第一章 离散时间信号与系统

Discrete-time signals and systems

1.1 离散时间信号 —— 序列

离散时间信号的基本运算

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

离散时间信号的基本运算

- 序列的和(积)
- 序列的移位
- 序列的反褶
- 累加和运算
- 差分运算
- 序列的时间尺度（比例）变换
- 序列的能量
- 序列的平均功率

一、序列的和：Addition

❖ 两序列的和是指**同序号n**的序列值**逐项对应相加**而构成的新序列。

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

…… ……

$y(0) = x_1(0) + x_2(0) = 3$

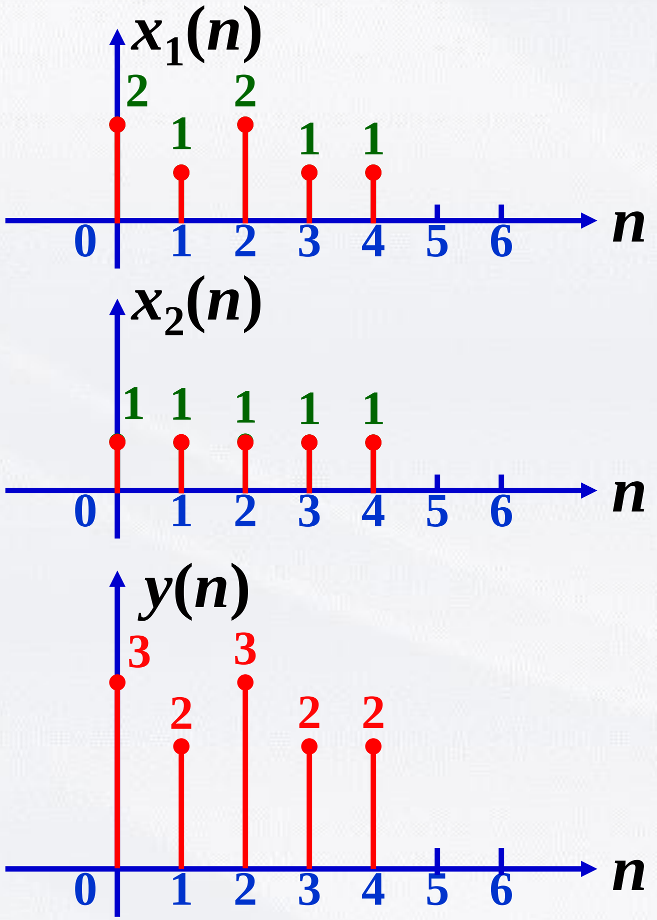
$y(1) = x_1(1) + x_2(1) = 2$

$y(2) = x_1(2) + x_2(2) = 3$

$y(3) = x_1(3) + x_2(3) = 2$

$y(4) = x_1(4) + x_2(4) = 2$

…… ……



二、序列的积：Product

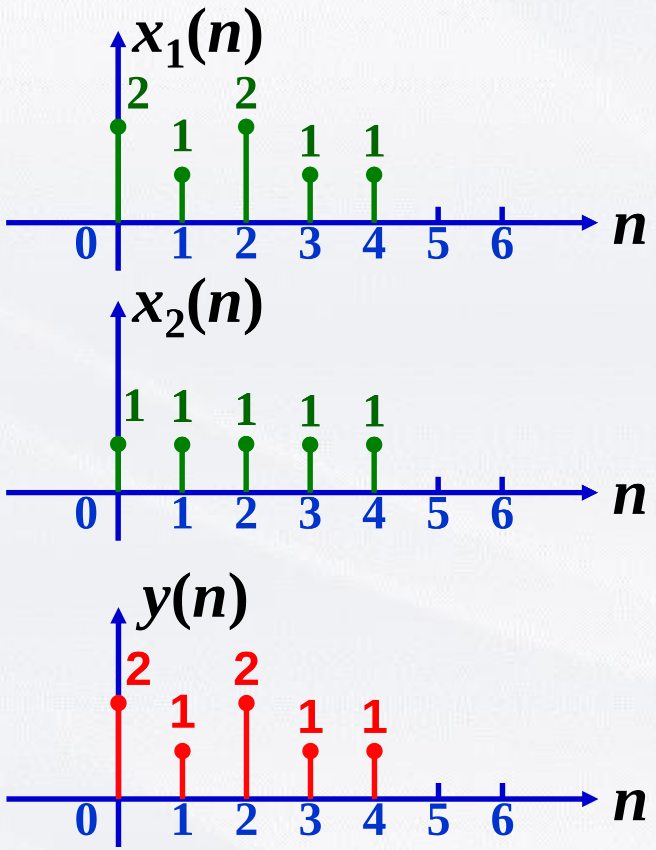
❖ 两序列的积是指 $\boxed{\text{同序号}n}$ 的序列值 $\boxed{\text{逐项对应相乘}}$ 而构成的新序列。

