

# 第七章 FIR数字滤波器设计

## *FIR Digital Filter Design*

- 7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点
- 7.2 利用窗函数法设计FIR滤波器
- 7.3 利用频率采样法设计FIR滤波器
- 7.4 利用等波纹逼近法设计FIR滤波器



# 第七章 FIR数字滤波器设计

*FIR Digital Filter Design*

## 7.3 利用频域采样法设计FIR滤波器(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁



### 频域采样法设计FIR滤波器

- 频域采样法的**设计思路**
- 关于**线性相位约束**的考虑
- **逼近误差及其改进措施**
- 含噪音频**滤波实例**

# 一、设计思路

对理想频率响应等间隔采样，并将其作为实际FIR数字滤波器的频率特性的抽样值。

$$H(k) = H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

得到 $H(k)$ 后，由IDFT定义，可以用这 $N$ 个采样值 $H(k)$ 来唯一确定单位脉冲响应 $h(n)$ ，即

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-nk}$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

# 一、设计思路

## 频域采样法设计FIR滤波器

### ➤ 关于线性相位约束的考虑

➤  $h(n)$  偶对称,  $N$  为奇数

$H(\omega)$  以  $0, \pi, 2\pi$  呈偶对称

➤  $h(n)$  偶对称,  $N$  为偶数

$H(\omega)$  以  $\pi$  呈奇对称,  $H(\pi)=0$

➤  $h(n)$  奇对称,  $N$  为奇数

$H(\omega)$  以  $0, \pi, 2\pi$  呈奇对称,  
 $H(0)=H(\pi)=0$

➤  $h(n)$  奇对称,  $N$  为偶数

$H(\omega)$  以  $\pi$  呈偶对称,  $H(0)=0$

## 二、关于线性相位约束的考虑

如果所设计的是线性相位的FIR滤波器，则其采样值 $H(k)$ 的幅度和相位一定要满足线性相位滤波器的约束条件。

$$h(n) = h(N-1-n) \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

$h(n)$ 偶对称，一类线性相位

$$\theta(\omega) = -\tau\omega$$

$$\theta_k = -\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k = -\frac{N-1}{N} \pi k$$

$N$ 为奇数

$$H_k = H_{N-k}$$

$H(\omega)$ 以 $0, \pi, 2\pi$ 呈偶对称

$N$ 为偶数

$$H_k = -H_{N-k}$$

$H(\omega)$ 以 $\pi$ 呈奇对称  
 $H(\pi)=0$

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

$h(n)$ 奇对称，二类线性相位

$$\theta(\omega) = \pm \frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

$$\theta_k = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{N} \pi k$$

$N$ 为奇数

$$H_k = -H_{N-k}$$

$H(\omega)$ 以 $0, \pi, 2\pi$ 呈奇对称  
 $H(0)=H(\pi)=0$

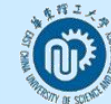
$N$ 为偶数

$$H_k = H_{N-k}$$

$H(\omega)$ 以 $\pi$ 呈偶对称  
 $H(0)=0$



## 7.3 利用频域采样法设计FIR滤波器



例：利用频率采样法，设计一个线性相位低通FIR数字滤波器，其理想幅频特性如下：

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

已知 $\omega_c=0.5\pi$ ，采样点数为奇数 $N=33$ 。试求各采样点的幅值 $H_k$ 及相位 $\theta_k$ ，也即求频域采样值 $H(k)$ 。

分析：  $N=33$ 为奇数，故只有两种可能：

(1) 一类线性相位， $N$ 为奇数。✓

(2) 二类线性相位， $N$ 为奇数。✗

→  $H(0)=H(\pi)=0$

→ 不符合题目中低通滤波器的要求



## 7.3 利用频域采样法设计FIR滤波器

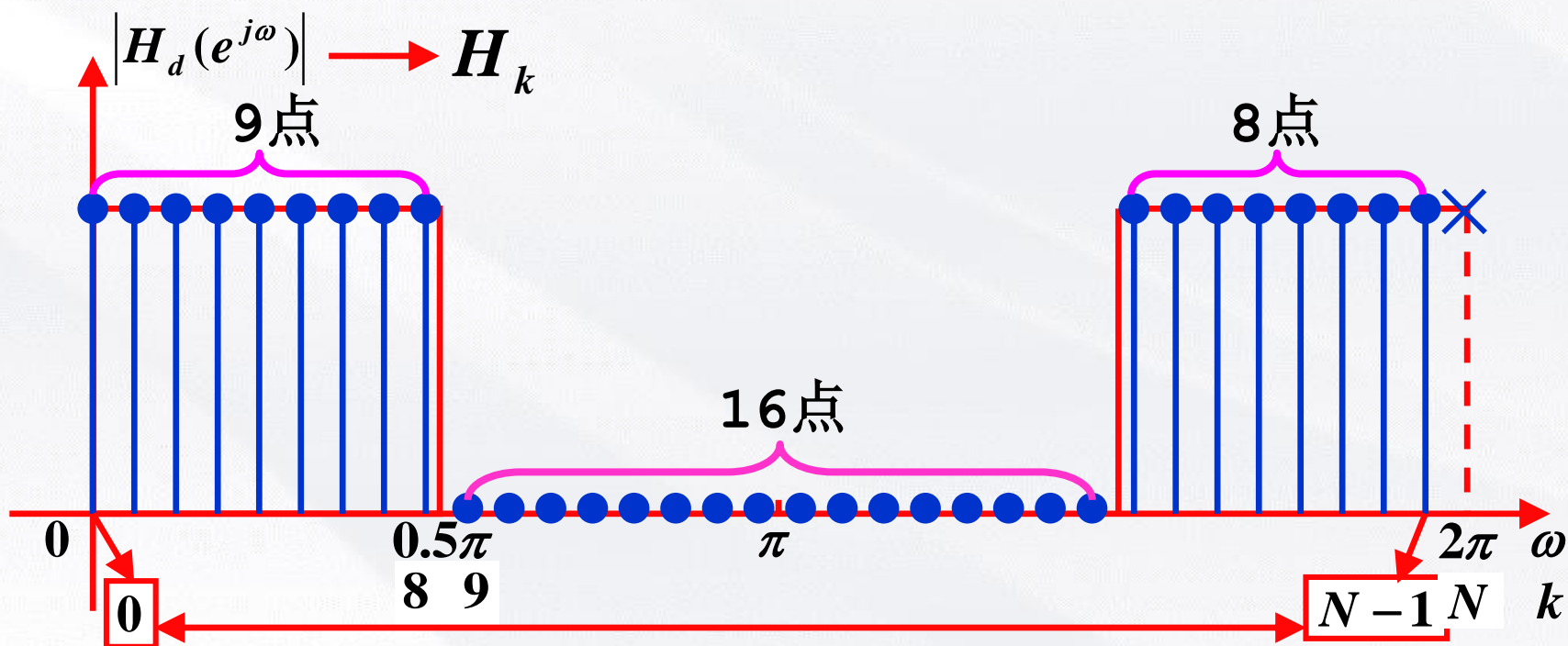


解：根据一类线性相位， $N$ 为奇数的条件可知，频域采样后的 $H_k$ 和 $\theta_k$ 应

满足下式：

$$H_k = H_{N-k}$$

$$\theta_k = -\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k = -\frac{N-1}{N} \pi k$$







## 7.3 利用频域采样法设计FIR滤波器



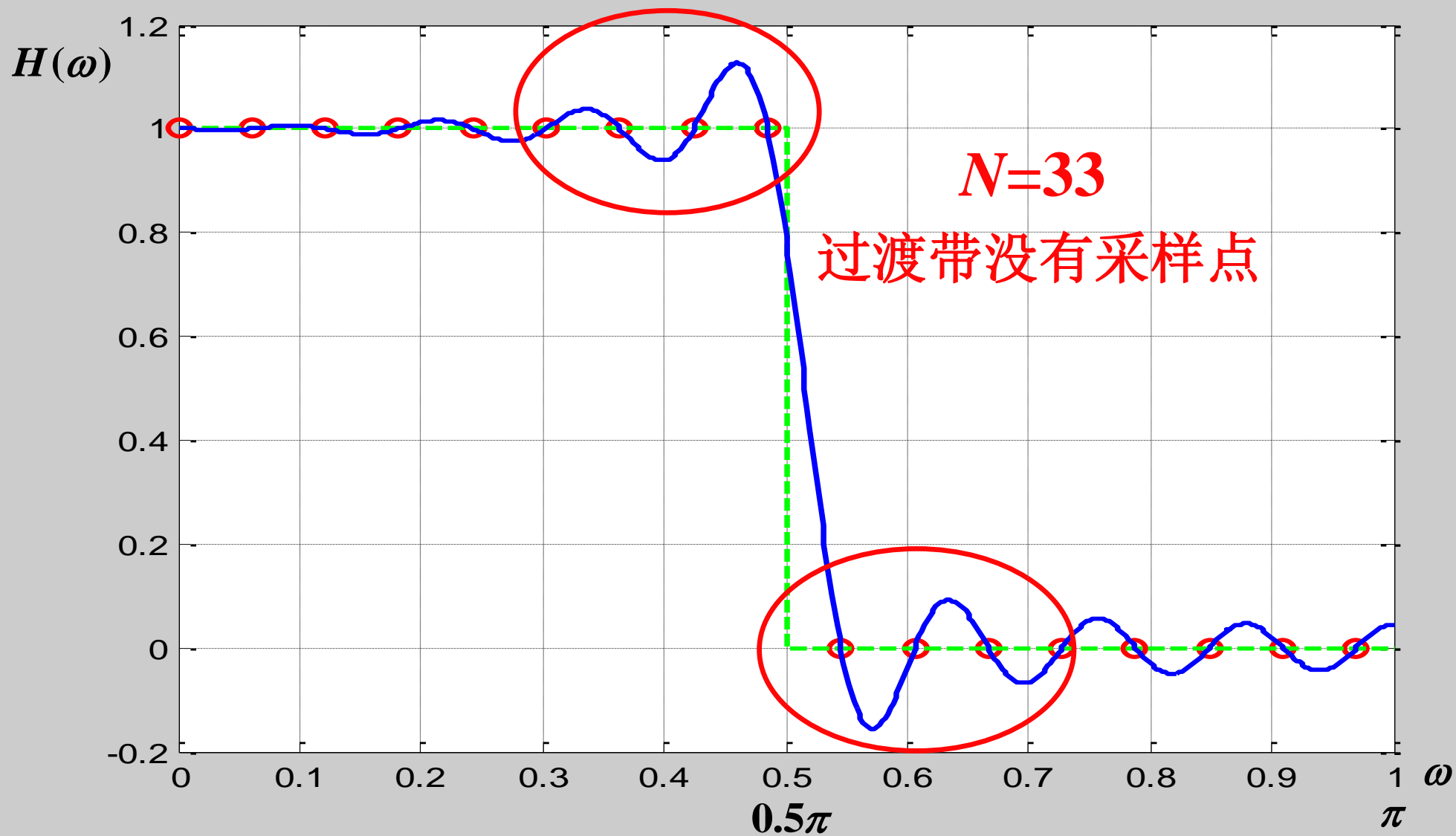
解:

