第三章 离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.1	离散傅里叶级数及其性质
3.2	离散傅里叶变换的定义及性质
3.3	用DFT求解LSI系统输出
3.4	频域采样定理
3.5	模拟信号的谱分析方法

第三章　离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.4　频域采样定理

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

一、频域采样与频域采样定理

1、频域采样定理要研究的问题

M点

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
x_M(n) \arrow[r, "\text{序列傅立叶变换}"] \arrow[d, phantom, "\overset{?}{=}"] & X(e^{j\omega}) \arrow[d, "\text{单位圆上取}N\text{点（频域采样）}"] \\
x_N(n) & X(k) \arrow[l, "\text{离散傅立叶反变换}"']
\end{tikzcd}$$

N点

华东理工大学

2、由频域采样恢复时域序列

一个绝对可和的非周期序列 $x(n)$的z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

由于$x(n)$绝对可和，故其傅里叶变换存在且连续，也即其z变换收敛域包括单位圆。这样，对$X(z)$在单位圆上N等份抽样，就得到$\tilde{X}(k)$。

$$\tilde{X}(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)W_N^{nk}$$

对 $\tilde{X}(k)$ 进行反变换，并令其为 $\tilde{x}_N(n)$，则：

$$\tilde{x}_N(n)=\mathrm{IDFS}\left[\tilde{X}(k)\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

$$\tilde{X}(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)W_N^{nk}$$

为避免混淆，改用m

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)W_N^{mk}\right]W_N^{-nk}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}\right]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)=x((n))_N$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}=\begin{cases}1 & m=n+rN，r\text{为任意整数}\\ 0 & \text{其它}m\end{cases}$$

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}} \qquad W_N^{rN}=e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{N}}r\cancel{N}}=1$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-n)k}$$

$$=\frac{1}{N}\frac{1-\boxed{e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{N}}(m-n)\cancel{N}}}}{1-\boxed{e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-n)}}} \qquad \boxed{=1} \qquad \boxed{\begin{cases}=1\\ \neq 1\end{cases}}$$

$$=\begin{cases}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{rNk}=\frac{N}{N}=1 & \boxed{m-n=rN}\\ 0 & \boxed{m-n\neq rN}\end{cases}$$

一、频域采样与频域采样定理

可见，由 $\tilde{X}(k)$ 得到的周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 是非周期序列 $x(n)$ 的周期延拓。其周期为频域采样点数 N。

所以：时域采样(离散)产生频域周期延拓

同样，频域采样(离散)产生时域周期延拓

(1) $x(n)$是无限长序列： 一定存在混叠失真

(2) $x(n)$是长度为M的有限长序列：

(A) $N \geq M$，不失真

(B) $N < M$，失真

$$\boxed{\tilde{x}_N(n) = x((n))_N}$$

3、频率采样定理的内容

若序列长度为M，则只有当频域采样点数:

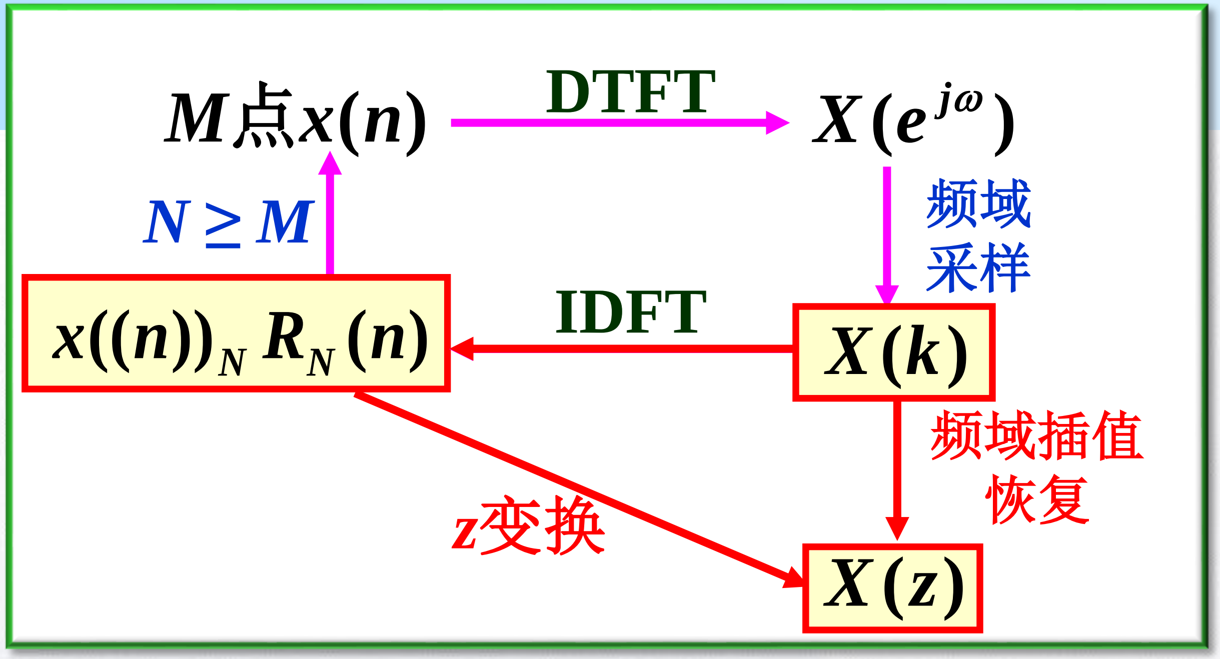
$$\boxed{N \geq M}$$

时，才有

$$\boxed{\tilde{x}_N(n)R_N(n) = \mathrm{IDFS}[\tilde{X}(k)]R_N(n) = x(n)}$$

即可由频域采样$X(k)$不失真地恢复原信号$x(n)$，否则产生时域混叠现象。

二、频域插值的恢复



1、用频域采样X(k)恢复X(z)

$$\boxed{X(z)}=\sum_{n=0}^{N-1}\underbrace{x((n))_N}_{\text{IDFT}} z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right]z^{-n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-nk}z^{-n}\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-Nk}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}=\boxed{\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}}$$