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

…… ……

$$y(0) = x_1(0) \cdot x_2(0) = 2$$
$$y(1) = x_1(1) \cdot x_2(1) = 1$$
$$y(2) = x_1(2) \cdot x_2(2) = 2$$
$$y(3) = x_1(3) \cdot x_2(3) = 1$$
$$y(4) = x_1(4) \cdot x_2(4) = 1$$

…… ……



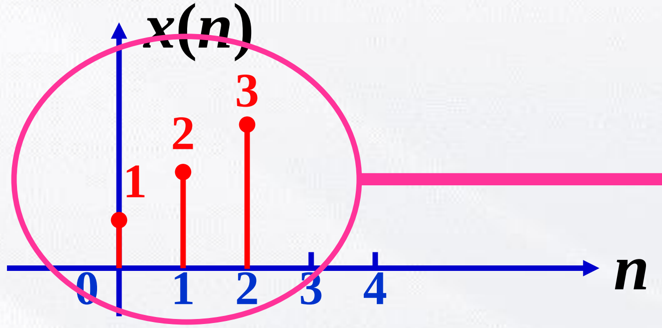
三、序列的移位：Shift

$$y(n) = x(n \pm m)$$

❖ 设有一序列 $x(n)$，当 $m > 0$ 时：

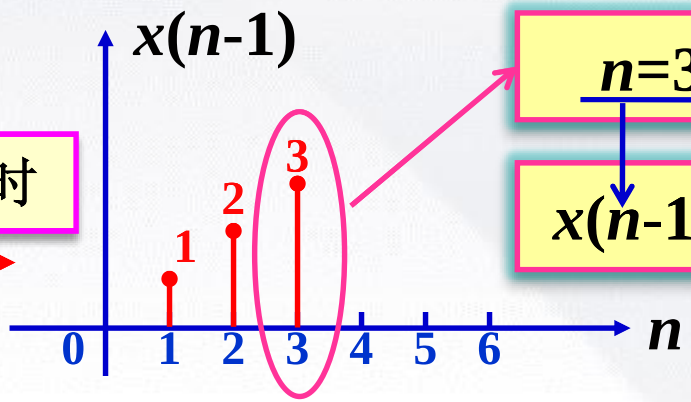
$x(n-m)$ 表示序列 $x(n)$ 逐项依次右移 m 位后得到的序列。

$x(n+m)$表示序列 $x(n)$ 逐项依次左移 m 位后得到的序列。



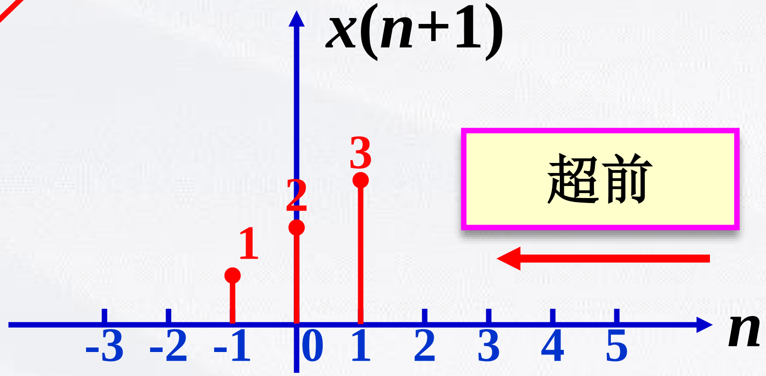
$x(0) = 1$
$x(1) = 2$
$x(2) = 3$

滞后、延时



$n=3$，值为3

$x(n-1) = x(2) = 3$



超前

实例：回声音效的产生

延时单元可以**将以前的某采样时刻的数据暂存**起来，参与这个时刻的运算。

回声可以用延迟单元来生成：直接声音和它延迟了R个周期的单个回声求和即可生成（α 为回声的衰减系数）：

$$\boxed{y(n)=x(n)+\alpha x(n-R) \qquad 0<\alpha<1}$$

为了生成间隔为R个周期的多重回声，可将上式改为：

$$\boxed{y(n)=x(n)+\alpha x(n-R)+\alpha^2 x(n-2R)+\cdots+\alpha^{N-1}x(n-(N-1)R) \quad 0<\alpha<1}$$

