第三章 离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

第三章　离散傅里叶变换

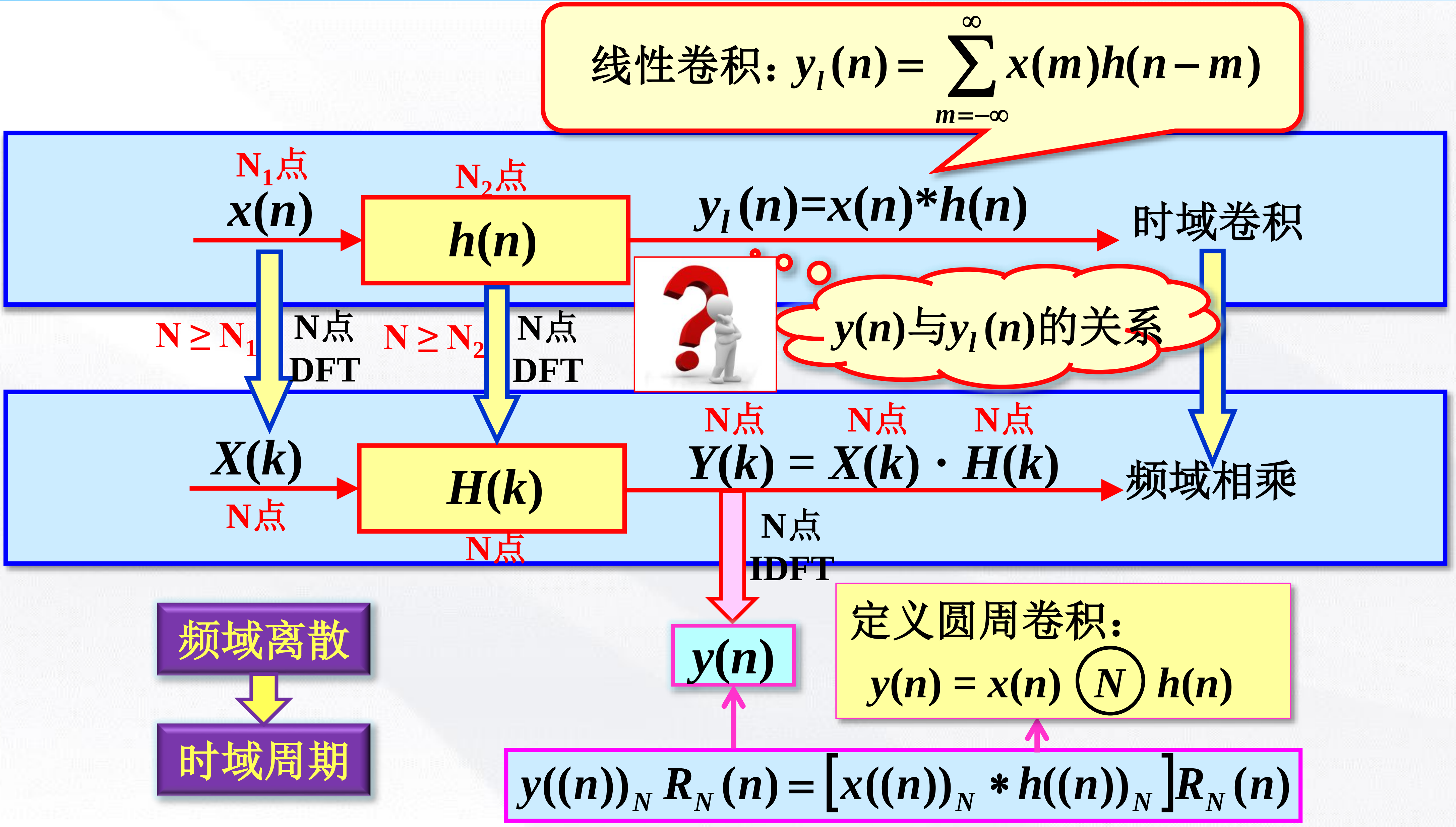
Discrete Forurier Transform

3.3　用DFT求解LSI系统输出

用DFT求解系统线性卷积输出的方法

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

◆ 用离散傅立叶变换(DFT)实现线性卷积的思路



$$\mathrm{IDFT}[Y(k)] = y(n) = y((n))_N R_N(n) = \left[x((n))_N * h((n))_N\right] R_N(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x((m))_N h((n-m))_N R_N(n)$$

