

## 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The  $z$  Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

2.1

$z$  变换的基本概念

2.2

离散时间信号傅里叶变换

2.3

系统函数及其与系统性质的关系

2.4

系统频率响应的意义

2.5

几何法画频率响应

2.6

特殊滤波器的设计



## 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The  $z$  Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

### 2.6 特殊滤波器的设计

#### 简单一阶滤波器的设计

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

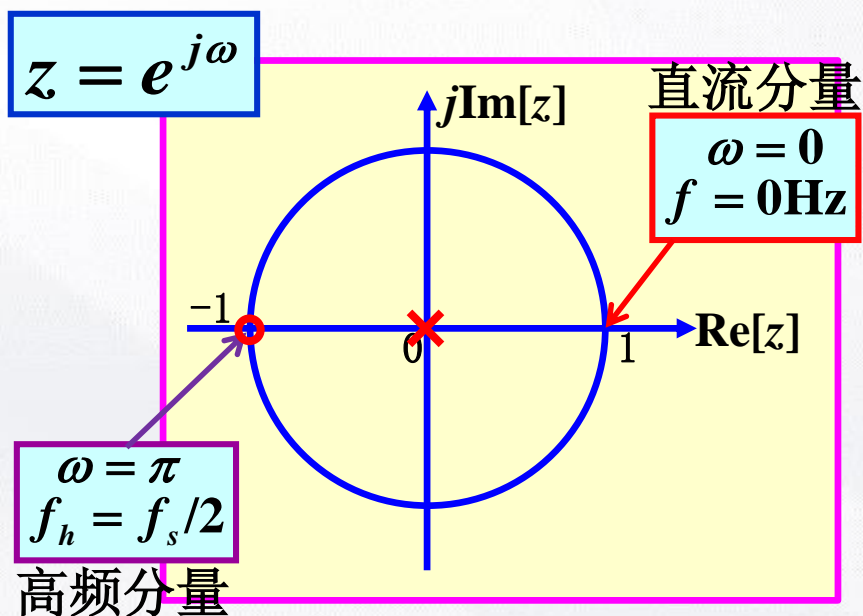


## Digital Filter

- 1、若使设计的滤波器拒绝某个频率（不让该频率信号通过）应在单位圆上相应频率处设置一个零点。
- 2、若使设计的滤波器突出某个频率（使该频率信号尽量无衰减的通过），应在单位圆内相应的频率处设置一个极点，极点越接近单位圆，在该频率处的幅频响应幅值越大。

- 仅由一个零点或极点调节系统滤波特性

由一个零点调节的低通滤波器



2点滑动平均滤波器  
—— 低通滤波器

$$H(z) = z + 1$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z + 1$$

非因果!

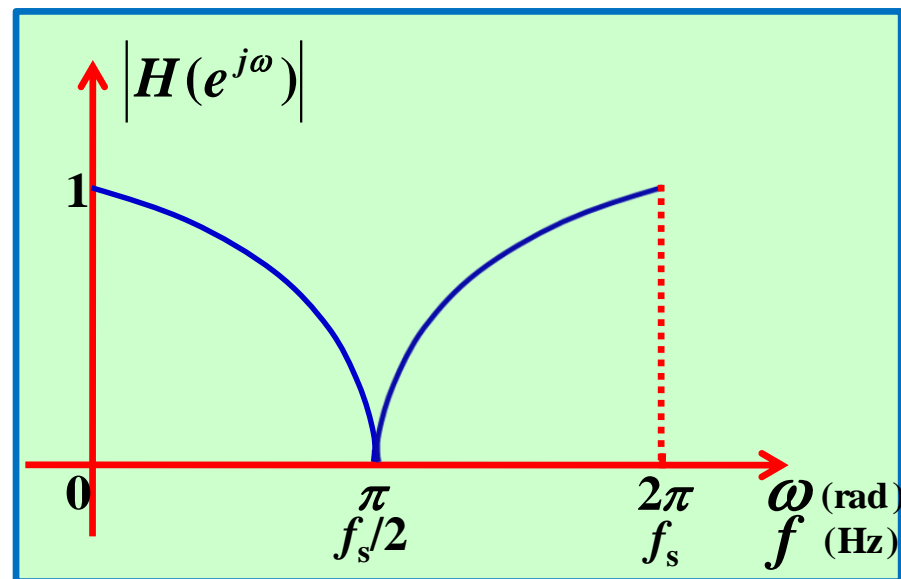
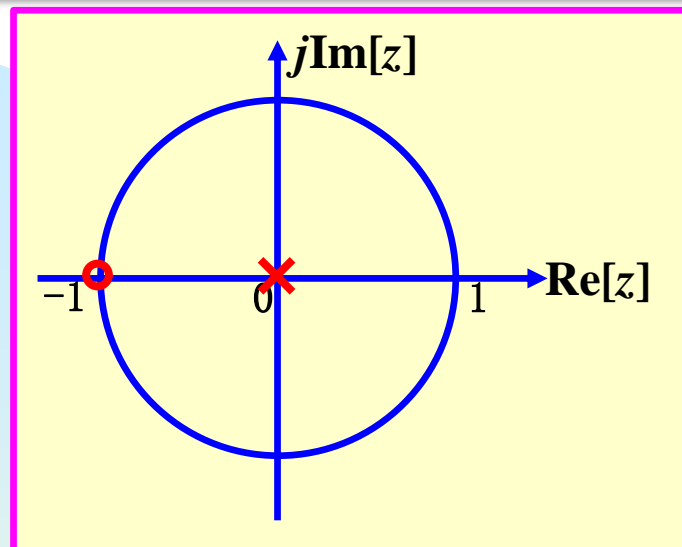
$$y(n) = x(n+1) + x(n)$$

