第三章 离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

第三章　离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.2 离散傅里叶变换的定义及性质

离散傅里叶变换的性质(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

离散傅里变换的性质(2)

- DFT的圆周共轭对称性质
- DFT的圆周(循环)卷积性质

五、DFT的圆周共轭对称性质

➢ 回忆：共轭对称序列与共轭反对称序列的定义

共轭对称序列

$x_e(n)$

even

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

$$x_e(n) = x_{er}(n) + jx_{ei}(n)$$
$$x_e^*(-n) = x_{er}(-n) - jx_{ei}(-n)$$

实部偶函数

$$x_{er}(n) = x_{er}(-n)$$

虚部奇函数

$$x_{ei}(n) = -x_{ei}(-n)$$

共轭反对称序列

$x_o(n)$

odd

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

$$x_o(n) = x_{or}(n) + jx_{oi}(n)$$
$$x_o^*(-n) = x_{or}(-n) - jx_{oi}(-n)$$

实部奇函数

$$x_{or}(n) = -x_{or}(-n)$$

虚部偶函数

$$x_{oi}(n) = x_{oi}(-n)$$

- 由$x(n)$求$x_e(n)$和$x_o(n)$

$$x(n)=\underline{x_e(n)+x_o(n)}$$
$$x^*(-n)=x_e^*(-n)+x_o^*(-n)=\underline{x_e(n)-x_o(n)}$$

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[\underline{x(n)+x^*(-n)}],\quad x_o(n)=\frac{1}{2}[\underline{x(n)-x^*(-n)}]$$

- DFT概念下的<u>圆周共轭对称</u>与<u>圆周共轭反对称</u> 隐含的周期性

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=[\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)]R_N(n)$$
$$=\tilde{x}_e(n)R_N(n)+\tilde{x}_o(n)R_N(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$$

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[\underline{x((n))_N+x^*((N-n))_N}]R_N(n)$$
$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}[\underline{x((n))_N-x^*((N-n))_N}]R_N(n)$$

➢ 实序列$x(n)$的DFT—$X(k)$的特性

探讨对应关系！

$x(n) = \boxed{\mathrm{Re}[x(n)]} + \boxed{j\,\mathrm{Im}[x(n)]}$	$X(k) = \boxed{X_{ep}(k)} + \boxed{X_{op}(k)}$
$x(n) = \boxed{x_{ep}(n)} + \boxed{x_{op}(n)}$	$X(k) = \boxed{\mathrm{Re}[X(k)]} + \boxed{j\,\mathrm{Im}[X(k)]}$

$$\boxed{\mathrm{Re}[x(n)]} = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$\mathrm{DFT}\big[\mathrm{Re}[x(n)]\big] = \mathrm{DFT}\left[\frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\big[X((k))_N + X^*((N-k))_N\big]R_N(k) = \boxed{X_{ep}(k)}$$

$$\boxed{x(n) = \mathrm{Re}[x(n)]}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{X(k) = X^*(N-k)}$$

$$k \in [0, N-1]$$

$$\mathrm{DFT}[x^*(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk}\right]^* R_N(k)$$

$$= X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N-k))_N R_N(k)$$

例：设$x_1(n)$和$x_2(n)$都是N点的实数序列，试用一次N点DFT运算计算它们各自的DFT。

$$\mathrm{DFT}[x_1(n)] = \boxed{X_1(k)}, \quad \mathrm{DFT}[x_2(n)] = \boxed{X_2(k)}$$

解：

$$y(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

$$\boxed{Y(k)} = \mathrm{DFT}[y(n)] = \mathrm{DFT}[x_1(n) + jx_2(n)]$$

$$= \mathrm{DFT}[x_1(n)] + j\mathrm{DFT}[x_2(n)] = \boxed{X_1(k) + jX_2(k)}$$ 线性性质

$$y(n) = \underline{x_1(n)} + j\underline{x_2(n)} = \underline{\mathrm{Re}[y(n)]} + j\,\underline{\mathrm{Im}[y(n)]}$$

$$\boxed{Y(k)} = \mathrm{DFT}[\mathrm{Re}[y(n)] + j\,\mathrm{Im}[y(n)]] = \boxed{Y_{ep}(k) + Y_{op}(k)}$$ 共轭对称性质

