第七章 FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

华东理工大学

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

- 线性相位条件下FIR滤波器幅度响应的特点

一类线性相位 → $h(n)=h(N-1-n)$

二类线性相位 → $h(n)=-h(N-1-n)$

$$h(n) \xrightarrow{z\text{变换}} H(z) \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H(e^{j\omega})$$

线性相位条件下FIR滤波器频率响应的特点

华東理工大學

由 $h(n)=\pm h(N-1-n) \quad 0\le n\le N-1$

系统函数：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\pm h(N-1-n)z^{-n}$$

$$\underline{\underline{令m=N-1-n}}\quad \sum_{m=0}^{N-1}\pm h(m)z^{-(N-1-m)}$$

$$=\pm z^{-(N-1)}\sum_{m=0}^{N-1}h(m)z^{m}$$

$$=\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

$$\boxed{H(z)=\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})}$$

$$H(z)=\frac{1}{2}[H(z)\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)[z^{-n}\pm z^{-(N-1)}z^{n}]$$

$$\boxed{=z^{-\frac{N-1}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2}\right]}$$

$$H(z)=z^{-\frac{N-1}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2}\right]$$

$$\left.\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2}\right|_{z=e^{j\omega}}=\begin{cases}\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] & \text{"+"}\\ j\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] & \text{"−"}\end{cases}$$

$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\begin{cases}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum\limits_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] & \text{"+"}\\ je^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum\limits_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] & \text{"−"}\end{cases}$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

- $h(n)$偶对称，N为奇数
- $h(n)$偶对称，N为偶数

$$h(n)=h(N-1-n)$$

- $h(n)$奇对称，N为奇数
- $h(n)$奇对称，N为偶数

$$h(n)=-h(N-1-n)$$

第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.1　线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

- $h(n)$偶对称，N为奇数
- $h(n)$偶对称，N为偶数

$$h(n)=h(N-1-n)$$

- $h(n)$奇对称，N为奇数
- $h(n)$奇对称，N为偶数

$$h(n)=-h(N-1-n)$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

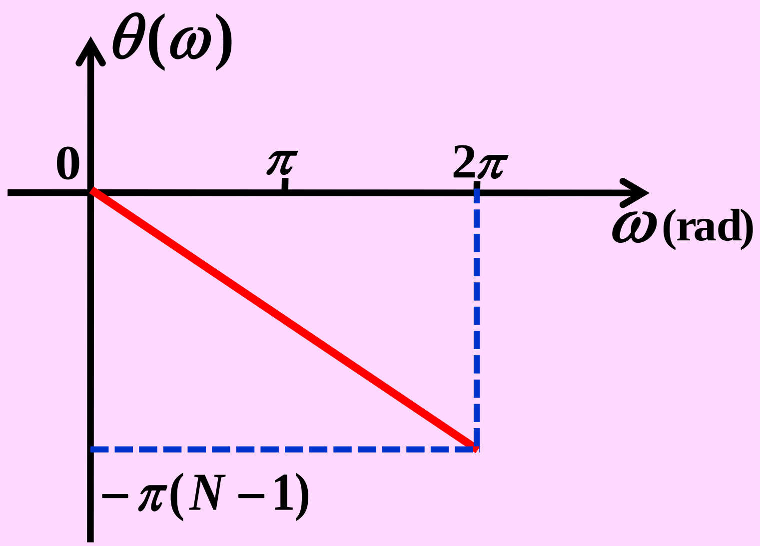
华東理工大學

1、$h(n)$偶对称 $h(n)=h(N-1-n)$

频率响应：
$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

相位函数：
$$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$$

为第一类线性相位：
$$\tau=\frac{N-1}{2}$$

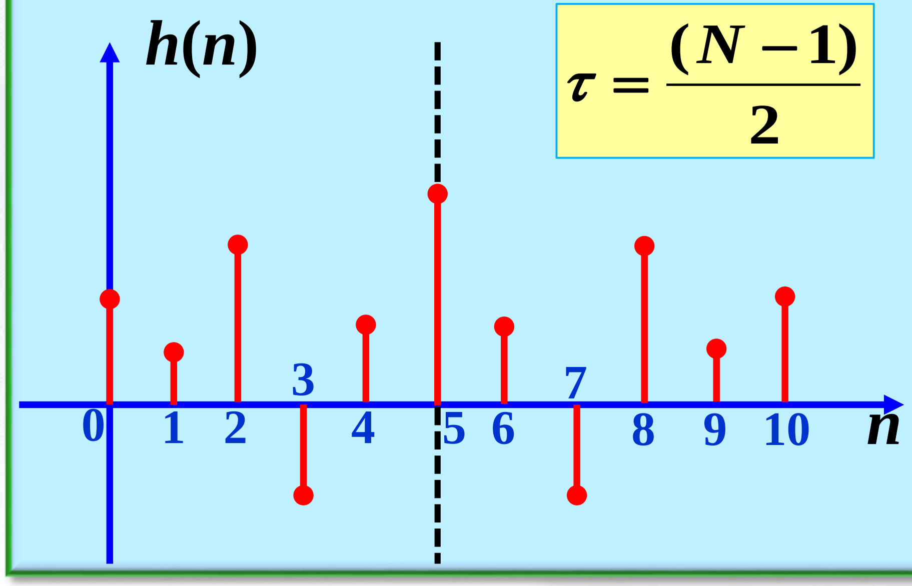


线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

(1) $h(n)$偶对称，N为奇数

幅度函数：
$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$\because\ \cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-(N-1-n)\right)\omega\right]=\cos\left[\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\omega\right]=\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$



$$\tau=\frac{(N-1)}{2}$$

$$\therefore\ \cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

对$\frac{N-1}{2}$呈偶对称

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

$$H(\omega)=h(\frac{N-1}{2})+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

令 $\frac{N-1}{2}-n=m$

$$=h(\frac{N-1}{2})+\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}2h(\frac{N-1}{2}-m)\cos(m\omega)$$