周期卷积表达式

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h((n-m))_N R_N(n)$$

周期序列的表示

$$h((n))_N = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(n+rN)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(n+rN-m) R_N(n)$$

$$y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m)$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(n+rN-m) R_N(n)$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rN) R_N(n) = y_l((n))_N R_N(n)$$

➢ 圆周卷积与线性卷积的关系

$x(n)$与$h(n)$的N点圆周卷积 $y(n)$ 等于 它们的线性卷积$y_l(n)$以N为周期延拓后取主值序列的结果 $y_l((n))_N R_N(n)$。

$$y(n) = x(n) \textcircled{N} h(n) = y_l((n))_N R_N(n)$$

➢ 问题1：$y_l(n)$线性卷积结果的长度？

$$n \in [-\infty, \infty] \qquad y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \rightarrow N_1+N_2-1\text{点长}$$

设：$x(m)$为N_1点长序列：$0 \le m \le N_1\text{-}1$

$h(m)$为N_2点长序列：$0 \le m \le N_2\text{-}1$　　$-N_2+1 \le -m \le 0$

那么：$h(n\text{-}m)$序列有值的区间为：$n\text{-}N_2+1 \le n\text{-}m \le n$

移动的序列

$$n \in [\,0,\ N_1 + N_2 - 2\,]$$

➢ 问题2：N在什么条件下，圆周卷积与线性卷积结果相同？

$$\underline{y(n)} = x(n) \textcircled{N} h(n) = \underline{y_l((n))_N R_N(n)} = \underline{y_l(n)}$$

$\mathrm{IDFT}[Y(k)] = \mathrm{IDFT}[X(k)\cdot H(k)]$

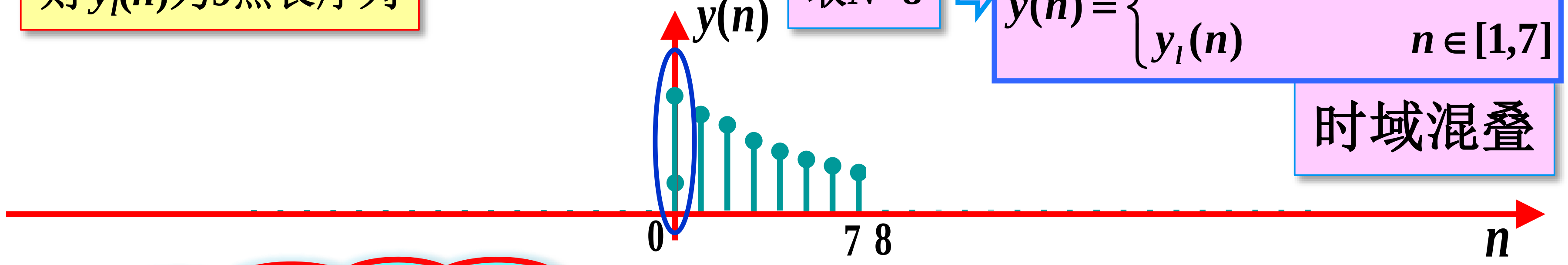
以N为周期延拓后取主值序列

$N \geq N_1+N_2-1$点

设$N_1=7$，$N_2=3$，则 $y_l(n)$为9点长序列

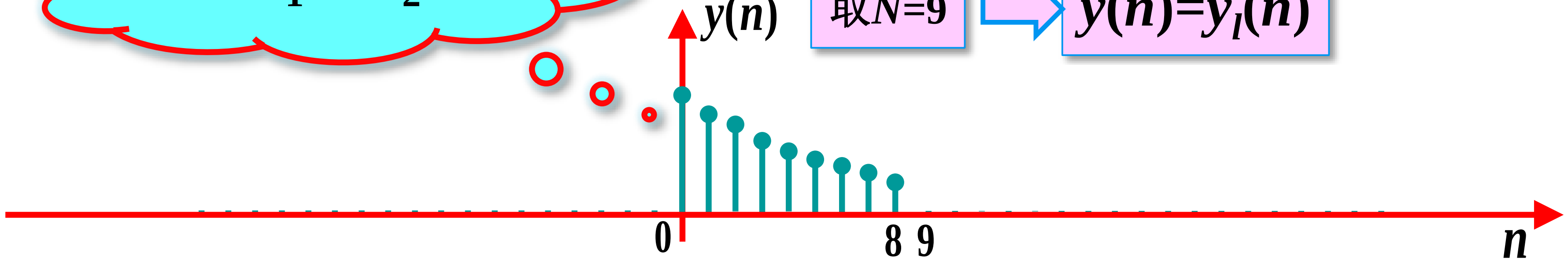
取$N=8$ ⇨ $y(n) = \begin{cases} y_l(0)+y_l(8) & n=0 \\ y_l(n) & n\in[1,7] \end{cases}$