$$H(k) = H_k e^{j\theta_k}$$

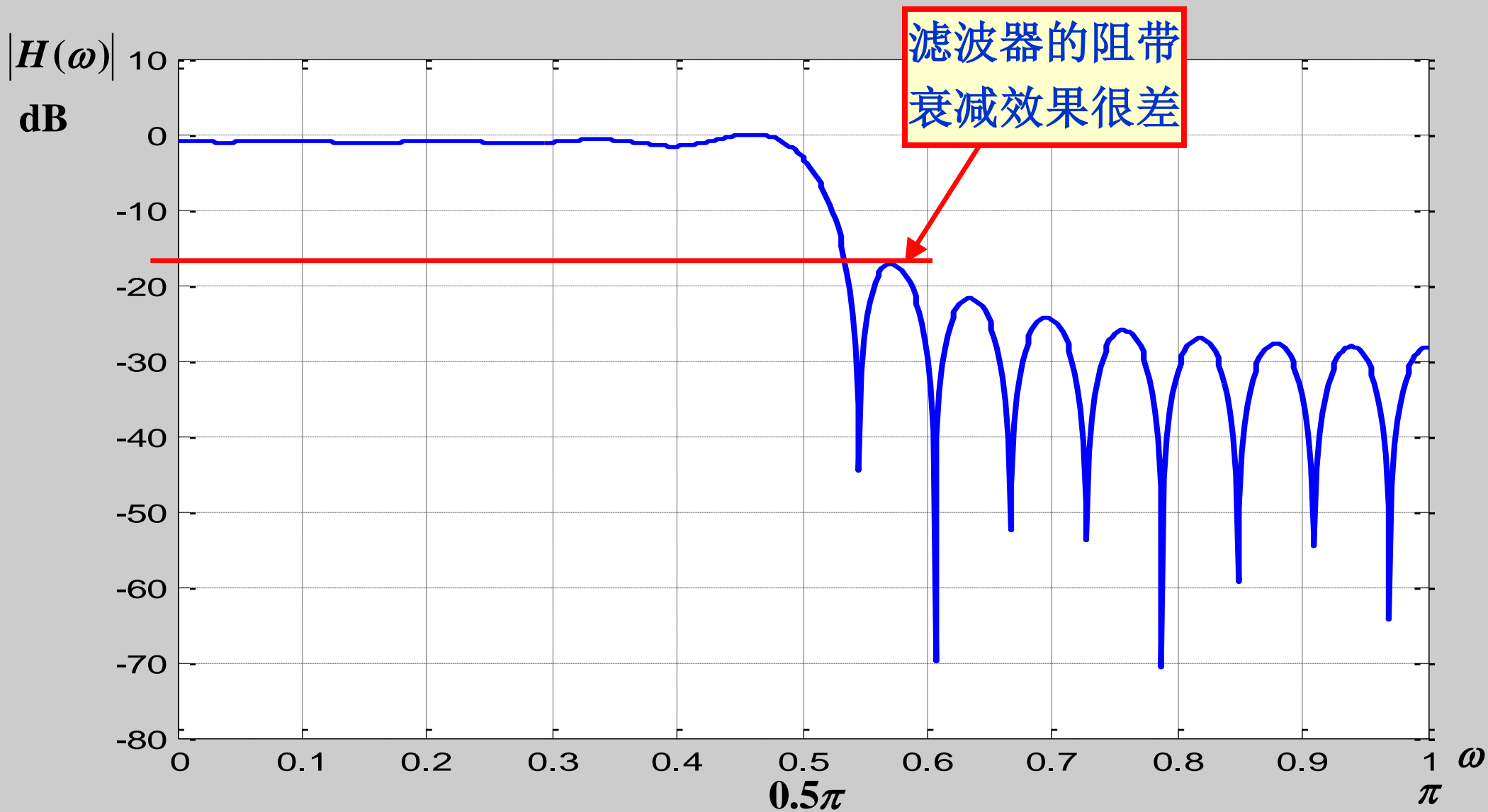
$$H_k = \begin{cases} 1 & \text{0点} \\ 0 & \text{8点} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{9点} & \text{8点} \\ 0 \leq k \leq 8, & 25 \leq k \leq 32 \\ 9 \leq k \leq 24 & \\ \text{16点} \end{matrix}$$

$$\theta_k = -\frac{N-1}{N} \pi k = -\frac{32}{33} \pi k \quad 0 \leq k \leq 32$$

## 7.3 利用频域采样法设计FIR滤波器



## 7.3 利用频域采样法设计FIR滤波器

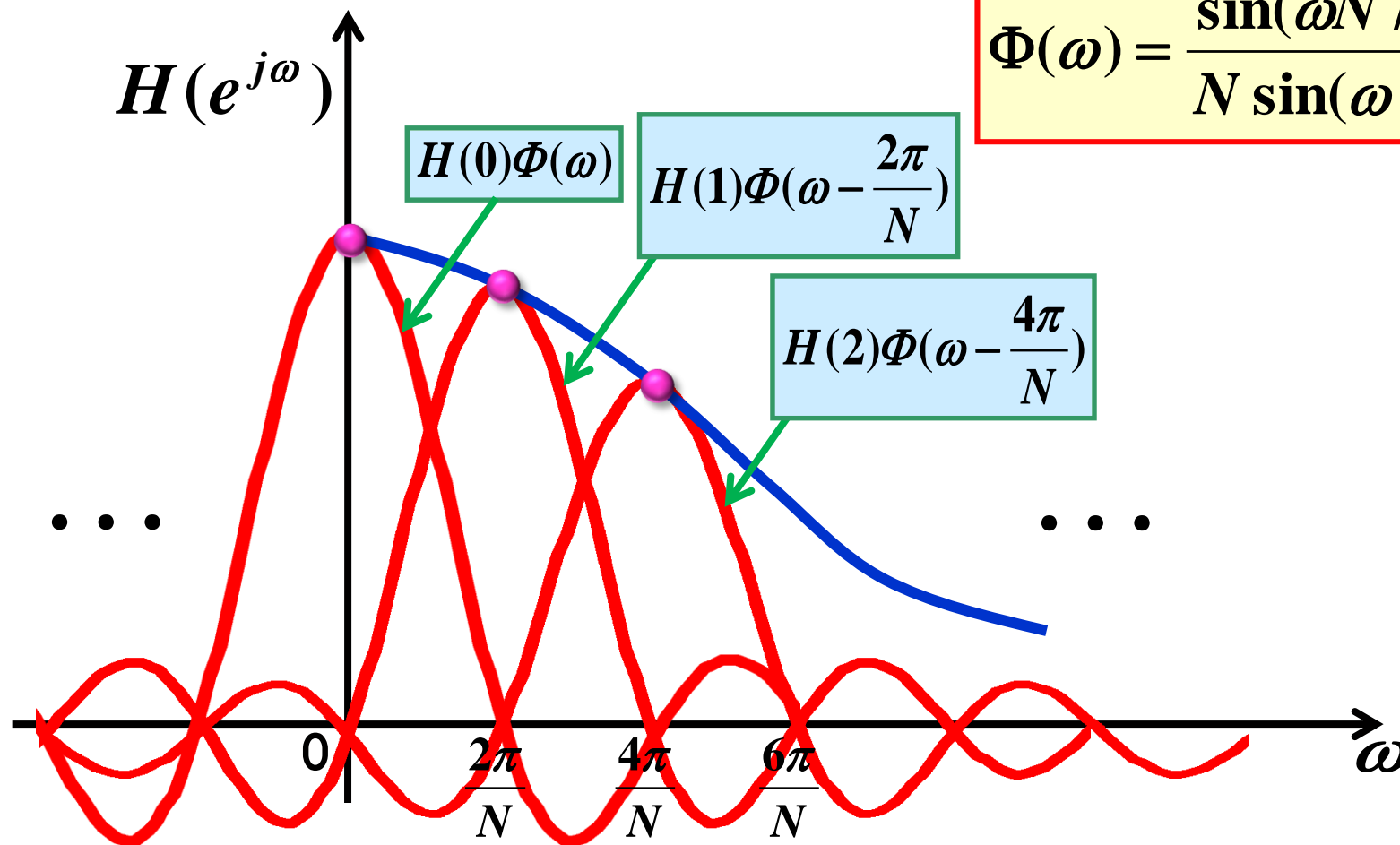


### 三、逼近误差及其改进措施

回忆内插公式:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{N \sin(\omega / 2)} e^{-j\omega(N-1)/2}$$



### 三、逼近误差及其改进措施

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

分析：

- (1) 如果采样点之间的理想频率特性变化越陡，则内插值与理想值的误差就越大，因而在理想频率特性的不连续点附近，就会产生肩峰和起伏。
- (2) 理想频率响应特性变化越平缓，则内插值越接近理想值，逼近误差越小。