其中：

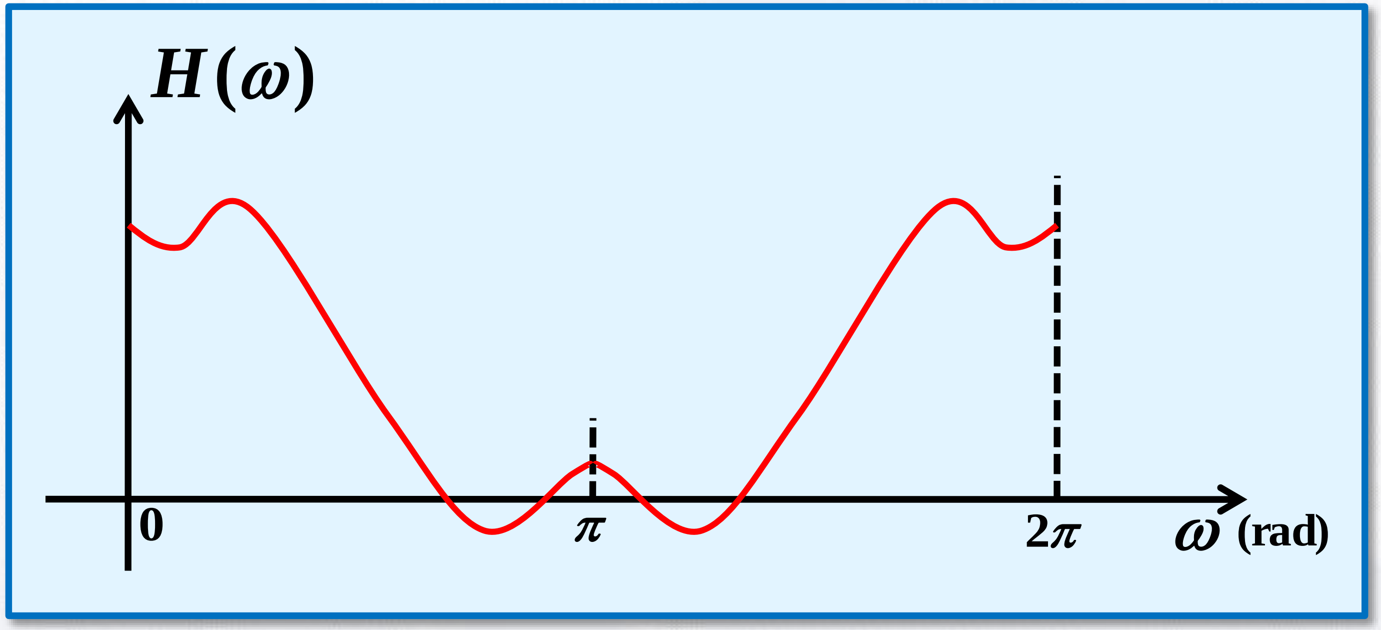
$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos(\omega n)$$

$$a(0)=h(\frac{N-1}{2})$$

$$a(n)=2h(\frac{N-1}{2}-n)\qquad n=1,\ldots,\frac{N-1}{2}$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos(\omega n)$$



$\cos(\omega n)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$呈偶对称

$\therefore\quad H(\omega)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$呈偶对称

例1： $h(n)=R_5(n)$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{5}{2}\omega}(e^{j\frac{5}{2}\omega}-e^{-j\frac{5}{2}\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}(e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega})}=e^{-j2\omega}\boxed{\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}}$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos(\omega n)$$

$$a(0)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)=h(2)=1$$

$$a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right)$$

$$a(1)=2h\left(\frac{N-1}{2}-1\right)=2h(1)=2$$

$$a(2)=2h\left(\frac{N-1}{2}-2\right)=2h(0)=2$$

$$H(\omega)=1+2\cdot\cos(\omega)+2\cos(2\omega)$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

```
b1=[1 1 1 1 1];
a1=1;
[H1,w1]=freqz(b1,a1,'whole');

figure(1);
subplot(221);plot(w1/pi,abs(H1));grid
subplot(222);zplane(b1,a1);
subplot(223);
plot(w1/pi,sin(5*w1/2)./sin(w1/2));grid
subplot(224);
plot(w1/pi,1+2*cos(w1)+2*cos(2*w1));grid
```

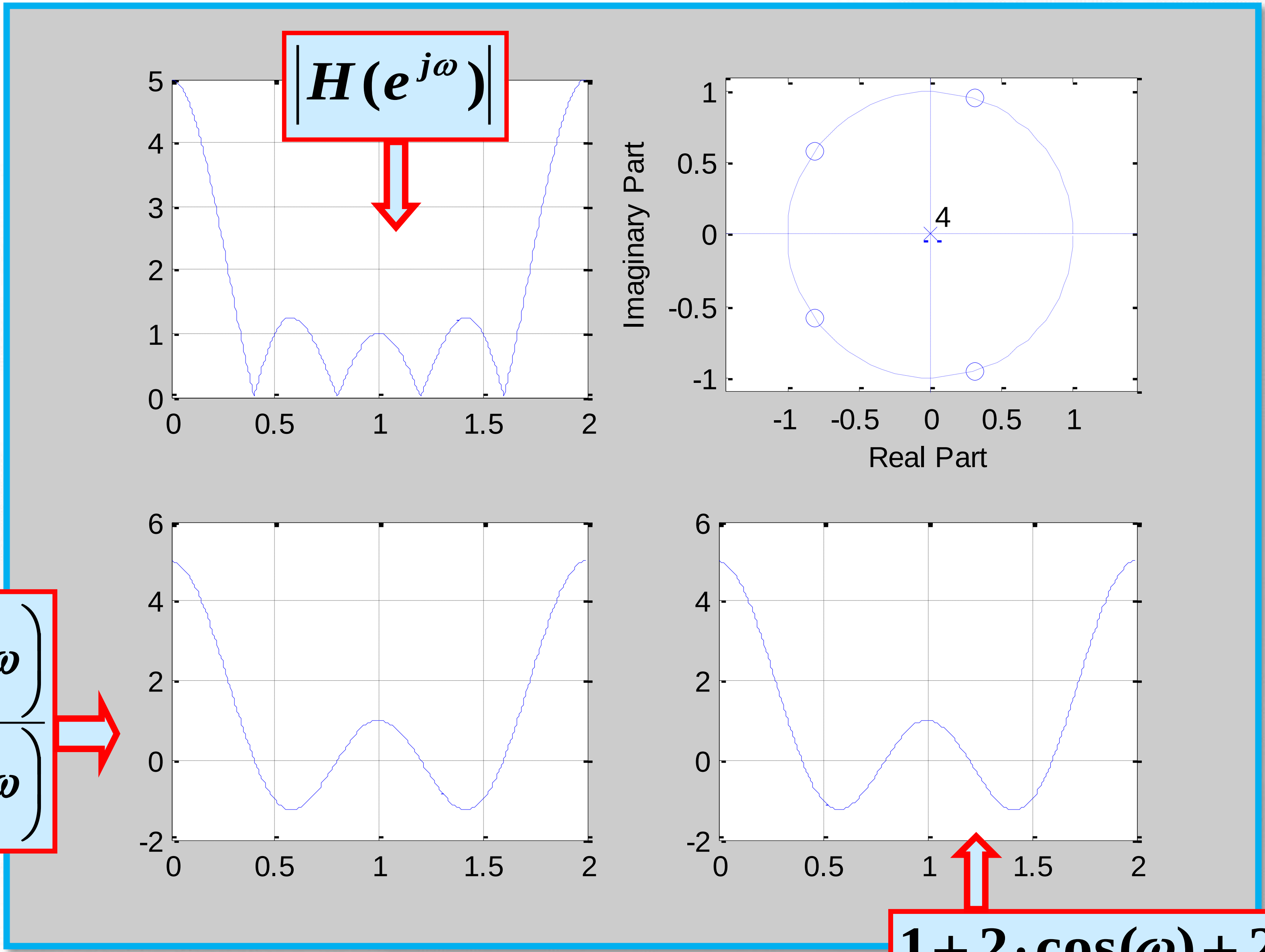
$h(n)=R_5(n)$

幅度响应 $\left|H(e^{j\omega})\right|$

振幅响应 $H(\omega)=\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

振幅响应 $H(\omega)=1+2\cdot\cos(\omega)+2\cos(2\omega)$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点



