第二章 z 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

2.1 z 变换的基本概念

2.2 离散时间信号傅里叶变换

2.3 系统函数及其与系统性质的关系

2.4 系统频率响应的意义

2.5 几何法画频率响应

2.6 特殊滤波器的设计

第二章 z 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

2.6 特殊滤波器的设计

全通滤波器的设计

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

全通滤波器的基本概念 All-Pass filter

定义：滤波器的幅度特性在整个频带[0, 2π]上均等于常数，或者等于1，即：

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = 1, \quad 0 \le \omega \le 2\pi$$

则该滤波器称为全通滤波器。

特点：信号通过全通滤波器后，其输出的幅度特性保持不变，仅相位发生变化。

全通滤波器的系统函数的一般形式为：

$$H_{ap}(z) = A\frac{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k}}, \quad d_0 = 1, \quad d_k\text{为实数}$$

全通滤波器的基本概念

$$H_{ap}(z)=A\frac{\sum_{k=0}^{N}d_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N}d_k z^{-k}}=A\frac{z^{-N}D(z^{-1})}{D(z)}=A\prod_{i=1}^{N}\frac{z^{-1}-p_i^*}{1-p_i z^{-1}}$$

$$D(z)=\sum_{k=0}^{N}d_k z^{-k}$$

$$|H_{ap}(e^{j\omega})|=\left|A\frac{(e^{j\omega})^{-N}D(e^{-j\omega})}{D(e^{j\omega})}\right|$$

d_k为实数

$$=\left|A\frac{(e^{j\omega})^{-N}D^*(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})}\right|=|A|$$

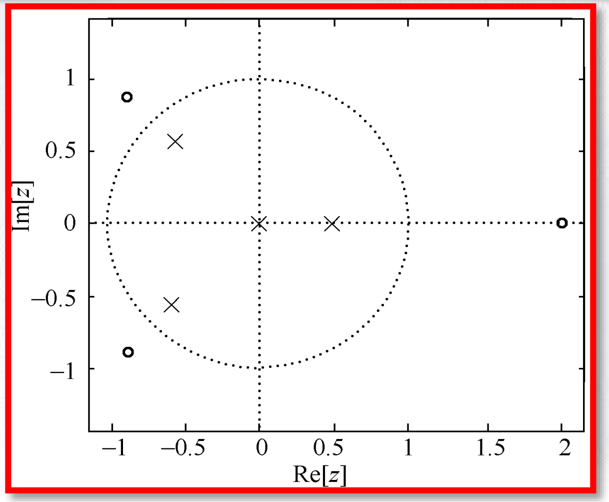
$$H_i(z)=\frac{z^{-1}-p_i^*}{1-p_i z^{-1}}=\frac{1-p_i^* z}{z-p_i}$$

$$=\frac{-p_i^*\left(z-\frac{1}{p_i^*}\right)}{z-p_i}$$

零点

共轭倒易

极点



- ◆ 实系数全通滤波器的零极点分布特性 — 共轭倒易关系
- ◆ 一般作为相位校正，又称相位均衡器。

实系数因果稳定全通滤波器的相位响应

$$H_{ap}(z)=\prod_{i=1}^{K_R}\boxed{\frac{z^{-1}-\alpha_i}{1-\alpha_i z^{-1}}}\prod_{i=1}^{K_C}\boxed{\frac{(z^{-1}-\beta_i^*)(z^{-1}-\beta_i)}{(1-\beta_i z^{-1})(1-\beta_i^* z^{-1})}}$$

实数零极点对

复数零极点对

讨论：1个极点$p=re^{j\theta}$和1个零点$z=r^{-1}e^{j\theta}$组成的$H_i(z)$的相位响应：

零点和极点共轭倒易：$p=\dfrac{1}{z^*}$

$H_{ap}(z)$可以认为由多个$H_i(z)$级联组成

$$H_i(z)=\frac{z^{-1}-re^{-j\theta}}{1-re^{j\theta}z^{-1}}=\frac{z^{-1}(1-re^{-j\theta}z)}{1-re^{j\theta}z^{-1}}$$

可以看出，$|H_i(e^{j\omega})|=1$

其相位有什么特点？

$$H_i(e^{j\omega})=e^{-j\omega}\frac{1-re^{-j\theta}e^{j\omega}}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}}\boxed{=e^{-j\omega}\frac{1-r\cos(\omega-\theta)-jr\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)+jr\sin(\omega-\theta)}}$$

实系数因果稳定全通滤波器的相位响应

$$H_i(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\frac{1-r\cos(\omega-\theta)-jr\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)+jr\sin(\omega-\theta)}$$

