第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

第六章　IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.2 模拟滤波器的设计

模拟巴特沃斯低通滤波器的设计方法(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

模拟滤波器的设计方法

模拟滤波器的理论和设计方法已发展得相当成熟，且有若干典型的模拟滤波器供我们选择，如：

(1) 巴特沃斯(Butterworth)滤波器

(2) 切比雪夫(Chebyshev)滤波器

(3) 椭圆(Ellipse)滤波器

(4) 贝塞尔(Bessel)滤波器

这些滤波器都有严格的设计公式、现成的曲线和图表供设计人员使用。

一、模拟低通滤波器的设计指标及逼近方法

模拟低通滤波器的设计指标有α_p, Ω_p, α_s和Ω_s。

Ω_p和Ω_s分别称为通带截止频率和阻带截止频率，

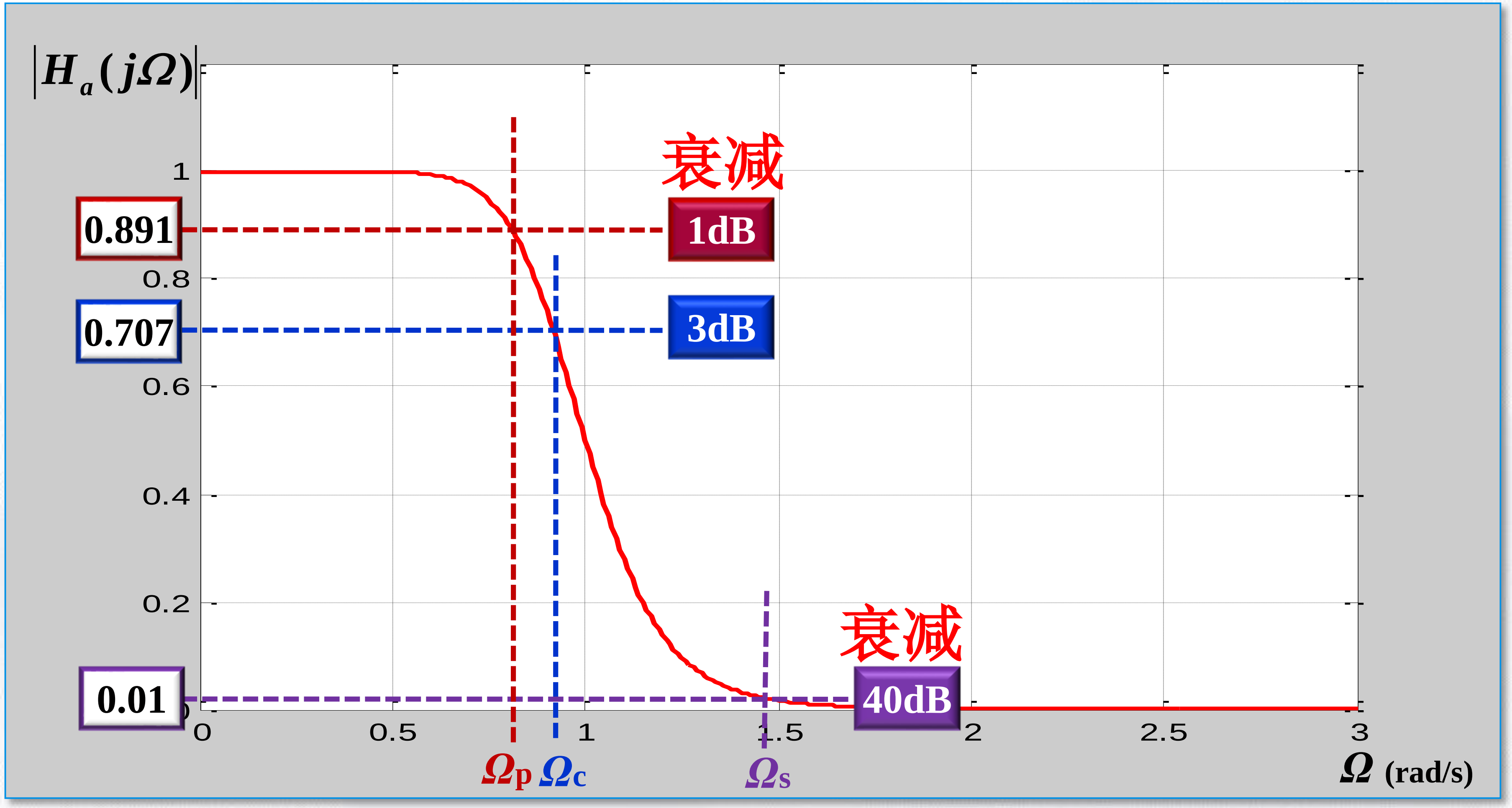
α_p是通带 $\Omega(0\sim\Omega_p)$中的最大衰减系数

α_s是阻带 $\Omega\geq\Omega_s$的最小衰减系数

$$\alpha_p = 20\lg\frac{|H_a(j\Omega_0)|}{|H_a(j\Omega_p)|}\text{dB} = -20\lg|H_a(j\Omega_p)|\text{dB}$$

$$\alpha_s = 20\lg\frac{|H_a(j\Omega_0)|}{|H_a(j\Omega_s)|}\text{dB} = -20\lg|H_a(j\Omega_s)|\text{dB}$$

一、模拟低通滤波器的设计指标及逼近方法



Ω_c称为3dB截止频率： $|H_a(j\Omega_c)| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$， $20\lg|H_a(j\Omega_c)| = 3\text{dB}$

滤波器的技术指标给定后，需要设计一个传输函数$H_a(s)$，希望其幅度平方函数满足给定的指标α_p和α_s，一般滤波器的单位冲激响应$h(t)$为实数，有：

$$
\begin{aligned}
\left|H_a(j\Omega)\right|^2 &= H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) \\
&= H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) \\
&= H_a(s)H_a(-s)\Big|_{s=j\Omega}
\end{aligned}
$$