$$\left|H(e^{j\omega})\right|$$

$$\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}$$

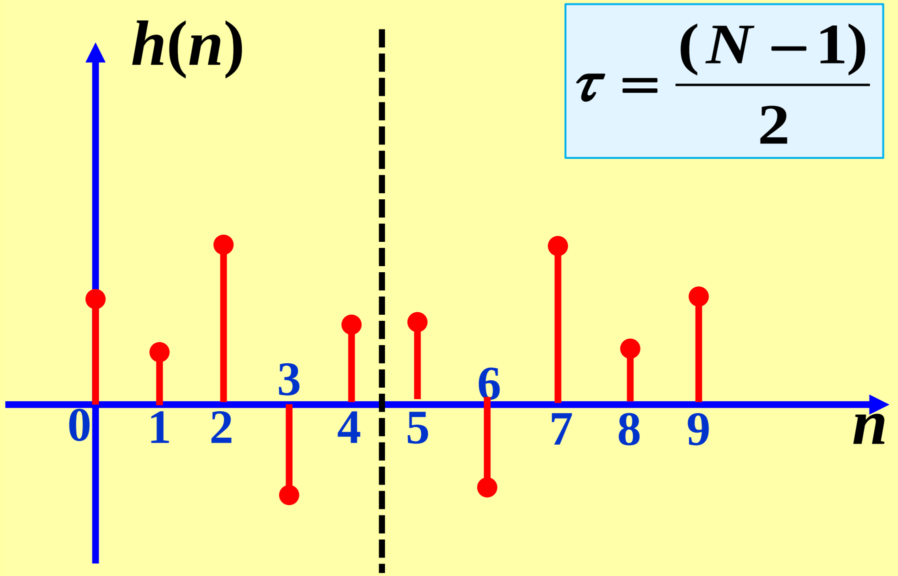
$$1+2\cdot\cos(\omega)+2\cos(2\omega)$$

(2) $h(n)$偶对称，N为偶数

幅度函数：

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$



$$\tau=\frac{(N-1)}{2}$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

华东理工大学

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]\ \xrightarrow{\text{令}\ \frac{N}{2}-n=m}\ =\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}2h\left(\frac{N}{2}-m\right)\cos\left((m-\frac{1}{2})\omega\right)$$

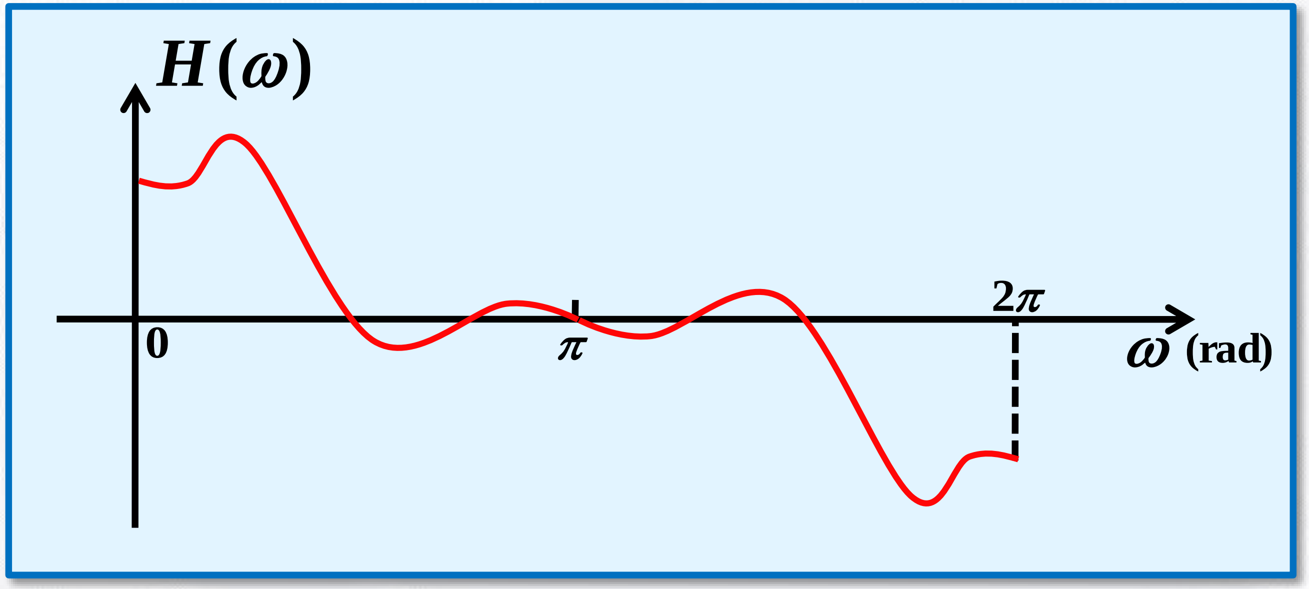
$$\boxed{H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}b(n)\cos\left(\omega(n-\frac{1}{2})\right)}$$

其中：

$$\boxed{b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right)\qquad n=1,\ldots,\frac{N}{2}}$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left(\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)$$



$\omega=\pi$ 时, $\cos\left(\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)=0$ ， 则 $H(\pi)=0$ $\boxed{\therefore z=-1\text{是零点}}$

$H(\omega)$对$\omega=\pi$呈奇对称，<u>故不能设计成高通、带阻滤波器</u>

例2： $h(n)=R_4(n)$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j2\omega}(e^{j2\omega}-e^{-j2\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}(e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega})}=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\boxed{\frac{\sin(2\omega)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}}$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left(\omega(n-\frac{1}{2})\right)$$