时域混叠



$$N \geq N_1 + N_2 - 1$$

取$N=9$ ⇨ $y(n)=y_l(n)$



3.3 用DFT求解LSI系统输出

例：求下面两序列的线性卷积和4点、5点、6点、7点圆周卷积。

$$x_1(n)=R_5(n) \qquad x_2(n)=n+1 \ \ (0\le n\le 2)$$

(1) 线性卷积 $L = N_1+N_2-1 = 5+3-1 = 7$

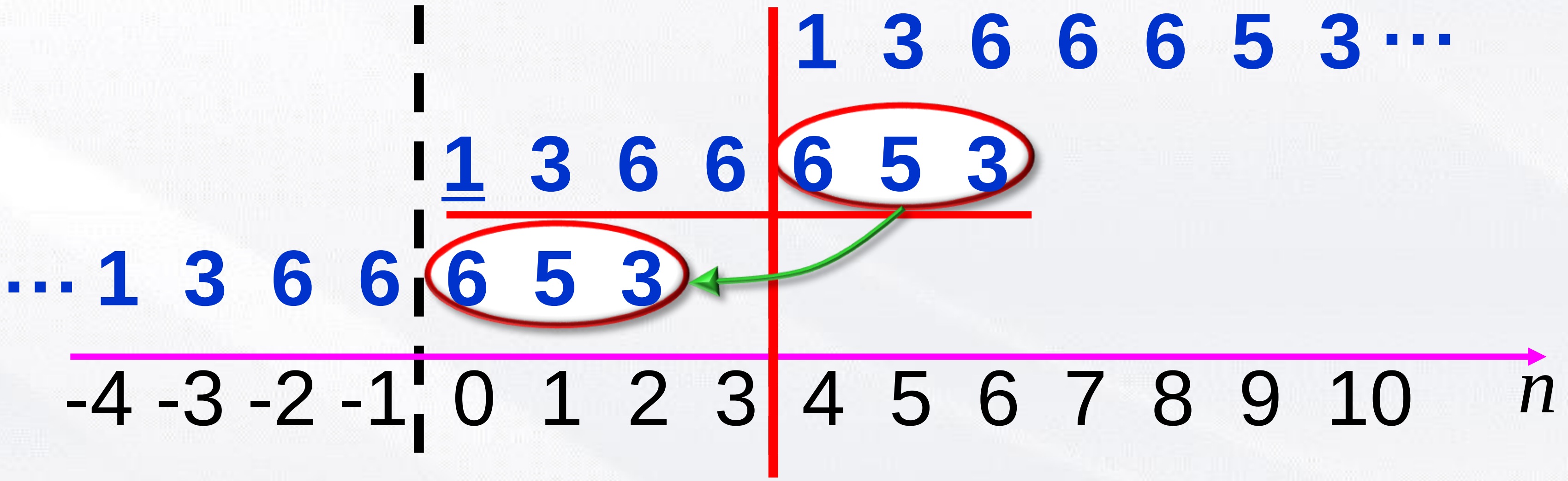
		$\underline{1}$	1	1	1	1
				$\underline{1}$	2	3
		3	3	3	3	3
	2	2	2	2	2	
$\underline{1}$	1	1	1	1		
$\underline{1}$	3	6	6	6	5	3