模拟巴特沃斯低通滤波器的设计方法

- 巴特沃斯低通滤波器的设计方法

(1) 巴特沃斯低通滤波器的幅度平方函数

(2) 幅度平方函数极点分布及$H_a(s)$的构成

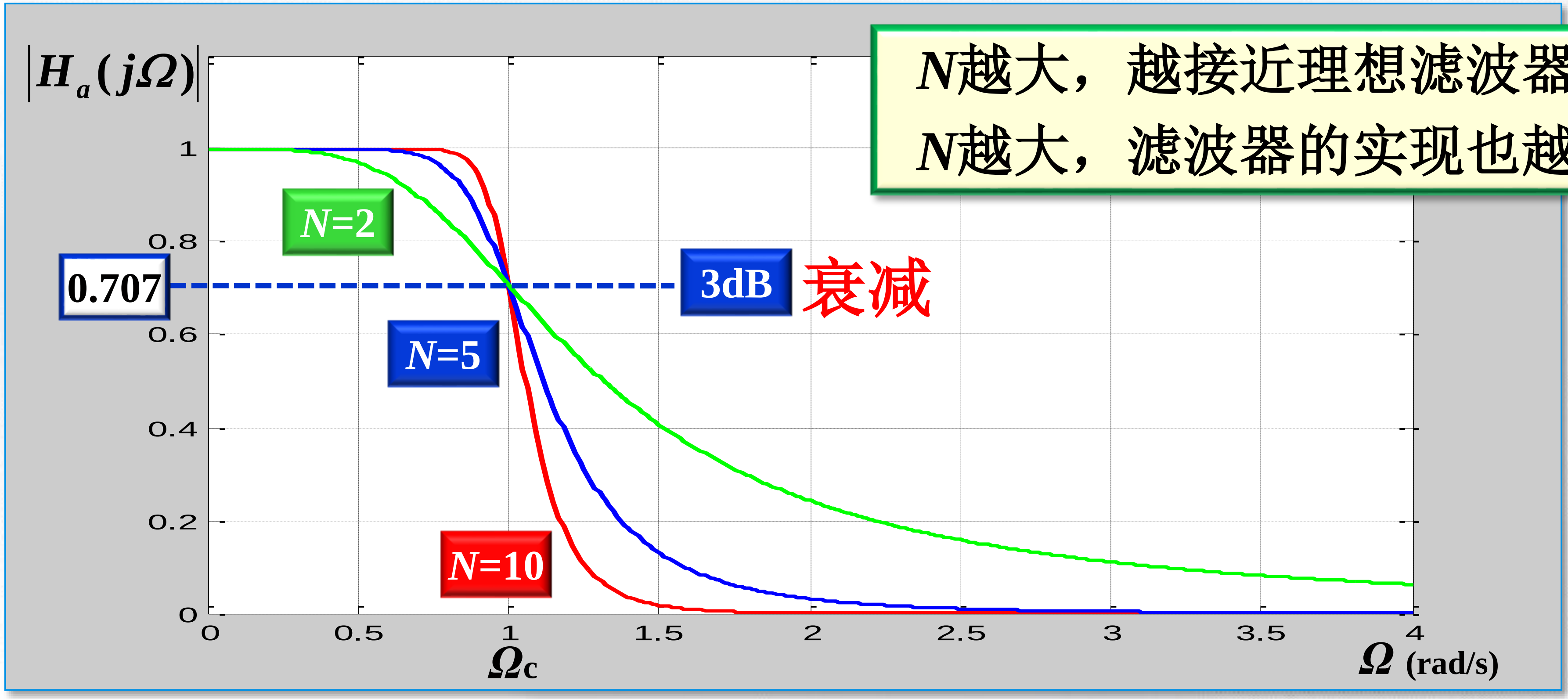
(3) 频率归一化方法

(4) 阶数 N 的确定

二、巴特沃斯低通滤波器的设计方法

1、巴特沃斯低通滤波器的幅度平方函数$|H_a(j\Omega)|^2$用下式表示：

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$



N越大，越接近理想滤波器，

N越大，滤波器的实现也越复杂。

二、巴特沃斯低通滤波器的设计方法

华东理工大学

2、幅度平方函数极点分布及$H_a(s)$的构成

将幅度平方函数$|H_a(j\Omega)|^2$写成 s的函数：

$$H_a(s)H_a(-s)=\frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

上式表明，极点s_k用下式表示：

$$s_k=(-1)^{\frac{1}{2N}}(j\Omega_c)=\Omega_c e^{j\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N}\right)}$$

为形成稳定的滤波器，2N个极点中只取 s 平面左半平面的N个极点构成$H_a(s)$，而右半平面的N个极点构成$H_a(-s)$。

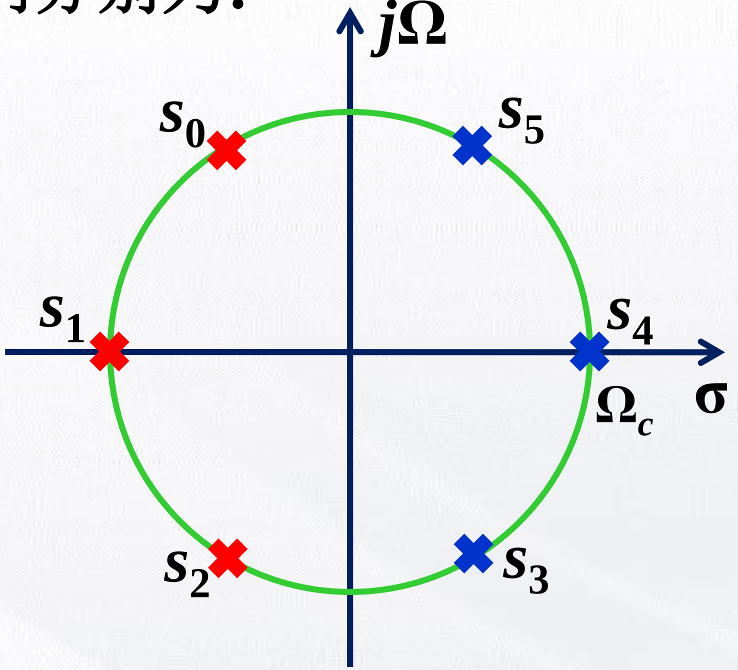
$H_a(s)$的表示式为：

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)}$$

二、巴特沃斯低通滤波器的设计方法

设N=3，极点有6个，它们分别为：

$$s_0 = \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}$$
$$s_1 = -\Omega_c$$
$$s_2 = \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$



$$s_3 = \Omega_c e^{-j\frac{1}{3}\pi}$$
$$s_4 = \Omega_c$$
$$s_5 = \Omega_c e^{j\frac{1}{3}\pi}$$

因果稳定

取s平面左半平面的极点s_0,s_1,s_2组成$H_a(s)$：

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s-\Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi})(s-\Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi})}$$

3、频率归一化

由于各滤波器的幅频特性不同，为使设计统一，将所有的频率归一化。用对3dB截止频率Ω_c归一化，归一化后$H_a(s)$表示为：

$$H_a(s)=\frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}\left(\frac{s}{\Omega_c}-\frac{s_k}{\Omega_c}\right)}$$