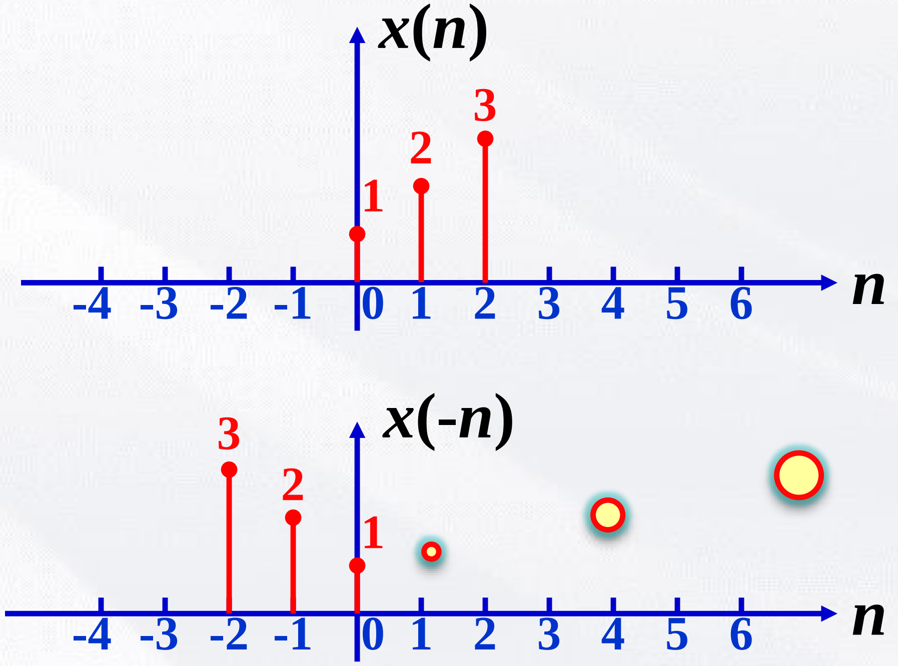
原声：

回声1：
α=0.3, R=6000

回声2：
α=0.3, R=10000

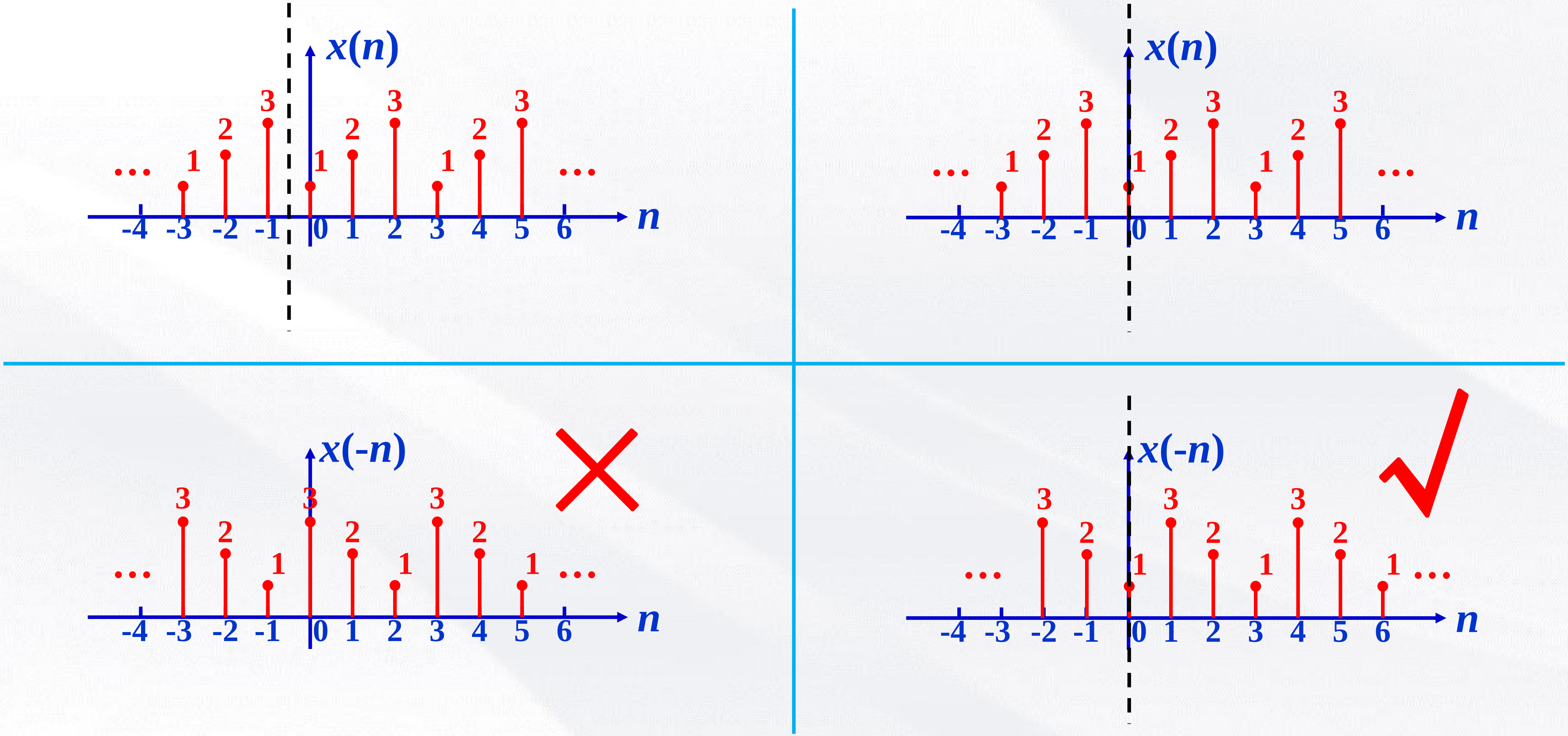
$$y(n) = x(-n)$$

❖ 设有序列 $x(n)$，
则 $x(-n)$ 是以 $n=0$ 为纵轴将 $x(n)$ 反褶后的序列。

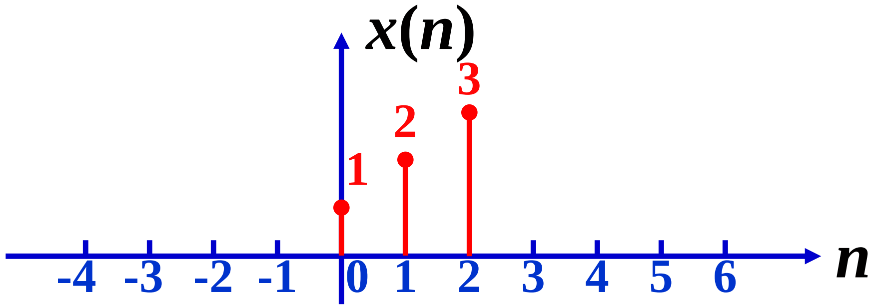


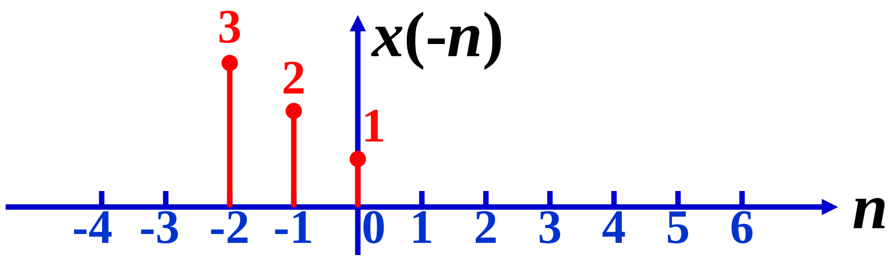
$x(0)$的值不变

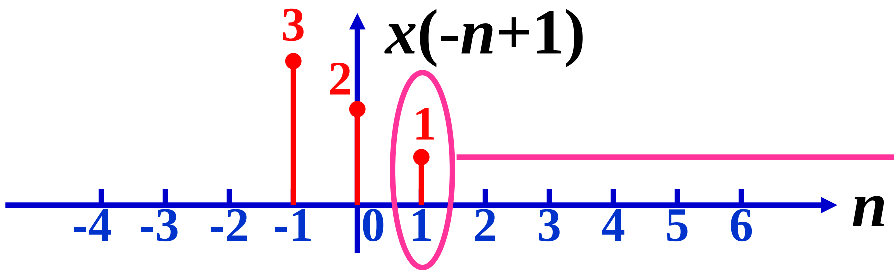
序列的反褶

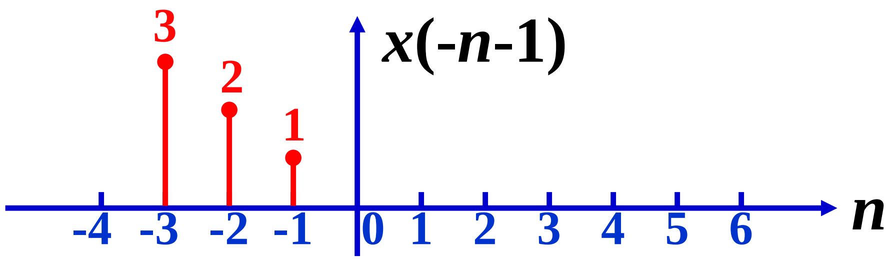


思考：$x(-n+1)$和$x(-n-1)$与$x(-n)$的移位关系?









$x(-n+1)$ 是$x(n+1)$ **反褶**后的序列

$x(-n+1)$ 是$x(-n)$ **右移**一位后的序列

$x(-n-1)$ 是 $x(-n)$ **左移**一位后的序列

$x(-n-1)$ 是$x(n-1)$ **反褶**后的序列

$n = 1$，值为 1

$x(-n+1) = x(0) = 1$

$x(0) = 1$
$x(1) = 2$
$x(2) = 3$

五、累加和 Accumulator System

❖ 设序列 $x(n)$，则 $x(n)$的累加和序列 $y(n)$定义为：

$$\boxed{y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)}$$

$$\boxed{y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)}$$