3.3 用DFT求解LSI系统输出

华东理工大学

(2) 4点圆周卷积　　主值区间：$0 \le n \le 3$

将线性卷积的结果以4为周期进行周期延拓后再取主值区间即获得4点圆周卷积结果。



x(0) = 1+6=7　　x(2) = 6+3=9

x(1) = 3+5=8　　x(3) = 6

3.3 用DFT求解LSI系统输出

华東理工大學

(3) 5点圆周卷积　　主值区间：$0 \le n \le 4$

将线性卷积的结果以5为周期进行周期延拓后再取主值区间即获得5点圆周卷积结果。

1 3 6 6 6 5 3 …

1 3 6 6 6 5 3

… 1 3 6 6 6 5 3

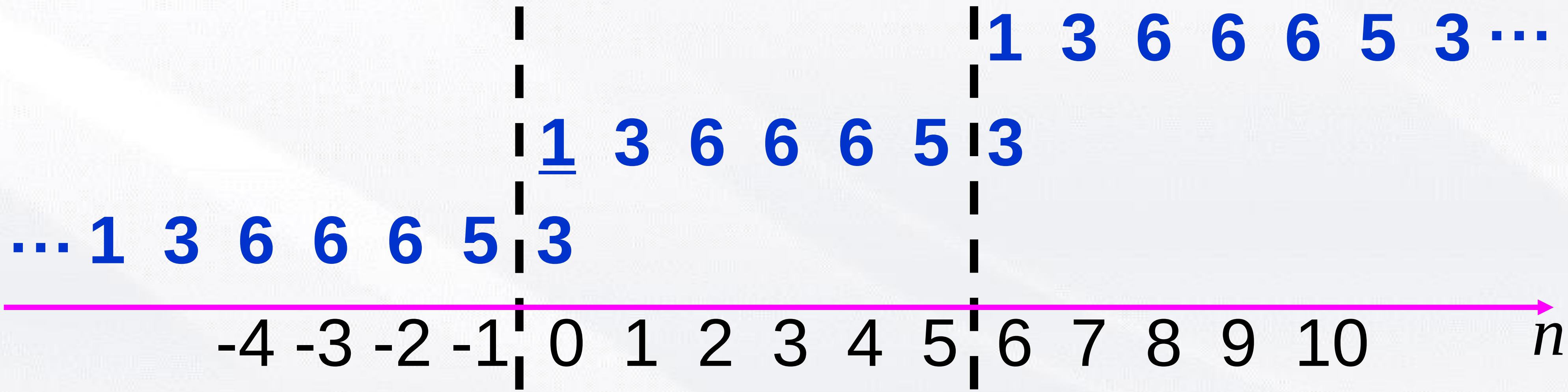
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 n

x(0) = 1+5=6　　x(2) = 6　　x(4) = 6

x(1) = 3+3=6　　x(3) = 6

(4) 6点圆周卷积　主值区间：$\underline{0 \le n \le 5}$

将线性卷积的结果以6为周期进行周期延拓后再取主值区间即获得6点圆周卷积结果。



$x(0) = 1+3=4$　$x(2) = 6$　$x(4) = 6$

$x(1) = 3$　$x(3) = 6$　$x(5) = 5$

(5) 7点圆周卷积　主值区间：$0 \le n \le 6$

将线性卷积的结果以7为周期进行周期延拓后再取主值区间即获得7点圆周卷积结果。

1 3 6 6 6 5 3 …

1 3 6 6 6 5 3

… 1 3 6 6 6 5 3

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 n

x(0) = 1　x(2) = 6　x(4) = 6　x(6) = 3

x(1) = 3　x(3) = 6　x(5) = 5

3.3 用DFT求解LSI系统输出

例：对50点长序列$x(n)$，$0\le n\le 49$和20点长序列$h(n)$，$0\le n\le 19$分别做50点的DFT，得到$X(k)$和$H(k)$，令$Y(k)=X(k)H(k)$，$0\le k\le 49$，$y(n)$是$Y(k)$50点IDFT的值，则n在___B___范围内时，$y(n)$的结果与$x(n)$和$h(n)$线性卷积的结果一致。

