第三章 离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.1	离散傅里叶级数及其性质
3.2	离散傅里叶变换的定义及性质
3.3	用DFT求解LSI系统输出
3.4	频域采样定理
3.5	模拟信号的谱分析方法

第三章　离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.1 离散傅里叶级数及其性质

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

离散傅里叶级数(DFS)及其性质

Discrete Forurier Series

- 为什么要研究离散傅立叶级数(DFS)
- 由DTFT推出离散傅立叶级数(DFS)的表达式
- 离散傅立叶级数的性质

一、为什么要研究离散傅立叶级数

华东理工大学

时　域 ⟷ 频　域

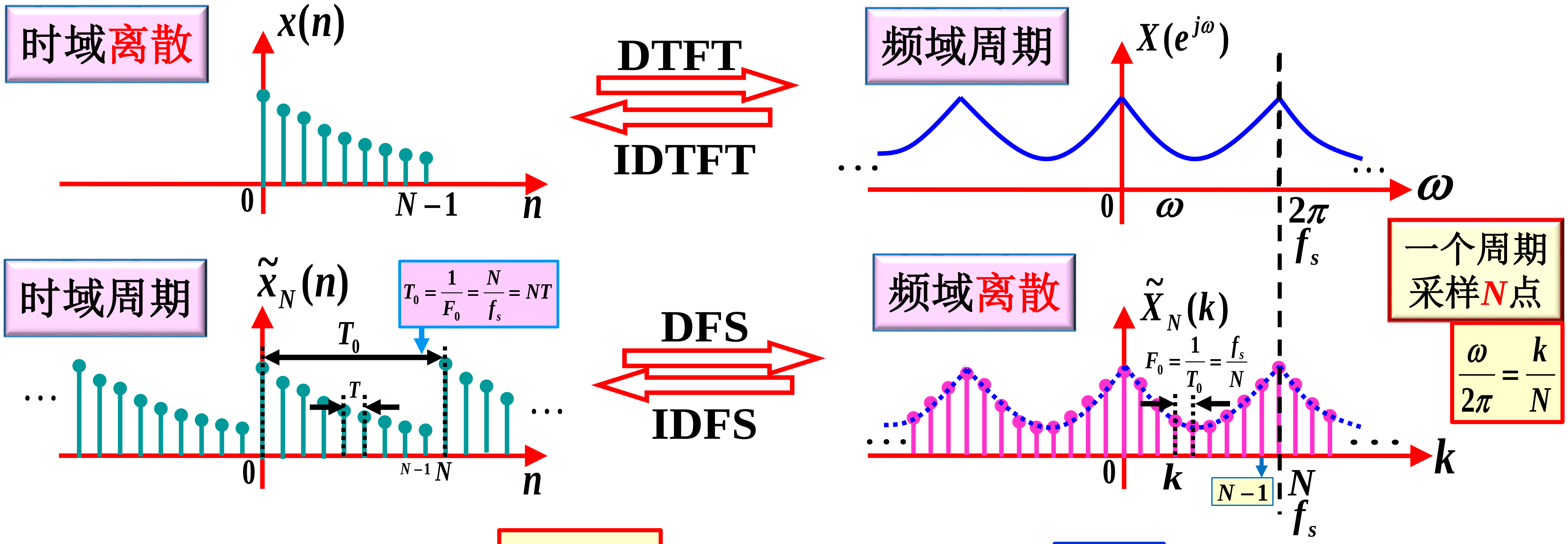
连续时间、连续频率 — 傅立叶变换FT

连续时间、离散频率 — 傅立叶级数FS

离散时间、连续频率 — 序列傅立叶变换DTFT

离散时间、离散频率 — 离散傅立叶级数DFS

二、由DTFT推出离散傅立叶级数(DFS)的表达式



DTFT

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{N}k$$

DFS

$$\tilde{X}(k)=X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

二、由DTFT推出离散傅立叶级数(DFS)的表达式

IDTFT $$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

离散时间傅里叶反变换

$$\omega=\frac{2\pi}{N}k$$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\mathrm{d}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\mathrm{d}k$$