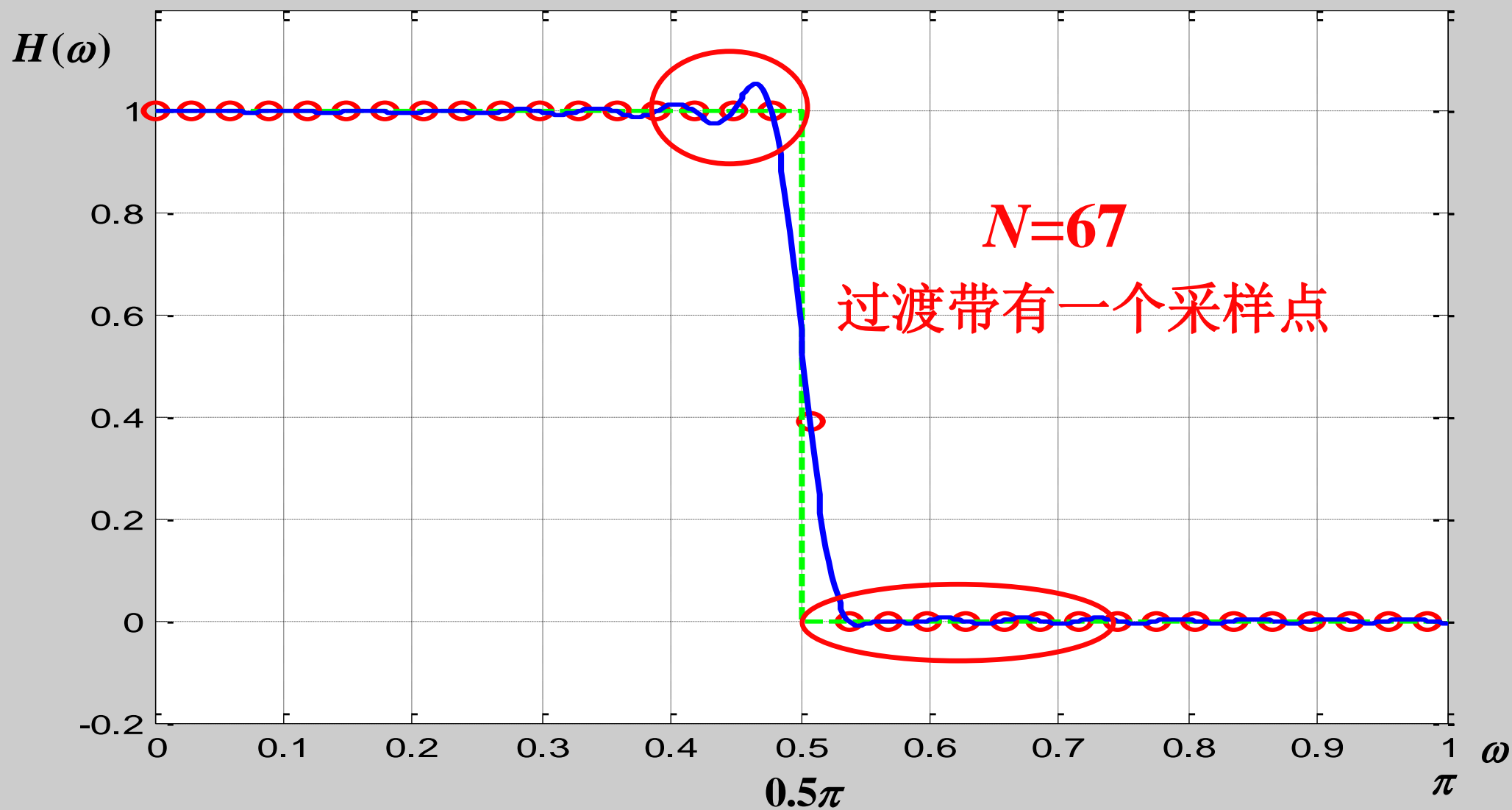
### 三、逼近误差及其改进措施

## 频域采样法设计FIR滤波器

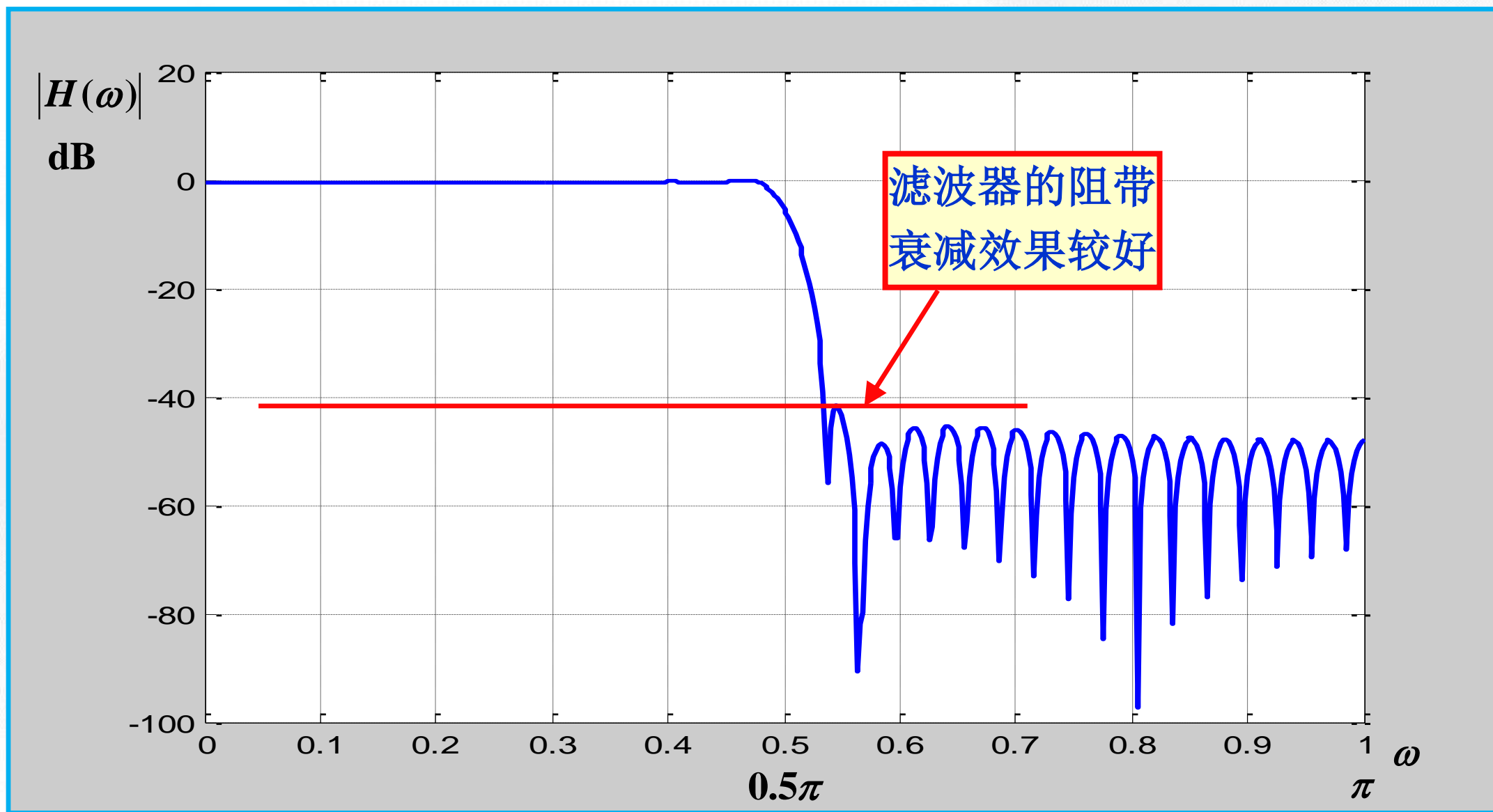
### ➤ 减小逼近误差的方法 —— 过渡带增加采样点

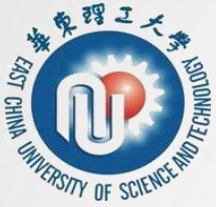
- (1) 不加过渡采样点时，阻带衰减大约为20dB。
- (2) 过渡内有一个采样点时(经验最优值为0.3904)，阻带衰减大约为 44dB ~ 54dB。
- (3) 过渡内有两个采样点时(经验最优值为0.5886、0.1065)，阻带衰减大约为 65dB ~ 75dB。