因果

$$H(z) = \frac{1}{2} \frac{(z+1)}{z} = \frac{1}{2} (1 + z^{-1})$$

$$y(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x(n-1)]$$

## 由一个零点调节的低通滤波器

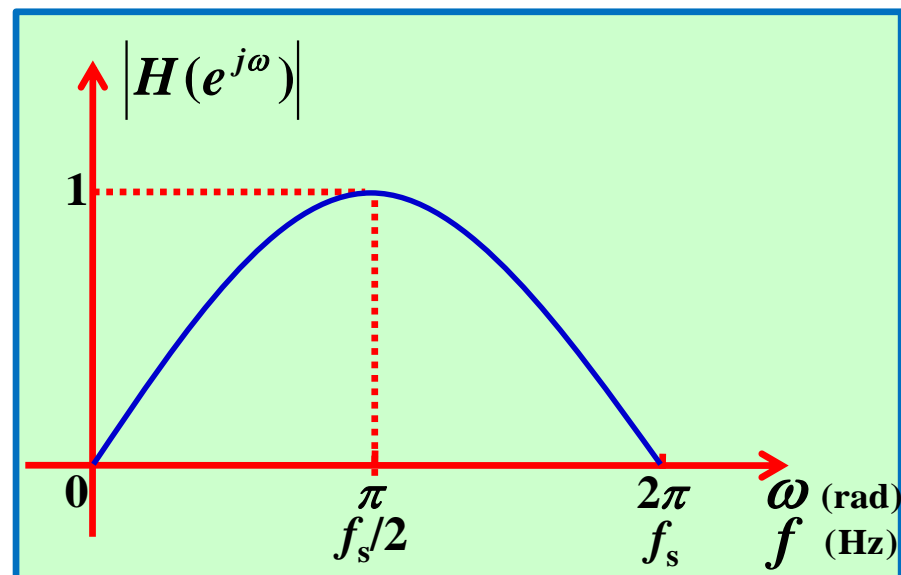
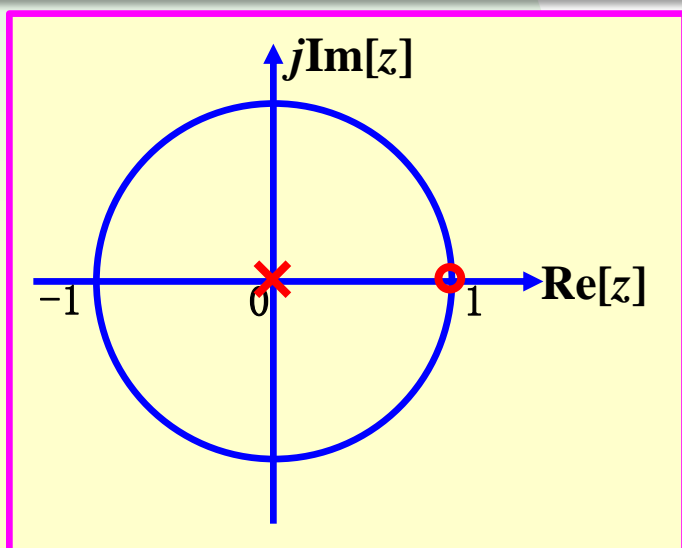