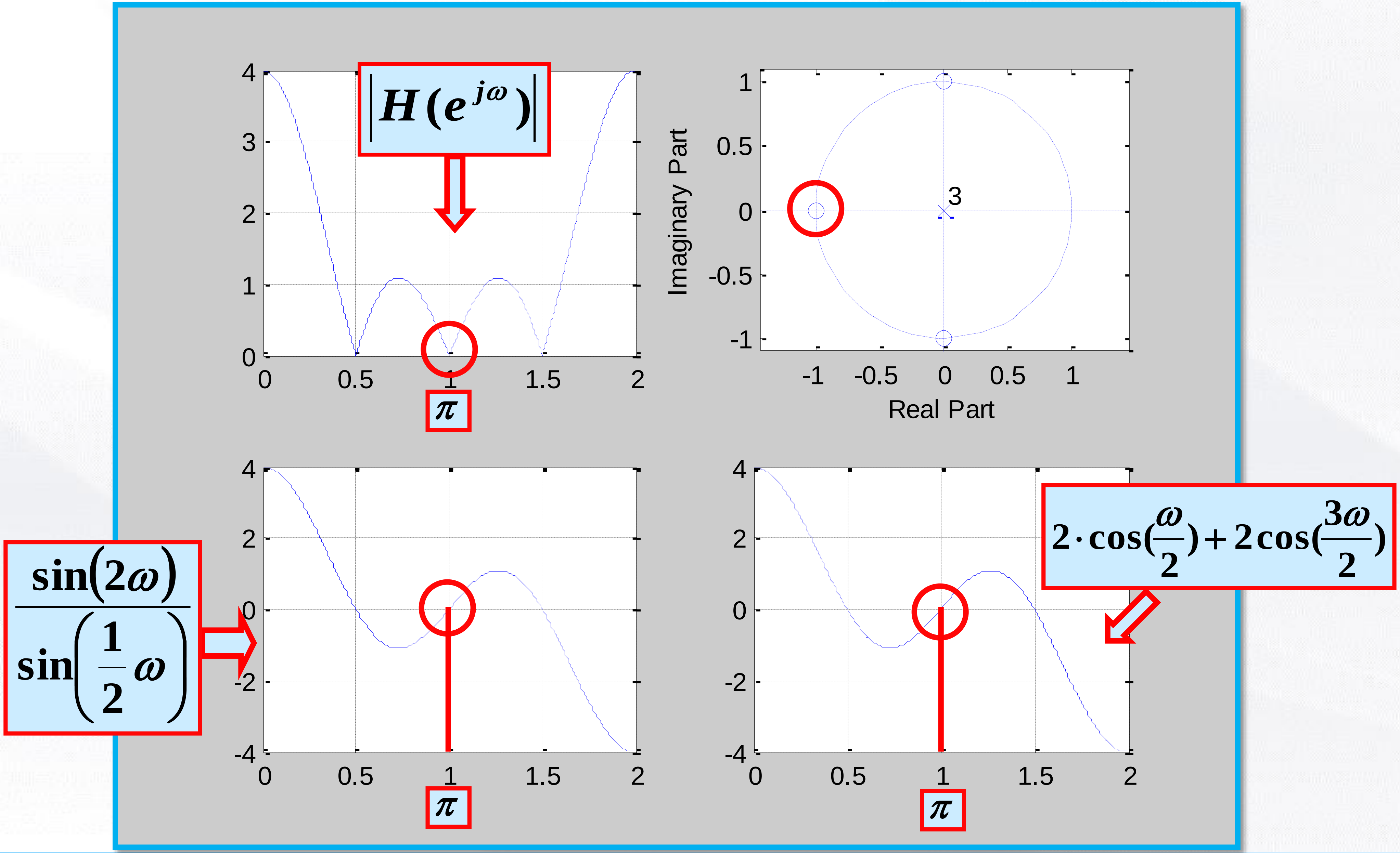
$$b(n)=2h(\frac{N}{2}-n)$$

$$b(1)=2h(\frac{N}{2}-1)=2h(1)=2$$

$$b(2)=2h(\frac{N}{2}-2)=2h(0)=2$$

$$H(\omega)=2\cdot\cos(\frac{\omega}{2})+2\cos(\frac{3\omega}{2})$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点



第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.1　线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点(3)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

- $h(n)$偶对称，N为奇数
- $h(n)$偶对称，N为偶数

$$h(n)=h(N-1-n)$$

- $h(n)$奇对称，N为奇数
- $h(n)$奇对称，N为偶数

$$h(n)=-h(N-1-n)$$

2、$h(n)$奇对称　$h(n) = -h(N-1-n)$

频率响应：$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = je^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$

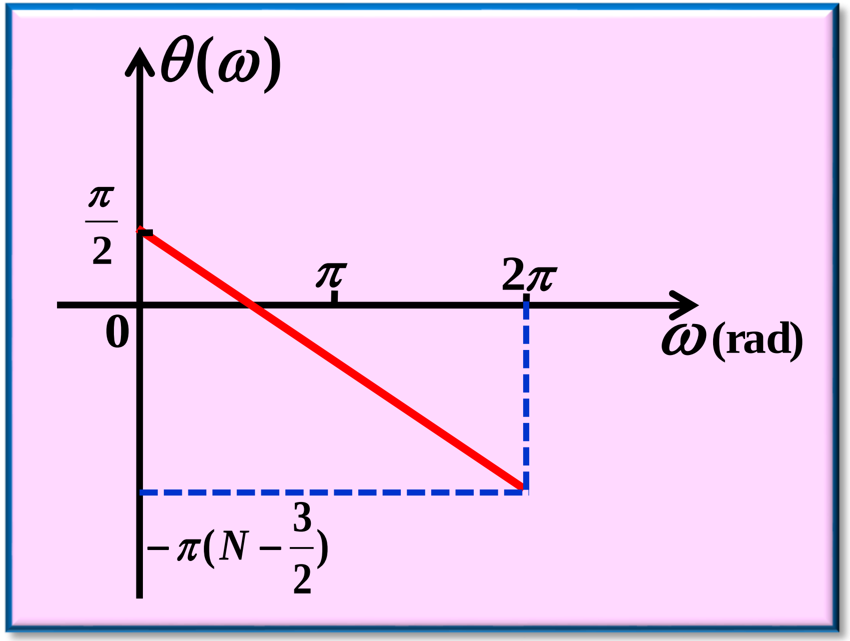
$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega + j\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