$$X_1(k) = Y_{ep}(k) = \frac{1}{2}[Y((k))_N + Y^*((N-k))_N]R_N(k)$$

$$X_2(k) = \frac{1}{j}Y_{op}(k) = \frac{1}{2j}[Y((k))_N - Y^*((N-k))_N]R_N(k)$$

六、DFT的圆周(循环)卷积和性质 Circular Convolution

设$x_1(n)$和$x_2(n)$均为长度为N的有限长序列，且有：

$\mathrm{DFT}[x_1(n)]=X_1(k)$ 和 $\mathrm{DFT}[x_2(n)]=X_2(k)$

如果：$Y(k)=X_1(k)\cdot X_2(k)$

则：$y(n)=\mathrm{IDFT}[Y(k)]$

$$=\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N\right]R_N(n)=x_1(n)\,Ⓝ\,x_2(n)$$

$$=\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m))_N\right]R_N(n)=x_2(n)\,Ⓝ\,x_1(n)$$

六、DFT的圆周(循环)卷积和性质

$$y(n)=\tilde{y}(n)R_N(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N\right]R_N(n)$$

圆周(循环)卷积过程：

(1) 补零(当两序列长度不等于N时)

(2) 周期延拓(有限长序列变周期序列)

(3) 反褶，取主值序列(周期序列的反褶)

