第一章 离散时间信号与系统

Discrete-time signals and systems

1.1 离散时间信号 —— 序列

几种常用的典型序列

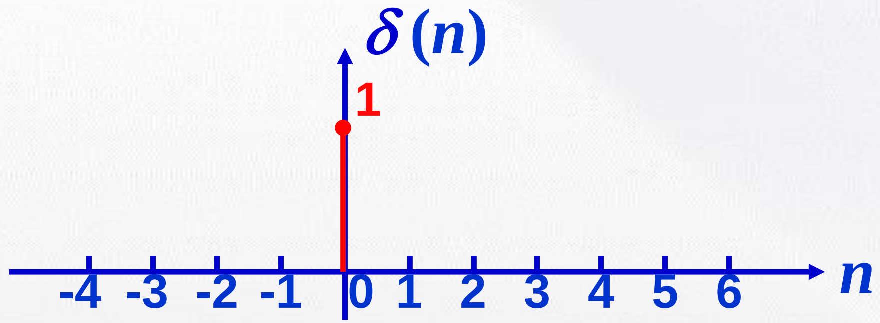
华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

几种典型的序列

- 单位抽样序列
- 单位阶跃序列
- 矩形序列
- 实指数序列
- 正弦序列
- 复指数序列

一、单位抽样序列$\delta(n)$ *Unit sample sequence*

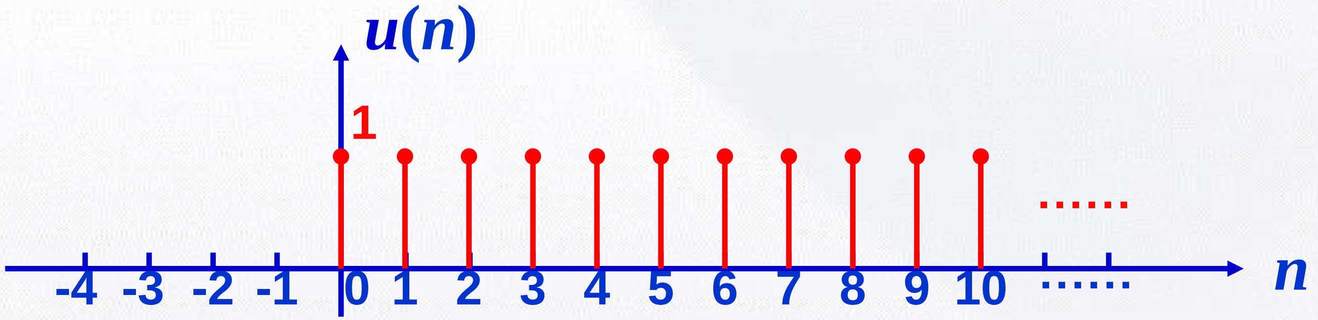
$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



- ❖ $\delta(n)$是一个脉冲幅度为1的现实序列。
- ❖ $\delta(t)$是脉宽为零，幅度为∞的一种数学极限，是非现实信号。
- ❖单位抽样序列也称单位脉冲序列，或时域离散冲激。

二、单位阶跃序列$u(n)$ Unit step sequence

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



❖ 用单位阶跃序列$u(n)$表示单位抽样序列$\delta(n)$:

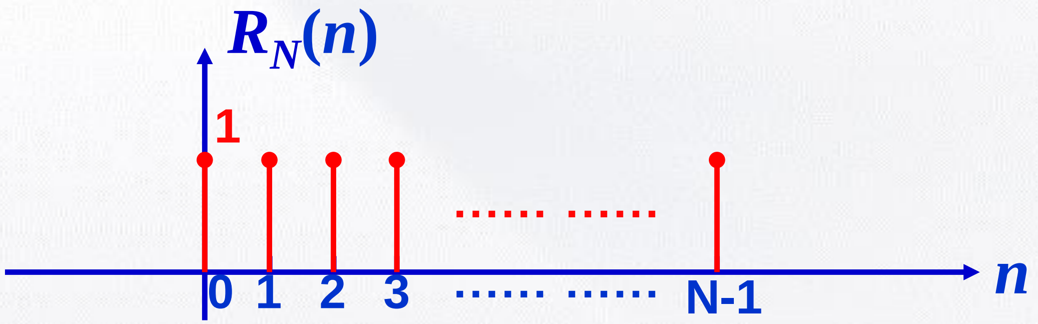
$$\boxed{\delta(n)=u(n)-u(n-1)}$$

❖ 用单位抽样序列$\delta(n)$表示单位阶跃序列$u(n)$:

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)\overset{\text{令}k=n-m}{=}\sum_{k=n}^{n-\infty\,\to\,-\infty}\delta(k)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

三、矩形序列$R_N(n)$ Rectangular sequence

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其它}n\end{cases}$$



❖ 用单位阶跃序列$u(n)$表示矩形序列$R_N(n)$:

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

❖ 用单位取样序列$\delta(n)$表示矩形序列$R_N(n)$:

$$R_N(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)$$

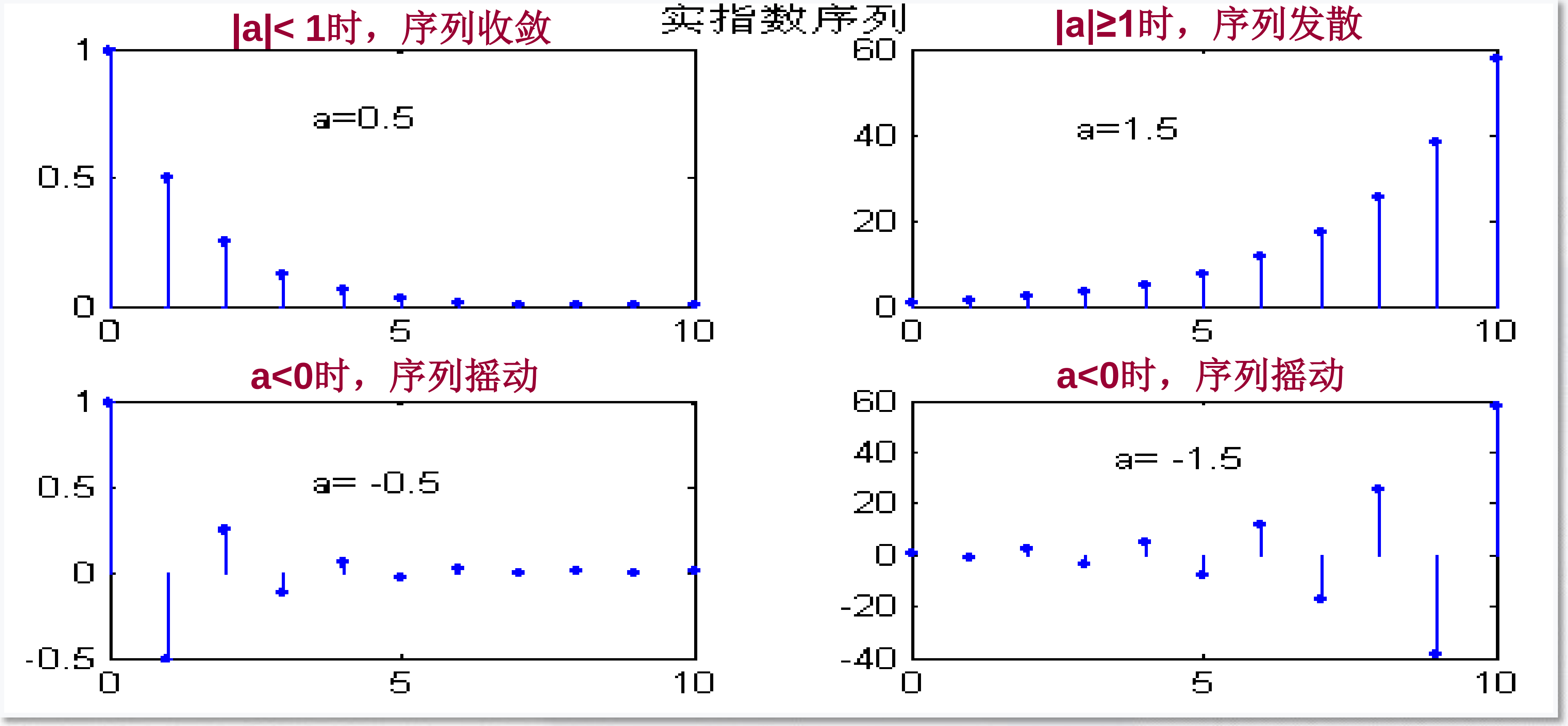
$$R_4(n)=\{\underline{1},1,1,1\},\quad n\in[0,3]$$