### 三、逼近误差及其改进措施



# 三、逼近误差及其改进措施





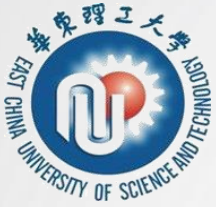
# 第七章 FIR数字滤波器设计

*FIR Digital Filter Design*

## 7.3 利用频域采样法设计FIR滤波器(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁





# 第七章 FIR数字滤波器设计

*FIR Digital Filter Design*

## 7.3 利用频域采样法设计FIR滤波器(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁



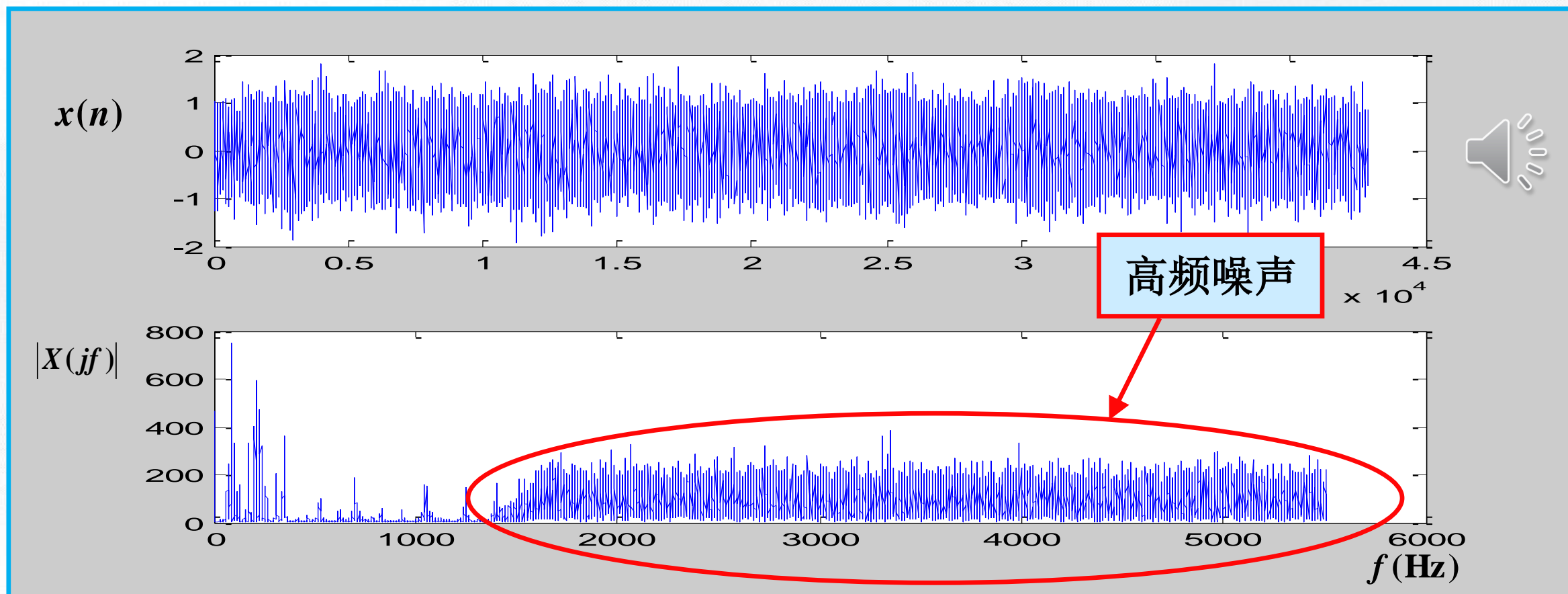




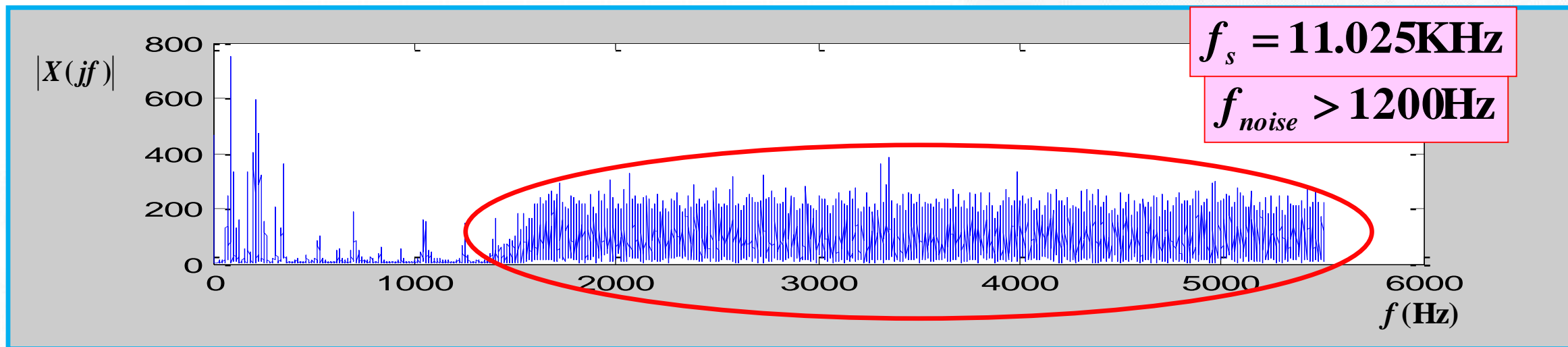
## ➤ 音频去噪实例



有一个被**高频噪声污染**的音频信号，分析信号的频谱，用频域采样法设计一个**FIR线性相位滤波器**对该音频信号进行滤波处理，去除高频噪声。



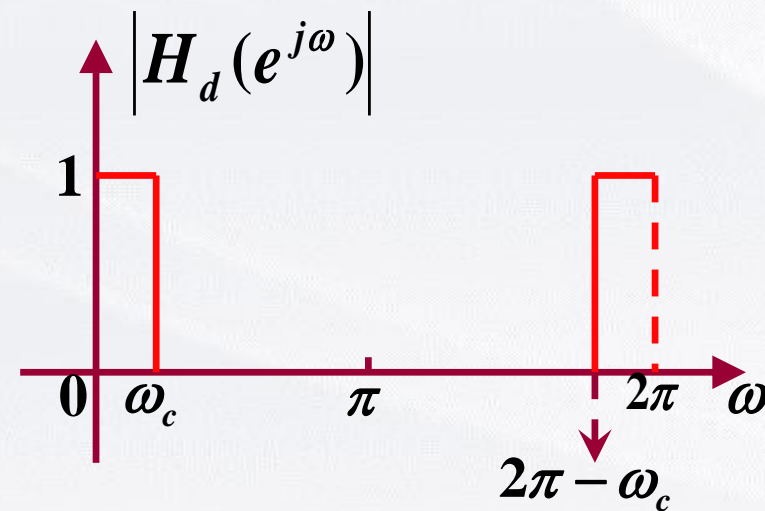
# (1) 设计理想滤波器的频率响应



幅频响应:

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c, 2\pi - \omega_c \leq \omega < 2\pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\omega_c = 2\pi \frac{\min(f_{\text{noise}})}{f_s} = 2\pi \frac{1200}{11025} \approx 0.22\pi (\text{rad})$$



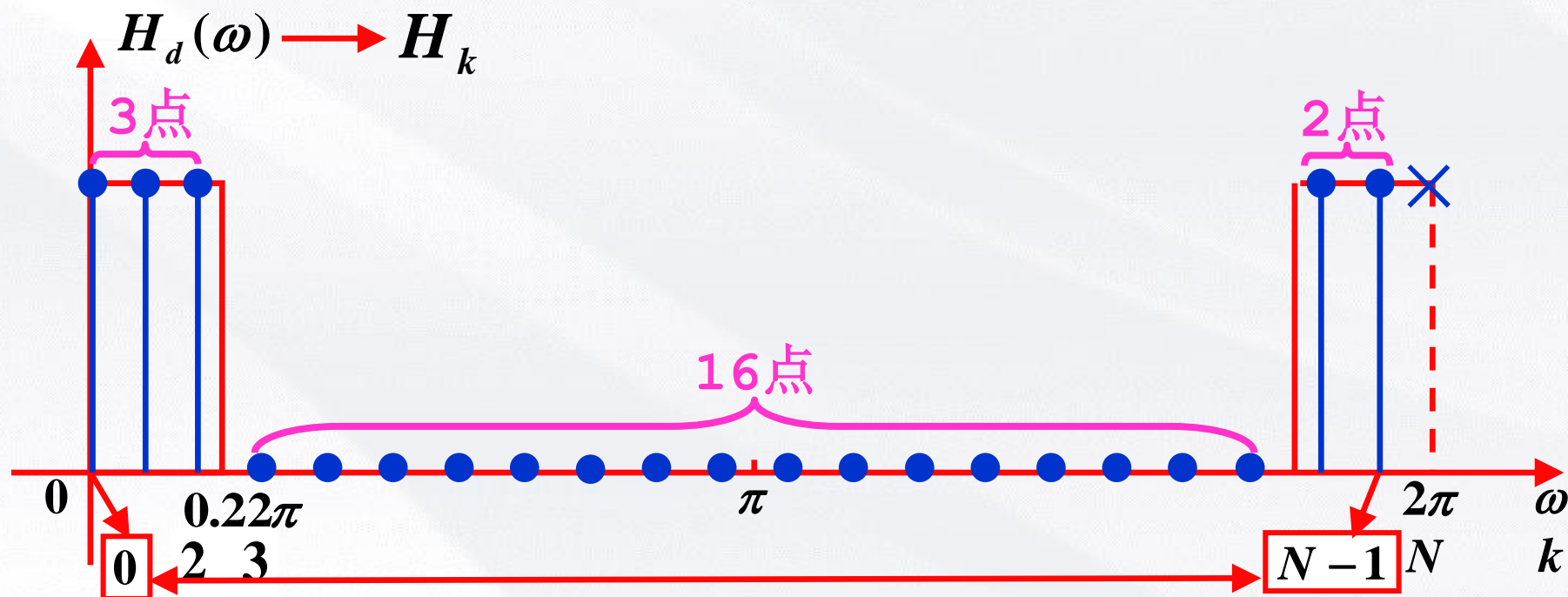
相频响应:  $\theta(\omega) = -\tau\omega$

线性相位 FIR 数字低通滤波器

若选择一类线性相位、 $N=21$ ，过渡带上不设采样点，则频域采样后的  $H_k$  和  $\theta_k$  应满足下式：

$$H_k = H_{N-k}$$

$$\theta_k = -\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k = -\frac{N-1}{N} \pi k$$





## ➤ 音频去噪实例



解:

$$H(k) = \underline{H_k} e^{j\underline{\theta_k}}$$

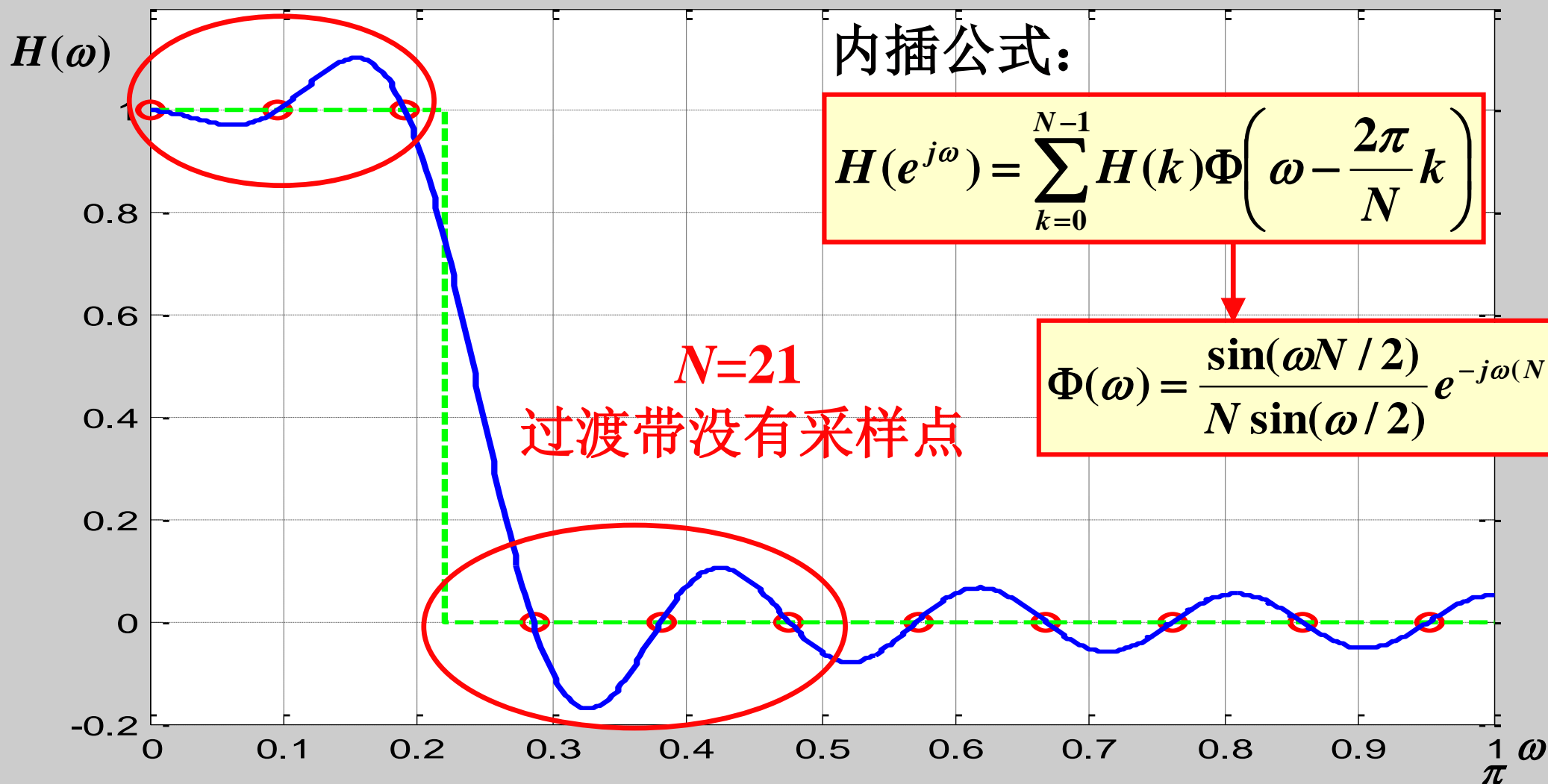
$$0 \leq k \leq 20$$

$$H_k = \begin{cases} 1 & \begin{array}{l} \text{3点} \\ 0 \leq k \leq 2, 19 \leq k \leq 20 \end{array} \\ 0 & \begin{array}{l} \text{2点} \\ 3 \leq k \leq 18 \\ \text{16点} \end{array} \end{cases}$$

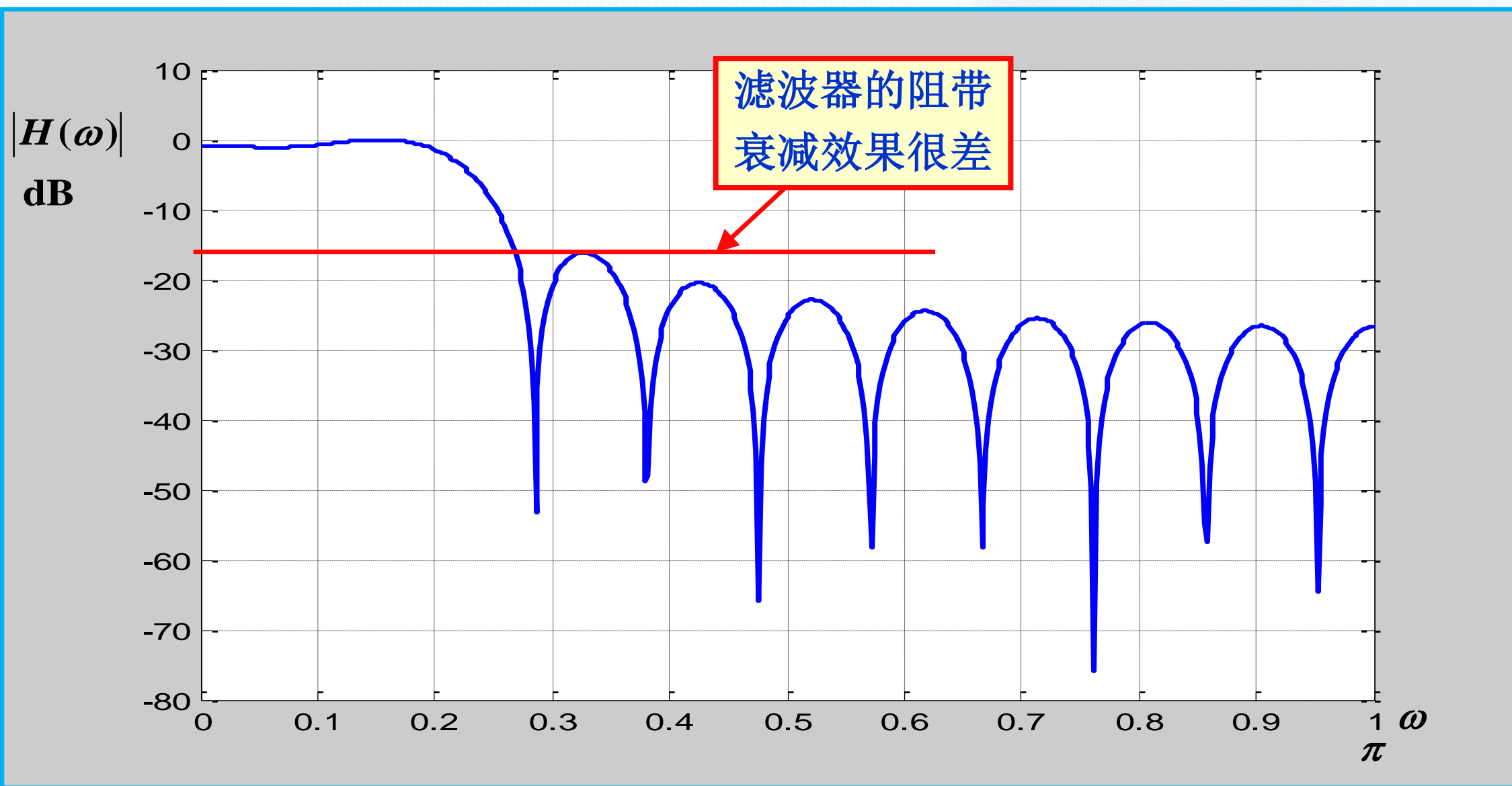
$$\theta_k = -\frac{N-1}{N} \pi k = -\frac{20}{21} \pi k$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{20} H(k) W_{21}^{-nk}$$

$$0 \leq n \leq 20$$





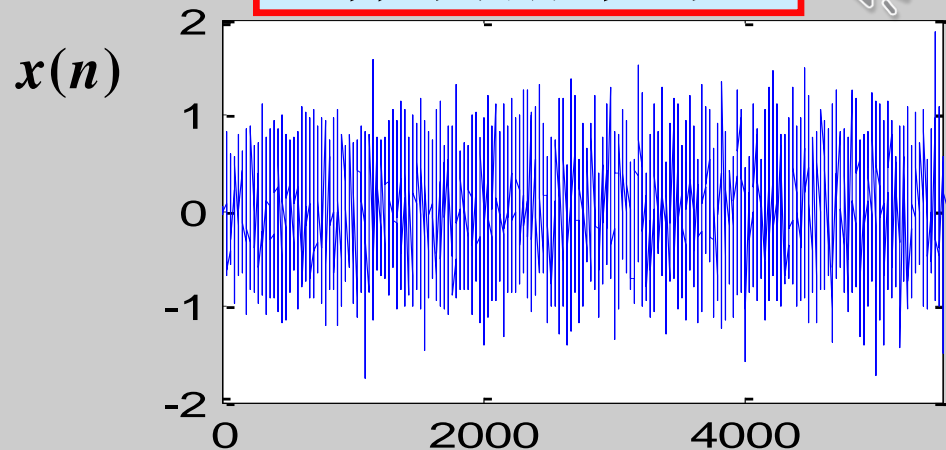


# 音频去噪实例

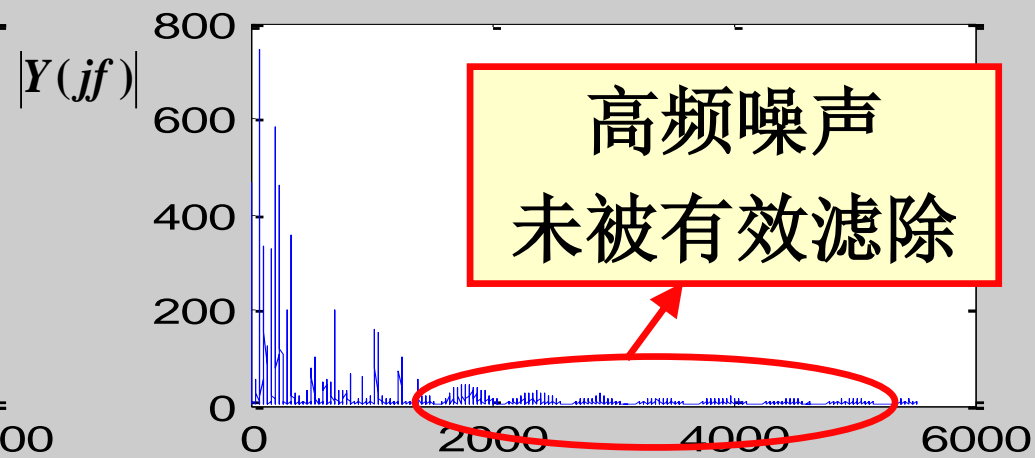
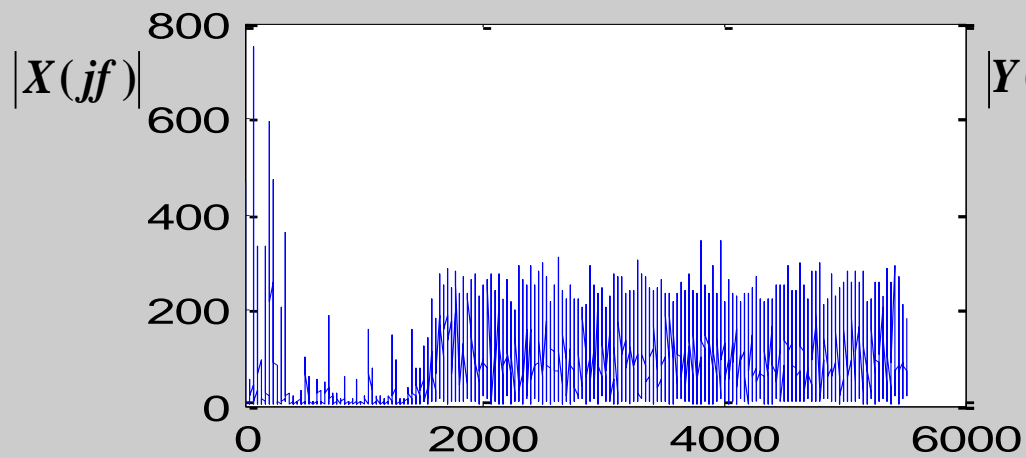
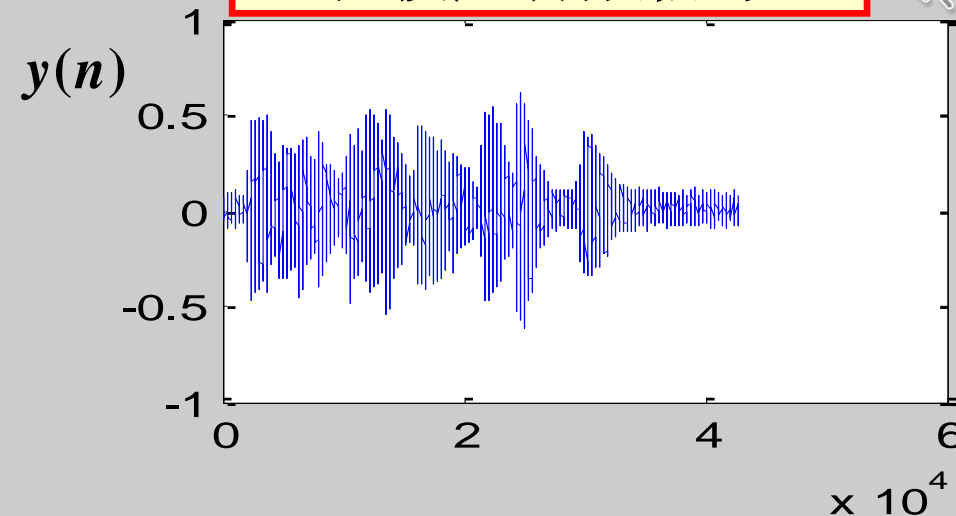


