

第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.1

数字滤波器设计方法概述

6.2

模拟滤波器的设计

6.3

脉冲响应不变法

6.4

双线性变换法

6.5

IIR数字滤波器设计方法小结



第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.2 模拟滤波器的设计

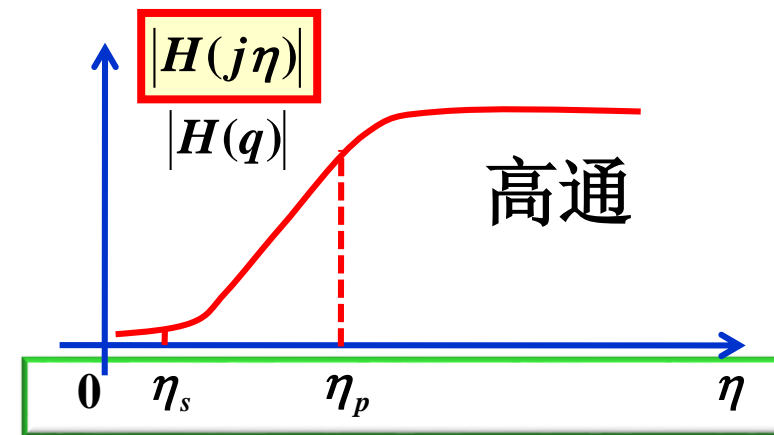
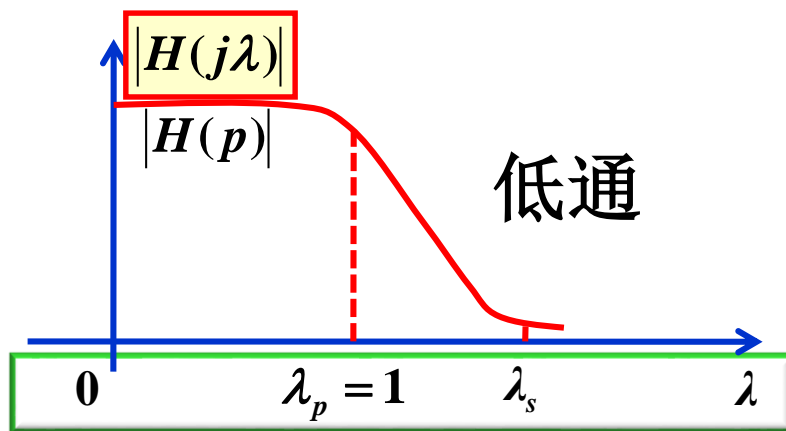
模拟滤波器的频带转换方法(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁





一、低通到高通的频率变换



$$\lambda = \frac{1}{\eta}$$

一、低通到高通的频率变换

➤ 模拟高通滤波器的设计步骤如下：

A、确定高通滤波器的技术指标：通带下限频率 Ω_p' ，阻带上限频率 Ω_s' ，通带最大衰减 α_p ，阻带最小衰减 α_s 。

B、确定相应低通滤波器的设计指标，将高通滤波器的边界频率转换成低通滤波器的边界频率。

①低通滤波器通带截止频率 $\Omega_p=1/\Omega_p'$ ；

②低通滤波器阻带截止频率 $\Omega_s=1/\Omega_s'$ ；

③通带最大衰减仍为 α_p ，阻带最小衰减仍为 α_s 。



一、低通到高通的频率变换



C、设计原型(归一化)低通滤波器 $H(p)$ 。

D、求模拟高通的 $H_a(s)$ 。将 $H(p)$ 先转换成归一化高通 $H(q)$ ，再去归一化，得 $H_a(s)$ ：

$$H_a(s) = H(p) \Big|_{p = \frac{\Omega_c}{s}}$$

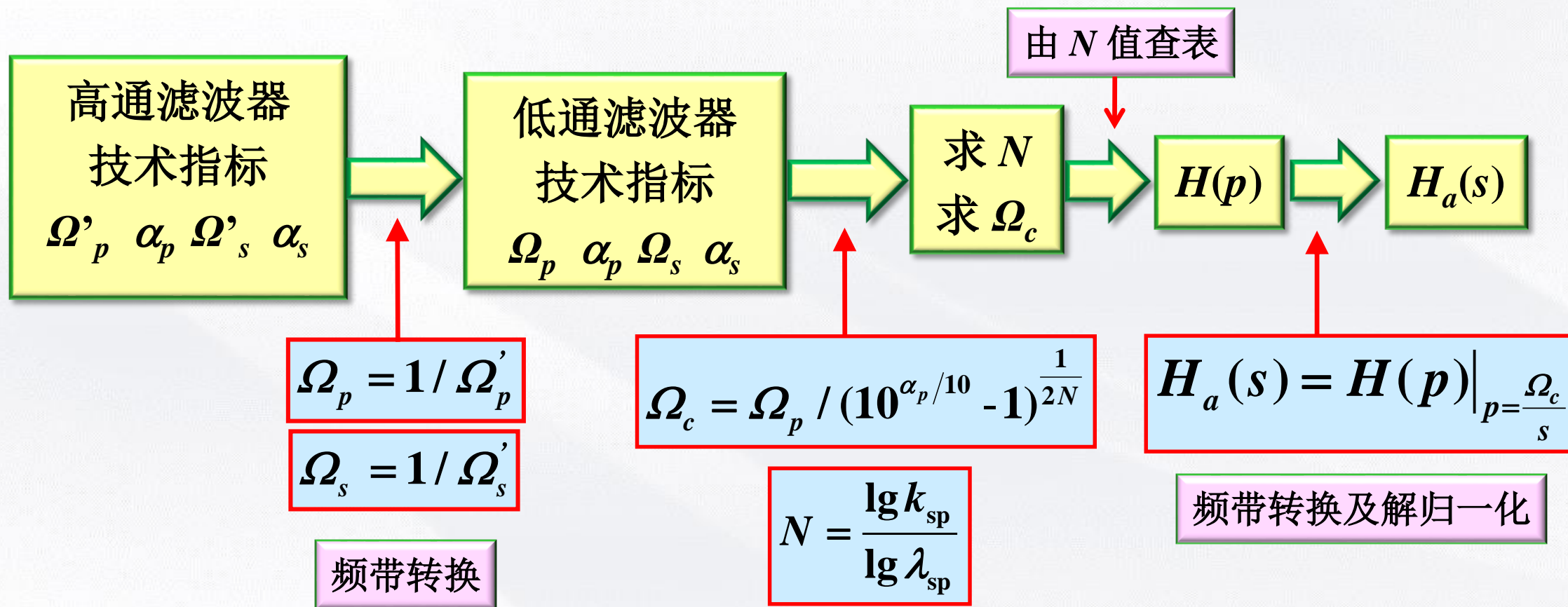
回忆低通滤波器的去归一化：

$$H_a(s) = H(p) \Big|_{p = \frac{s}{\Omega_c}}$$



一、低通到高通的频率变换

➤ 高通巴特沃斯模拟滤波器的设计步骤





第六章 IIR数字滤波器设计

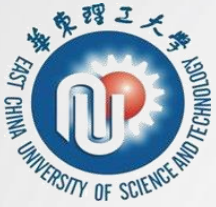
IIR Digital Filter Design

6.2 模拟滤波器的设计

模拟滤波器的频带转换方法(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁





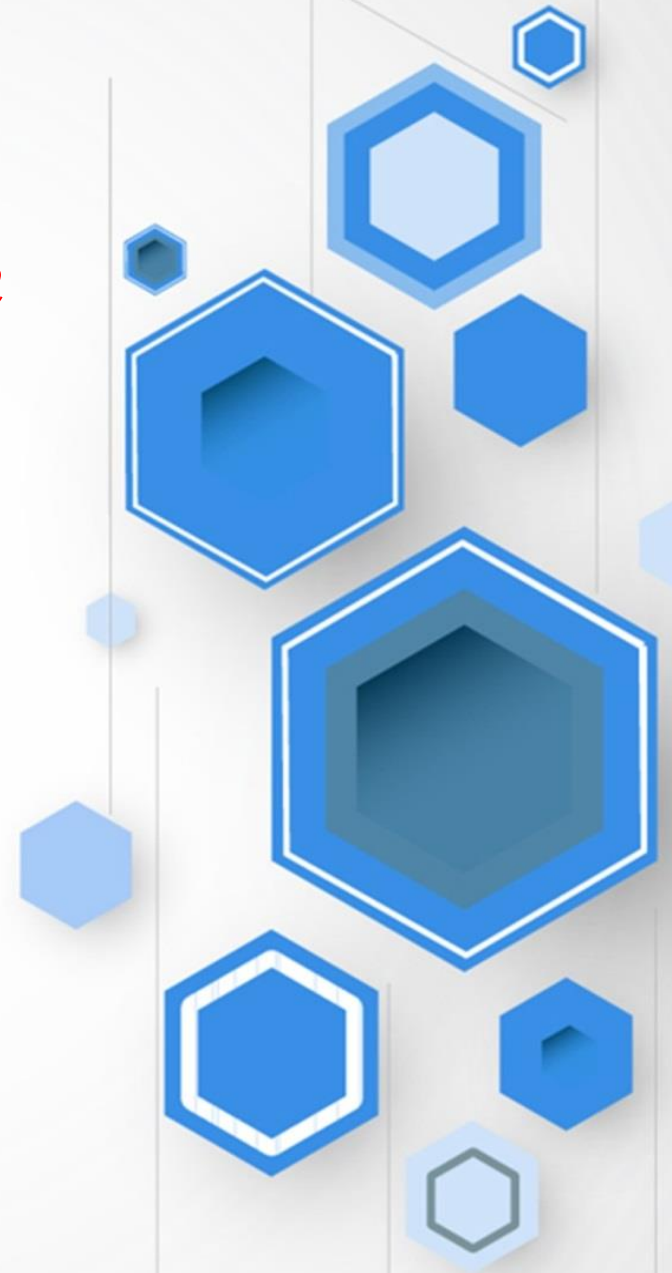
第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

