

第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.1

数字滤波器设计方法概述

6.2

模拟滤波器的设计

6.3

脉冲响应不变法

6.4

双线性变换法

6.5

IIR数字滤波器设计方法小结



第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.5 IIR数字滤波器设计方法小结

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁



IIR数字滤波器技术指标

$$\Omega = \frac{\omega}{T}$$

脉冲响应不变法

双线性变换法

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \omega\right)$$

模拟滤波器技术指标

原型变换

模拟低通原型滤波器技术指标

巴特沃斯逼近法

切比雪夫逼近法

其他逼近法

设计模拟低通原型滤波器

原型变换

各经典类模拟滤波器

脉冲响应不变法

双线性变换法

$$s = \frac{2}{T} \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})}$$

IIR数字滤波器

$$\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

6.5 IIR数字滤波器设计方法小结



例：设计低通数字滤波器，要求在通带内频率低于 $0.2\pi\text{rad}$ 时，容许幅度误差在 1dB 以内；在频率 0.3π 到 π 之间的阻带衰减大于 15dB 。指定模拟滤波器采用巴特沃斯低通滤波器，试分别用脉冲响应不变法和双线性变换法设计滤波器。

解：(1) 用脉冲响应不变法设计数字低通滤波器。

① 数字低通的技术指标为

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad}, \quad \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

② 模拟低通的技术指标为

$$T = 1 \text{ s}, \quad \Omega_p = 0.2\pi \text{ rad/s}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB};$$

$$\Omega_s = 0.3\pi \text{ rad/s}, \quad \alpha_s = 15 \text{ dB}$$



6.5 IIR数字滤波器设计方法小结



③ 设计巴特沃斯低通滤波器。先计算阶数 N 及3dB截止频率 Ω_c 。

$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{0.3\pi}{0.2\pi} = 1.5$$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} = 10.8751$$

$$N = \frac{\lg 10.8751}{\lg 1.5} = 5.8858 \Rightarrow N = 6$$

由式：

$$\Omega_c = \Omega_p (10^{\alpha_p/10} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

得到： $\Omega_c = 0.7032(\text{rad/s})$

根据阶数 $N=6$ ，查表得到归一化传输函数为：

$$H_a(p) = \frac{1}{1 + 3.8637p + 7.4641p^2 + 9.1416p^3 + 7.4641p^4 + 3.8637p^5 + p^6}$$

最后，去归一化，将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $H_a(p)$ 中，得到实际的传输函数 $H_a(s)$ 。

6.5 IIR数字滤波器设计方法小结



$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^6}{s^6 + 3.8637\Omega_c s^5 + 7.4641\Omega_c^2 s^4 + 9.1416\Omega_c^3 s^3 + 7.4641\Omega_c^4 s^2 + 3.8637\Omega_c^5 s + \Omega_c^6}$$
$$= \frac{0.1209}{s^6 + 2.716s^5 + 3.691s^4 + 3.179s^3 + 1.825s^2 + 0.121s + 0.1209}$$

- ④ 用脉冲响应不变法将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$ 。首先将 $H_a(s)$ 进行部分分式分解，然后再转换 $z=e^{sT}$ 。

$$\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 0.1297z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1454z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}}$$
$$= \frac{1.8558 - 0.6304z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}$$

6.5 IIR数字滤波器设计方法小结



(2) 用双线性变换法设计数字低通滤波器。

① 数字低通技术指标仍为

$$\omega_p = 0.2\pi \text{rad}, \quad \alpha_p = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{rad}, \quad \alpha_s = 15\text{dB}$$

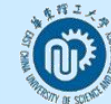
② 模拟低通的技术指标为

$$\Omega = \frac{2}{T} \text{tg} \left(\frac{1}{2} \omega \right), \quad T = 1$$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \text{tg} \left(\frac{1}{2} \omega_p \right) = 2 \text{tg} (0.1\pi) = 0.65(\text{rad} / \text{s}), \quad \alpha_p = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \text{tg} \left(\frac{1}{2} \omega_s \right) = 2 \text{tg} (0.15\pi) = 1.019(\text{rad} / \text{s}), \quad \alpha_s = 15\text{dB}$$

6.5 IIR数字滤波器设计方法小结



③ 设计巴特沃斯低通滤波器。阶数 N 计算如下：

$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{1.019}{0.65} = 1.568$$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} = 10.8751$$

$$N = \frac{\lg 10.8751}{\lg 1.568} = 5.3056 \Rightarrow N = 6$$

并求得： $\Omega_c = 0.7662 \text{ rad/s}$



6.5 IIR数字滤波器设计方法小结

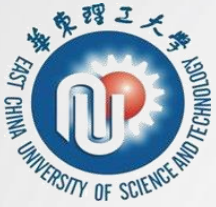


根据 $N=6$ ，查表得到的归一化传输函数 $H_a(p)$ 与脉冲响应不变法得到的相同。为去归一化，将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $H_a(p)$ ，得实际的 $H_a(s)$ ：

$$H_a(s) = \frac{0.2024}{(s^2 + 0.396s + 0.5871)(s^2 + 1.083s + 0.5871)(s^2 + 1.480s + 0.5871)}$$

④ 用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$
$$= \frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1.268z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.010z^{-1}+0.358z^{-2})(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}$$



第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.5 IIR数字滤波器设计方法小结

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