内插公式

二、频域插值的恢复

内插公式：

$$X(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

内插函数：$\Phi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$

内插公式可以简化为：

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z)$$

零点：$z=e^{j\frac{2\pi}{N}r}$， $r=0,1,\ldots,N-1$

极点：$p_1=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$， $p_2=0\,(N-1阶)$

二、频域插值的恢复

华東理工大學

2、用频域采样$X(k)$表示$X(e^{j\omega})$的内插公式

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(e^{j\omega})}$$

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}\Bigg|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{N}\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)\right]}{\sin\left[\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)\right]} e^{j\frac{k\pi}{N}(N-1)} e^{-j\frac{(N-1)}{2}\omega}$$

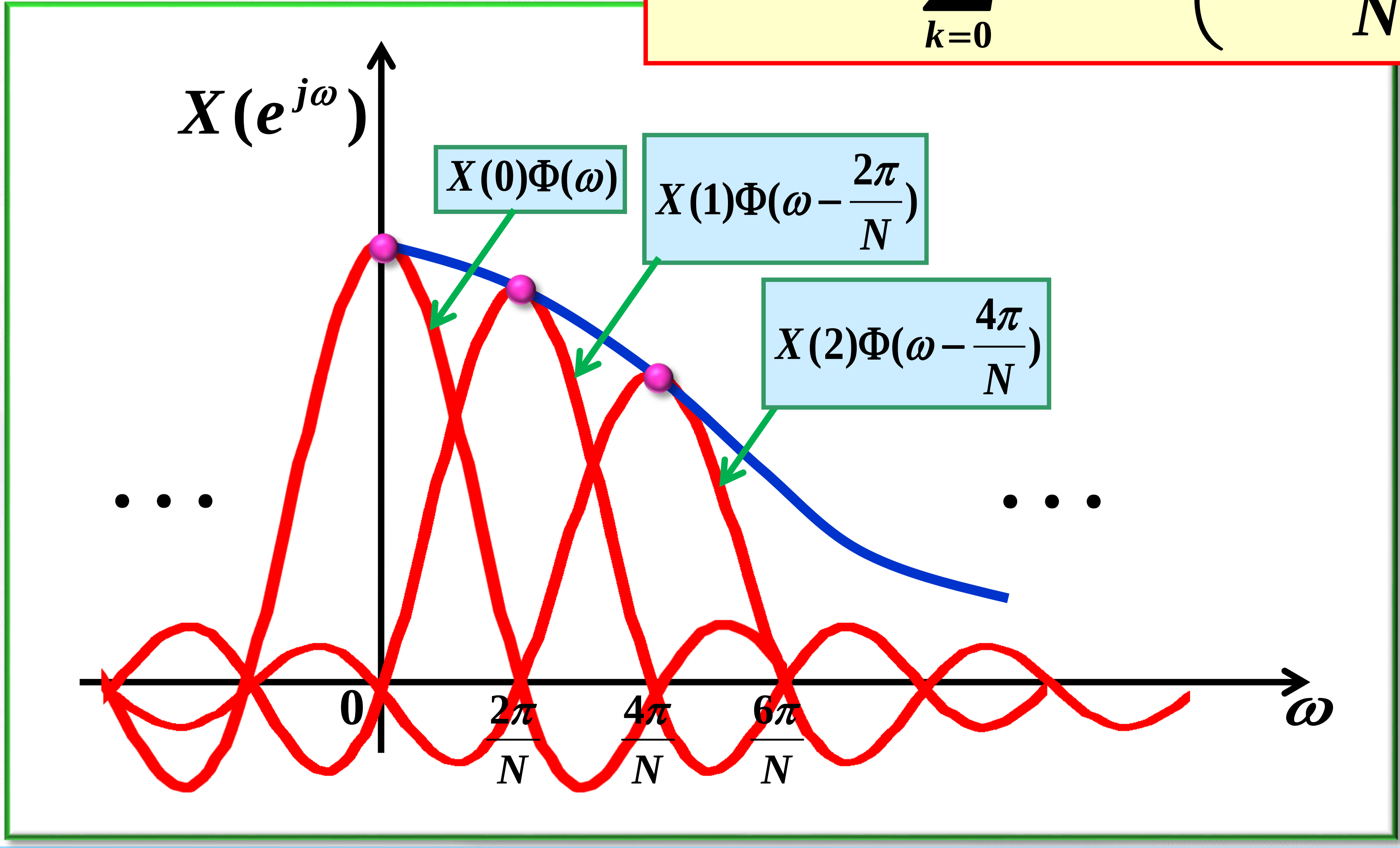
$$\boxed{=\Phi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)}$$

内插函数：$\Phi(\omega) = \frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{(N-1)}{2}\omega}$

二、频域插值的恢复

内插公式：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$



第三章　离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.4　频域采样定理

华东理工大学信息科学与工程学院　万永菁