$$H(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})$$

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)]$$

2点滑动平均——  
低通滤波器

## 由一个零点调节的高通滤波器

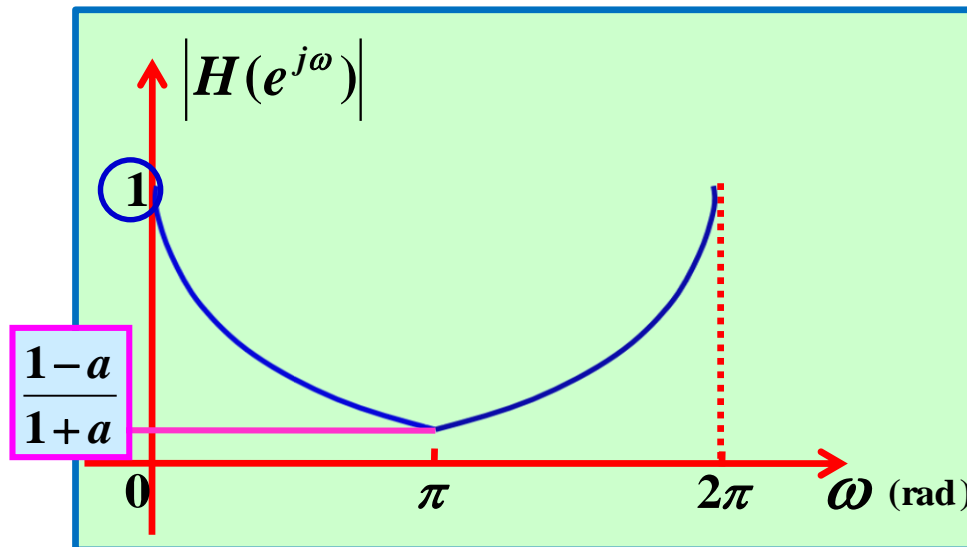
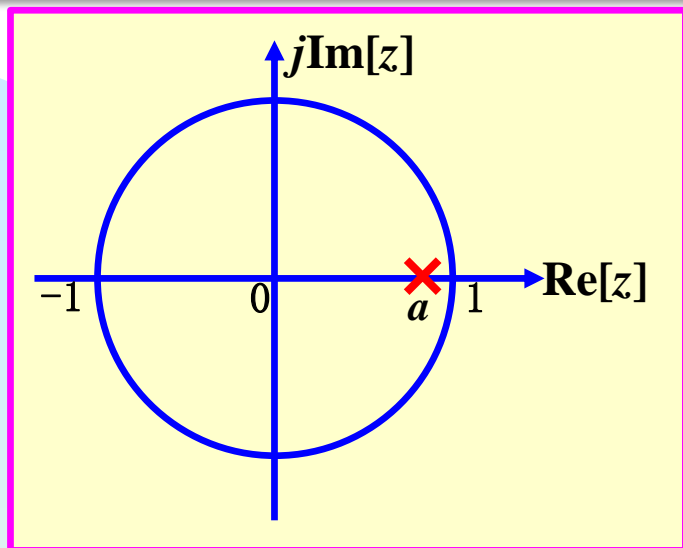


