第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

第六章　IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.4　双线性变换法

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

➢ 双线性变换法的变换原理

◆ 方法：

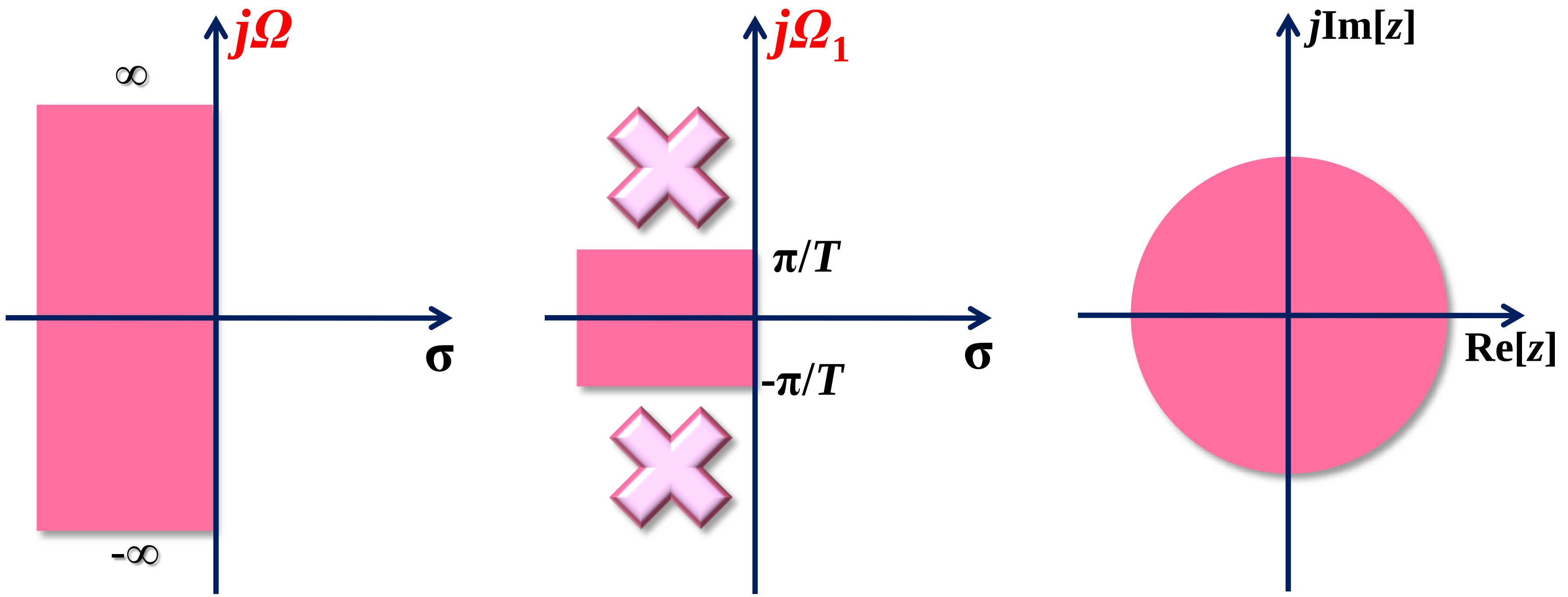
采用**非线性压缩**的方法，将模拟角频率Ω压缩至折叠频率以内。即：

若：Ω： $\underline{-\infty \sim 0 \sim \infty}$，压缩后得到$\Omega_1$

Ω_1： $\underline{-\pi/T \sim 0 \sim \pi/T}$

$$\Omega = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\Omega_1 T\right)$$

6.4 双线性变换法



$$S\text{平面} \xrightarrow[\Omega=\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\Omega_1 T)]{\text{非线性压缩}} S_1\text{平面} \xrightarrow[z=e^{s_1 T}]{\text{单值映射}} Z\text{平面}$$