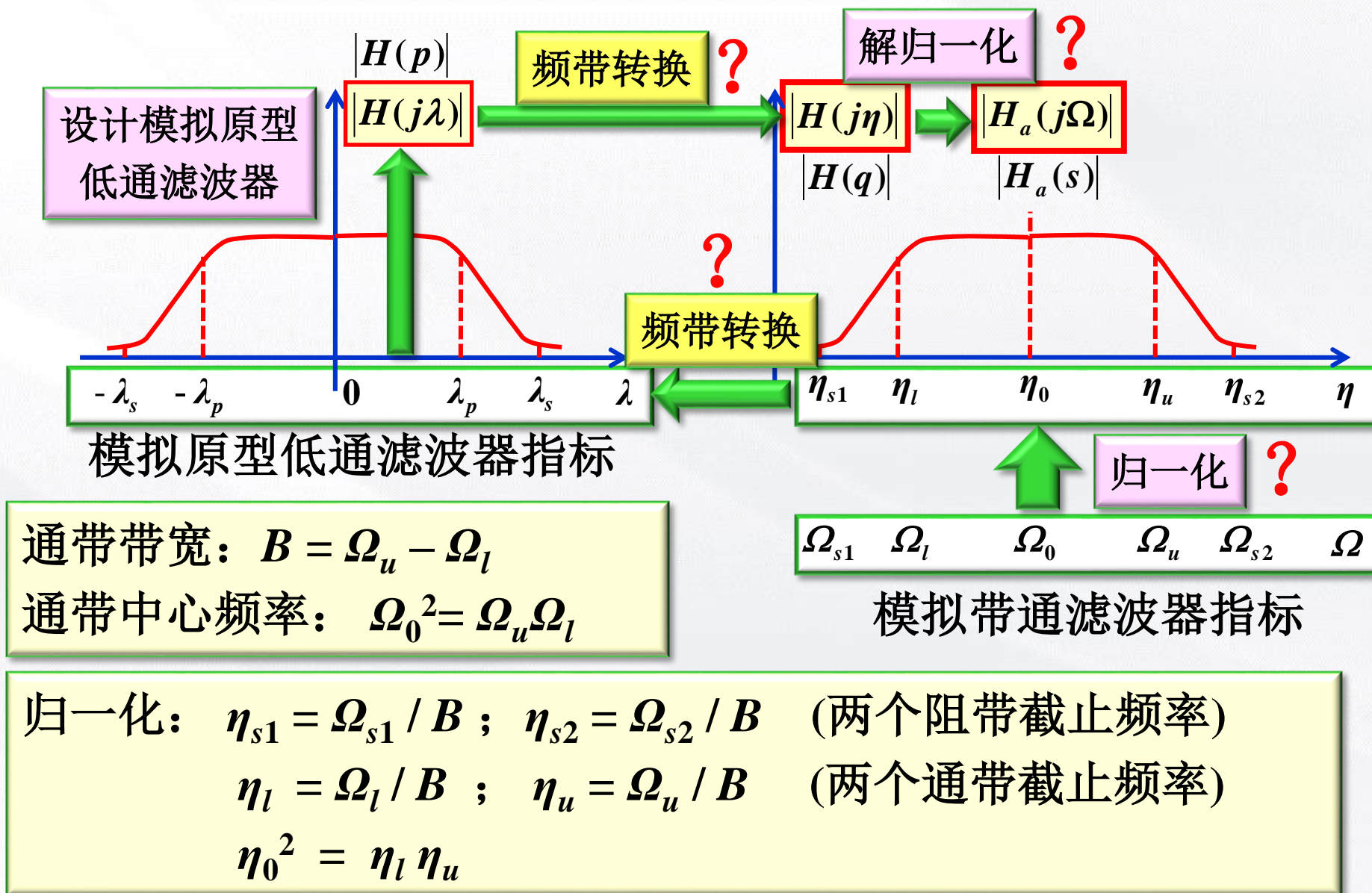
6.2 模拟滤波器的设计

模拟滤波器的频带转换方法(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁



二、低通到带通的频率变换



二、低通到带通的频率变换

研究 λ 与 η 的对应关系，得到：

λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	λ_p	λ_s	∞
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
η	0	η_{s1}	η_l	η_0	η_u	η_{s2}	∞

$$\lambda = \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta}$$

由上式知 λ_p 对应 η_u ，代入上式中，有

$$\lambda_p = \frac{\eta_u^2 - \eta_0^2}{\eta_u} = \eta_u - \eta_l = \frac{\Omega_u - \Omega_l}{B} = 1$$

归一化后的原型低通滤波器的通带截止频率： $\lambda_p=1$



二、低通到带通的频率变换

$$\lambda = \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta}$$

上式称为低通到带通的频率变换公式。利用该式将带通的边界频率转换成低通的边界频率。

下面推导由归一化低通到带通的转换公式：

$$\because p = j\lambda \quad \therefore p = j \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta}$$

将 $q=j\eta$ 代入上式，得到：

$$p = j \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta} = \frac{j^2 \eta^2 - j^2 \eta_0^2}{j\eta} = \frac{q^2 + \eta_0^2}{q}$$



二、低通到带通的频率变换

为去归一化，将 $q=s/B$ 代入 $p = \frac{q^2 + \eta_0^2}{q}$ ，得到：

$$p = \frac{\frac{s^2}{B^2} + \eta_0^2}{\frac{s}{B}} = \frac{s + \eta_0^2 B^2}{sB} = \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$$



$$\underline{H_a(s)} = \underline{H(p)} \Big|_{p = \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}}$$

带通滤波器

归一化原型低通滤波器

二、低通到带通的频率变换

➤ 模拟带通的设计步骤

A、确定模拟带通滤波器的技术指标：

设：通带上限频率为 Ω_u ，通带下限频率为 Ω_l

阻带上限频率为 Ω_{s1} ，阻带下限频率 Ω_{s2}

通带中心频率 $\Omega_0^2 = \Omega_l \Omega_u$ ，通带宽度 $B = \Omega_u - \Omega_l$

与之对应的归一化边界频率如下：

$$\eta_{s1} = \frac{\Omega_{s1}}{B}, \quad \eta_{s2} = \frac{\Omega_{s2}}{B}$$

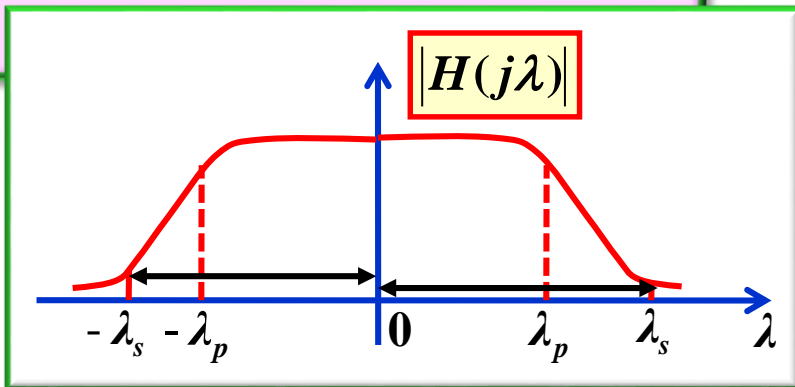
$$\eta_l = \frac{\Omega_l}{B}, \quad \eta_u = \frac{\Omega_u}{B} \quad \eta_0^2 = \eta_l \eta_u$$