$$\boxed{y(n-1)=\sum_{k=-\infty}^{n-1}x(k)}$$

$$-\ \longrightarrow\ \boxed{y(n)-y(n-1)=x(n)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y(n)=y(n-1)+x(n)}$$

六、差分运算

- 前向差分：$\nabla x(n) = x(n+1) - x(n)$ **Forward difference**
- 后向差分：$\Delta x(n) = x(n) - x(n-1)$ **Backward difference**

差分运算反映了序列$x(n)$的幅值变化规律。

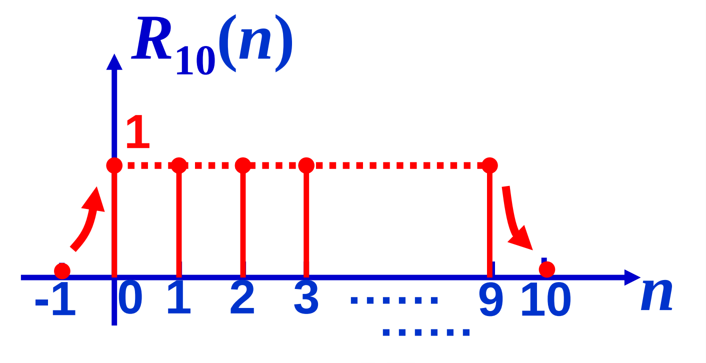
例：$x(n) = R_{10}(n)$，试求后向差分信号$\triangle x(n)$。

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{其它}n \end{cases}$$

$x(n) = R_{10}(n) = \{\underline{1}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

$x(n\text{-}1) = R_{10}(n\text{-}1) = \{\underline{0}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

$\triangle x(n) = R_{10}(n) - R_{10}(n\text{-}1) = \{\underline{1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1\}$