$H_i(e^{j\omega})$的相位响应为：

$$\theta_i(\omega) = -\omega - 2\arctan\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}$$

$H_i(e^{j\omega})$的群延迟为：

$$grd_i(\omega) = -\frac{\mathrm{d}\theta_i(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)}$$

对于因果稳定的全通滤波器而言，$|r|<1$，所以有：$grd_i(\omega)>0$，即：实系数因果稳定全通滤波器的群延迟总为正，相位响应在$[0,\pi]$内单调减小。

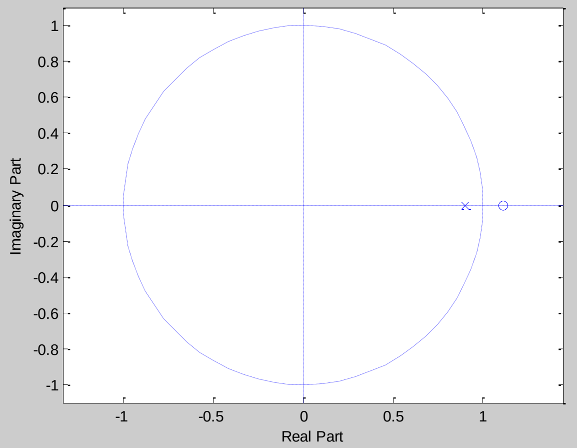
实系数因果稳定全通滤波器的重要特性

实系数因果稳定全通滤波器的重要特性 ——

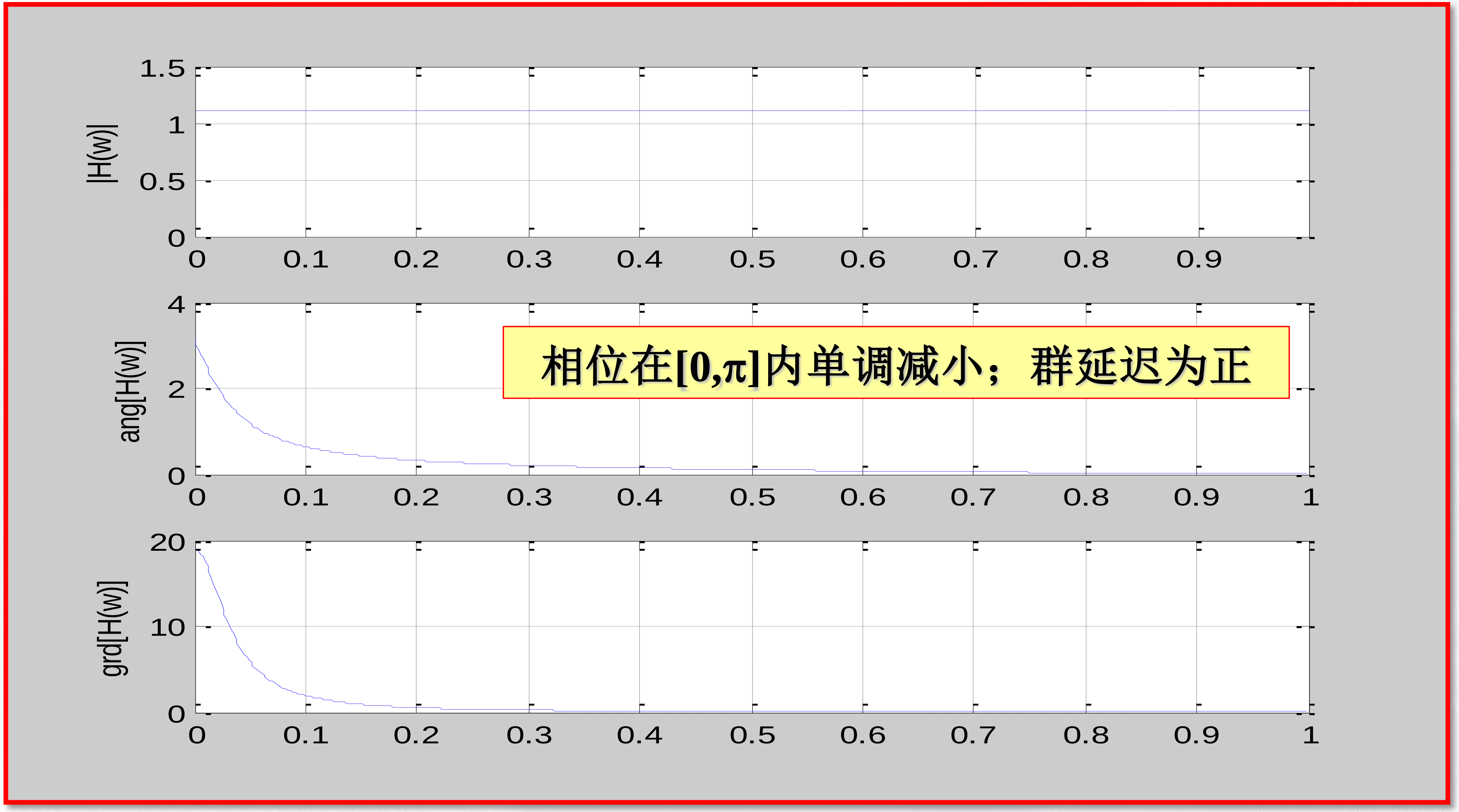
相位在[0,π]内单调减小；群延迟为正

```
b=[1 -1/0.9];a=[1 -0.9];
[Fh,w] = freqz(b,a);
[Gd,w] = grpdelay(b,a);
subplot(311)
plot(w/pi,abs(Fh));ylabel('|H(w)|'); grid on;
axis([0 max(w/pi) 0 1.5])
subplot(312)
plot(w/pi,angle(Fh));
ylabel('ang[H(w)]'); grid on;
subplot(313)
plot(w/pi,Gd);ylabel('grd[H(w)]'); grid on;
```