B、确定归一化原型低通滤波器技术指标：

$$\lambda_p = 1$$

$$\lambda_s = \frac{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s2}}$$

$$-\lambda_s = \frac{\eta_{s1}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s1}}$$



λ_s 与 $-\lambda_s$ 的绝对值可能不相等，一般取绝对值小的 λ_s 。

通带最大衰减仍为 α_p ，阻带最小衰减亦为 α_s 。

C、设计归一化低通 $H(p)$ 。

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}}$$

$$\lambda_{sp} = \lambda_s / \lambda_p$$

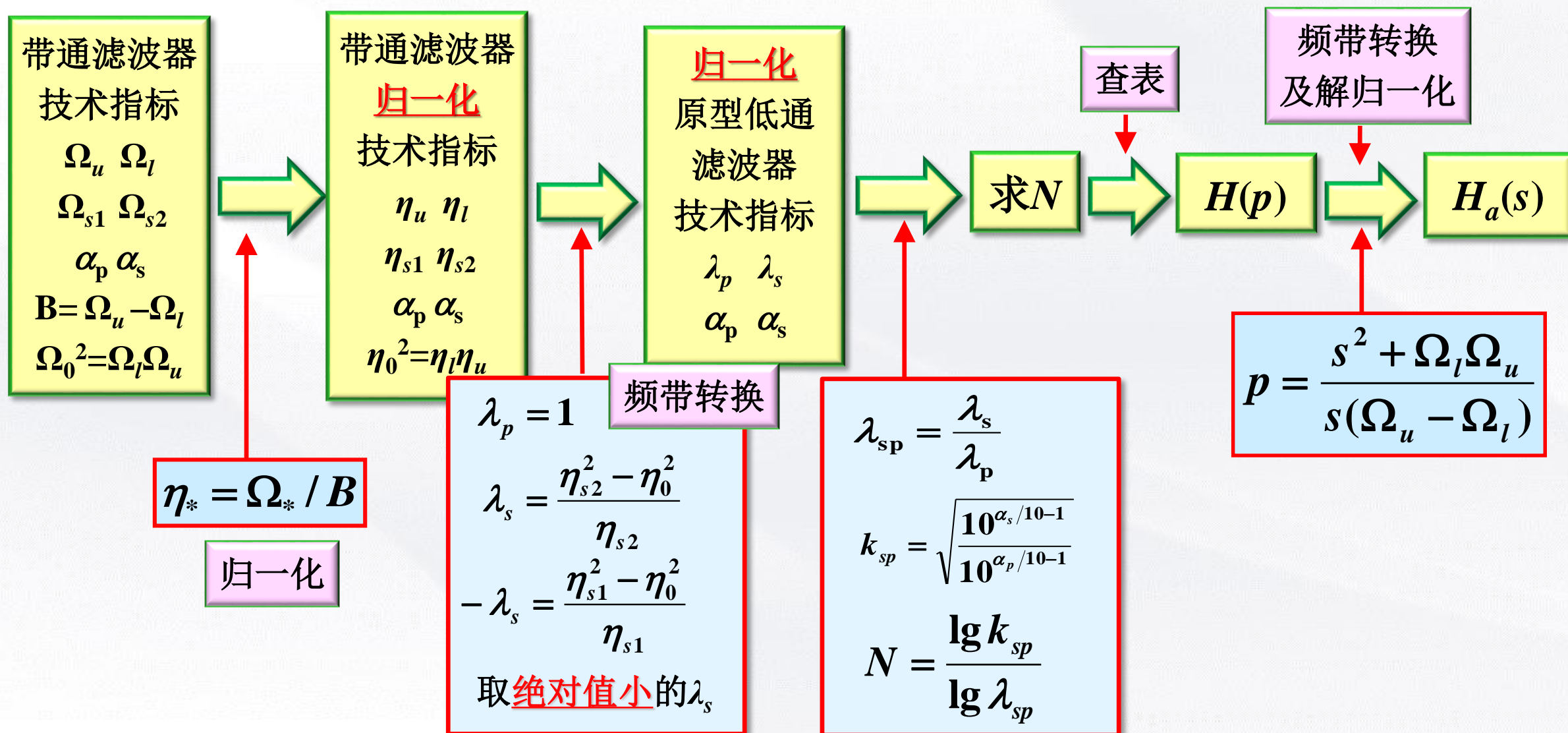
$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

