第一章 离散时间信号与系统

Discrete-time signals and systems

1.1 离散时间信号 —— 序列

离散时间信号(序列)的周期性

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

离散时间信号（序列）的周期性

- 序列周期的定义
- 正弦序列的周期性
- 序列的周期求解方法小结

一、正弦序列的周期性

如果对于所有n存在一个最小的正整数N，使得下式成立，则称$x(n)$为周期序列，周期为N。

$$x(n)=x(n+N)\qquad \boxed{n\in[-\infty,+\infty]}$$

正弦信号： $x(n)=A\sin(\underline{n\omega+\varphi})$

$$\Rightarrow\quad x(n+N)=A\sin[(n+N)\omega+\varphi]$$

$$=A\sin[N\omega+\underline{n\omega+\varphi}]$$

若$\boxed{N\omega=2k\pi}$，当k为整数时(即$N\omega$为2π的整数倍)，则有：

$x(n)=x(n+N)$，$x(n)$为周期信号。

一、正弦序列的周期性

$$N\omega = 2k\pi \Rightarrow N = \frac{2\pi}{\omega}\cdot k$$

(1) 当 $2\pi/\omega$为整数时：

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\Omega T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_0}T} = \frac{T_0}{T} = N$$

原来连续信号的一个周期T_0内，以采样间隔T等间隔采样了N个点，序列周期为N。

例如：求序列 $x(n) = \cos(0.01\pi n)$ 的周期。

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.01\pi} = \frac{T_0}{T} = 200 \quad \therefore N = 200$$

$x(n)$的周期是200，在1个连续信号周期T_0内采样了200个点。

一、正弦序列的周期性

(2) 当 $2\pi/\omega$为有理数时(有理数可表示成分数)：

$$\boxed{\frac{2\pi}{\omega}=\frac{T_0}{T}=\frac{N}{k}}$$

原来连续信号的k周期T_0内，以采样间隔T等间隔采样了N个点，序列周期为N。(N, k互素，$k\neq 1$)

例如：求序列 $x(n) = \cos(3\pi n/7)$ 的周期。

$$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3\pi/7}=\frac{T_0}{T}=\frac{14}{3} \qquad \therefore N=14$$

$x(n)$的周期是14，在3个连续信号周期T_0内采样了14个点。

(3) 当 $2\pi/\omega$为无理数时：

任何k都不能使N为整数，此时$x(n)$不是周期性的。

二、序列周期求解方法小结

$x(n) = x(n+N)$ ， $n \in [-\infty, +\infty]$

(1) 观看序列是否是 正弦、余弦或复指数序列，目测序列是否有周期。譬如：$n\sin(\omega n+\varphi)$ 、 $a^n u(n)$ 、或者$e^{(\sigma+j\omega)n}$(但$\sigma \neq 0$)，或者$\sin(\omega n+\varphi)u(n)$都不可能是周期序列。

(2) 找序列的数字频率 ω , ω一定和n乘在一起。

(3) 求解 $2\pi/\omega$:

①： $2\pi/\omega = N$，周期为N；

②： $2\pi/\omega = N/k$，周期仍为N(分子)， 注意N和k互素；

③： $2\pi/\omega =$ 无理数，序列无周期。

$$\boxed{\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\Omega T} = \frac{T_0}{T} = \frac{N}{k}}$$

(4) 对于$\sin(\omega_1 n)+\sin(\omega_2 n)$形式的序列，分别由$\omega_1$和$\omega_2$求$N_1$和$N_2$，序列周期 $N =$ 最小公倍数(N_1, N_2)。

(5) 对于$\sin(\omega_1 n)\cdot\sin(\omega_2 n)$形式的序列，分别由$\omega_a=|\omega_1+\omega_2|$和$\omega_b= |\omega_1-\omega_2|$求$N_a$和$N_b$，序列周期 $N =$ 最小公倍数(N_a, N_b)。

离散时间信号(序列)的周期性

例：(1) 判断序列$x(n)$是否有周期，如果有请计算其周期。

(A) $x(n)=A\cos\left(\frac{13\pi}{4}n\right)$

$\omega=\frac{13}{4}\pi$ → $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{13}{4}\pi}=\frac{8}{13}$ → $N=8$

违背采样定理

含义：$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{8}{13}=\frac{T_0}{T}$ → $13T_0=8T$ → 原来13个连续正弦信号周期内采样8个点