华东理工大学

含噪音频信号



滤波后音频信号



高频噪声  
未被有效滤除



## ➤ 音频去噪实例



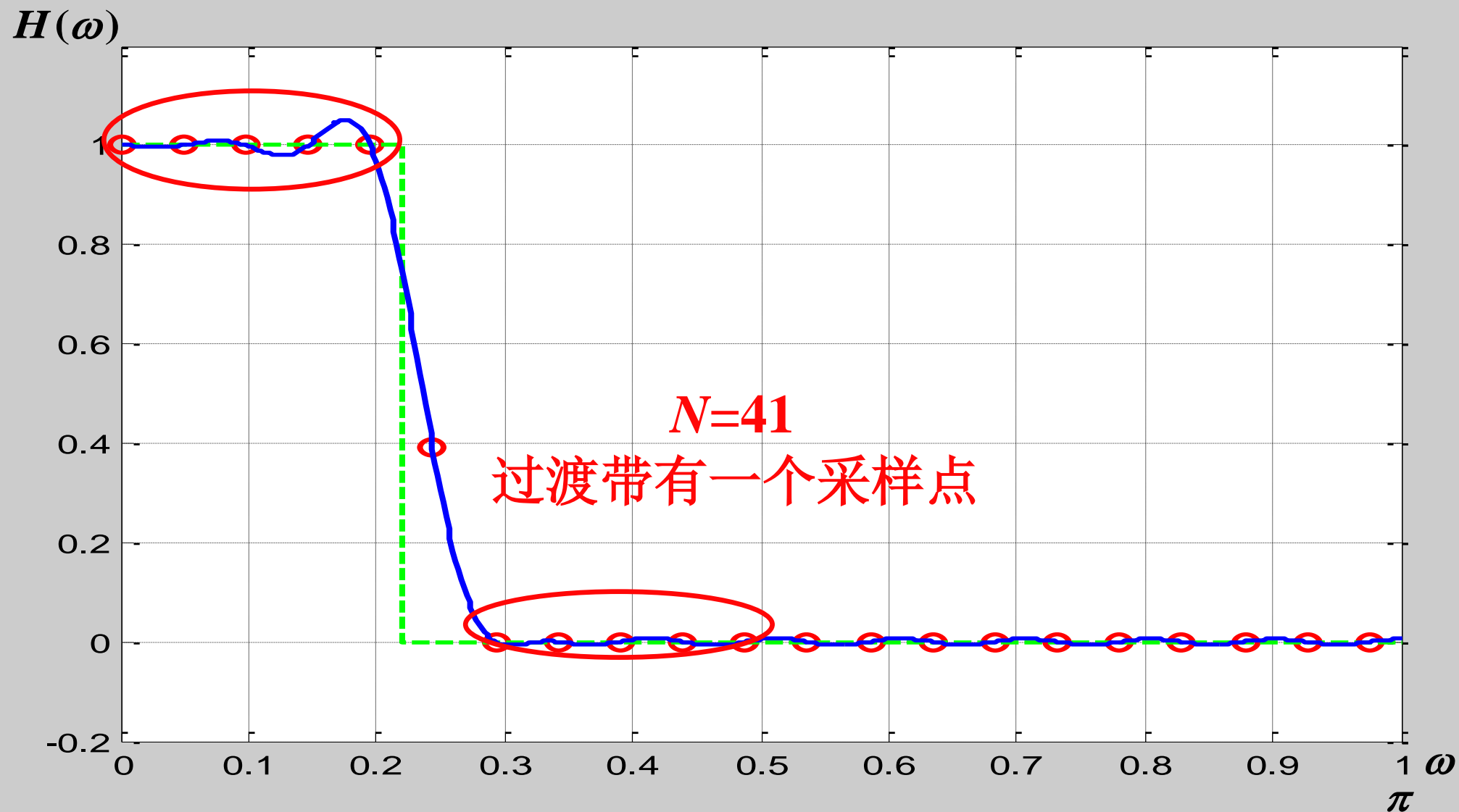
若保持原过渡带宽不变，则需要在原过渡带中再采样一个频率点。这样，利用频域采样法， $N$ 设计为41，所设计的线性相位低通FIR数字滤波器理想幅频特性如下：

$$H(k) = H_k e^{j\theta_k}$$
$$H_k = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 4, \text{ 5点} \\ 0.3904 & k=5, 36 \rightarrow \text{2点} \\ 0 & 6 \leq k \leq 35, \text{ 30点} \end{cases}$$
$$\theta_k = -\frac{N-1}{N} \pi k = -\frac{40}{41} \pi k \quad 0 \leq k \leq 40$$