D、将 $H(p)$ 转换成带通 $H_a(s)$ 。

$$H_a(s) = H(p) \Big|_{p = \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}}$$

二、低通到带通的频率变换

➤ 带通巴特沃斯模拟滤波器的设计步骤



6.2 模拟滤波器的设计



例：设计模拟带通滤波器，通带带宽 $B=2\pi\times 200\text{rad/s}$ ，中心频率 $\Omega_0=2\pi\times 1000\text{rad/s}$ ，通带内最大衰减 $\alpha_p=3\text{dB}$ ，阻带 $\Omega_{s1}=2\pi\times 830\text{rad/s}$ ， $\Omega_{s2}=2\pi\times 1200\text{rad/s}$ ，阻带最小衰减 $\alpha_s=15\text{dB}$ 。

解：(1) 模拟带通的技术要求

$$B = 2\pi \times 200\text{rad/s};$$

$$\Omega_0=2\pi \times 1000\text{rad/s}; \quad \eta_0 = \Omega_0 / B = 5$$

$$\Omega_{s1}=2\pi \times 830\text{rad/s}; \quad \alpha_p=3\text{dB}$$

$$\Omega_{s2}=2\pi \times 1200\text{rad/s}; \quad \alpha_s=15\text{dB}$$

$$\eta_{s1} = \Omega_{s1} / B = 4.15; \quad \eta_{s2} = \Omega_{s2} / B = 6$$



6.2 模拟滤波器的设计



(2) 模拟归一化低通技术要求:

$$\lambda_p = 1, \lambda_s = \frac{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s2}} = 1.833, -\lambda_s = \frac{\eta_{s1}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s1}} = -1.874$$

取 $\lambda_s=1.833$, $\alpha_p=3\text{dB}$, $\alpha_s=15\text{dB}$ 。

(3) 设计模拟归一化低通滤波器 $H(p)$:

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} = 5.5469 \quad \lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 1.833$$

$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = 2.8274 \Rightarrow \boxed{N = 3}$$



6.2 模拟滤波器的设计



取 $N=3$ ，查表得：

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

(4) 求模拟带通 $H_a(s)$ ：

$$H_a(s) = H(p) \Big|_{p = \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}}$$

$$H_a(s) = s^3 B^3 [s^6 + 2Bs^5 + (3\Omega_0^2 + 2B^2)s^4 + (4\Omega_0^2 B + B^3)s^3 + (3\Omega_0^4 + 2\Omega_0^2 B^2)s^2 + 2\Omega_0^4 Bs + \Omega_0^6]^{-1}$$