$$H_{ap}(z)=\frac{1-\dfrac{1}{0.9}z^{-1}}{1-0.9z^{-1}}$$



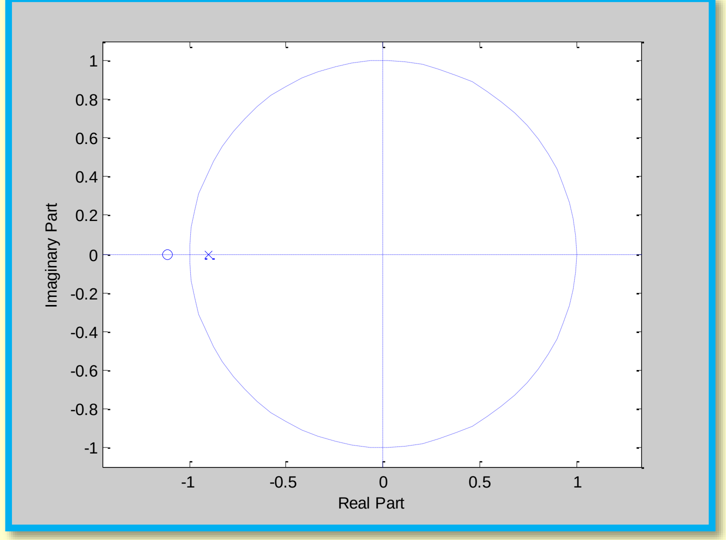
实系数因果稳定全通滤波器的重要特性



实系数因果稳定全通滤波器的重要特性

```
b=[1 1/0.9];a=[1 0.9];
[Fh,w] = freqz(b,a);
[Gd,w] = grpdelay(b,a);
subplot(311)
plot(w/pi,abs(Fh));ylabel('|H(w)|'); grid on;
axis([0 max(w/pi) 0 1.5])
subplot(312)
plot(w/pi,angle(Fh));
ylabel('ang[H(w)]'); grid on;
subplot(313)
plot(w/pi,Gd);ylabel('grd[H(w)]'); grid on;
```