离散傅里叶级数反变换

IDFS $$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

二、由DTFT推出离散傅立叶级数(DFS)的表达式

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

DTFT

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$\omega=\frac{2\pi}{N}k$

$$\tilde{X}(k)=X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DFS

$\omega=\frac{2\pi}{N}k$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

时域离散 $\Leftrightarrow$ 频域周期

时域周期 $\Leftrightarrow$ 频域离散

均以N为周期

二、由DTFT推出离散傅立叶级数(DFS)的表达式

$$\tilde{X}(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k\in[-\infty,\infty]$$

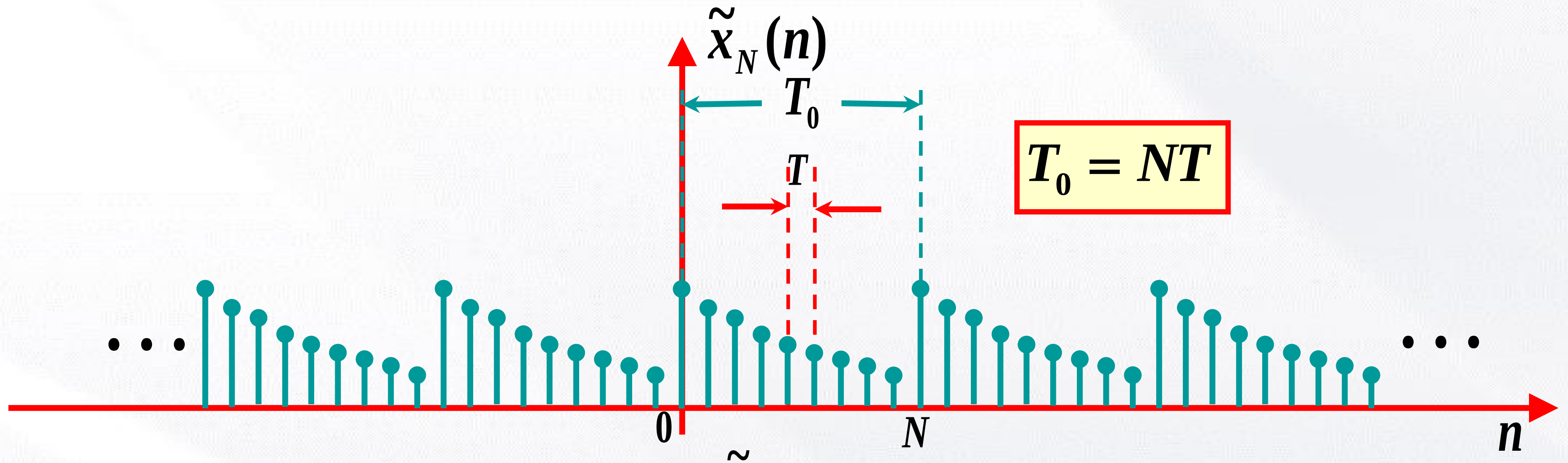
$$\tilde{x}(n)=\mathrm{IDFS}[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad n\in[-\infty,\infty]$$

令 $\boxed{W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$

$$\tilde{X}(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn} \qquad k\in[-\infty,\infty]$$

$$\tilde{x}(n)=\mathrm{IDFS}[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn} \qquad n\in[-\infty,\infty]$$