$$H(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-1})$$

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(n-1)]$$

差分系统——  
高通滤波器

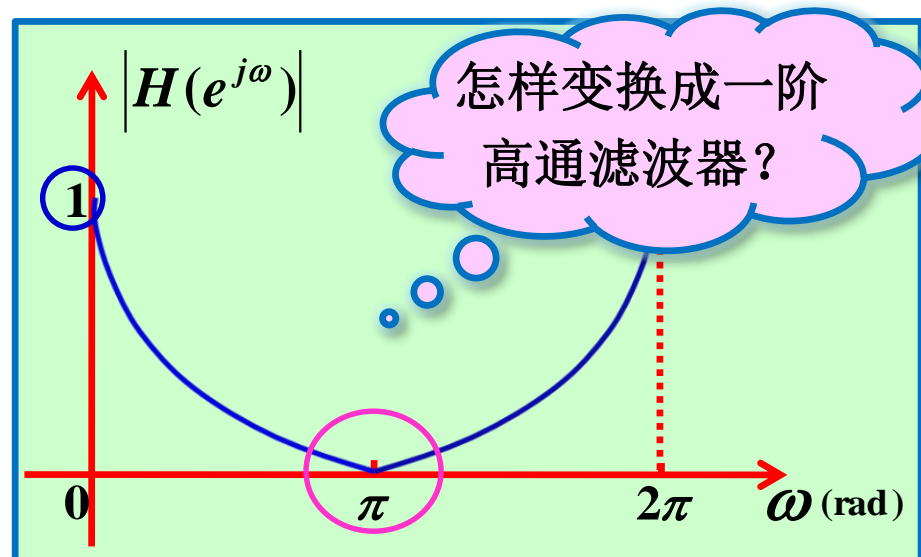
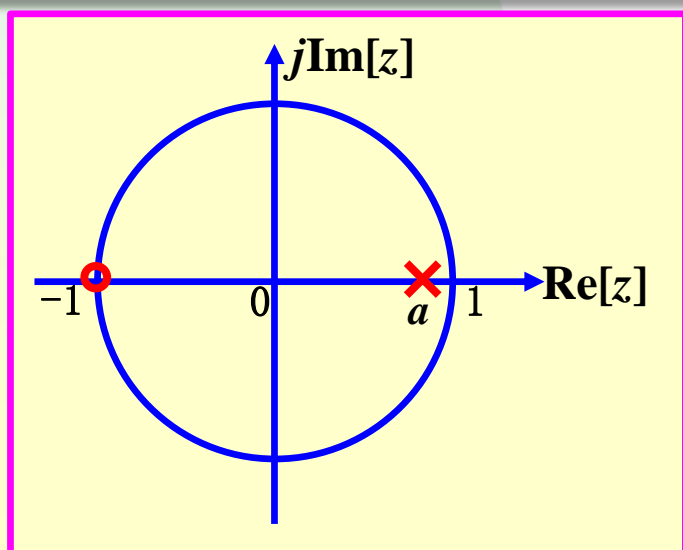
## 由一个极点调节的低通滤波器