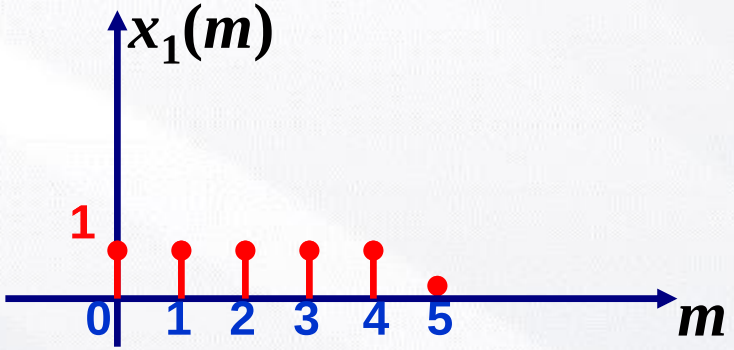
(4) 圆周(循环)移位

(5) 相乘相加

六、DFT的圆周(循环)卷积和性质

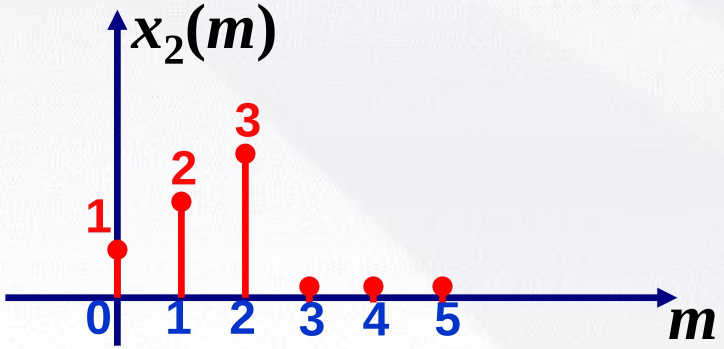
例：求下面两序列的6点圆周(循环)卷积。

$$x_1(n) = R_5(n) \qquad x_2(n) = n+1 \quad (0 \le n \le 2)$$

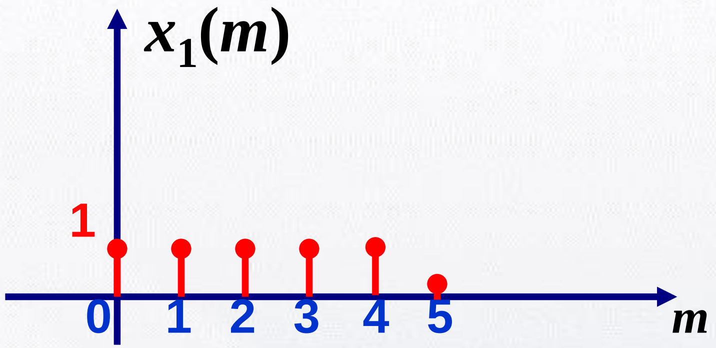


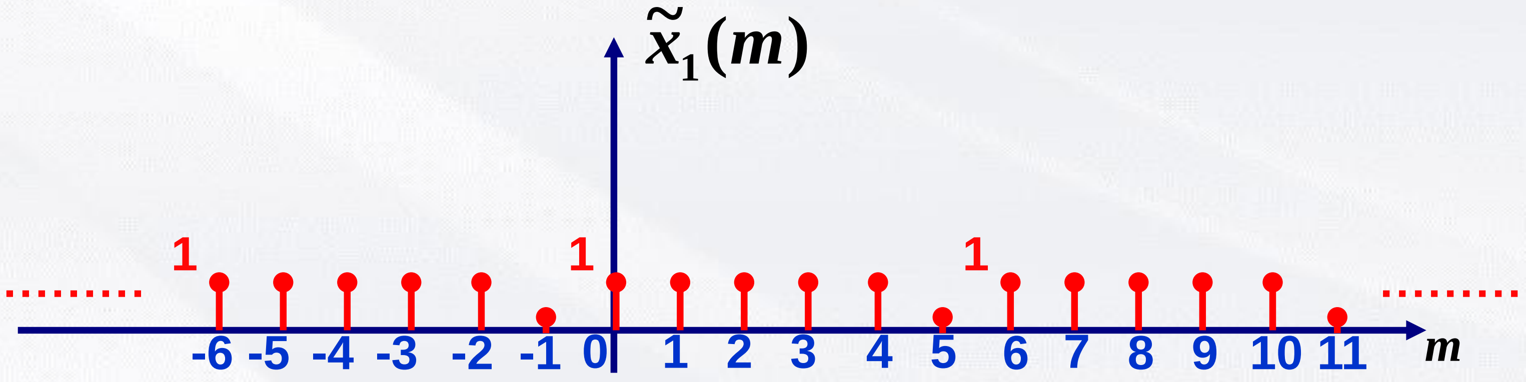
(1) 补零

补到6点