6.4 双线性变换法

找z与s的关系：　由：$\Omega=\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\Omega_1 T)$，得：

$$\Omega=\frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega_1 T)}{\cos(\frac{1}{2}\Omega_1 T)}=\frac{(e^{j\frac{\Omega_1}{2}T}-e^{-j\frac{\Omega_1}{2}T})/2j}{(e^{j\frac{\Omega_1}{2}T}+e^{-j\frac{\Omega_1}{2}T})/2}$$

$$\Rightarrow\quad j\Omega=\frac{(e^{j\frac{\Omega_1}{2}T}-e^{-j\frac{\Omega_1}{2}T})}{(e^{j\frac{\Omega_1}{2}T}+e^{-j\frac{\Omega_1}{2}T})}$$

$$\Rightarrow\quad s=\frac{(e^{\frac{s_1T}{2}}-e^{-\frac{s_1T}{2}})}{(e^{\frac{s_1T}{2}}+e^{-\frac{s_1T}{2}})}=\frac{(1-e^{-s_1T})}{(1+e^{-s_1T})}$$

$$s=\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}$$

一般来说，为使AF与DF的某一频率有对应关系，可引入常数C：

$$\Omega = C \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\Omega_1 T\right)$$

$$\boxed{s = C \cdot \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}}$$

➢ 变换常数C的选取：

常数C用来调节频率间的对应关系：

若希望AF与DF在低频处有较为确切的对应关系，可以选择：

$$\boxed{C = \frac{2}{T}}$$

解释：在低频处有较为确切的对应关系，即要求低频处：

$$\Omega \approx \Omega_1$$

当Ω_1较小时，处于低频处，此时有：

$$\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\Omega_1 T\right) \approx \frac{1}{2}\Omega_1 T$$

而Ω和Ω_1的对应公式为：

$$\cancel{\Omega} = C \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\Omega_1 T\right) \approx C \cdot \frac{1}{2}\cancel{\Omega_1} T$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2}{T}} \Rightarrow \boxed{s = \frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}}$$

6.4 双线性变换法

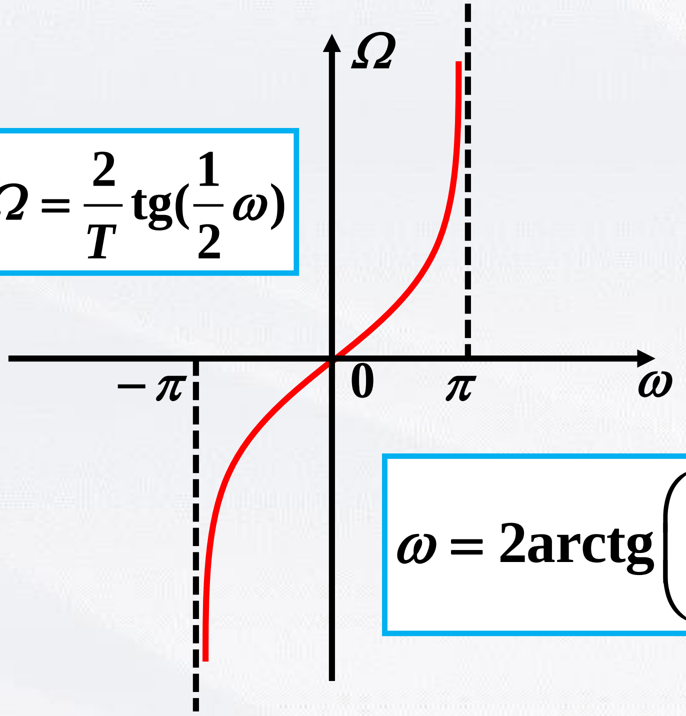
➢ 优点、问题及其解决办法

◆ 优点：解决了混叠问题。

$$\Omega = C\cdot \mathrm{tg}(\frac{1}{2}\Omega_1 T) = \frac{2}{T}\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\Omega_1 T)$$

◆ 问题：Ω与ω呈非线性关系！

$$\Omega = \frac{2}{T}\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\Omega_1 T) = \frac{2}{T}\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\omega)$$



$$\Omega = \frac{2}{T}\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\omega)$$

$$\omega = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

6.4 双线性变换法

数字指标

ω_0

指标转换

不预畸，线性变换

模拟指标

$\Omega_0 = \omega_0 / T$

S→Z

非线性

产生畸变

$$\omega = 2\text{arctg}(\frac{\Omega_0 T}{2}) = 2\text{arctg}(\frac{\omega_0}{2}) \neq \omega_0$$

➢ 解决方法：通过频率预畸来解决。

模拟指标

$$\Omega_0 = \frac{2}{T}\text{tg}(\frac{\omega_0}{2})$$

数字指标

ω_0

指标转换

预畸，非线性变换

S→Z

非线性

不产生畸变

$$\omega = 2\text{arctg}(\frac{T}{2}\Omega)$$

$$= 2\text{arctg}\left(\frac{T}{2}\frac{2}{T}\text{tg}\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right) = \omega_0$$

第六章　IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.4　双线性变换法

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