$$R_4(n)=u(n)-u(n-4)$$

$$R_4(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)=\sum_{m=0}^{3}\delta(n-m)$$

四、实指数序列 Real-valued exponential sequence

$$x(n)=a^n u(n)=\begin{cases} a^n & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$



五、正弦序列 *Sinusoidal sequence*

$$x(n)=A\sin(n\omega+\varphi)\quad,\quad x(n)=A\cos(n\omega+\varphi)$$

➢ 正弦序列的由来：对连续时间正弦信号进行**等间隔T采样**，得到正弦序列。

$$\sin(\Omega t)\big|_{t=nT}=\sin(\Omega nT)=\sin(n\omega)$$

ω：数字角频率(rad)

Ω：模拟角频率(rad/s)

T：采样间隔(s)

$$\omega=\Omega T$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T_0}T=2\pi\frac{f_0}{f_s}$$

ω为相对频率

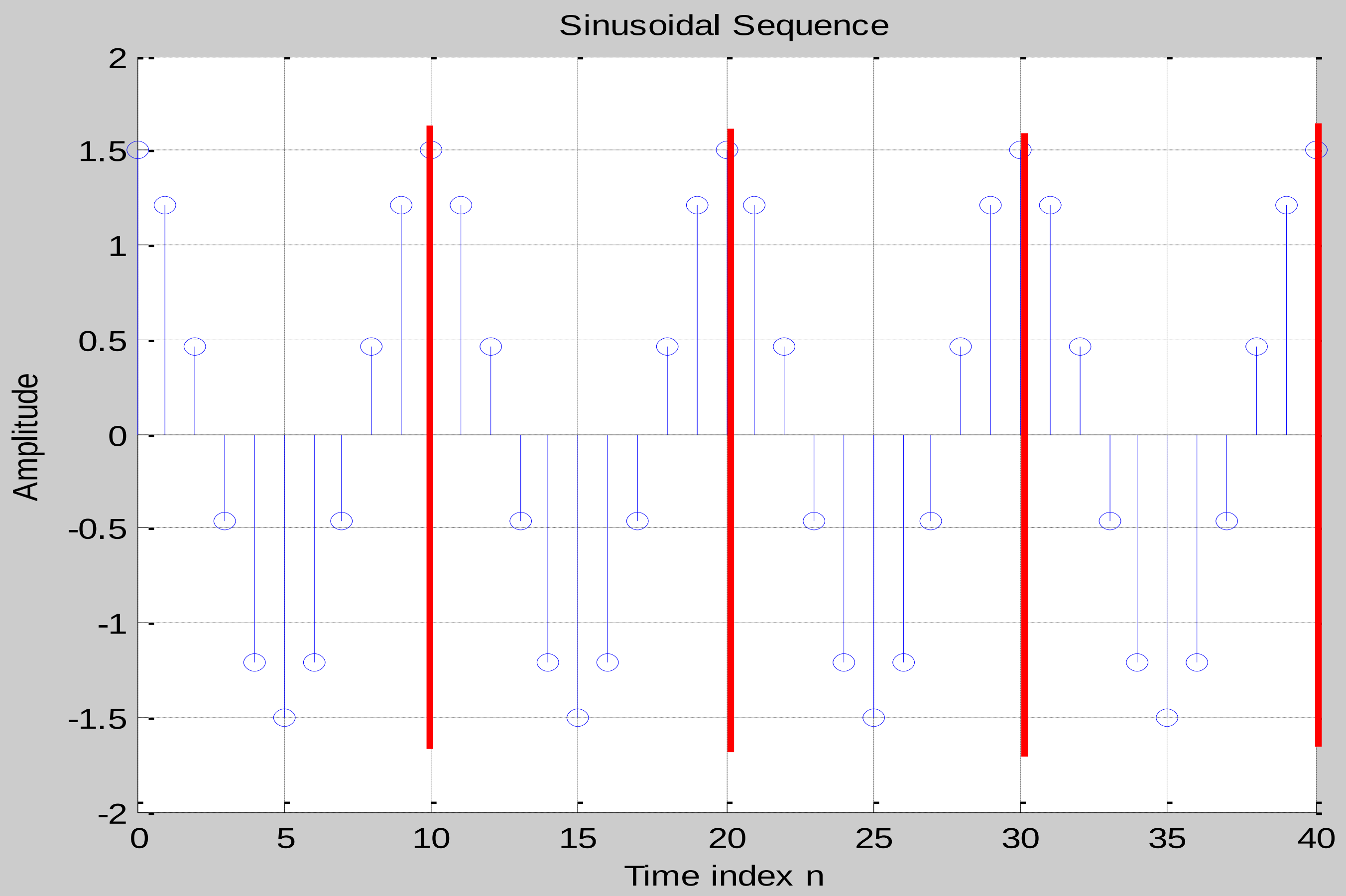
思考：$\omega=0.2\pi$的含义

五、正弦序列


```
% 正弦(余弦)序列数字角频率ω的理解
n = 0:40;
x = 1.5*cos(0.2*pi*n);
stem(n,x);
axis([0 40 -2 2]);   grid on;
title('Sinusoidal Sequence');
xlabel('Time index n');   ylabel('Am
```

$\boxed{x(n) = 1.5\cos(0.2\pi n)}$

ω=0.2π的含义 → 原连续时间信号的一个周期内采样了10个点！



$$\omega = 0.2\cancel{\pi} = \Omega T = \frac{2\cancel{\pi}}{T_0} T$$

$$\boxed{T_0 = 10T}$$

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega)n}=e^{\sigma n}[\cos\omega n+j\sin\omega n]$$

❖ 欧拉公式 $e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x$

$$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}\cdots\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots\cdots$$

$$e^{\pm ix}=1\pm\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}\mp\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\pm\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}\mp\frac{ix^7}{7!}\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots\cdots\right)\pm i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\cdots\right)=\cos x\pm i\sin x$$

$$e^{i\pi}+1=0$$

六、复指数序列

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega)n}=e^{\sigma n}[\cos\omega n+j\sin\omega n]$$

```
%复指数序列
K = 2; n = 0:40;
c = -(1/12)+(pi/6)*i;
x = K*exp(c*n);
subplot(3,1,1);stem(n,real(x));
grid on;title('Real part');
subplot(3,1,2);stem(n,imag(x));
grid on;title('Imaginary part');
subplot(3,1,3);stem(n,abs(x));
grid on;title('Amplitude part');
```