$$H(z) = \frac{1-a}{z-a}$$

$$0 < a < 1$$

## 由一个极点调节的低通滤波器



$$H(z) = \frac{1-a}{2} \frac{z+1}{z-a}$$

$$0 < a < 1$$

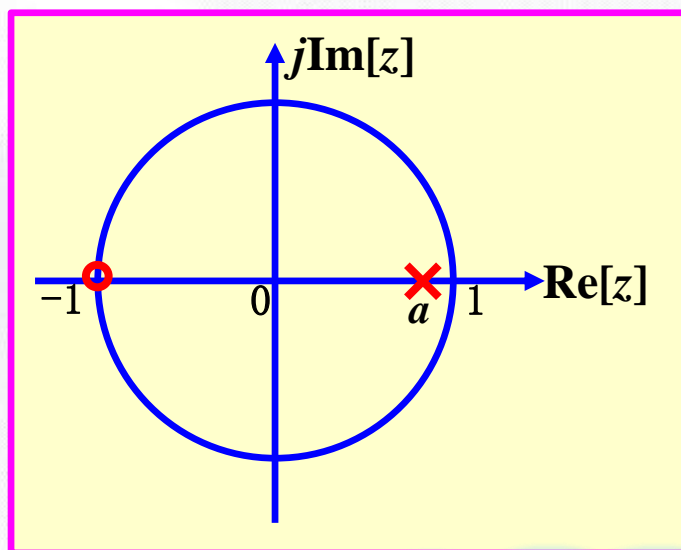


补充：一阶低通滤波器设计中关于带宽的考虑

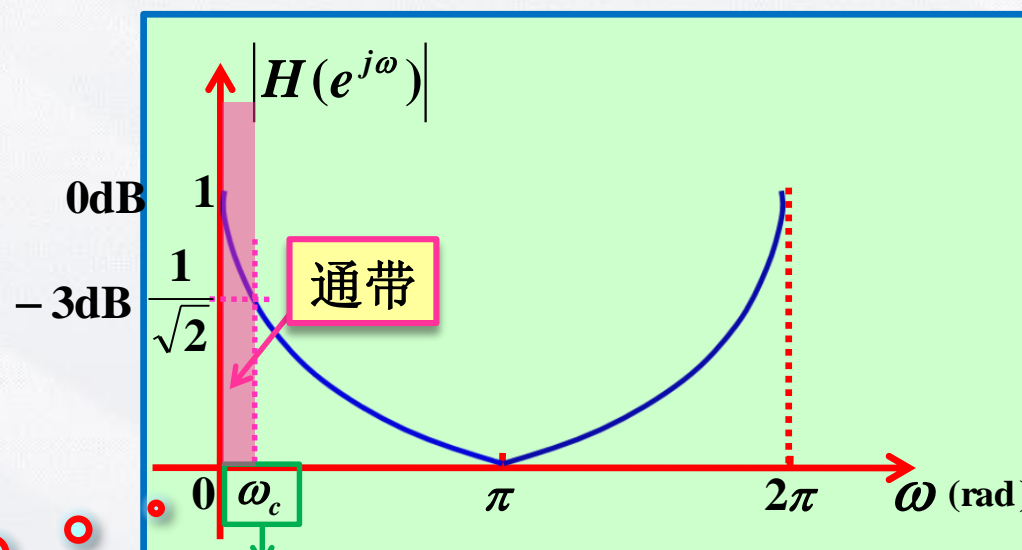
➤ 问题的提出：

$$H(z) = \frac{1-a}{2} \frac{z+1}{z-a}$$

$$0 < a < 1$$



$\omega_c$ 与 $a$ 的关系?



通带截止频率

Passband cut-off frequency

## ➤ 通带截止频率与极点位置的关系

$$H(z) = \frac{1-a}{2} \frac{z+1}{z-a}, \quad 0 < a < 1$$

当  $\omega = \omega_c$  时，幅度降到3dB

$$\left| H(e^{j\omega_c}) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{1-a}{2} \frac{e^{j\omega_c} + 1}{e^{j\omega_c} - a} \right|^2 = 0.5$$

$$\omega_c = \arccos\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) \approx 1-a$$

$$0.85 < a < 1$$





近似3dB带宽

$$\omega_c = \arccos\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)$$

一般极点很靠近单位圆，上式可以近似表示为：

$$\omega_c \approx \beta = 1 - a \quad \text{单位: (rad)}$$

| $a$  | 精确带宽 | 近似带宽 $\beta$ |
|------|------|--------------|
| 0.6  | 0.49 | 0.40         |
| 0.7  | 0.35 | 0.30         |
| 0.8  | 0.22 | 0.20         |
| 0.85 | 0.16 | 0.15         |
| 0.9  | 0.10 | 0.10         |
| 0.95 | 0.05 | 0.05         |

$0.1\pi$

例：假设模拟信号如下，设计一个一阶低通数字滤波器，将信号中的高频分量滤除。

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 10t) + \sin(2\pi \cdot 250t)$$

解：确定采样间隔 $T$ (采样频率 $f_s$ ):

$$f_{low} = 10\text{Hz}, \quad f_{high} = 250\text{Hz}$$

◆ 模拟信号→数字信号，选择采样频率：

$$f_s > 2f_h \implies f_s = 1000\text{Hz}$$

◆ 选择一阶低通滤波器模型：

$$H(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

- ◆ 计算需通过的低频分量和需要滤除的高频分量:

$$\omega_1 = 2\pi \frac{f_{low}}{f_s} = 2\pi \frac{10}{1000} = 0.02\pi \approx 0.0628(\text{rad})$$

$$\omega_2 = 2\pi \frac{f_{high}}{f_s} = 2\pi \frac{250}{1000} = 0.5\pi(\text{rad})$$

- ◆ 由近似带宽选择参数  $a$ :

$$0.0628 < \omega_c$$

$$\omega_c \approx 1 - a = 0.1, \quad \therefore a = 0.9$$

- ◆ 求得滤波器系统函数:

$$H(z) = 0.05 \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

```
b=[0.05 0.05];%构造系统函数
```

```
a=[1 -0.9];
```

```
n=[0:99];
```

```
N=100;fs=1000;
```

```
x=sin(2*pi*10*n/fs)+sin(2*pi*250*n/fs);
```

```
y=filter(b,a,x);%求系统输出
```

```
figure(1)
```

