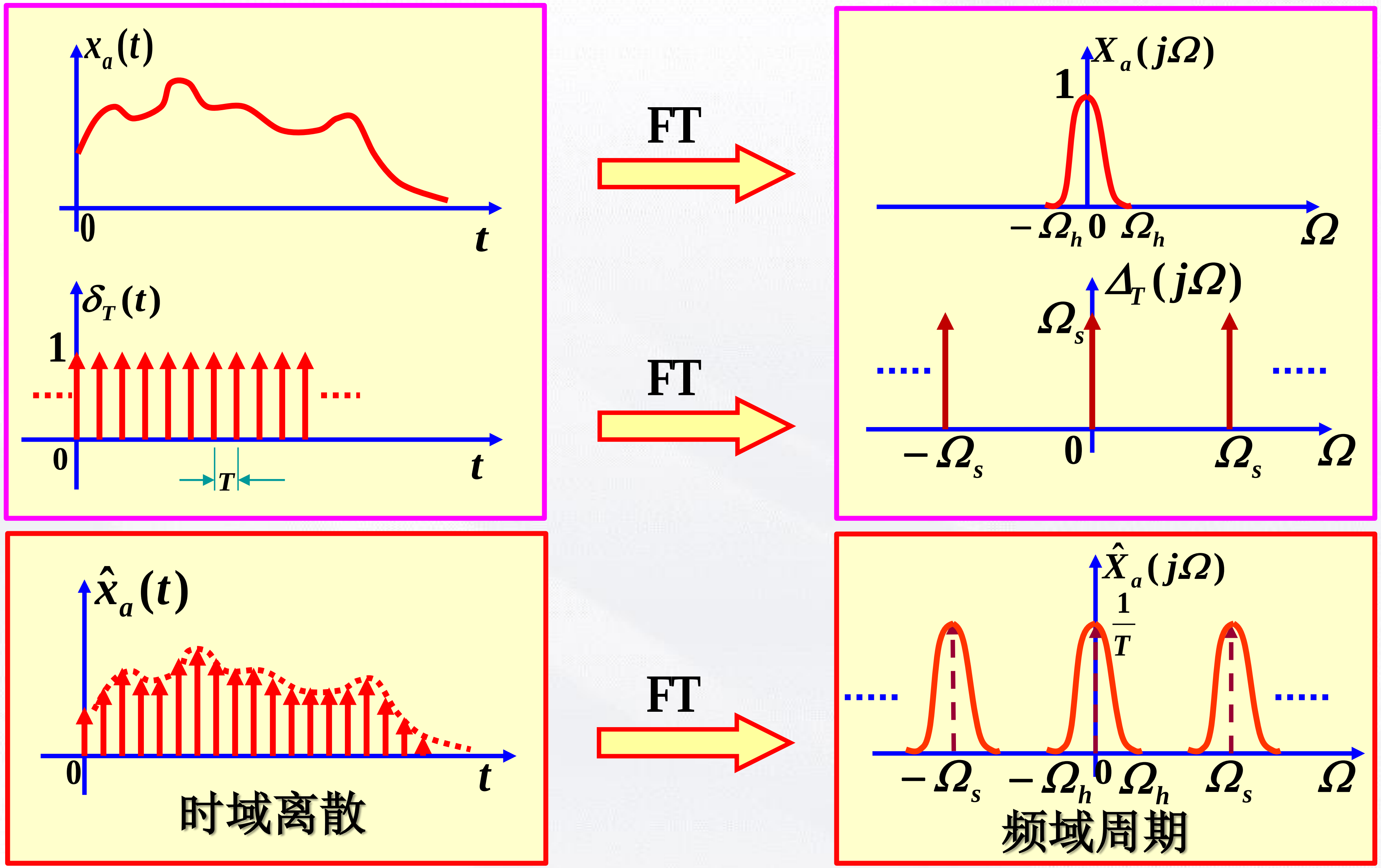
时域离散

$$\begin{tikzcd}
x_a(t) \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{FT}"] \arrow[d, "t=nT"'] & X_a(j\Omega) \arrow[d, leftrightarrow] \\
x(n)=\hat{x}_a(t) \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{FT}"] & \hat{X}_a(j\Omega)
\end{tikzcd}$$