相位函数：

$$\boxed{\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}}$$

为第二类线性相位：

$$\boxed{\tau = \frac{N-1}{2}} \qquad \boxed{\beta_0 = \frac{\pi}{2}}$$

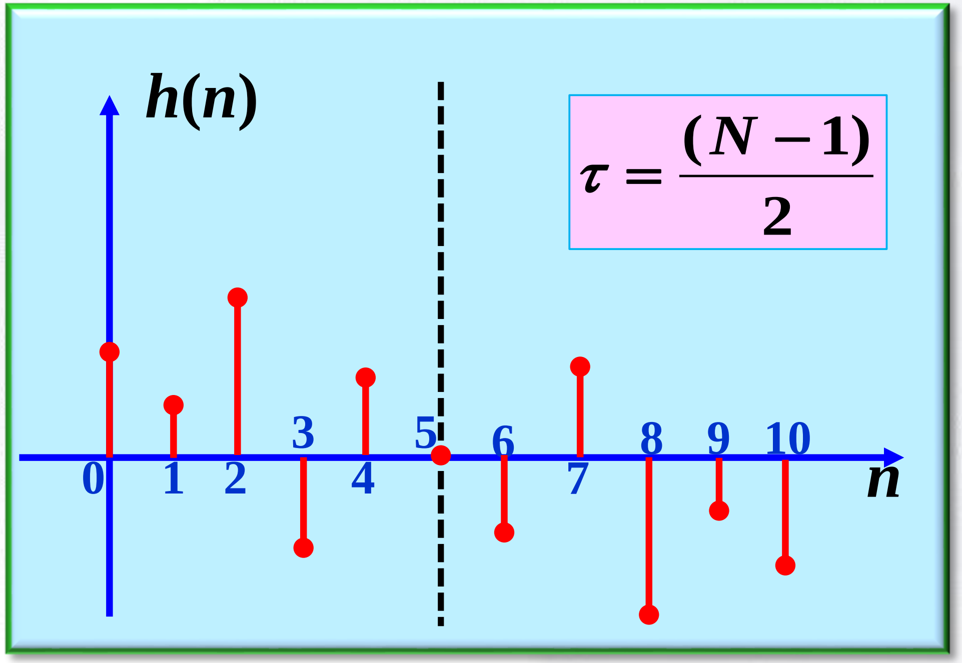


线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

(3) $h(n)$奇对称，N为奇数

幅度函数：$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$\because\ \sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-(N-1-n)\right)\omega\right]=\sin\left[\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\omega\right]=-\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$



$$\therefore\ \sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

对 $\dfrac{N-1}{2}$ 呈奇对称

$h(n)$奇对称且N为奇数，$\therefore h(\frac{N-1}{2})=0$

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] \overset{\boxed{令\frac{N-1}{2}-n=m}}{=} \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}2h(\frac{N-1}{2}-m)\sin(m\omega)$$

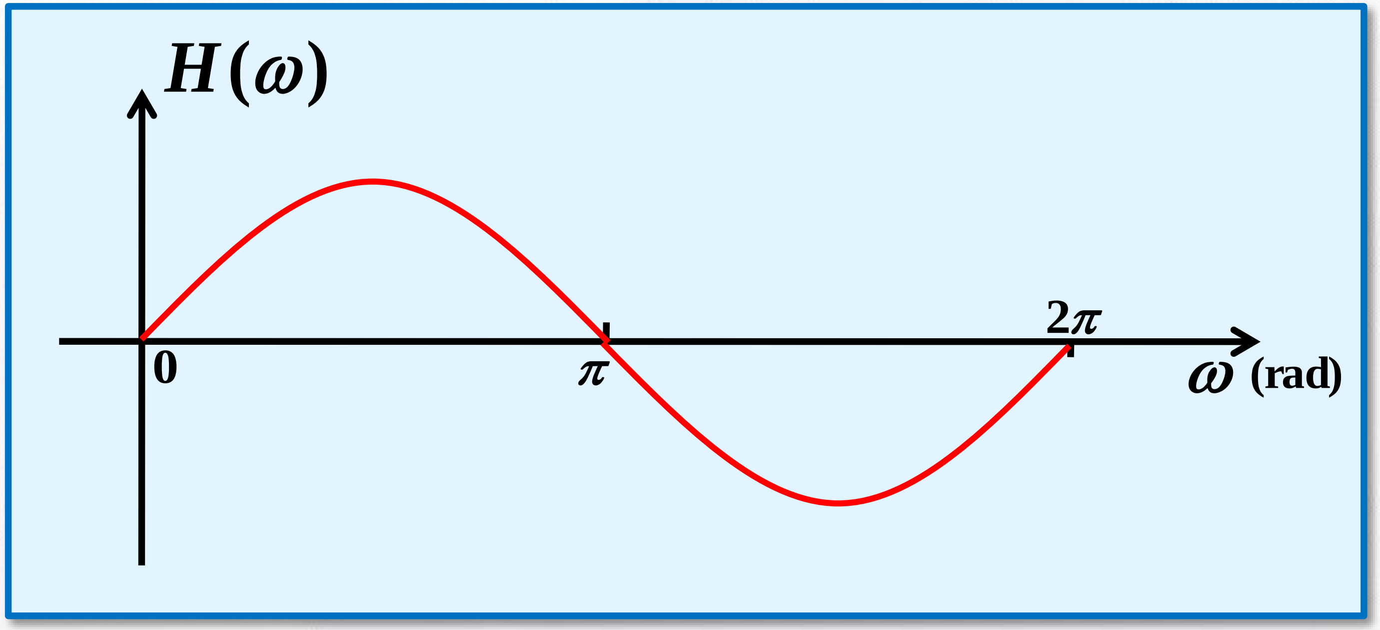
$$\boxed{H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}c(n)\sin(\omega n)}$$

其中：

$$\boxed{c(n)=2h(\frac{N-1}{2}-n) \qquad n=1,\ldots,\frac{N-1}{2}}$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}c(n)\sin(\omega n)$$