式中，$s/\Omega_c=j\Omega/\Omega_c$。

令 $\lambda=\Omega/\Omega_c$，λ 称为归一化频率；令 $p=j\lambda=j\Omega/\Omega_c$，$p$ 称为归一化复变量，这样归一化巴特沃斯的传输函数为：

$$H(p)=\frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p-p_k)}$$

二、巴特沃斯低通滤波器的设计方法

式中，p_k为归一化极点，用下式表示：

$$p_k = e^{j\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N}\right)}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

带入$H_a(p)$表达式，得到的$H_a(p)$的分母是p的N阶多项式，用下式表示：

$$H(p) = \frac{1}{b_0 + b_1 p + \cdots + b_{N-1} p^{N-1} + p^N}$$

归一化的传输函数系数 $H(p)$ 的系数以及极点可以查表得到。

二、巴特沃斯低通滤波器的设计方法

表6.2.1 巴特沃斯归一化低通滤波器参数(1)

极点位置 / 阶数N	$P_{0,N-1}$	$P_{1,N-1}$	$P_{2,N-1}$	$P_{3,N-1}$	$P_{4,N-1}$
1	-1.0000				
2	-0.7071±j0.7071				
3	-0.5000±j0.8660	-1.0000			
4	-0.3827±j0.9239	-0.9239±j0.3827			
5	-0.3090±j0.9511	-0.8090±j0.5878	-1.0000		
6	-0.2588±j0.9659	-0.7071±j0.7071	-0.9659±j0.2588		
7	-0.2225±j0.9749	-0.6235±j0.7818	-0.9010±j0.4339	-1.0000	
8	-0.1951±j0.9808	-0.5556±j0.8315	-0.8315±j0.5556	-0.9808±j0.1951	
9	-0.1736±j0.9848	-0.5000±j0.8660	-0.7660±j0.6428	-0.9397±j0.3420	-1.0000

共轭极点对形式

二、巴特沃斯低通滤波器的设计方法

表6.2.1 巴特沃斯归一化低通滤波器参数(2)

分母多项式 / 阶数N	$B(p) = p^N + b_{N-1}p^{N-1} + b_{N-2}p^{N-2} + \ldots + b_1 p^1 + b_0$								
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.00000								
2	1.00000	1.4142							
3	1.00000	2.0000	2.0000						
4	1.00000	2.6131	3.4142	2.6131					
5	1.00000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361				
6	1.00000	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637			
7	1.00000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940		
8	1.00000	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8462	13.1371	5.1258	
9	1.00000	5.7588	16.5817	31.1634	41.9864	41.9864	31.1634	16.5817	5.7588

多项式系数

表6.2.1 巴特沃斯归一化低通滤波器参数(3)

分解因式 / 阶数N	$B(p)$
1	$(p+1)$
2	$(p^2+1.4142p+1)$
3	$(p^2+p+1)(p+1)$
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$
5	$(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)(p+1)$
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9319p+1)$
7	$(p^2+0.4450p+1)(p^2+1.2470p+1)(p^2+1.8019p+1)(p+1)$
8	$(p^2+0.3902p+1)(p^2+1.1111p+1)(p^2+1.6629p+1)(p^2+1.9616p+1)$
9	$(p^2+0.3473p+1)(p^2+p+1)(p^2+1.5321p+1)(p^2+1.8794p+1)(p+1)$

二阶节形式

第六章　IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.2　模拟滤波器的设计

模拟巴特沃斯低通滤波器的设计方法(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

第六章　IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.2 模拟滤波器的设计

模拟巴特沃斯低通滤波器的设计方法(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

二、巴特沃斯低通滤波器的设计方法

4、阶数N的确定

阶数N的大小主要影响幅度特性下降的速度，它应该由技术指标确定。将$\Omega=\Omega_p$代入幅度平方函数中:

$$\left|H_a(j\Omega_p)\right|^2=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\because \alpha_p=-20\lg\left|H_a(j\Omega_p)\right| \Rightarrow \alpha_p=-10\lg\left|H_a(j\Omega_p)\right|^2$$

$$\therefore \quad 1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{\alpha_p/10}$$

将 $\Omega = \Omega_s$ 代入幅度平方函数中:

$$\left|H_a(j\Omega_s)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\because \alpha_s = -20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right| \Rightarrow \alpha_s = -10\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right|^2$$

$$\therefore \quad 1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\alpha_s/10}$$