4点

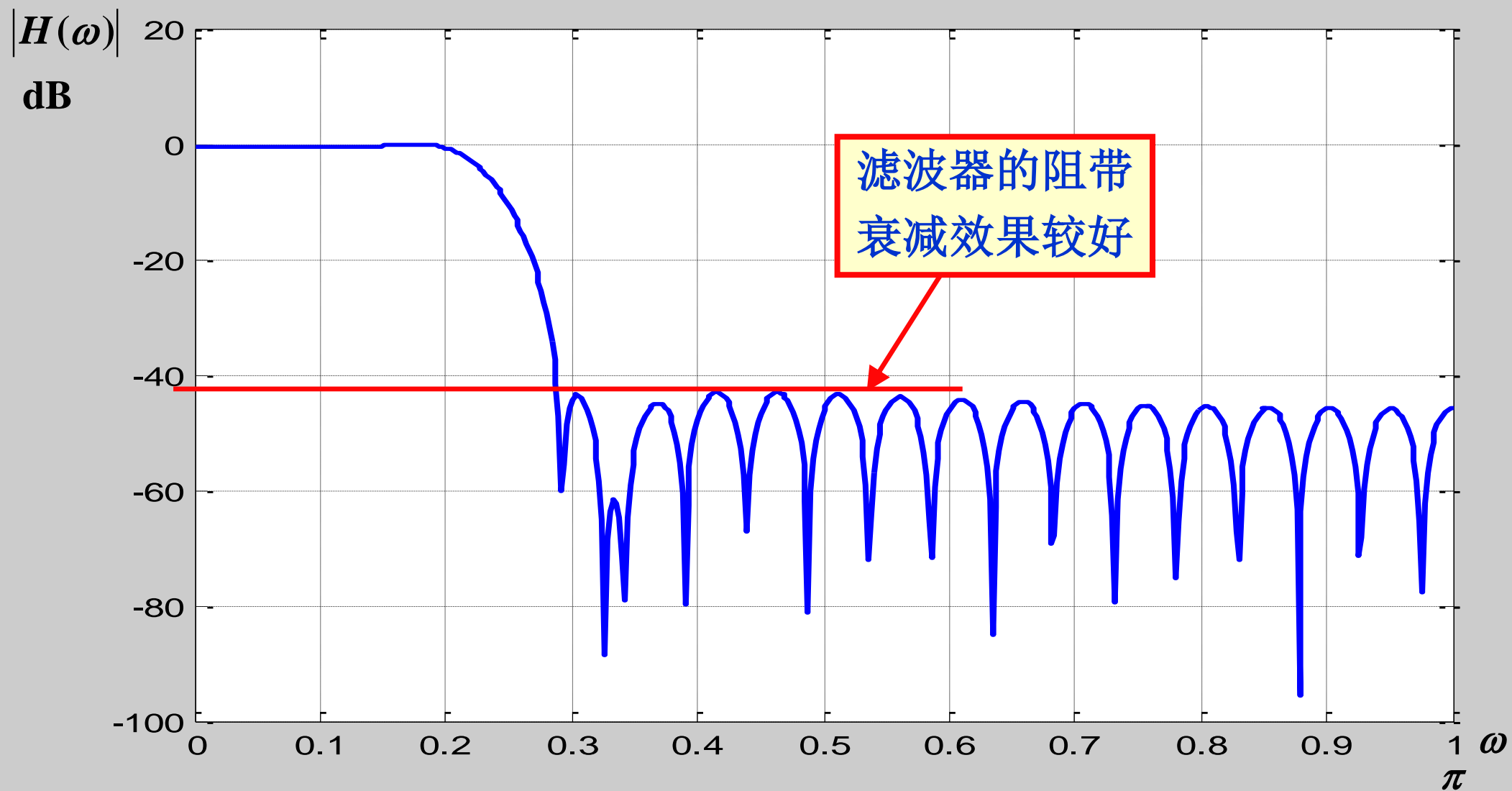


## ➤ 音频去噪实例





## ➤ 音频去噪实例



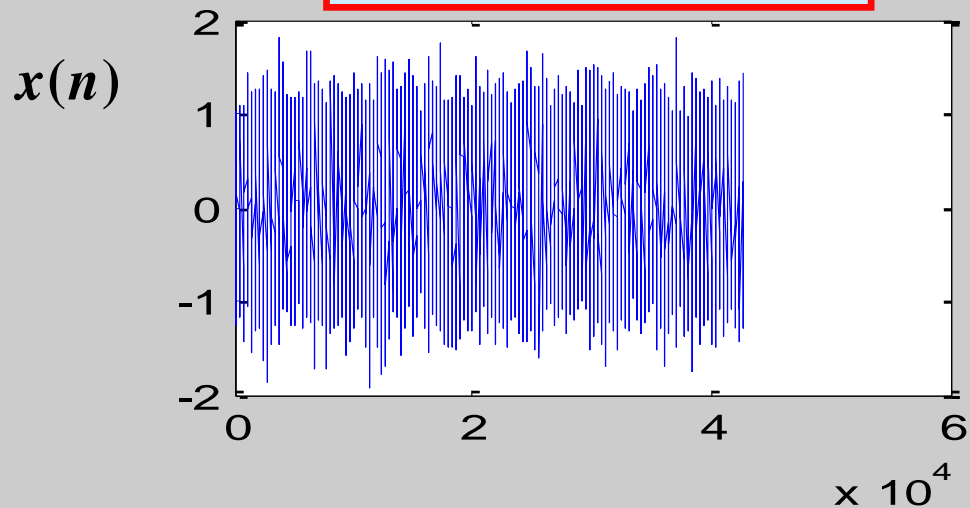




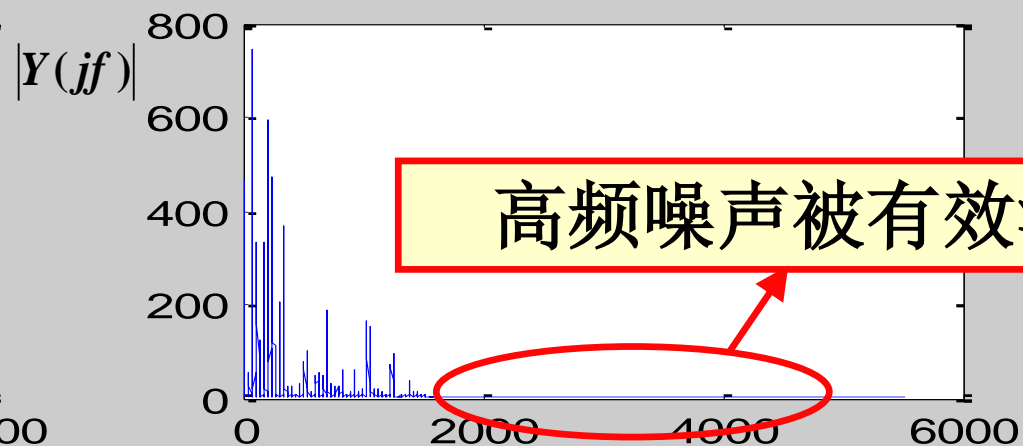
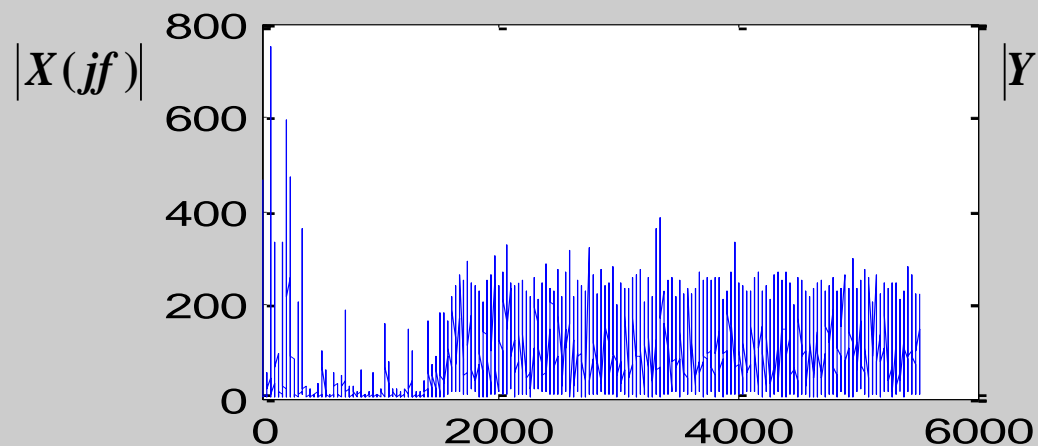
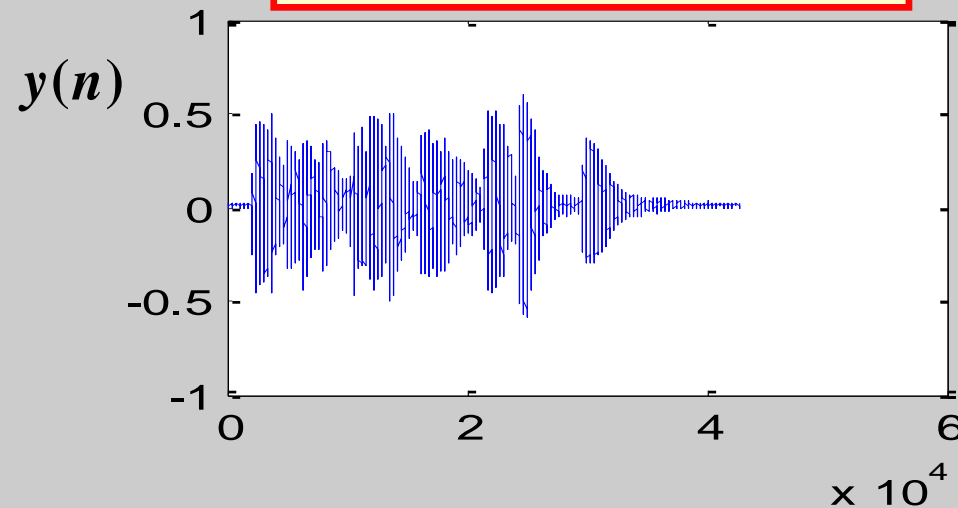
# ➤ 音频去噪实例