$$H_{ap}(z)=\frac{1+\frac{1}{0.9}z^{-1}}{1+0.9z^{-1}}$$

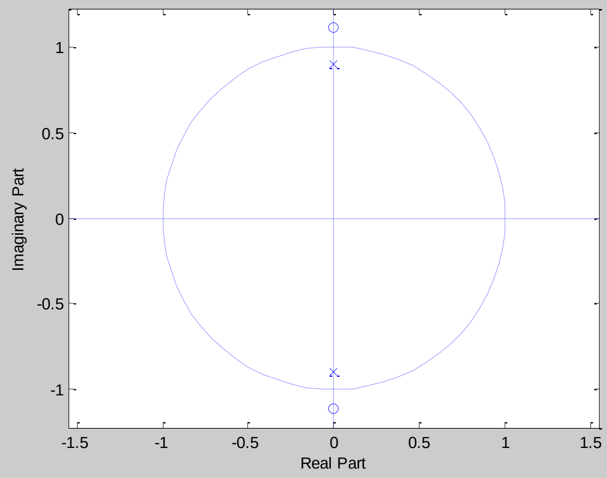


实系数因果稳定全通滤波器的重要特性

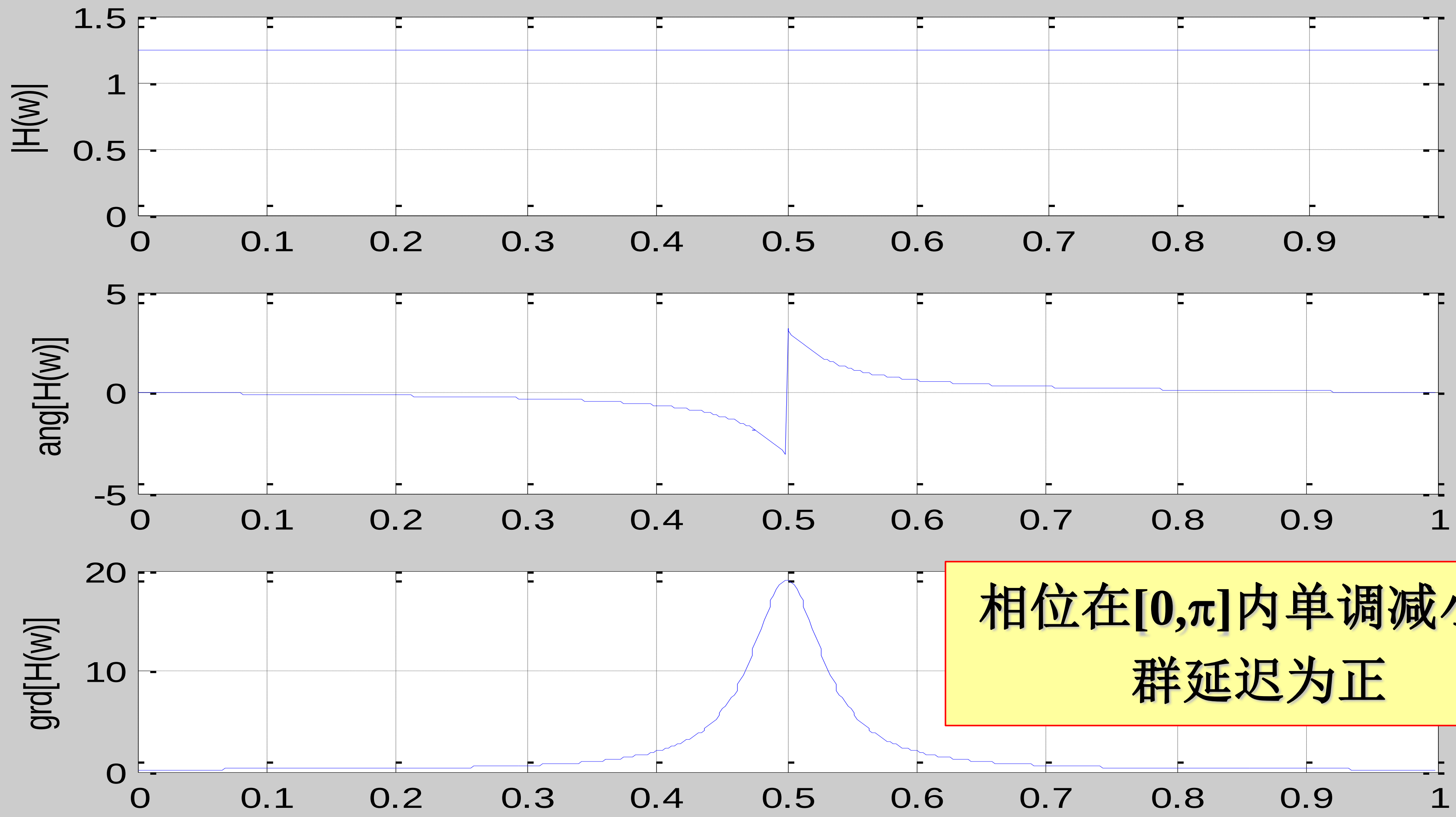
实系数因果稳定全通滤波器的重要特性

```
b=[1 0 -1/0.81];a=[1 0 -0.81];
[Fh,w] = freqz(b,a);
[Gd,w] = grpdelay(b,a);
subplot(311)
plot(w/pi,abs(Fh));ylabel('|H(w)|'); grid on;
axis([0 max(w/pi) 0 1.5])
subplot(312)
plot(w/pi,angle(Fh));
ylabel('ang[H(w)]'); grid on;
subplot(313)
plot(w/pi,Gd);ylabel('grd[H(w)]'); grid on;
```

$$H_{ap}(z)=\frac{1+\dfrac{1}{0.81}z^{-2}}{1+0.81z^{-2}}$$



实系数因果稳定全通滤波器的重要特性



相位在[0,π]内单调减小；
群延迟为正

第二章 z 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

2.6 特殊滤波器的设计

全通滤波器的设计

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