

## 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The  $z$  Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

2.1

$z$  变换的基本概念

2.2

离散时间信号傅里叶变换

2.3

系统函数及其与系统性质的关系

2.4

系统频率响应的意义

2.5

几何法画频率响应

2.6

特殊滤波器的设计



## 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The  $z$  Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

### 2.6 特殊滤波器的设计

#### 最小相位滤波器的设计

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁



### (1) 逆系统的概念: *Inverse System*

对于一个系统函数为 $H(z)$ 的LSI系统，其逆系统定义为：**系统函数 $H_i(z)$ 的逆系统与 $H(z)$ 级联后，总的系统函数是1。**

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1$$

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} \longrightarrow H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$$

$$g(n) = h(n) * h_i(n) = \delta(n)$$

# 最小相位滤波器系统函数的特点

## (2) 最小相位滤波器概念的引出

一个因果稳定的系统 $H(z)$ ，如果要求它的逆系统 $H_i(z)$ 也是因果稳定的，那么要求该系统 $H(z)$ 的全部零点和极点都在单位圆内。

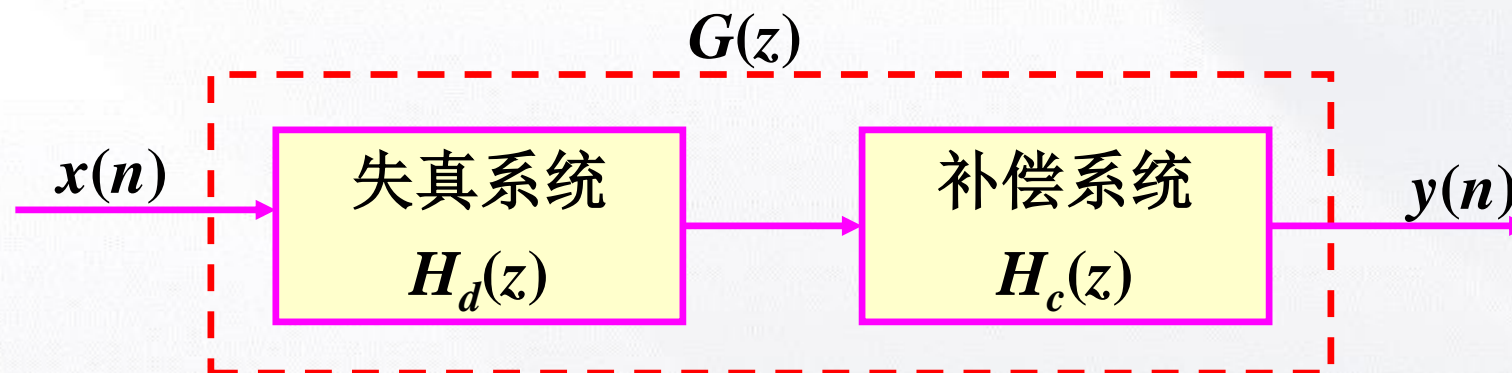
$H(z)$ 的全部零点和极点都在单位圆内的系统称为最小相位系统。

↑  
**最小相位滤波器**



# 最小相位滤波器的基本概念

## (3) 频率响应的补偿 —— 非最小相位系统分解的由来



信号处理的目标:  $G(z)=1$  或  $x(n)=y(n)$

信号要求:  $G(z) = H_d(z) \cdot H_c(z)$

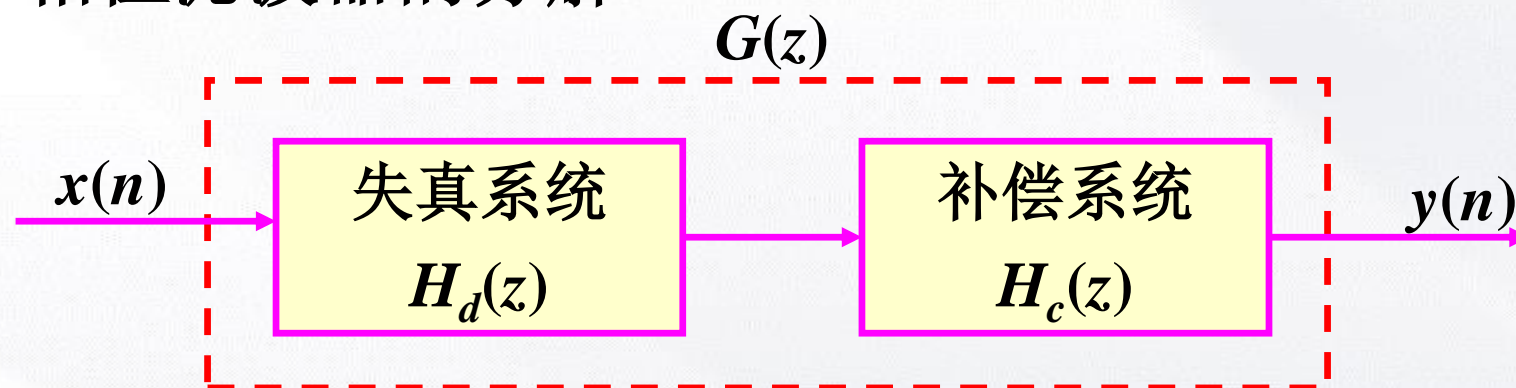
$\therefore H_d(z)$  与  $H_c(z)$  互为逆系统。



对于一般的  $H_d(z)$ , 它是因果稳定的, 但不一定是最小相位系统, 若  $H_d(z)$  在单位圆外有零点, 那么其逆系统将无法保证因果稳定!

# 最小相位滤波器的基本概念

## ➤ 非最小相位滤波器的分解



$$H_d(z) = H_{d\min}(z)H_{ap}(z)$$

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{d\min}(z)}$$