$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$时，$\sin(\omega n)=0$

则$H(\omega)=0$, $\therefore z=\pm 1$是零点

$H(\omega)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$呈奇对称

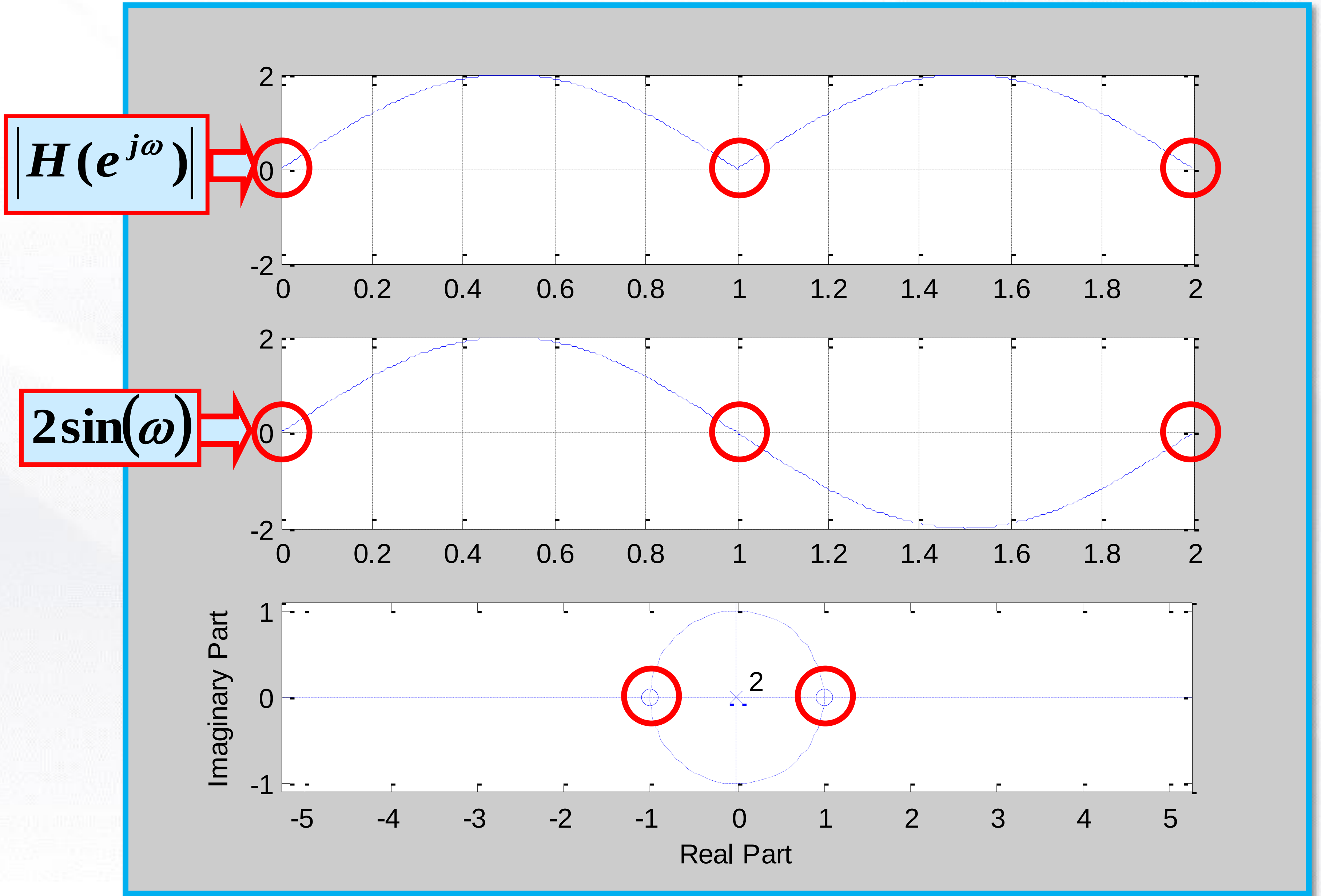
例3： $h(n)=\delta(n)-\delta(n-2)$

$$H(e^{j\omega})=1-e^{-j2\omega}=e^{-j\omega}(e^{j\omega}-e^{-j\omega})$$

$$=je^{-j\omega}2\sin(\omega)$$

$$=e^{j(\frac{\pi}{2}-\omega)}2\sin(\omega)$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点



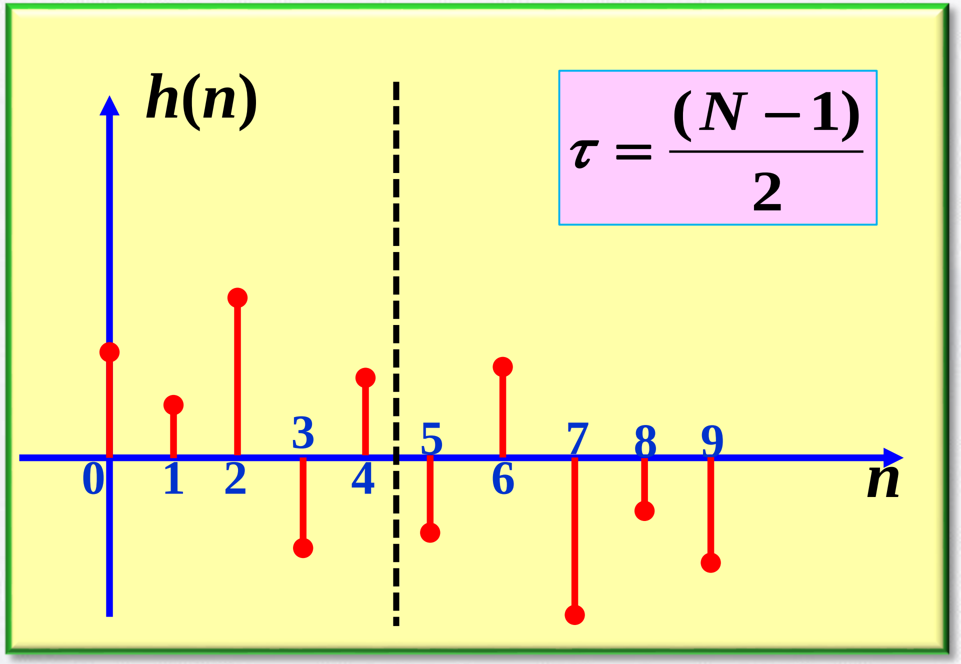
线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

(4) $h(n)$奇对称，N为偶数

幅度函数：

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$



线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

令 $\frac{N}{2}-n=m$

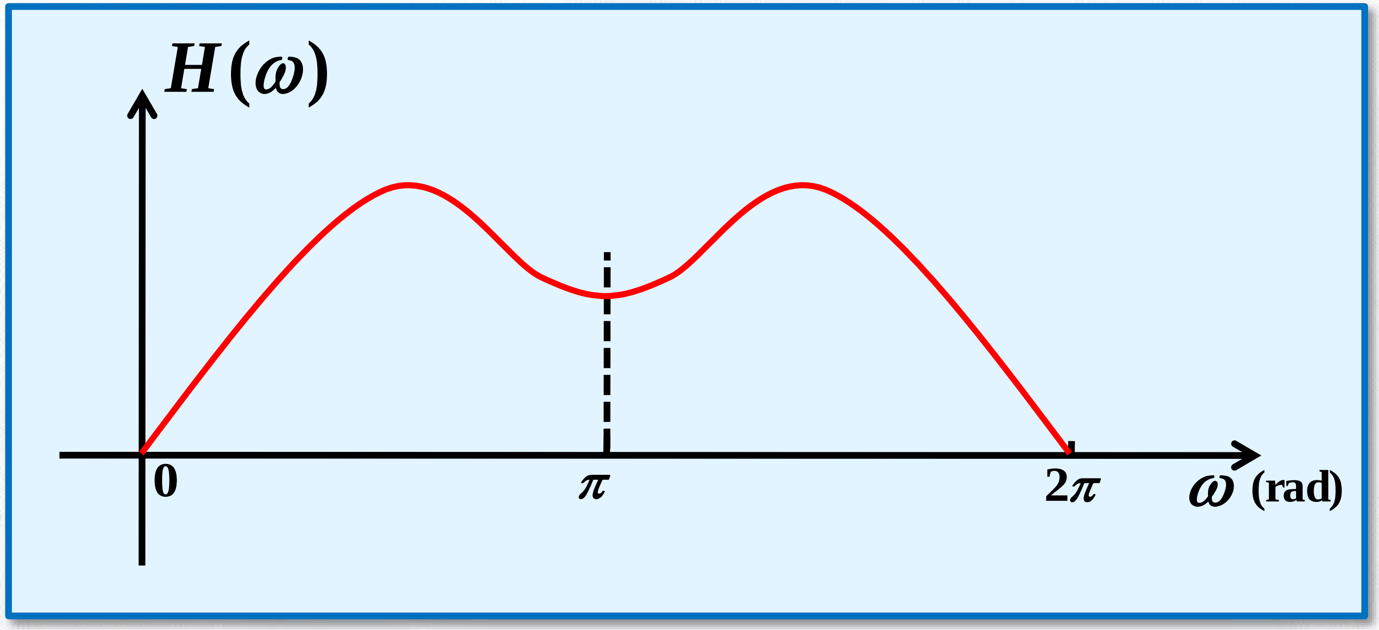
$$=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}2h(\frac{N}{2}-m)\sin\left((m-\frac{1}{2})\omega\right)$$

