第四章 快速傅里叶变换

Fast Forurier Transform

第四章　快速傅里叶变换

Fast Forurier Transform

4.1 直接计算DFT的问题及改进途径

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

直接计算DFT的问题及改进途径

- 直接计算DFT的问题
- DFT的运算量
- 改善DFT运算效率的基本途径
- FFT算法的基本思想

一、直接计算DFT的问题

华东理工大学

1、问题的提出

设有限长序列$x(n)$，非零值长度为N，若对$x(n)$进行一次DFT运算，共需<u>多大的运算工作量</u>？

计算成本?
计算速度?

2、DFT的运算量

回忆DFT和IDFT的变换式：

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\qquad \underline{0\le k\le N-1}$$

$$x(n)=\mathrm{IDFT}[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\qquad \underline{0\le n\le N-1}$$

注意：

1）$x(n)$为<u>复数</u>，　$W_N^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ 也为<u>复数</u>。

2）DFT与IDFT的<u>计算量相当</u>。

一、直接计算DFT的问题

华东理工大学

以DFT为例：

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} \qquad \underline{0\le k\le N-1}$$

计算机运算时（编程实现）：

$$\left.\begin{array}{ll}
k=0 & X(0)=x(0)W_N^{0\cdot 0}+x(1)W_N^{1\cdot 0}+\cdots+x(N-1)W_N^{(N-1)\cdot 0} \\
k=1 & X(1)=x(0)W_N^{0\cdot 1}+x(1)W_N^{1\cdot 1}+\cdots+x(N-1)W_N^{(N-1)\cdot 1} \\
k=2 & X(2)=x(0)W_N^{0\cdot 2}+x(1)W_N^{1\cdot 2}+\cdots+x(N-1)W_N^{(N-1)\cdot 2} \\
\vdots & \\
k=N-1 & X(N-1)=\underbrace{x(0)W_N^{0\cdot N-1}+x(1)W_N^{1\cdot N-1}+\cdots+x(N-1)W_N^{(N-1)\cdot(N-1)}}_{N\text{次复乘，}N\text{-1次复加}}
\end{array}\right\} N\text{个点}$$

一、直接计算DFT的问题

华东理工大学

运算量

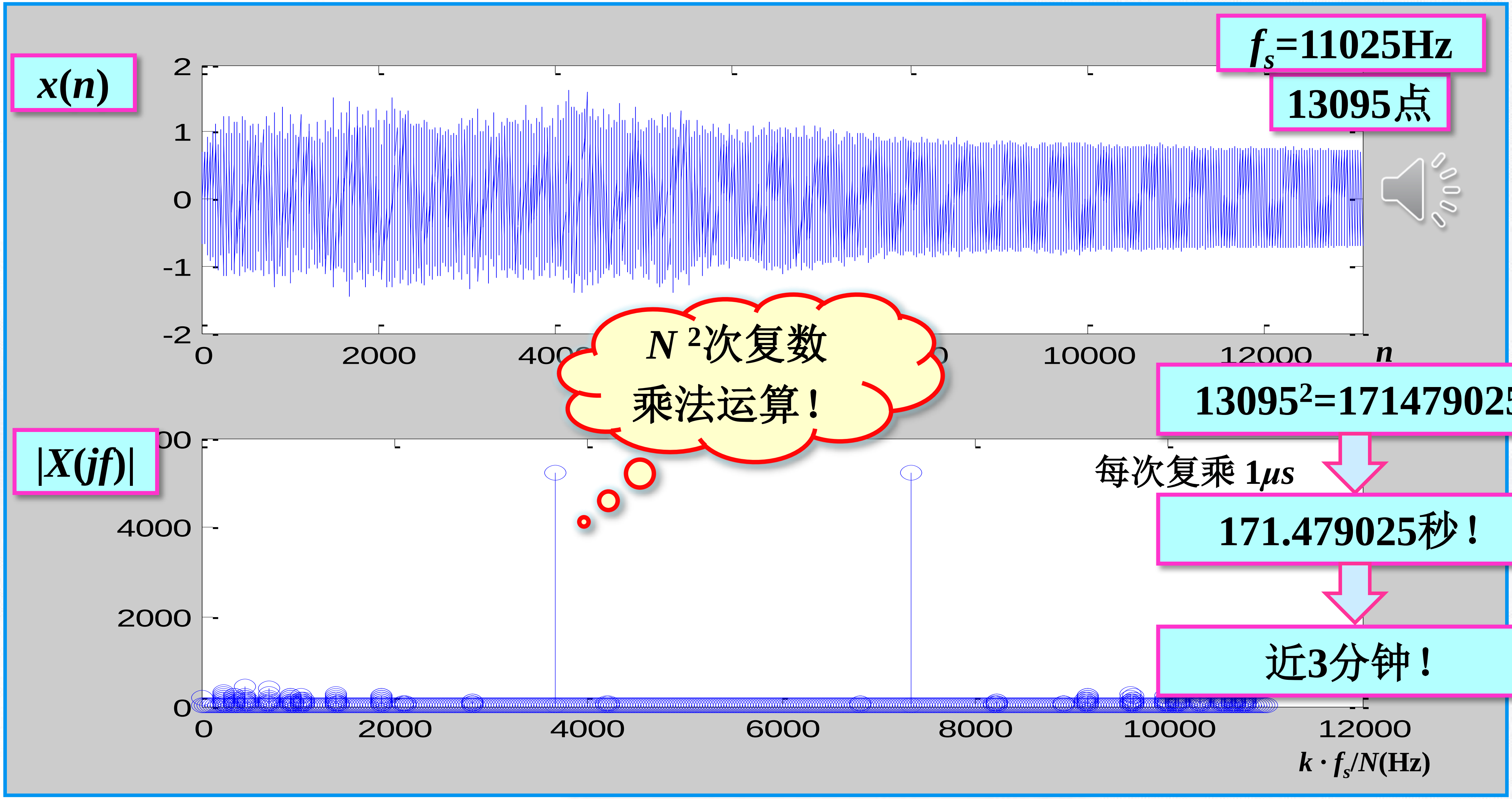
$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$(a+jb)(c+jd)=(ac-bd)+j(bc+ad)$