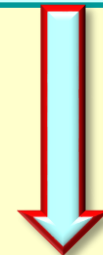
```
zplane(b,a);%画零极点图
```

```
figure(2)
```

```
subplot(211);plot(n,x);
```

```
subplot(212);plot(n,y);
```

$$H(z) = 0.05 \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$



$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.05x(n) + 0.05x(n-1)$$



```
figure(3)
```

```
Fx=fft(x); %画输入x(n) 的频谱
```

```
subplot(311);
```

```
plot(n*fs/N,abs(Fx)/max(abs(Fx)));
```

```
[Hh,wh]=freqz(b,a,'whole'); %画系统h(n) 的频谱
```

```
subplot(312); plot(wh/pi,abs(Hh));
```

```
Fy=fft(y); %画输出y(n) 的频谱
```

```
subplot(313); plot(n*fs/N,abs(Fy)/max(abs(Fy)));
```

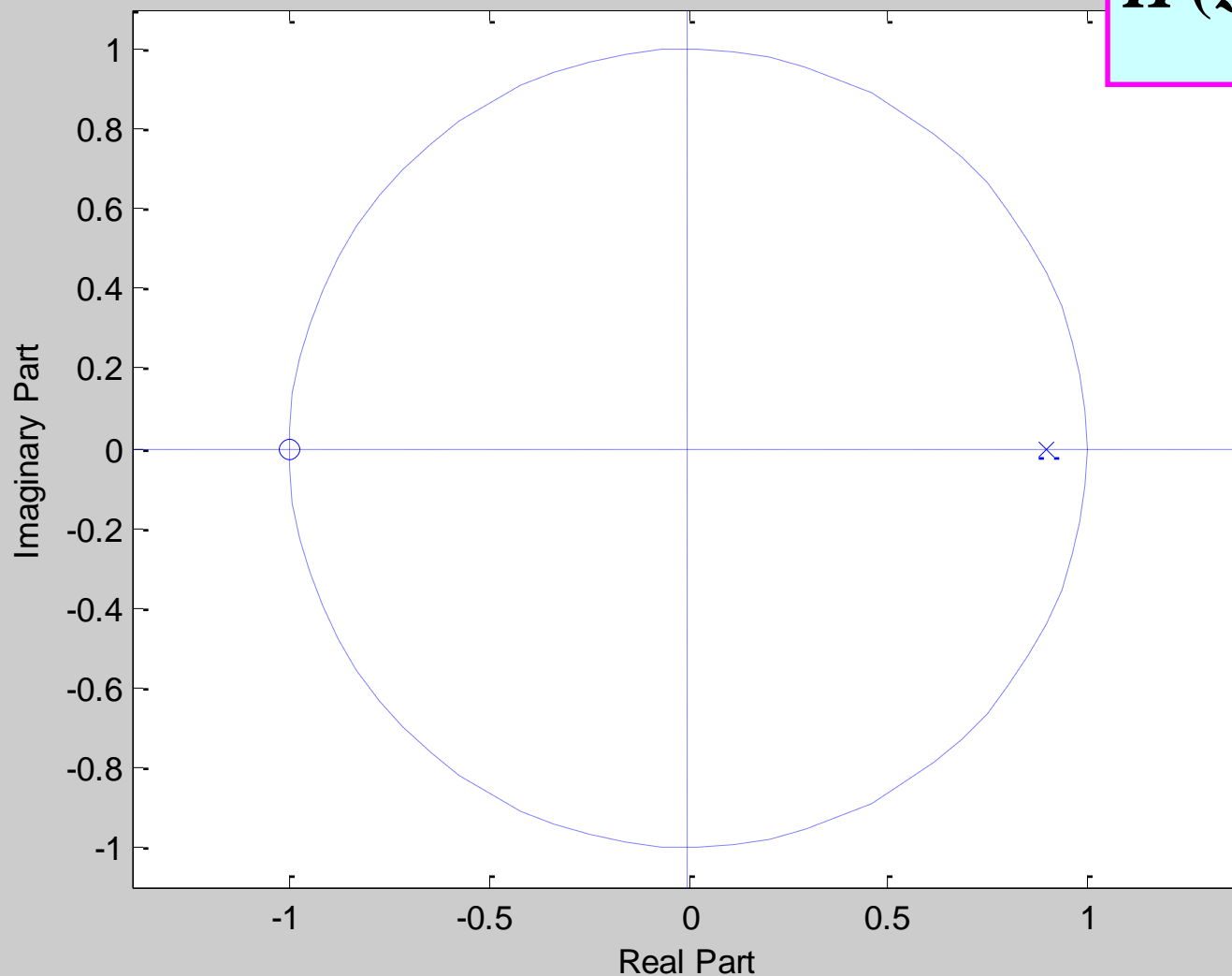


# 简单一阶滤波器的设计



华东理工大学

零极点图:



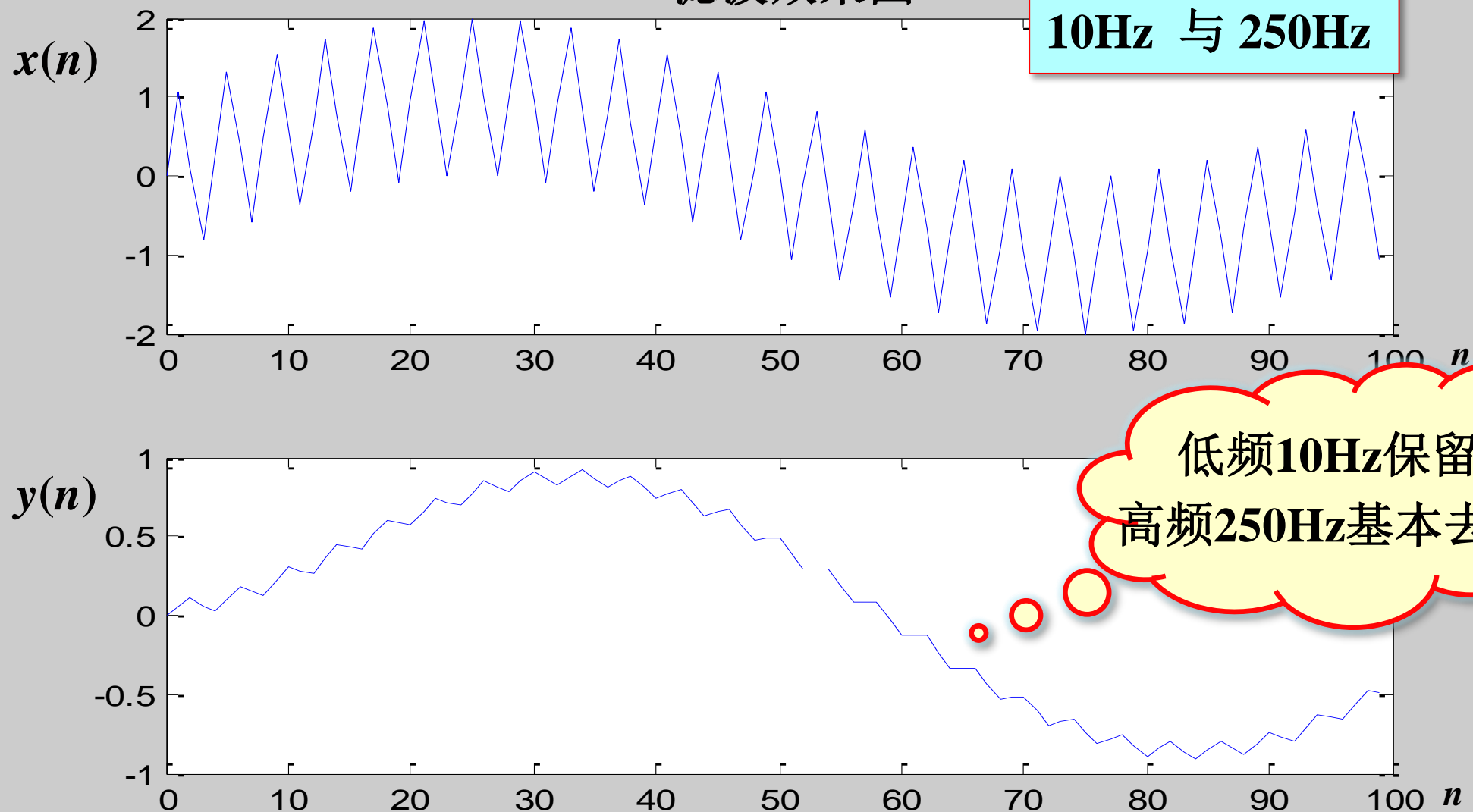
$$H(z) = 0.05 \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