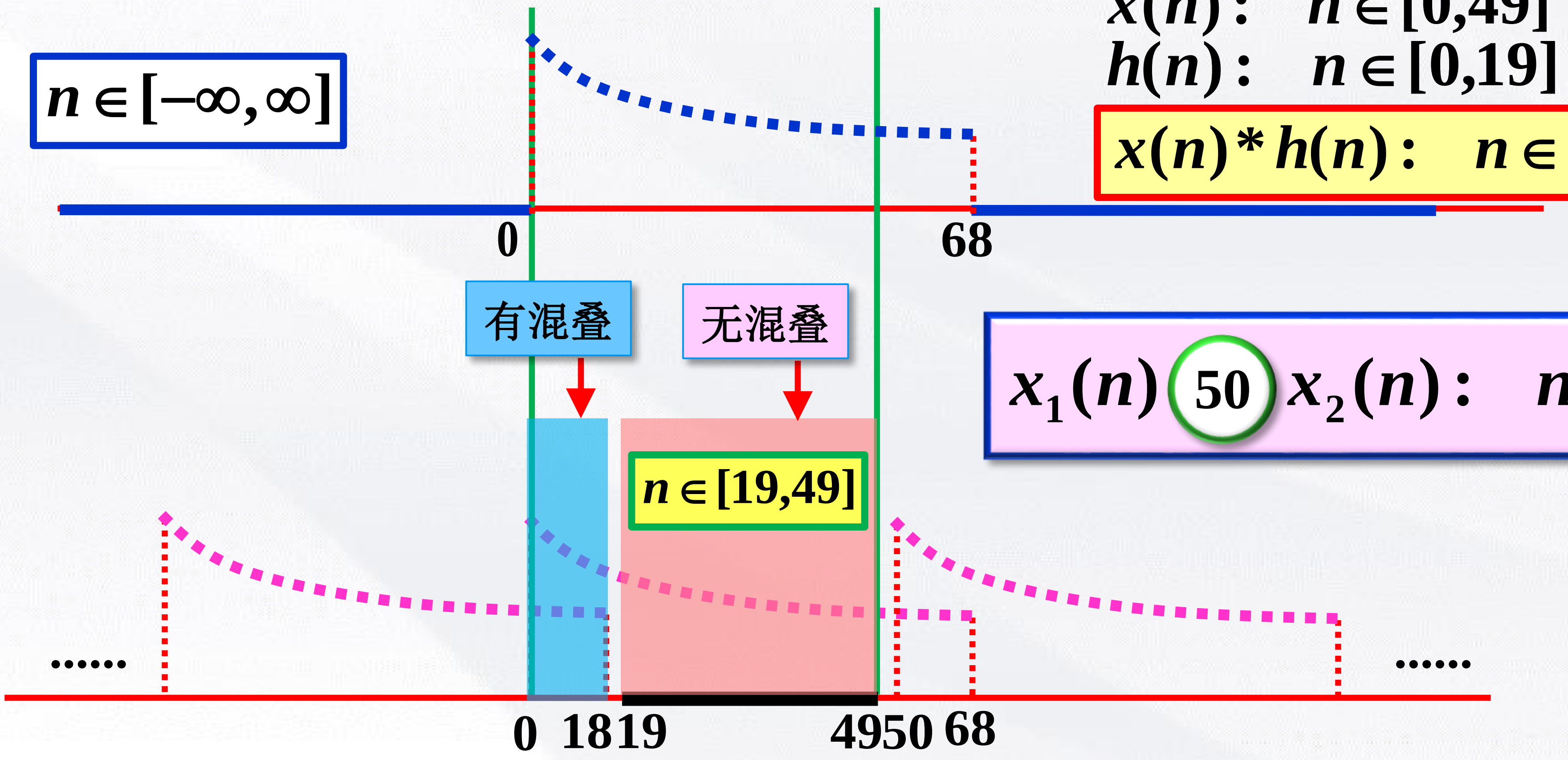
(A) $19\le n\le 48$ (B) $19\le n\le 49$ (C) $20\le n\le 49$ (D) $20\le n\le 68$

$x(n):\quad n\in[0,49]$

$h(n):\quad n\in[0,19]$

$x(n)*h(n):\quad n\in[0,68]$

$n\in[-\infty,\infty]$



$x_1(n)$ (50) $x_2(n):\quad n\in[0,49]$

华东理工大学

例：序列$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)+\delta(n-3)$，试求：

(A) 求序列$x(n)$的4点DFT。

(B) 若$y(n)$是$x(n)$与它本身的4点圆周卷积，求$y(n)$及其4点DFT。

(A) $x(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)+\delta(n-3)$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{3}[\delta(n)+2\delta(n-2)+\delta(n-3)]W_4^{nk}$$

$$=1+2W_4^{2k}+W_4^{3k} \qquad \boxed{k\in[0,3]}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} X(0)=4 & X(1)=-1+j \\ X(2)=2 & X(3)=-1-j \end{array}}$$

☆ $W_N^0=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 0}=1$

☆ $W_N^{N/2}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}}=e^{-j\pi}=-1$

☆ $W_N^N=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot N}=e^{-j2\pi}=1$