二、由DTFT推出离散傅立叶级数(DFS)的表达式



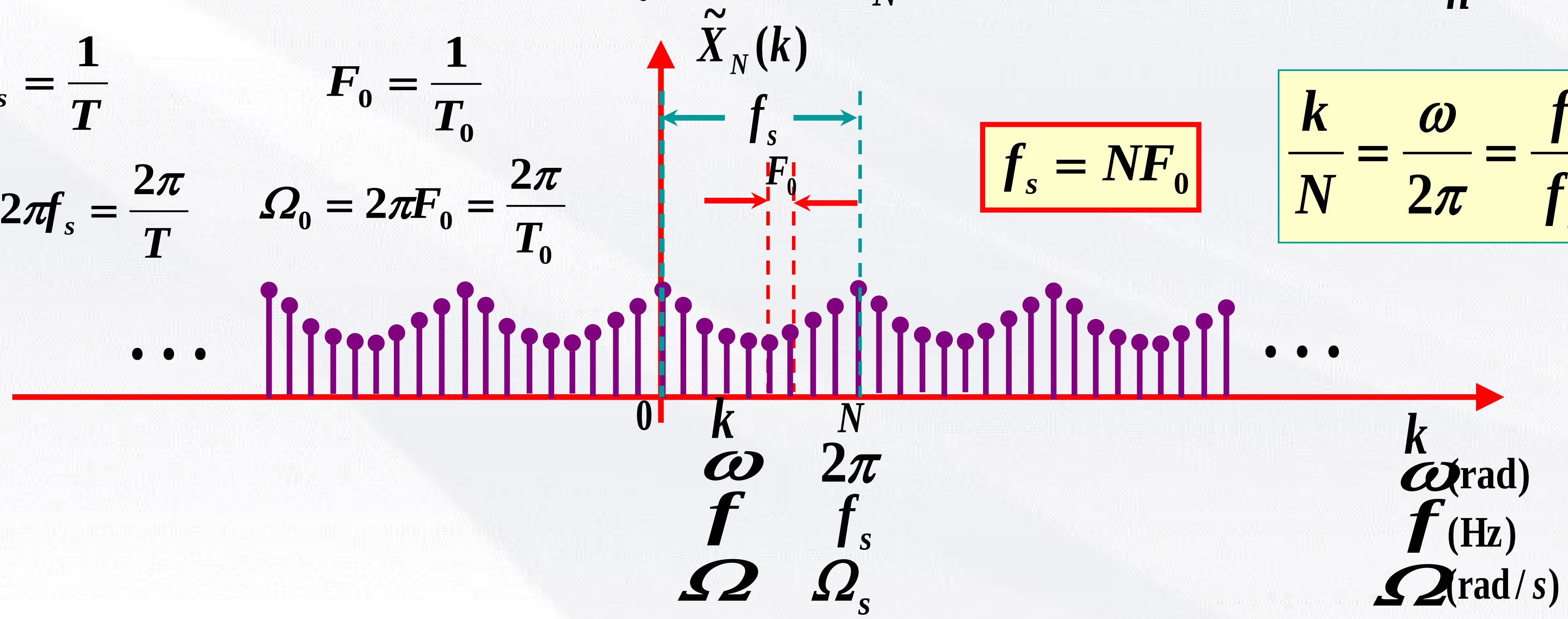
$$T_0 = NT$$

$$f_s = \frac{1}{T} \qquad F_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$\Omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T} \qquad \Omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$f_s = NF_0$$

$$\frac{k}{N} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{f}{f_s} = \frac{\Omega}{\Omega_s}$$