频域周期

三、理想采样后信号在频域发生的变化

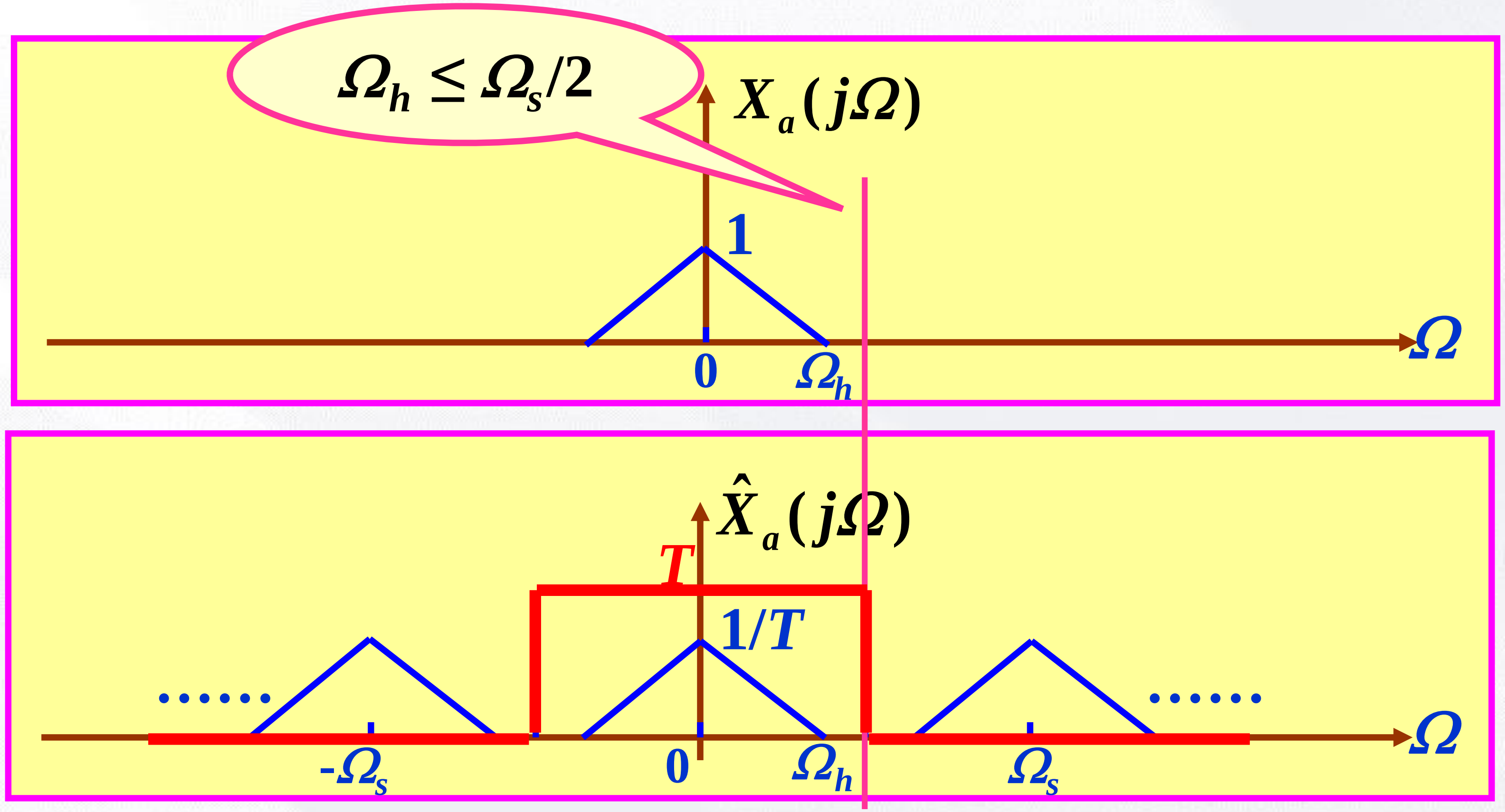
时域相乘



频域卷积

三、理想采样后信号在频域发生的变化

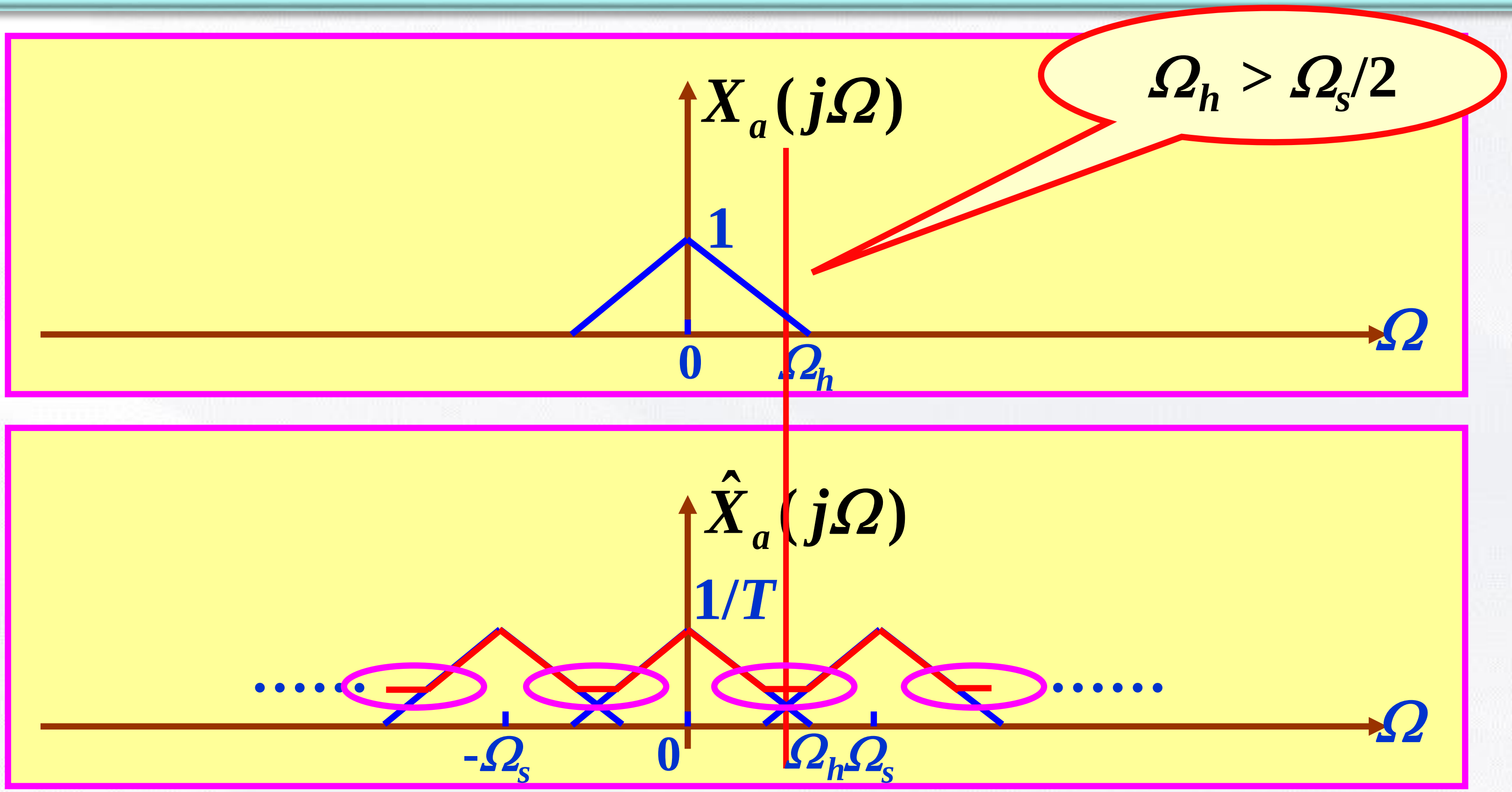
情况①：不混叠 —— 若带限信号$x_a(t)$最高频谱分量Ω_h不超过$\Omega_s/2$。



理论上说，只要用一个截止频率为$\Omega_s/2$的理想低通滤波器对$\hat{X}_a(j\Omega)$进行处理，就能得到$X_a(j\Omega)$，从而得到$x_a(t)$。