$W_N^{N/4}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{4}}=e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$

$W_N^{3N/4}=W_N^{N/2}\cdot W_N^{N/4}=j$

$W_N^{N/8}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{8}}=e^{-j\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B) 若$y(n)$是$x(n)$与它本身的4点圆周卷积，求$y(n)$及其4点DFT 。

$$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)+\delta(n-3)=\{\underline{1},0,2,1\}$$

方法一： $y(n)=x(n)\ \textcircled{4}\ x(n)=\{\underline{5},4,5,2\}$

$N=4$

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{N-1}y(n)W_N^{nk}=5+4W_4^{k}+5W_4^{2k}+2W_4^{3k}$$

			1	0	2	1	
			1	0	2	1	
			1	0	2	1	
		2	0	4	2		
1	0	2	1				
{1	0	4	2	4	4	1}	
4	4	1					
{5	4	5	2}				

方法二：$Y(k)=X(k)\cdot X(k)=\left(1+2W_4^{2k}+W_4^{3k}\right)\cdot\left(1+2W_4^{2k}+W_4^{3k}\right)$

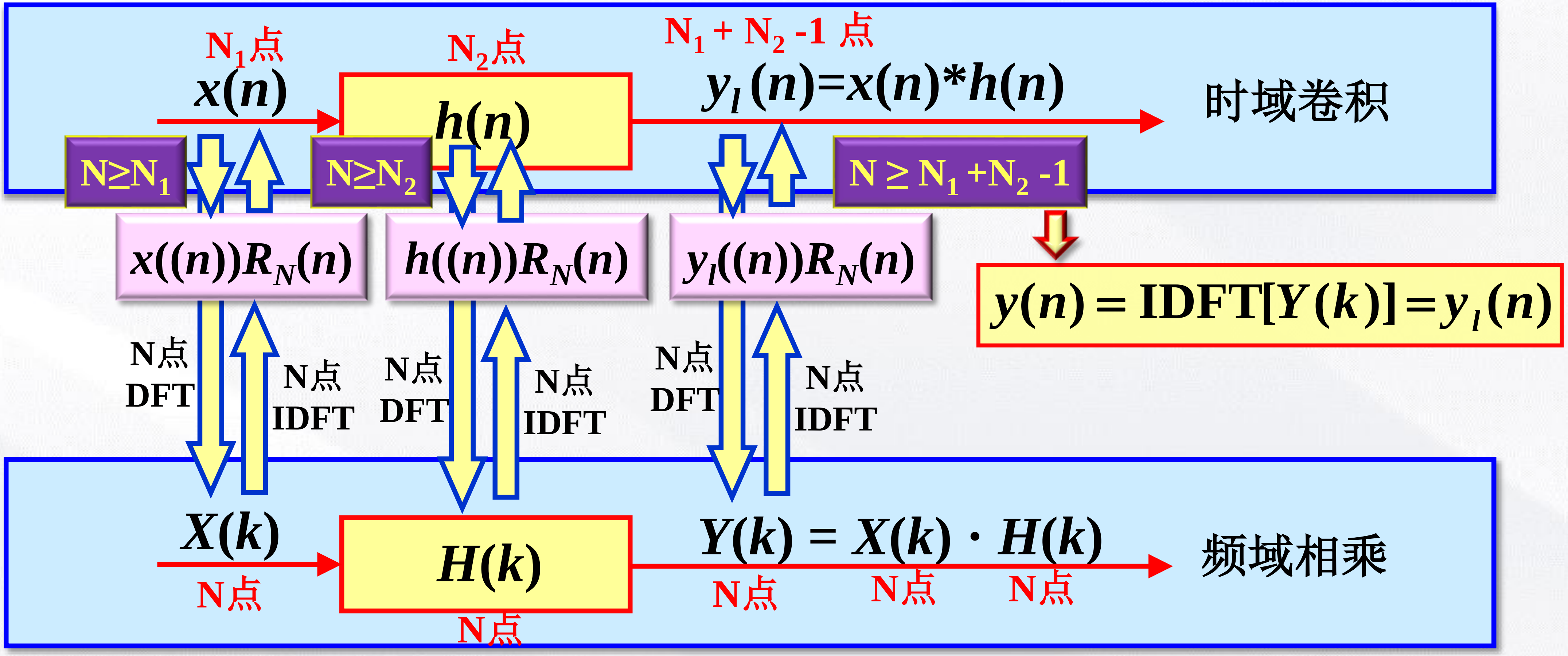
$$=1+2W_4^{2k}+W_4^{3k}+2W_4^{2k}+4W_4^{4k}+2W_4^{5k}+W_4^{3k}+2W_4^{5k}+W_4^{6k}$$