$$\boxed{H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}d(n)\sin\left(\omega(n-\frac{1}{2})\right)}$$

其中：$\boxed{d(n)=2h(\frac{N}{2}-n) \qquad n=1,\dots,\frac{N}{2}}$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n)\sin\left(\omega(n-\frac{1}{2})\right)$$



$\omega=0,\ 2\pi$时，$\sin(\omega(n-\frac{1}{2}))=0$

则$H(\omega)=0$, $\boxed{\therefore z=1\text{是零点}}$

故$H(\omega)$对$\omega=\pi$呈偶对称

例4： $h(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$

$$H(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega}=e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}})$$

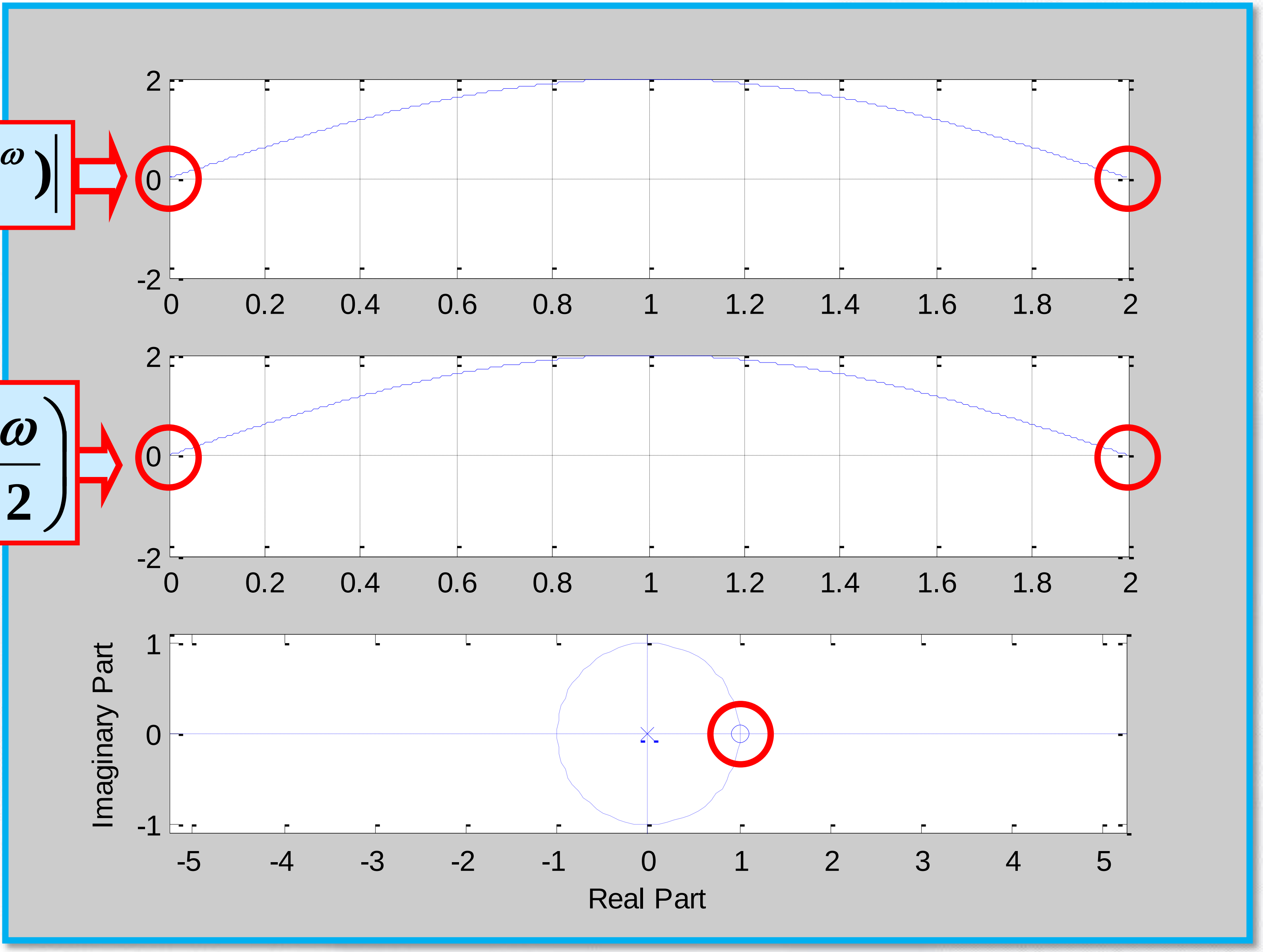
$$=je^{-j\frac{\omega}{2}}2\sin(\frac{\omega}{2})$$

$$=e^{j(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2})}2\sin(\frac{\omega}{2})$$

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

$$\left|H(e^{j\omega})\right|$$

$$2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



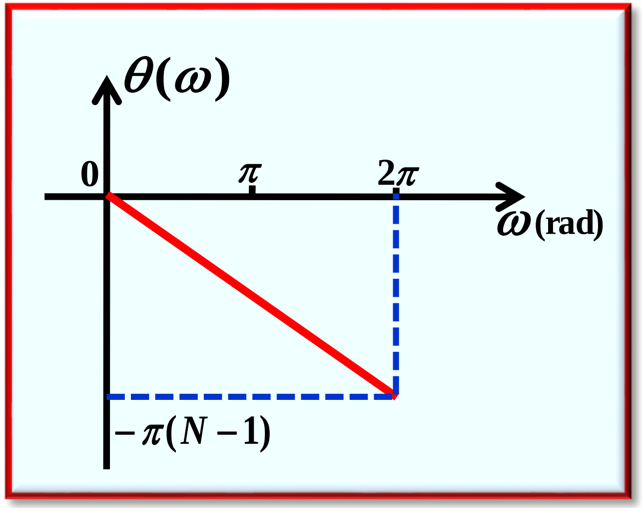
线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点