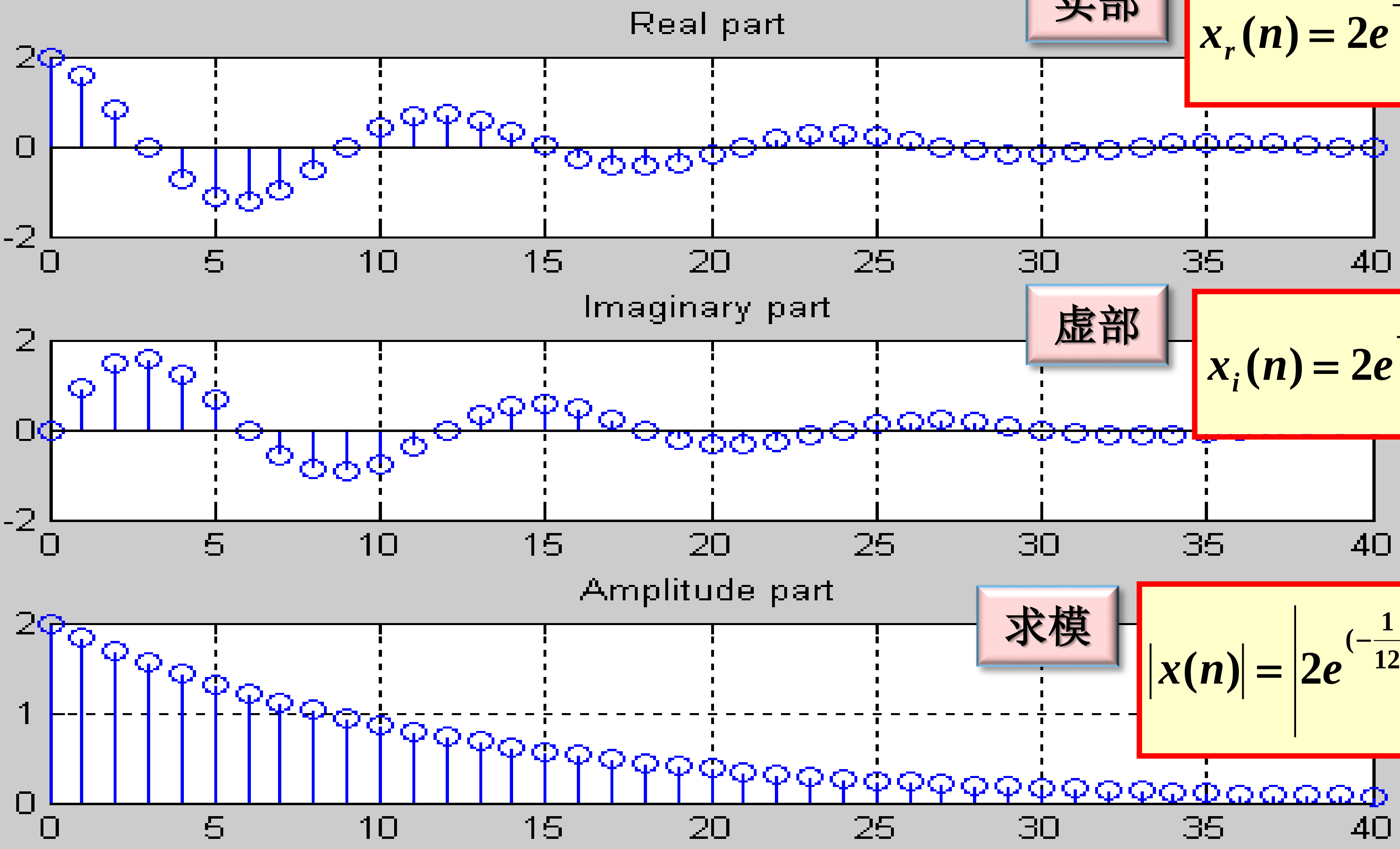
$$x(n)=2e^{(-\frac{1}{12}+j\frac{\pi}{6})n}$$

实部

虚部

求模

六、复指数序列



实部

$$x_r(n)=2e^{-\frac{1}{12}n}\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$$

虚部

$$x_i(n)=2e^{-\frac{1}{12}n}\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)$$

求模

$$|x(n)|=\left|2e^{(-\frac{1}{12}+j\frac{\pi}{6})n}\right|=\left|2e^{\left(-\frac{1}{12}n\right)}\right|$$

用MATLAB产生均匀分布的随机信号

例程函数：用MATLAB产生均匀分布的随机信号(序列)。

```
x = rand(n);      % x 为 n×n 的均匀分布的随机矩阵，随机值的区间在(0,1)之间
x = rand(m,n);    % x 为 m×n 的均匀分布的随机矩阵，随机值的区间在(0,1)之间
```

例程函数：用MATLAB产生零均值单位方差的正态分布的随机信号(序列)。

```
x = randn(n);     % x 为 n×n 的零均值单位方差正态分布的随机矩阵
x = randn(m,n);   % x 为 m×n 的零均值单位方差正态分布的随机矩阵
```

几种典型的序列

- 单位抽样序列
- 单位阶跃序列
- 矩形序列
- 实指数序列
- 正弦序列
- 复指数序列