$$=1+2W_4^{2k}+W_4^{3k}+2W_4^{2k}+4+2W_4^{k}+W_4^{3k}+2W_4^{k}+W_4^{2k}$$

$$=5+4W_4^{k}+5W_4^{2k}+2W_4^{3k}$$

$$W_4^k\Rightarrow e^{-j\frac{2\pi}{4}k}\Rightarrow z^{-1}\Rightarrow\delta(n-1)$$

3.3 用DFT求解LSI系统输出



$$\mathrm{IDFT}[Y(k)] = y_l((n))_N R_N(n) = \left[x((n))_N * h((n))_N\right] R_N(n)$$

$$= x(n) \, Ⓝ \, h(n)$$

➢ 几种求解LSI系统输出的方法小结

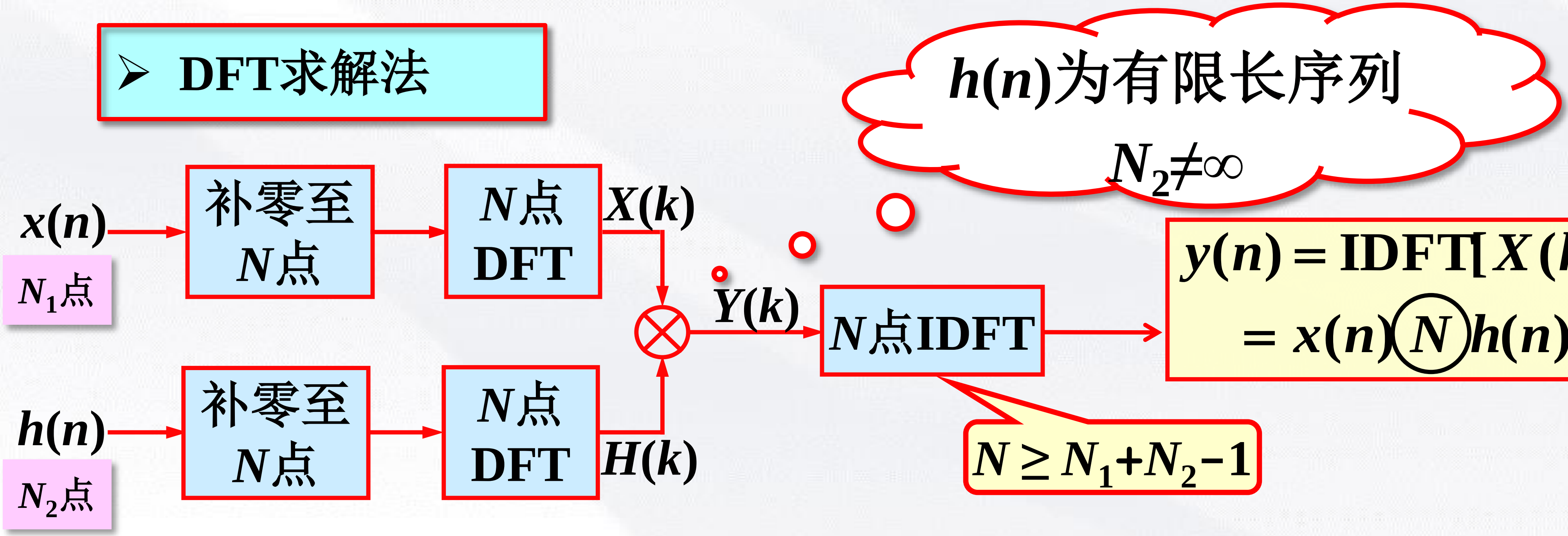
➢ 时域直接求解

$$y_l(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

➢ 频域解析法

$$y_l(n) = \mathrm{IDTFT}[Y(e^{j\omega})] = \mathrm{IDTFT}[X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})]$$

➢ DFT求解法



$$y(n) = \mathrm{IDFT}[X(k) \cdot H(k)] = x(n) \, N \, h(n) = y_l(n)$$

第三章　离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.3　用DFT求解LSI系统输出

用DFT求解系统线性卷积输出的方法

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