# 第二章　$z$ 变换与LSI系统频域分析

*The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

## 2.1　$z$ 变换的基本概念

### $z$ 变换的性质

华东理工大学信息科学与工程学院　万永菁

# 一、z变换的线性性质

若：$Z[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$Z[y(n)] = Y(z) \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$

则：$Z[ax(n)+by(n)] = aX(z)+bY(z) \quad R_{-}<|z|<R_{+}$

其中，$a$、$b$为任意常数，$R_{-}=\max(R_{x-},R_{y-})$，$R_{+}=\min(R_{x+},R_{y+})$

注意：如果这些线性组合中某些零点和极点互相抵消，则收敛域可能回扩大，而不是缩小。

## 一、$z$变换的线性性质

例：已知$x(n)=\cos(\omega_0 n)u(n)$，求它的$z$变换。

$$Z[\cos(\omega_0 n)u(n)] = Z\left[\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}u(n)\right]$$

$$=\frac{1}{2}Z\left[e^{j\omega_0 n}u(n)\right]+\frac{1}{2}Z\left[e^{-j\omega_0 n}u(n)\right]$$

收敛域$|z|>1$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$=\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$$

# 二、$z$变换的移位性质

若：$Z[x(n)]=X(z)\quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则：$Z[x(n-m)]=z^{-m}X(z)\quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

$z$变换的收敛域由序列移位情况的不同发生变化

证明：$$Z[x(n-m)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-m)z^{-n}$$

$$\underline{\underline{令k=n-m}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-(k+m)}$$

$$=z^{-m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k}=z^{-m}X(z)$$

# 二、z变换的移位性质

例： $Z[\delta(n)]=1 \quad , \quad |z|\in[0,\infty]$

$Z[\delta(n-1)]=z^{-1} \quad , \quad |z|\in(0,\infty]$

$Z[\delta(n+1)]=z \quad , \quad |z|\in[0,\infty)$

例：求序列 $x(n) = u(n)-u(n-3)$ 的z变换及收敛域。

$$Z[u(n)-u(n-3)] = Z[u(n)] - Z[u(n-3)]$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z\cdot z^{-3}}{z-1}=\frac{z^{-2}(z^3-1)}{z-1}=z^{-2}(z^2+z+1)$$

$$=\frac{z^2+z+1}{z^2}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$$

收敛域是 $|z|\neq 0$

$x(n) = u(n) - u(n-3)$

$= R_3(n)$

$= \delta(n)+ \delta(n-1)+ \delta(n-2)$

$X(z) = 1+z^{-1}+z^{-2}$

$$ROC\begin{cases}|z|\neq 0\\ |z|>0\\ |z|\in(0,\infty]\end{cases}$$

说明：序列$u(n)$和$u(n-3)$z变换的收敛域应该是$|z|>1$，而$u(n)-u(n-3)$的收敛域为$|z|\neq 0$，很明显收敛域扩大了。这是因为$u(n)$和$u(n-3)$是单边序列，而$u(n)-u(n-3)$是有限长序列。

# 三、 z变换的卷积和性质

设$y(n)$为$x(n)$与$h(n)$的卷积和：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

若有：

$$X(z)=Z[x(n)]\quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$H(z)=Z[h(n)]\quad R_{h-}<|z|<R_{h+}$$

则：

$$\boxed{\begin{aligned}&Y(z)=Z[y(n)]=X(z)\cdot H(z)\\&\max[R_{x-},R_{h-}]<|z|<\min[R_{x+},R_{h+}]\end{aligned}}$$

说明：

$Y(z)$的收敛域理论上是$X(z)$和$H(z)$的重叠部分，但若在收敛域边界上一个 $z$ 变换的零点与另一个 $z$ 变换的极点抵消的话，则收敛域可能会扩大。

例：设$x(n)=a^n u(n)$，$h(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1)$，求：$x(n)*h(n)$

解：$$X(z)=Z[x(n)]=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

$$H(z)=Z[h(n)]=\frac{z}{z-b}-\frac{a}{z-b}=\frac{z-a}{z-b} \qquad |z|>|b|$$

$$Y(z)=X(z)\cdot H(z)=\frac{z}{z-b} \qquad |z|>|b|$$

我们发现，在$|z|=|a|$处，$X(z)$的极点与$H(z)$的零点抵消，若$|b|<|a|$收敛域扩大。

$$y(n)=x(n)*h(n)=Z^{-1}[Y(z)]=b^n u(n)$$

注：z变换其他性质请参阅教材。

| 性质 | 序列 | z变换公式 | 收敛域 |
| --- | --- | --- | --- |
| | $x(n)$<br>$y(n)$ | $X(z)$<br>$Y(z)$ | $R_x$<br>$R_y$ |
| 线性 | $ax(n)+by(n)$ | $aX(z)+bY(z)$ | $R_x \cap R_y$ |
| 移位 | $x(n-n_0)$ | $z^{-n_0}X(z)$ | $R_x$ 可能加上或去除 $z=0$ 或 $z=\infty$ |
| 乘以指数 | $a^n x(n)$ | $X(z/a)$ | $\lvert a \rvert R_x$ |
| z域微分 | $nx(n)$ | $-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$ | $R_x$ |
| 时间反转 | $x(-n)$ | $X(1/z)$ | $1/R_x$ |
| 共轭序列 | $x^*(n)$ | $X^*(z^*)$ | $R_x$ |
| 时域卷积 | $x(n)*y(n)$ | $X(z)Y(z)$ | $R_x \cap R_y$ 如果零极点抵消收敛域可能扩大 |

# 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

## 2.1 $z$ 变换的基本概念

### $z$ 变换的性质

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