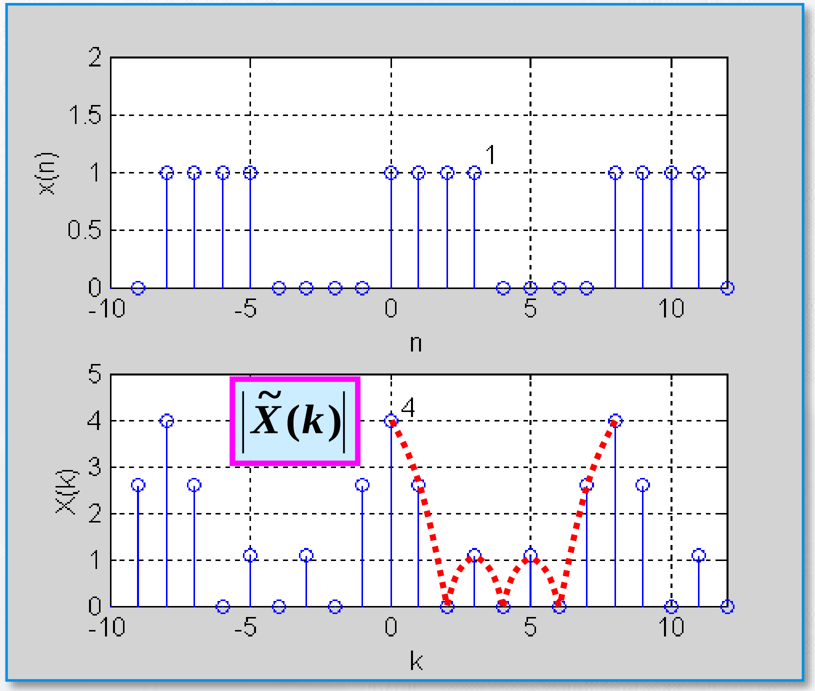
二、由DTFT推出离散傅立叶级数(DFS)的表达式

例：已知序列$x(n)=R_4(n)$，将$x(n)$以$N=8$为周期进行周期延拓形成$\tilde{x}(n)$，求$\tilde{x}(n)$的DFS一个周期内的系数。

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{7}R_4(n)W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{3}W_8^{kn}$$

$$=1+W_8^{k}+W_8^{2k}+W_8^{3k}$$



$$\tilde{X}(0)=4 \quad \tilde{X}(1)=1-j(\sqrt{2}+1) \quad \tilde{X}(2)=0 \quad \tilde{X}(3)=1-j(\sqrt{2}-1)$$

$$\tilde{X}(4)=0 \quad \tilde{X}(5)=1+j(\sqrt{2}-1) \quad \tilde{X}(6)=0 \quad \tilde{X}(7)=1+j(\sqrt{2}+1)$$

$$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$$

$$\tilde{X}(k)=\tilde{X}^*(-k)$$

$$\tilde{X}(k)=\tilde{X}^*(N-k)$$

三、离散傅立叶级数的性质

由于可用抽样z变换解释DFS，故DFS的许多性质与z变换相似。但 $\tilde{x}(n)$与 $\tilde{X}(k)$都具有周期性，所以DFS在时域和频域之间存在着严格的对偶关系，这是序列z变换所不具有的。

令：$\tilde{X}_1(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}_1(n)]$， $\tilde{X}_2(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}_2(n)]$

1、线性

$$\boxed{\mathrm{DFS}[a\cdot\tilde{x}_1(n)+b\cdot\tilde{x}_2(n)]=a\cdot\tilde{X}_1(k)+b\cdot\tilde{X}_2(k)}$$

2、序列的移位

$$x(n)\xrightarrow{\boxed{Z}}X(z)$$

$$x(n+m)\xrightarrow{\boxed{Z}}z^{m}X(z)\xrightarrow{\boxed{z=e^{j\omega}}}e^{j\omega m}X(e^{j\omega})\xrightarrow{\boxed{\omega=\frac{2\pi}{N}k}}e^{j\frac{2\pi}{N}km}\tilde{X}(k)$$

$$x(n-1)\to z^{-1}X(z)\to e^{-j\omega}X(e^{j\omega})\to e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\tilde{X}(k)$$

$$\boxed{W_N^{k}\tilde{X}(k)}$$

$$\boxed{\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n+m)]=\tilde{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}mk}=\tilde{X}(k)\cdot W_N^{-mk}}$$

三、离散傅立叶级数的性质

3、调制特性

$$\mathrm{DFS}[W_N^{ln}\cdot\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{ln}\cdot\tilde{x}(n)\cdot W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\cdot W_N^{(k+l)n}=\tilde{X}(k+l)$$

4、周期卷积和

若：$\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)$

则：$\tilde{y}(n)=\mathrm{IDFS}[\tilde{Y}(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\cdot\tilde{x}_2(n-m)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_2(m)\cdot\tilde{x}_1(n-m)$

离散傅里叶级数(DFS)及其性质

Discrete Forurier Series

- 为什么要研究离散傅立叶级数(DFS)
- 由DTFT推出离散傅立叶级数(DFS)的表达式
- 离散傅立叶级数的性质