	复数乘法	复数加法
一个$X(k)$	N	$N-1$
N个$X(k)$ (N点DFT)	N^2	$N(N-1)$

	实数乘法	实数加法
一次复乘	4	2
一次复加	/	2
一个$X(k)$	$4N$	$2N+2(N-1)=2(2N-1)$
N个$X(k)$ (N点DFT)	$4N^2$	$2N(2N-1)$

➢ 仿真实例：分析下面一段含噪音频的频谱



f_s=11025Hz

13095点

N^2次复数乘法运算！

13095^2=171479025

每次复乘 1μs

171.479025秒！

近3分钟！

直接计算DFT的问题及改进途径

由于计算量大，且要求相当大的内存，难以实现实时处理，限制了DFT的应用。长期以来，人们一直在寻求一种能提高DFT运算速度的方法。

FFT便是 Cooley & Tukey 在1965 年提出的的快速算法，它可以使运算速度提高几百倍，从而使数字信号处理学科成为一个新兴的应用学科。

二、改善DFT运算效率的基本途径

1、利用DFT运算的系数$\boxed{W_N^{kn}}$的固有对称性和周期性，改善DFT的运算效率。

W_N^{nk}的计算 $W_N^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

对称性 $(W_N^{nk})^*=W_N^{-nk}=W_N^{(N-n)k}=W_N^{n(N-k)}$

$W_N^{(N-n)k} \downarrow W_N^{Nk}\cdot W_N^{-nk}$ $W_N^{n(N-k)} \downarrow W_N^{nN}\cdot W_N^{-nk}$