七、序列的时间尺度（比例）变换

❖ 设某序列为$x(n)$，则其时间尺度变换序列为$x(mn)$或 $x(n/m)$，m为正整数。

❖ $x(mn)$ 为**抽取序列**（m>1）

Decimation **Down sampling** 下采样

$$x(n)=\{\underline{0},1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow x(2n)=\{\underline{0},2,4,6\}$$

T $2T$

❖ $x(n/m)$为**插值序列**（m>1）

Interpolation **Up sampling** 上采样

八、序列的能量

华东理工大学

复序列$x(n)$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$$

如果$E_x=A<\infty$，则$x(n)$称为能量有限信号，简称**能量信号**。一般的有限长序列及绝对可和的无限长序列都是能量信号。

九、序列的平均功率

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

如果$P_x=C<\infty$，则$x(n)$称为功率有限信号，简称**功率信号**。一般来说，周期信号、随机信号的存在时间是无限的，因此它们不是能量信号而是功率信号。

对周期信号，只需取一个周期的平均功率即可：

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

离散时间信号的基本运算

- 序列的**和(积)**
- 序列的**移位**
- 序列的**反褶**
- 累加和**运算**
- **差分**运算
- 序列的**时间尺度（比例）变换**
- 序列的**能量**
- 序列的**平均功率**