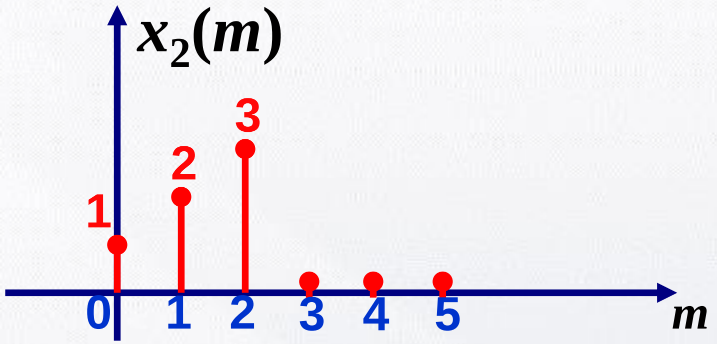


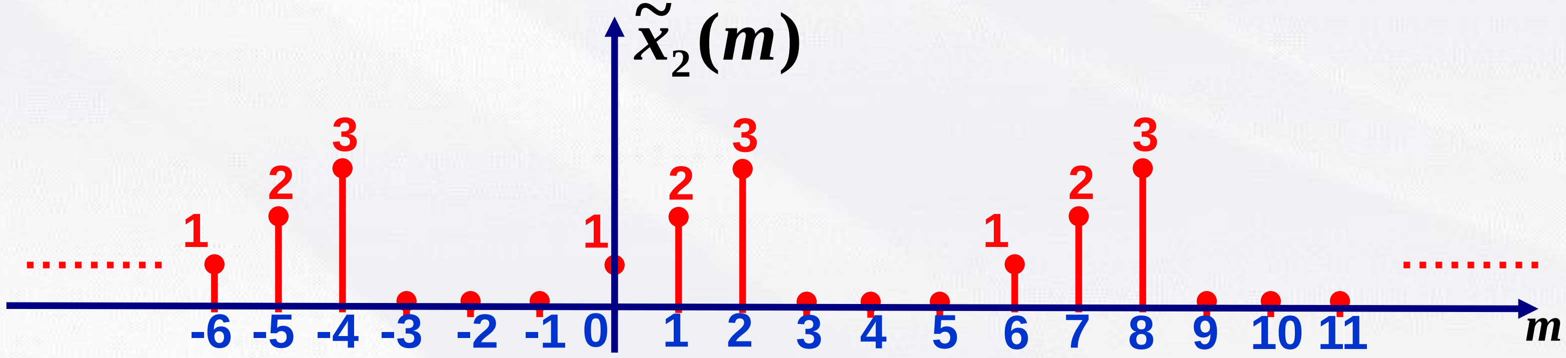
(2) 周期延拓 $N=6$





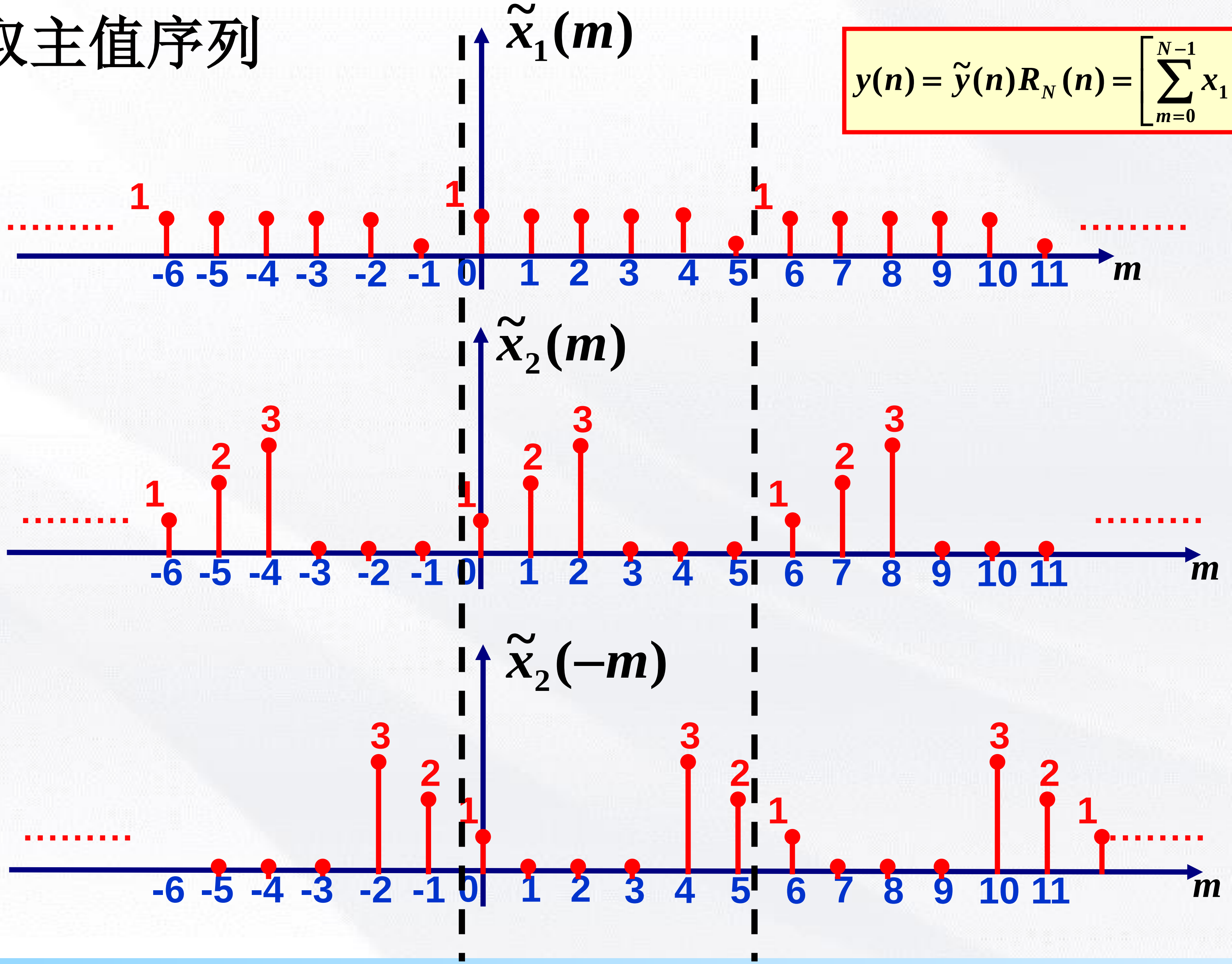
(2) 周期延拓 N=6



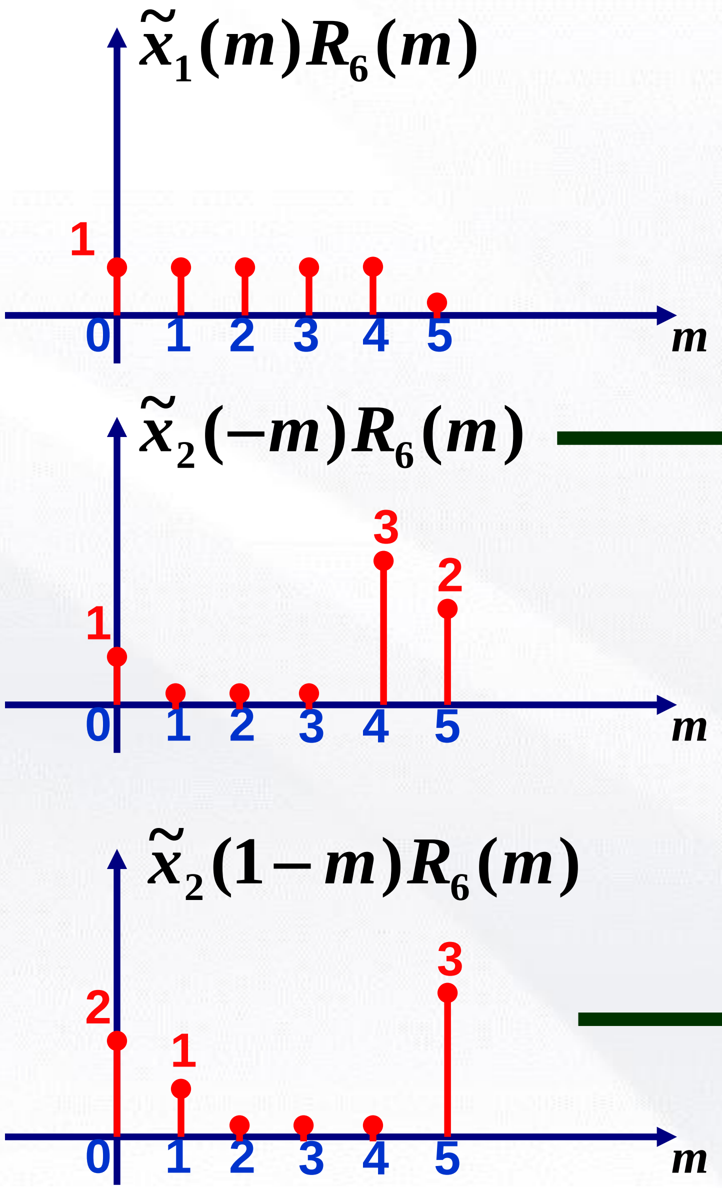


(3) 反褶，取主值序列

$$y(n)=\tilde{y}(n)R_N(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N\right]R_N(n)$$



六、DFT的圆周(循环)卷积和性质



(4) 圆周(循环)移位

(5) 相乘相加

$$y(n) = x_1(n) ⑥ x_2(n) = \{\underline{4},3,6,6,6,5\}$$

$y(0)=1*1+3*1=4$

$y(1)=2*1+1*1=3$

$y(2)=3*1+2*1+1*1=6$

$y(3)=3*1+2*1+1*1=6$

$y(4)=3*1+2*1+1*1=6$

$y(5)=3*1+2*1=5$

第三章　离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.2 离散傅里叶变换的定义及性质

离散傅里叶变换的性质(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