周期性 $W_N^{nk}=W_N^{(N+n)k}=W_N^{n(N+k)}$

可约性 $W_N^{nk}=W_{mN}^{mnk}$ $W_N^{nk}=W_{N/m}^{nk/m}$

特殊点 $W_N^0=W_N^N=1$ $W_N^{N/2}=-1$ $W_N^{(k+N/2)}=-W_N^k$

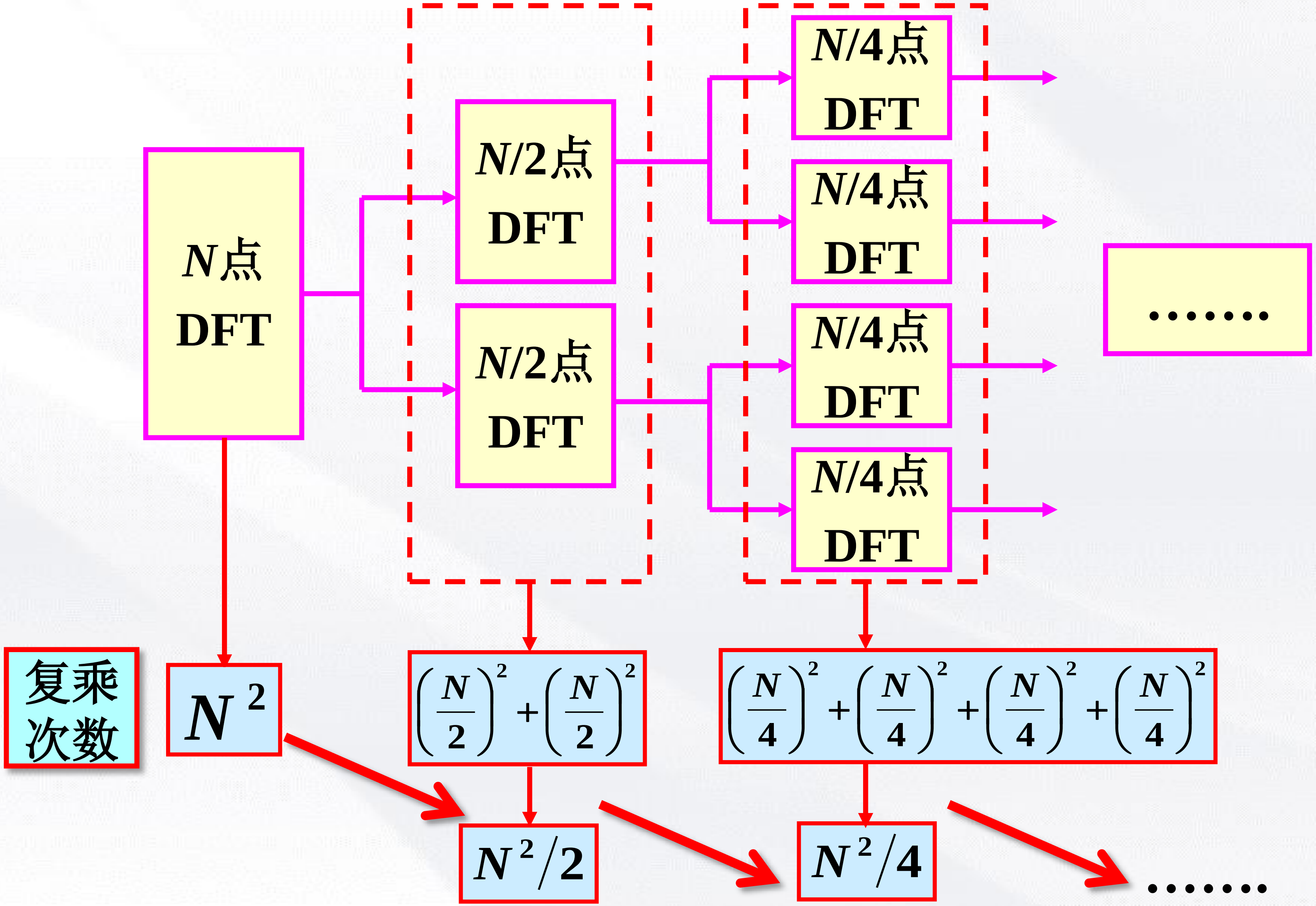
二、改善DFT运算效率的基本途径

华东理工大学

2、将长序列DFT利用对称性和周期性分解为短序列DFT的思路

因为DFT的运算量与N^2成正比的，如果一个大点数N的DFT能分解为若干小点数DFT的组合，则显然可以达到减少运算工作量的效果。

二、改善DFT运算效率的基本途径



直接计算DFT的问题及改进途径

FFT算法的基本思想：

- 利用DFT系数的特性，合并DFT运算中的某些项；
- 把长序列DFT分解为短序列DFT，从而减少运算量。

FFT算法分类：

- 时间抽取法　DIT: Decimation-In-Time
- 频率抽取法　DIF: Decimation-In-Frequency

第四章　快速傅里叶变换

Fast Forurier Transform

4.1 直接计算DFT的问题及改进途径

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