第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.2 模拟滤波器的设计

模拟滤波器的频带转换方法(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁





第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.2 模拟滤波器的设计

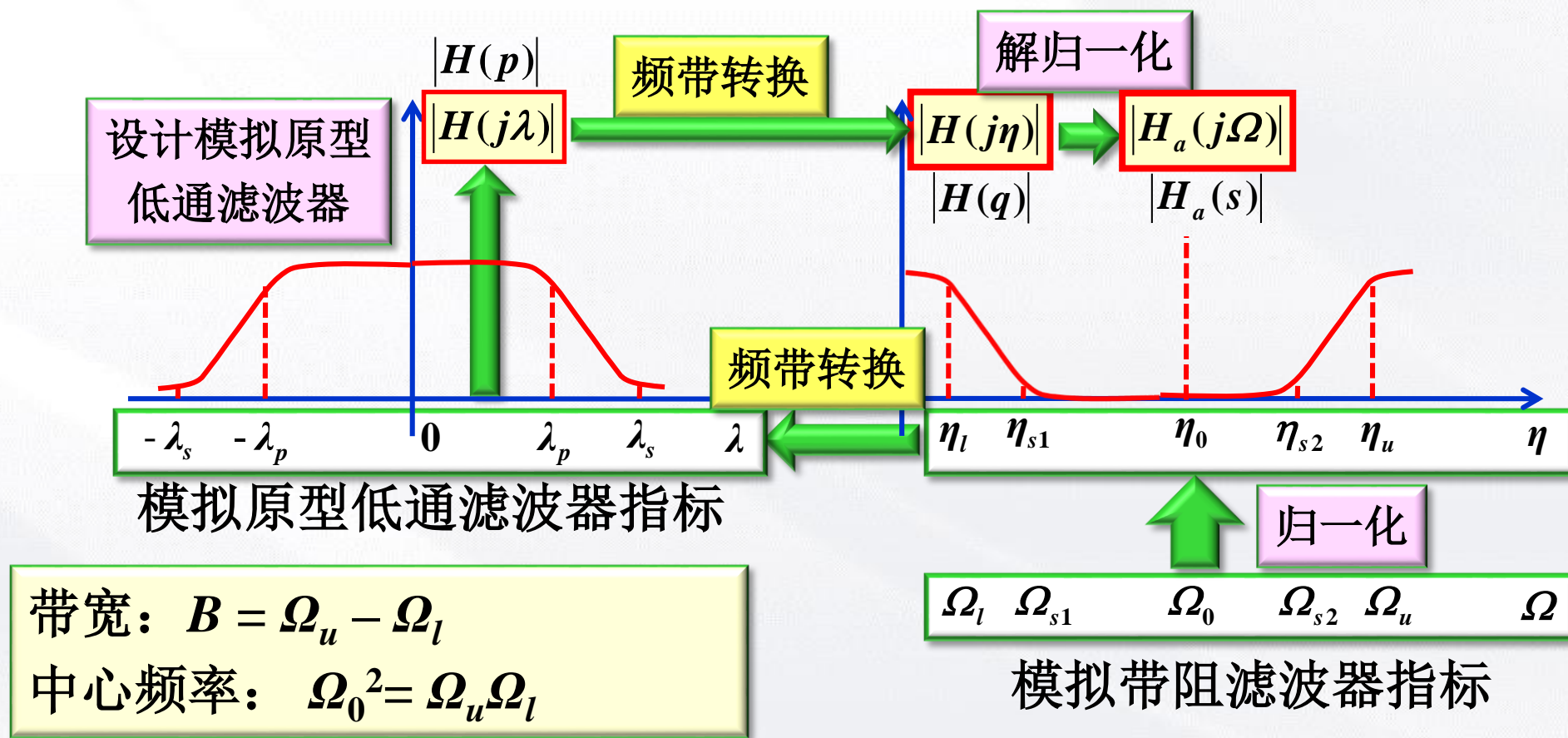
模拟滤波器的频带转换方法(3)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁





三、低通到带阻的频率变换



归一化: $\eta_{s1} = \Omega_{s1} / B$; $\eta_{s2} = \Omega_{s2} / B$ (两个阻带截止频率)

$\eta_l = \Omega_l / B$; $\eta_u = \Omega_u / B$ (两个通带截止频率)

$\eta_0^2 = \eta_l \eta_u$



三、低通到带阻的频率变换



$$\lambda = \frac{\eta}{\eta^2 - \eta_0^2}$$

上式称为低通到带阻的频率变换公式。利用该式将带阻的边界频率转换成低通的边界频率。

$$\underline{H_a(s)} = \underline{H(p)} \Big|_{p = \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}}$$

带阻滤波器

归一化原型低通滤波器

➤ 模拟带阻的设计步骤

A、确定模拟带阻滤波器的技术指标：

设：通带上限频率为 Ω_u ，通带下限频率为 Ω_l

阻带上限频率为 Ω_{s1} ，阻带下限频率 Ω_{s2}

中心频率 $\Omega_0^2 = \Omega_l \Omega_u$ ，带宽 $B = \Omega_u - \Omega_l$

与之对应的归一化边界频率如下：

$$\eta_{s1} = \frac{\Omega_{s1}}{B}, \quad \eta_{s2} = \frac{\Omega_{s2}}{B}$$

$$\eta_l = \frac{\Omega_l}{B}, \quad \eta_u = \frac{\Omega_u}{B} \quad \eta_0^2 = \eta_l \eta_u$$

B、确定归一化原型低通滤波器技术指标：

$$\lambda_p = 1$$

$$\lambda_s = \frac{\eta_{s2}}{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}$$

$$-\lambda_s = \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s1}^2 - \eta_0^2}$$

λ_s 与 $-\lambda_s$ 的绝对值可能不相等，一般取绝对值小的 λ_s 。

通带最大衰减仍为 α_p ，阻带最小衰减亦为 α_s 。

C、设计归一化低通 $H(p)$ 。

D、将 $H(p)$ 转换成带阻 $H_a(s)$ 。

$$H_a(s) = H(p) \Big|_{p = \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}}$$



第六章 IIR数字滤波器设计

IIR Digital Filter Design

6.2 模拟滤波器的设计

模拟滤波器的频带转换方法(3)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