二、巴特沃斯低通滤波器的设计方法

$$\because \quad 1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{\alpha_p/10}$$

$$\because \quad 1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{\alpha_s/10}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^{N}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}$$

令：$\lambda_{\mathrm{sp}}=\dfrac{\Omega_{\mathrm{s}}}{\Omega_{\mathrm{p}}}$，$k_{\mathrm{sp}}=\sqrt{\dfrac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}$ $\Rightarrow$ $N=\dfrac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$

用上式求出的N可能有小数部分，应取大于等于N的最小整数。

二、巴特沃斯低通滤波器的设计方法

关于3dB截止频率Ω_c，如果技术指标中没有给出，可以按照下面两式求出：

$$\because \quad 1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{\alpha_p/10} \rightarrow \therefore \quad \Omega_c=\Omega_p/(10^{\alpha_p/10}-1)^{\frac{1}{2N}}$$

$$\because \quad 1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{\alpha_s/10} \rightarrow \therefore \quad \Omega_c=\Omega_s/(10^{\alpha_s/10}-1)^{\frac{1}{2N}}$$

通常是用一个算出Ω_c，然后用另一个来检验。

➢ 总结 —— 低通巴特沃斯滤波器的设计步骤如下：

(1) 根据技术指标Ω_p, α_p, Ω_s, α_s，求出滤波器的阶数N及Ω_c。

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

$$\lambda_{sp}=\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \quad k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}$$

(2) 求出归一化极点p_k，得到归一化传输函数$H(p)$。

$$p_k=e^{j\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N}\right)}, \quad k=0,1,\ldots,N-1$$

$$H(p)=\frac{1}{b_0+b_1p+\cdots+b_{N-1}p^{N-1}+p^N}$$

(3) 将$H(p)$去归一化。将$p=s/\Omega_c$代入$H(p)$，得到实际的滤波器传输函数$H_a(s)$。

$$\Omega_c=\Omega_p/(10^{\alpha_p/10}-1)^{\frac{1}{2N}}$$

$$H_a(s)=H(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$$

例： 已知通带截止频率f_p=5KHz，通带最大衰减α_p=2dB，截止频率f_s=12KHz，阻带最小衰减α_s=30dB，按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器。

解： (1) 确定阶数N

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} = 41.328$$

$$\lambda_{sp} = \frac{2\pi f_s}{2\pi f_p} = 2.4$$

$$N = \frac{\lg 41.32}{\lg 2.4} = 4.2509 \Rightarrow \boxed{N = 5}$$

(2) 求极点：

$$P_0 = e^{j\frac{3}{5}\pi} \qquad P_1 = e^{j\frac{4}{5}\pi} \qquad P_2 = e^{j\pi}$$

$$P_3 = e^{j\frac{6}{5}\pi} \qquad P_4 = e^{j\frac{7}{5}\pi}$$

归一化传输函数为

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{4}(p - p_k)}}$$

二、巴特沃斯低通滤波器的设计方法

上式分母可以展开成为五阶多项式，或者将共轭极点放在一起，形成因式分解形式。不如直接查表简单，由N=5，直接查表得到：

极点：-0.3090±j0.9511、-0.8090±j0.5878、 -1.0000

$$H(p)=\frac{1}{b_0+b_1p+b_2p^2+b_3p^3+b_4p^4+p^5}$$

其中：

b_0=1.0000，b_1=3.2361，b_2=5.2361，b_3=5.2361，b_4=3.2361

華東理工大學

(3) 为将$H(p)$去归一化，先求3dB截止频率Ω_c。

$$\Omega_c = \Omega_p /(10^{\alpha_p/10} - 1)^{\frac{1}{2N}} = 2\pi \cdot 5.2755K\ (rad/s)$$

检验：

$$\Omega_s = \Omega_c (10^{\alpha_s/10} - 1)^{\frac{1}{2N}} = 2\pi \cdot 10.525K\ (rad/s)$$

可以看出，满足α_s=30dB 的真实f_s在10.525KHz处，与12KHz比，还有富裕量。

将$p=s/\Omega_c$代入$H(p)$中得到：

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^5}{b_0\Omega_c^5 + b_1\Omega_c^4 s + b_2\Omega_c^3 s^2 + b_3\Omega_c^2 s^3 + b_4\Omega_c s^4 + s^5}$$

第六章　IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.2 模拟滤波器的设计

模拟巴特沃斯低通滤波器的设计方法(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