三、理想采样后信号在频域发生的变化

情况②：混叠 —— 若带限信号$x_a(t)$最高频谱分量Ω_h超过$\Omega_s/2$。



由于各周期延拓分量产生的频谱互相交叠，使抽样信号的频域产生混叠现象。 **Aliasing (混叠)**

四、时域采样定理 Nyquist-Shannon Sampling Theorem

令$x_a(t)$是一个带限信号，即：当$|\Omega|\geq\Omega_h$时，$X_a(j\Omega)=0$。

那么，$x_a(t)$能唯一地由它的样本$x(n)=x_a(nT)$所决定，唯有：

$$\boxed{\Omega_s=\frac{2\pi}{T}\geq 2\Omega_h} \qquad \boxed{f_s\geq 2f_h}$$

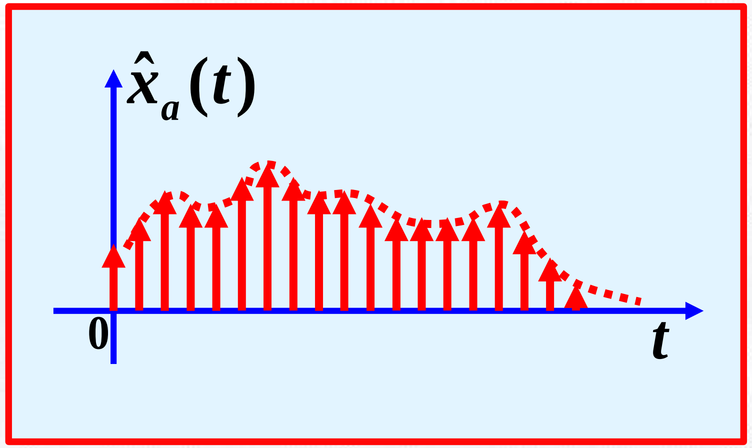
- 折叠频率

我们将$\Omega_s/2$称为折叠频率。它如同一面镜子，当信号最高频率超过它时，就会被折叠回来，造成频谱混叠。

四、时域采样定理

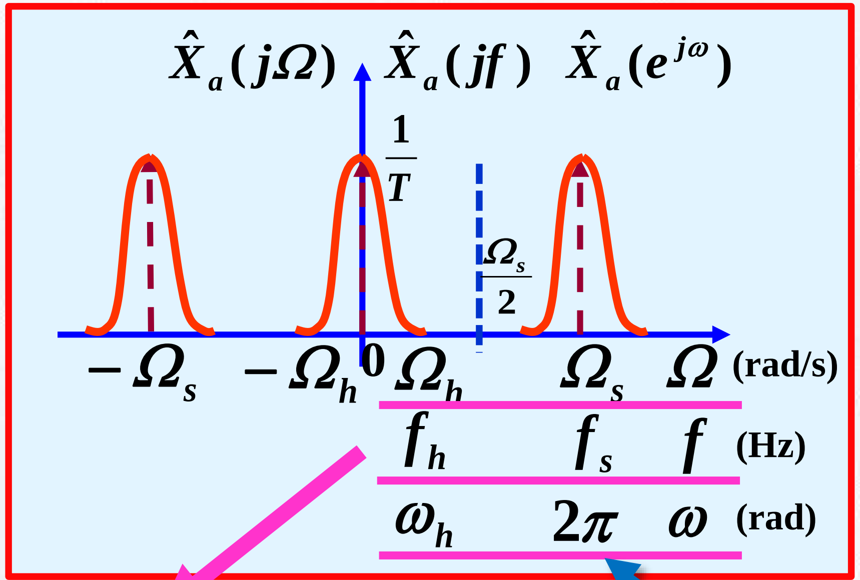
$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$$

$$\Omega_s > 2\Omega_h$$



时域离散

FT



频域周期

$$\omega=\Omega T$$

$$\omega_s=\Omega_s T=\frac{2\pi}{T}T=2\pi$$

$$\frac{\Omega}{\Omega_s}=\frac{f}{f_s}=\frac{\omega}{2\pi}$$

时域采样定理

- 问题的引入
- 理想时域采样过程
- 理想采样后信号在频域发生的变化
- 时域采样定理