- $h(n)$不同对称特性，其长度的奇偶性不同的情况下：
  - 滤波器相位响应
  - 滤波器幅度响应
  - 滤波器设计时的注意事项

一类线性相位

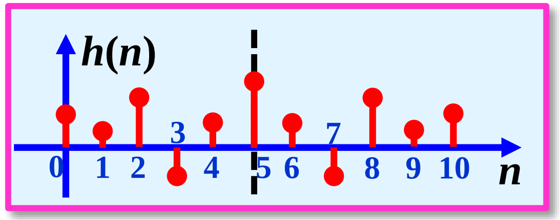
$$h(n)=h(N-1-n)$$

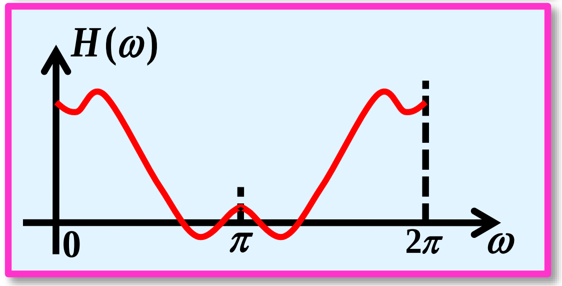
$$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$$



N为奇数

LP	√	HP	√	BP	√	BS	√





$$a(0)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

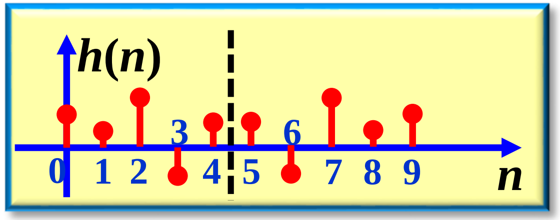
$$a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),\text{其他}n$$

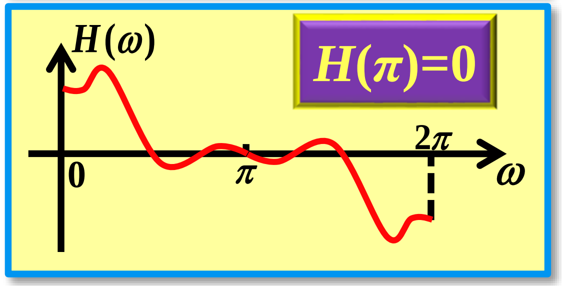
$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos(\omega n)$$

$H(\omega)$对$\omega=0$，π，2π呈偶对称

N为偶数

LP	√	HP	×	BP	√	BS	×





$$b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\ n\in\left[1,\frac{N}{2}\right]$$

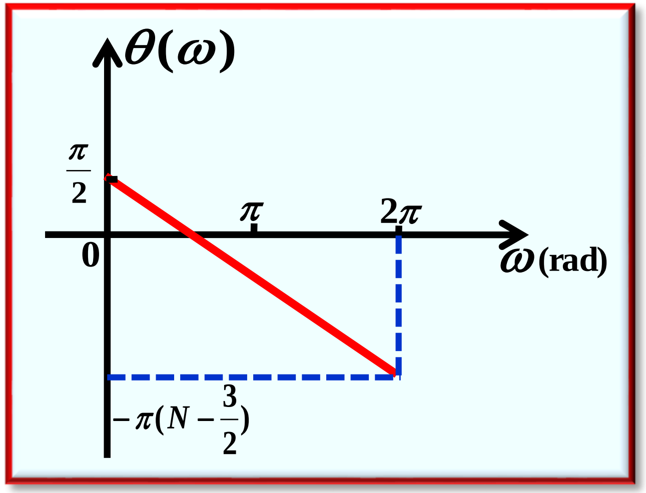
$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}b(n)\cos\left(\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$H(\omega)$对$\omega=\pi$呈奇对称

二类线性相位

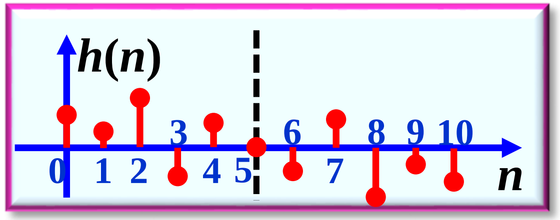
$$h(n) = -h(N-1-n)$$

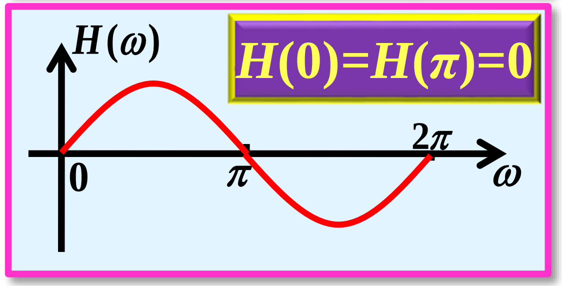
$$\theta(\omega) = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$



N为奇数

LP	✗	HP	✗	BP	√	BS	✗





$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right),$$

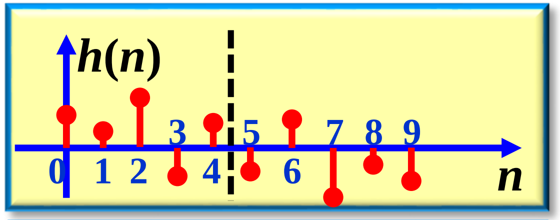
$$n \in \left[1, \frac{N-1}{2}\right]$$

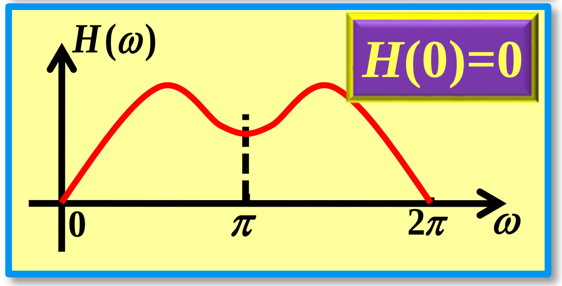
$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin(\omega n)$$

$H(\omega)$对$\omega = 0, \pi, 2\pi$呈奇对称

N为偶数

LP	✗	HP	√	BP	√	BS	✗





$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), n \in \left[1, \frac{N}{2}\right]$$

$$\therefore H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n)\sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$H(\omega)$对$\omega = \pi$呈偶对称

第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.1　线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

线性相位FIR滤波器的幅度响应的特点(3)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