(B) $x(n)=e^{j(\frac{n}{6}-\pi)}$

$\omega=\frac{1}{6}$ → $\frac{2\pi}{\omega}$为无理数 → 该序列无周期

离散时间信号(序列)的周期性

华东理工大学

(2) 用MATLAB产生离散振幅调制信号：

$$\omega_H,\ \omega_H+\omega_L,\ \omega_H-\omega_L$$

3个频率成分

$$x(n)=A\left[1+m\cos(\omega_L n)\right]\cos(\omega_H n)$$

其中：$A=1, m=0.5, \omega_L=0.01\pi, \omega_H=0.2\pi$，要求画出序列5个周期的值。

$$\omega_1=0.2\pi,\quad \omega_2=0.21\pi,\quad \omega_3=0.19\pi$$

$$\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{2\pi}{0.2\pi}=10 \rightarrow N_1=10$$

$$\frac{2\pi}{\omega_2}=\frac{2\pi}{0.21\pi}=\frac{200}{21} \rightarrow N_2=200$$

$$\frac{2\pi}{\omega_3}=\frac{2\pi}{0.19\pi}=\frac{200}{19} \rightarrow N_3=200$$

最小公倍数

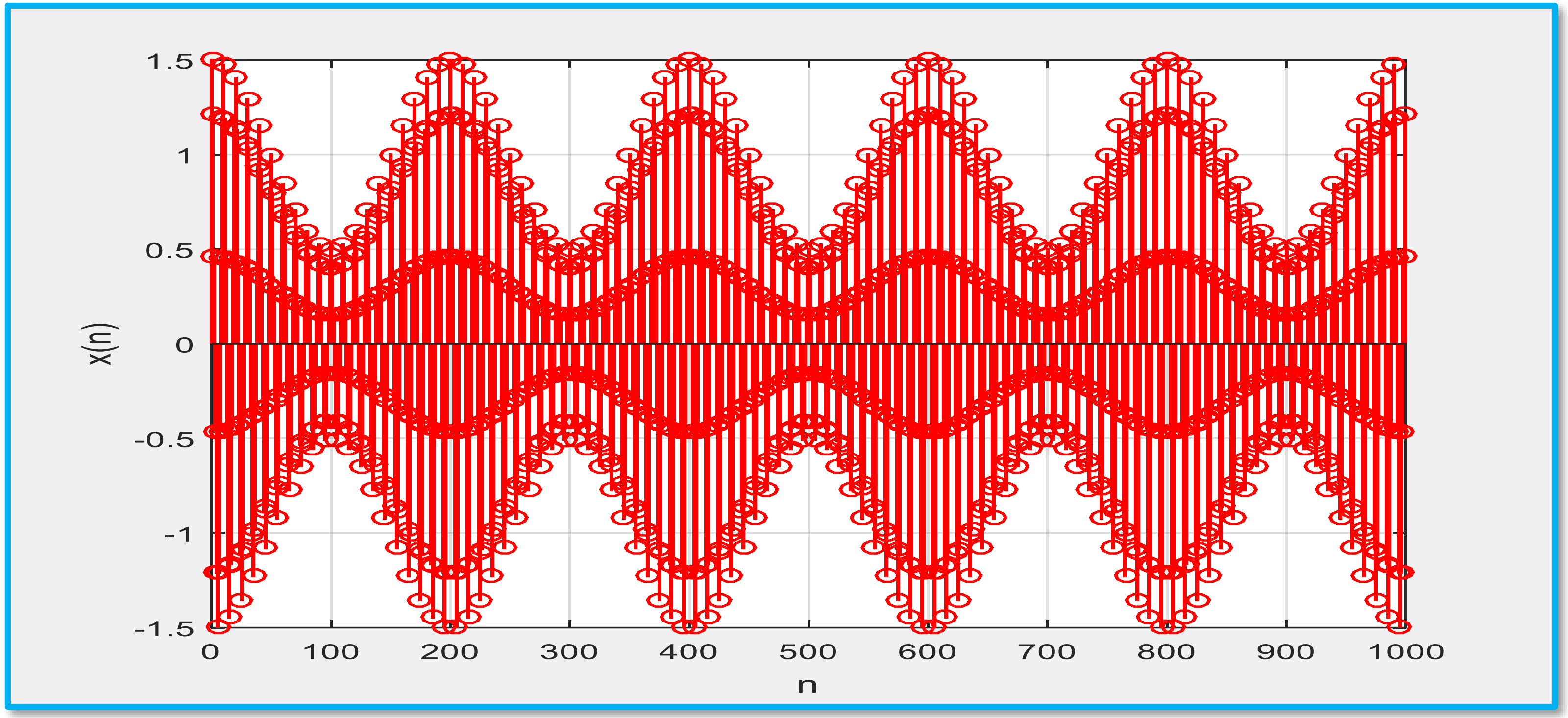
$$N=200$$

5个周期

$$n\in[0,999]$$

离散时间信号(序列)的周期性

```
A=1; m=0.5; wL=0.01*pi; wH=0.2*pi;
n=0:999; x=A*(1+m*cos(wL*n)).*cos(wH*n);
stem(n,x,'r'); grid on;
xlabel('n');ylabel('x(n)');
```



离散时间信号（序列）的周期性

- 序列周期的定义
- 正弦序列的周期性
- 序列的周期求解方法小结