含噪音频信号



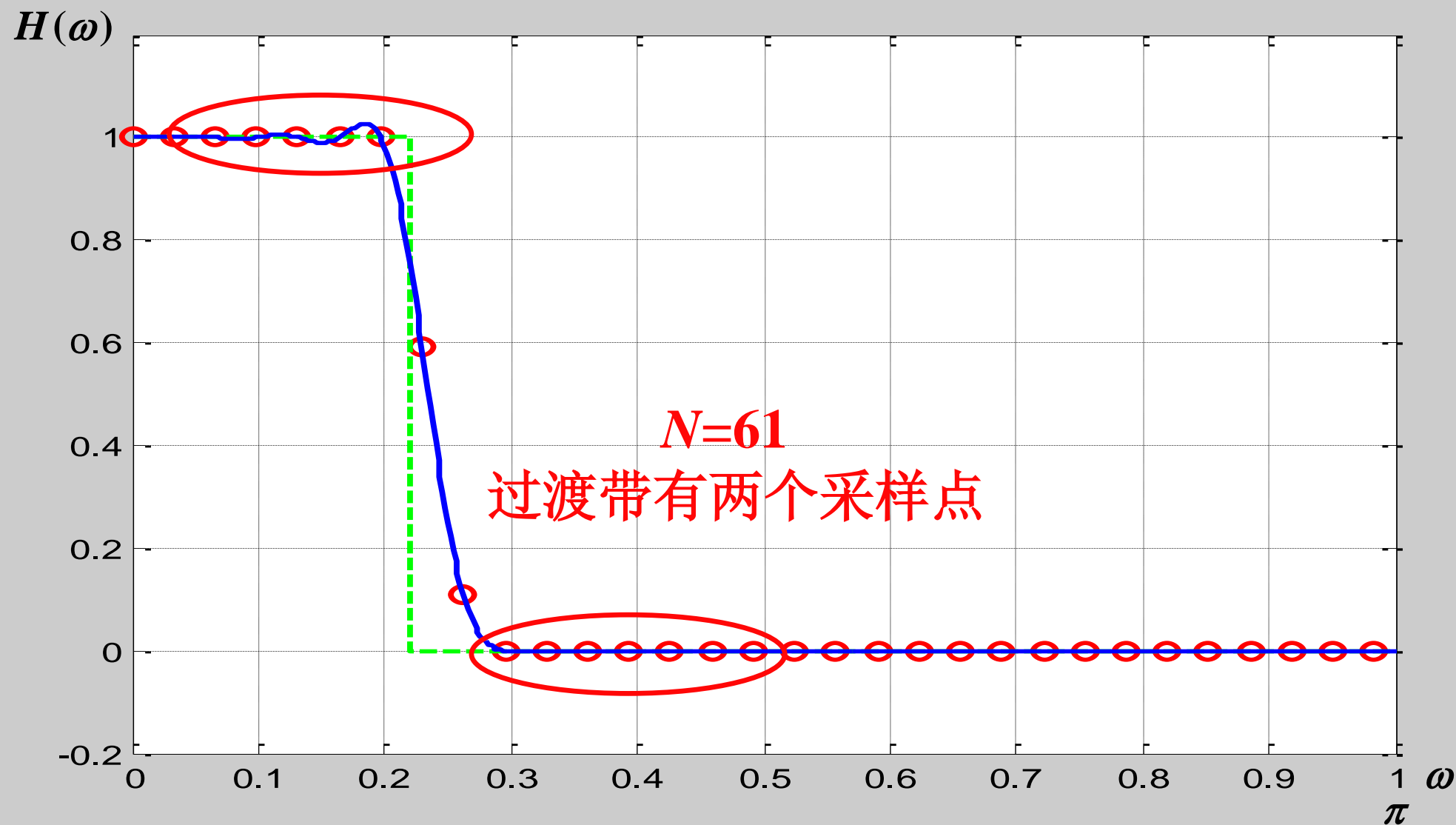
滤波后音频信号



高频噪声被有效滤除

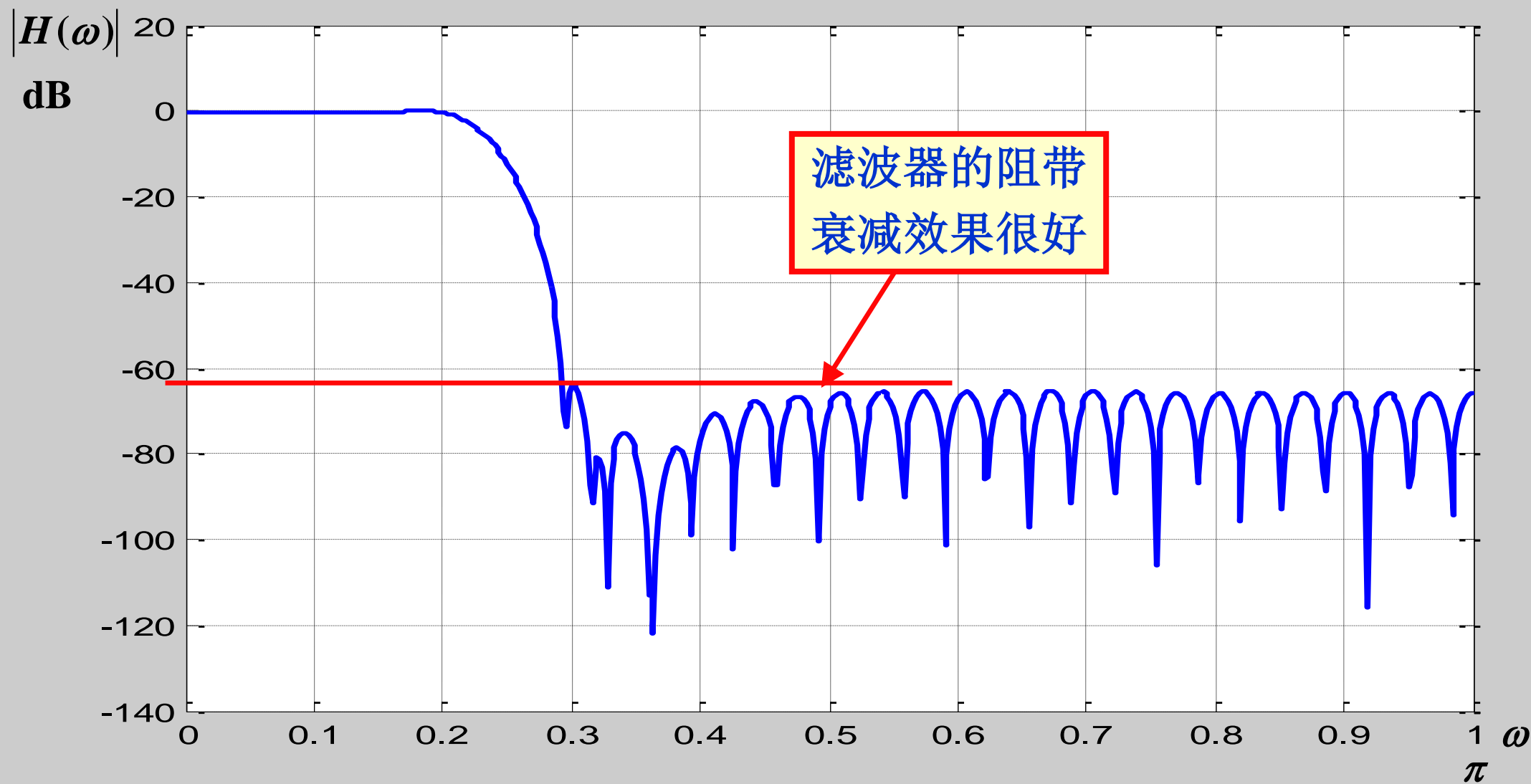


## ➤ 音频去噪实例





## ➤ 音频去噪实例

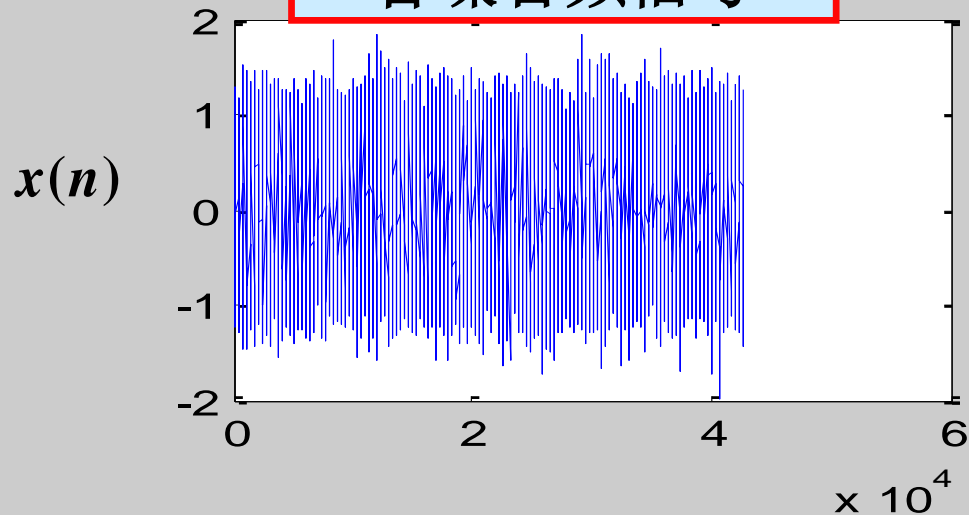




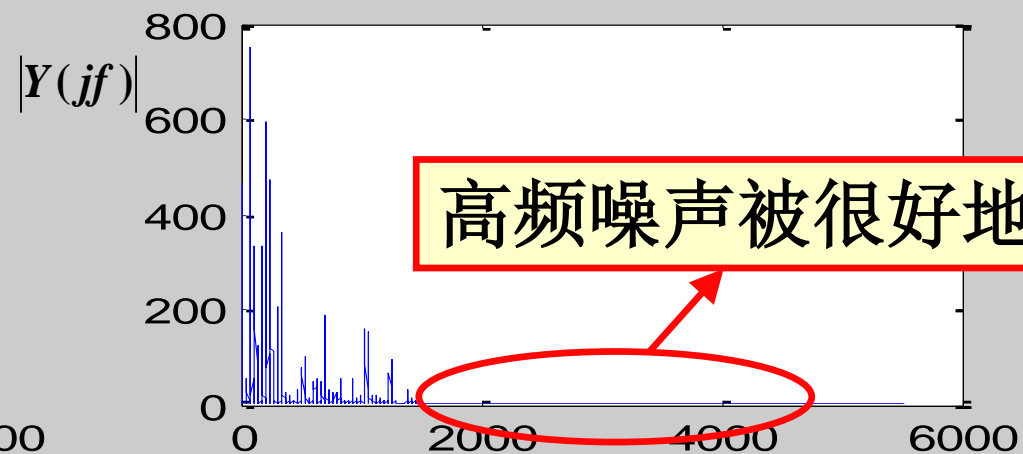
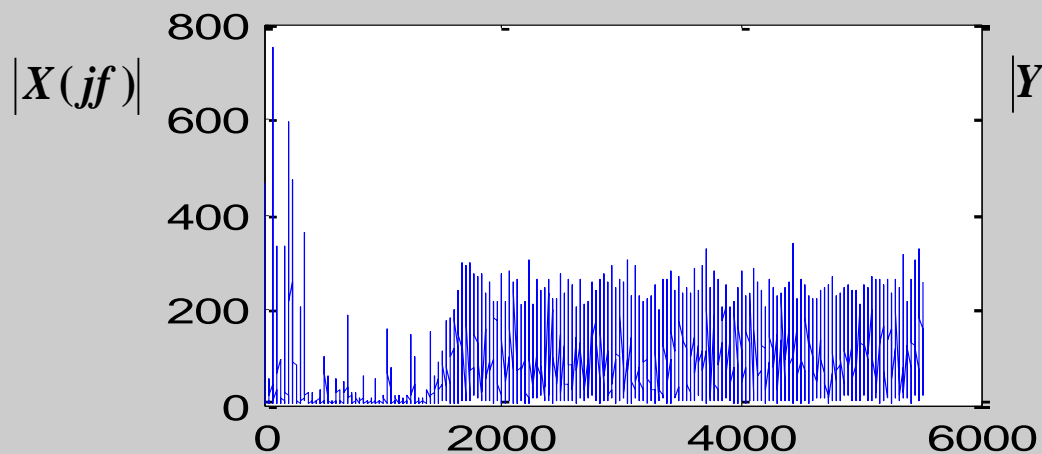
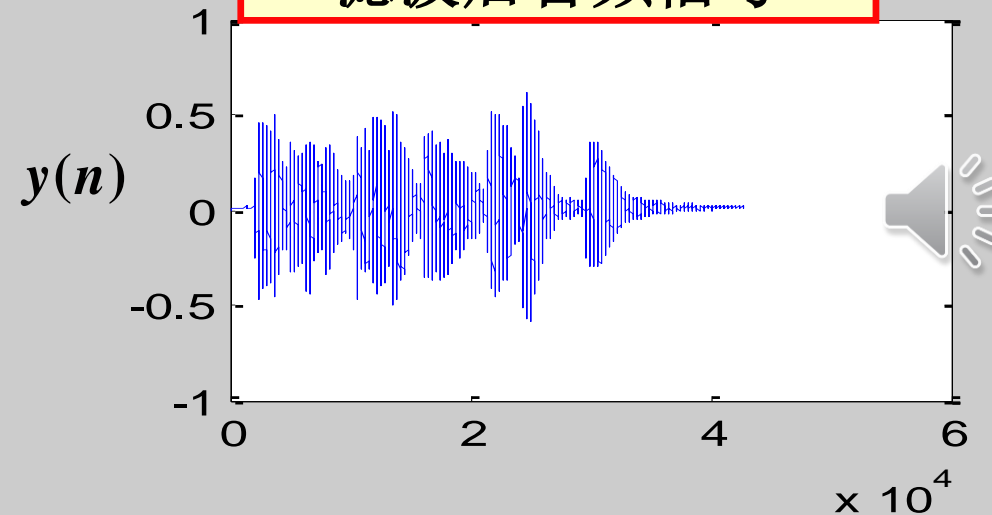
## ➤ 音频去噪实例



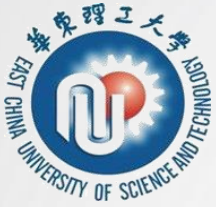
含噪音频信号



滤波后音频信号



高频噪声被很好地滤除



# 第七章 FIR数字滤波器设计

*FIR Digital Filter Design*

## 7.3 利用频域采样法设计FIR滤波器(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