# 简单一阶滤波器的设计



华东理工大学

滤波效果图

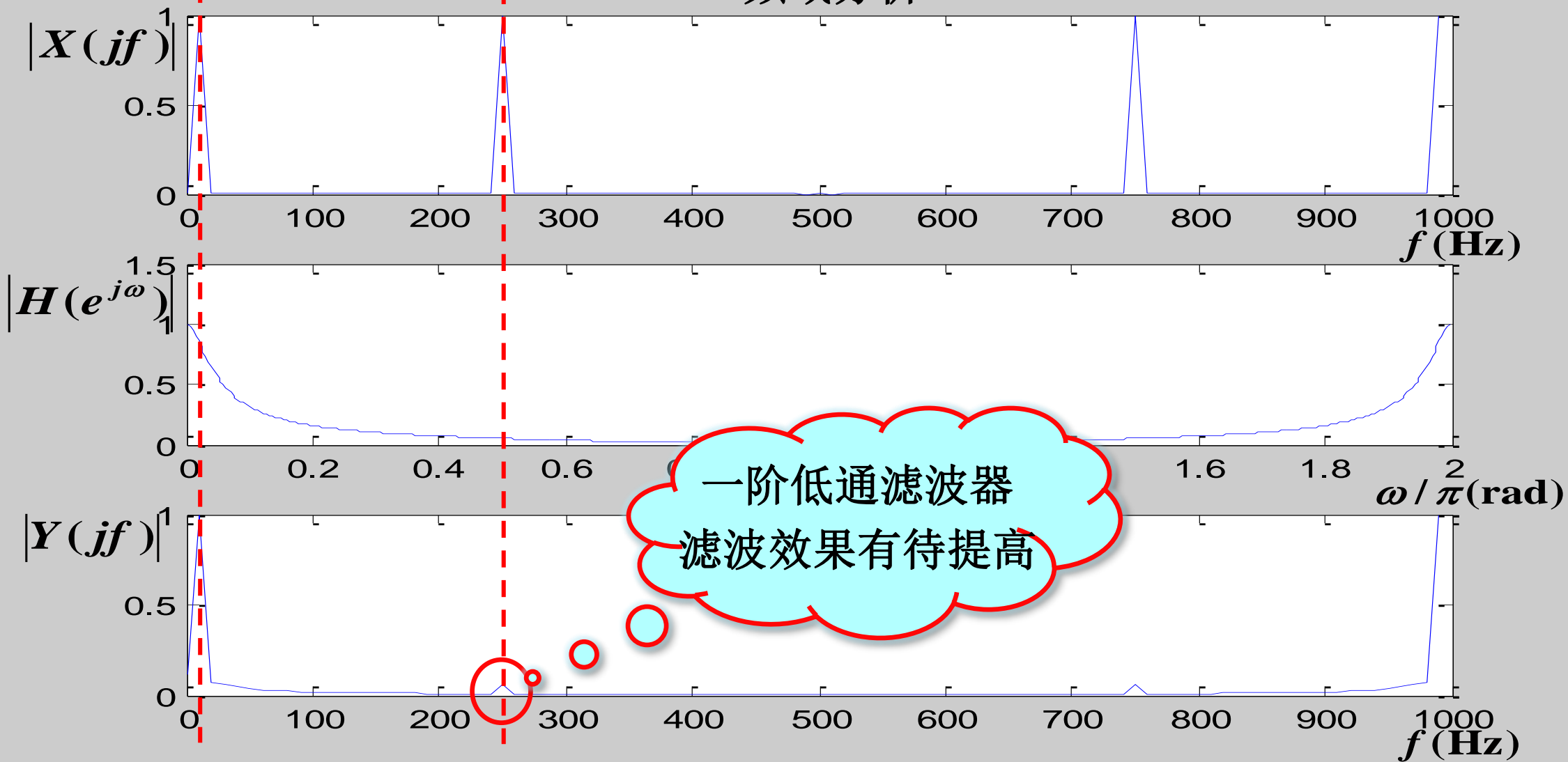


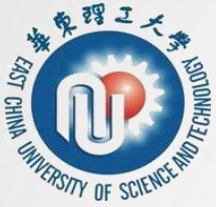
# 简单一阶滤波器的设计



华东理工大学

## 频域分析





## 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The  $z$  Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

### 2.6 特殊滤波器的设计

#### 简单一阶滤波器的设计

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