$$G(z) = H_d(z)H_c(z) = H_{ap}(z)$$

# 最小相位滤波器的基本概念

## (4) 最小相位滤波器名称的含义及其性质

### ➤ 最小相位滞后性质

*The Minimum Phase-Lag Property*

任何非最小相位系统 $H(z)$ 都能表示为:

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

其相位响应有如下关系:

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{\min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

解释: 前面已经说明, 全通系统的群延迟总是为正, 意味着全通系统部分总是使相位滞后。因此,  $H_{\min}(z)$ 则具有最小相位滞后的特性, 故称最小相位滤波器。



# 最小相位滤波器的基本概念

## ➤ 最小群延迟性质

### *The Minimum Group-Delay Property*

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{\min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

解释：全通系统的群延迟总是为正，因此，最小相位滤波器 $H_{\min}(z)$   
具有最小群延迟的特性。

## ➤ 最小能量延迟性质

### *The Minimum Energy-Delay Property*

从时域分析，最小相位滤波器时域响应的波形延迟和能量延迟均最小。



# 最小相位滤波器的举例

例：一个因果稳定LSI离散时间系统的系统函数如下，求一个最小相位滤波器系统函数  $H_{\min}(z)$  和一个全通滤波器系统函数  $H_{ap}(z)$ ，使得： $H(z) = H_{\min}(z) H_{ap}(z)$ 。

$$H(z) = \frac{(1 - 3z^{-1})}{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})}$$

拆分  $H(z)$ ，单位圆内零极点归为  $H_{\min}(z)$ ，其余归为  $H_{ap}(z)$

$$H_{\min}(z) = \frac{1}{(z - \frac{3}{4})} \cdot \frac{(z - \frac{1}{3})}{1}$$

凑出最小相位系统：

零极点一定在单位圆内

$$H_{ap}(z) = \frac{(z - 3)}{1} \cdot \frac{1}{(z - \frac{1}{3})}$$

配成全通系统：

零极点共轭倒易



## 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The  $z$  Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

### 2.6 特殊滤波器的设计

#### 最小相位滤波器的设计

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

