第二章　z 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

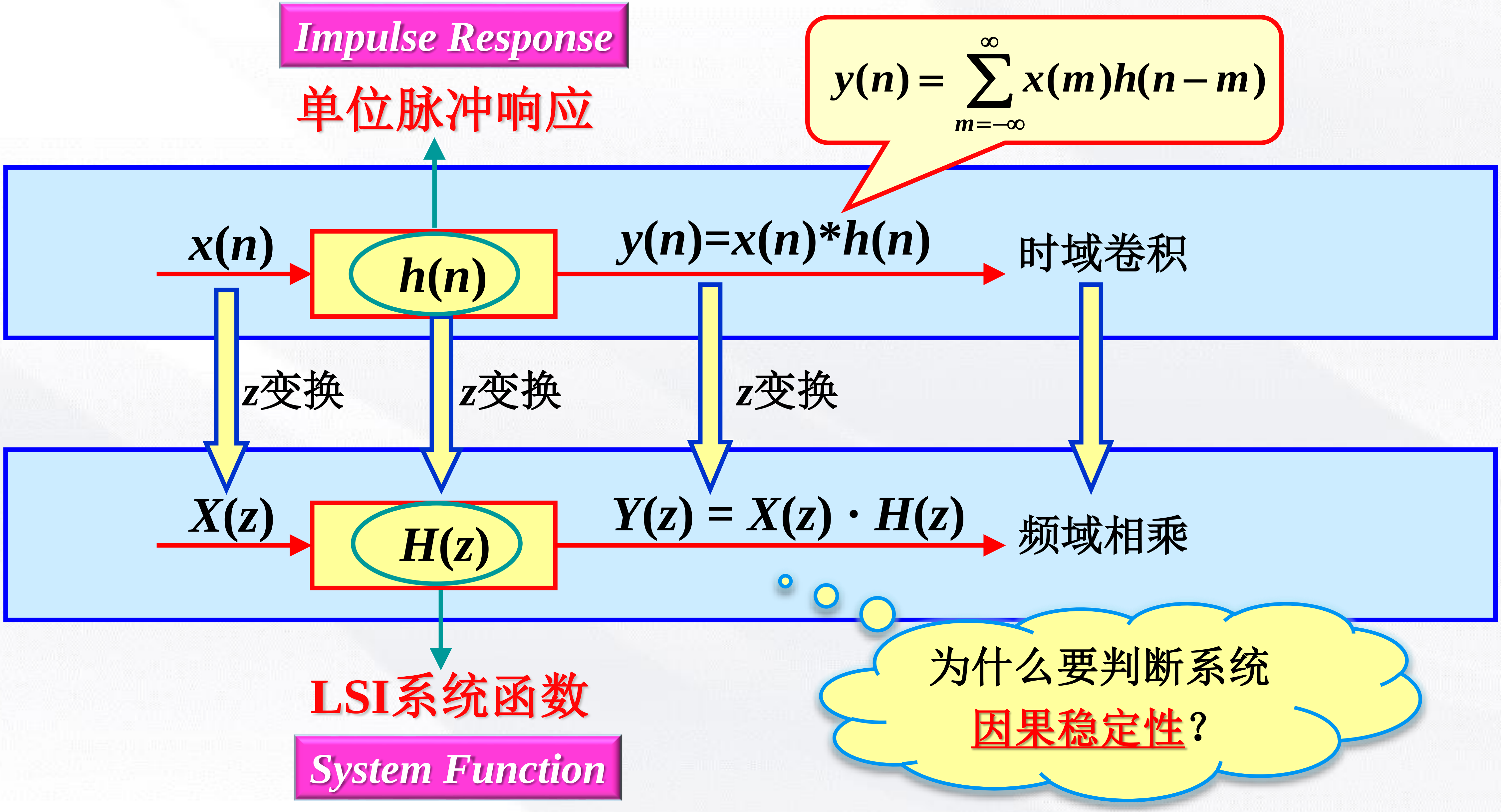
第二章 z 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

2.3 系统函数及其与系统性质的关系

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

问题的引入


Impulse Response
单位脉冲响应
$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$
$x(n)$
$h(n)$
$y(n)=x(n)*h(n)$
时域卷积
z变换
z变换
z变换
$X(z)$
$H(z)$
$Y(z)=X(z)\cdot H(z)$
频域相乘
LSI系统函数
System Function
为什么要判断系统
因果稳定性？

一、由系统函数$H(z)$及其收敛域判断系统因果性

➢ 一般系统：$y(n)=T[x(n)]$ 的因果性定义

定义：某时刻的输出只取决于此时刻及其以前的输入的系统。

即：$n=n_0$时的输出$y(n_0)$只取决于$n\le n_0$的输入$x(n)$ 。

➢ LSI系统的因果性条件

$$y(n)=h(n)*x(n)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m) = \underbrace{h(-\infty)}_{=0}\boxed{x(n+\infty)}+\dots+\underbrace{h(-1)}_{=0}\boxed{x(n+1)}$$

$$+h(0)x(n)+h(1)x(n-1)+\dots+h(\infty)x(n-\infty)$$

非因果

定义：若LSI系统的$h(n)$满足：当$n<0$时，$h(n)=0$，系统因果。

若$h(n)$为因果序列，则系统因果。 ⇨ $|z|\in(R_{x-},\infty]$

二、由系统函数$H(z)$及其收敛域判断系统稳定性

- 一般系统：$y(n)$=T[$x(n)$] 的稳定性定义

n不受限制
$n\in[-\infty, \infty]$

定义：有界输入产生有界输出的系统。

即： 如果 $\boxed{|x(n)| \le M < \infty \text{，则有 } |y(n)| \le P < \infty}$。

- LSI系统的稳定性条件

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

定义：一个LSI系统是稳定系统的充分必要条件是：

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = q < \infty}$$

单位脉冲响应
绝对可和

定义：如果LSI系统函数$H(z)$的收敛域包括单位圆，

即$|z|=1$在收敛域内，则系统稳定。

理解：一个LSI系统是稳定系统的充分必要条件是：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=q<\infty$$

单位脉冲响应绝对可和

$|z|=1$

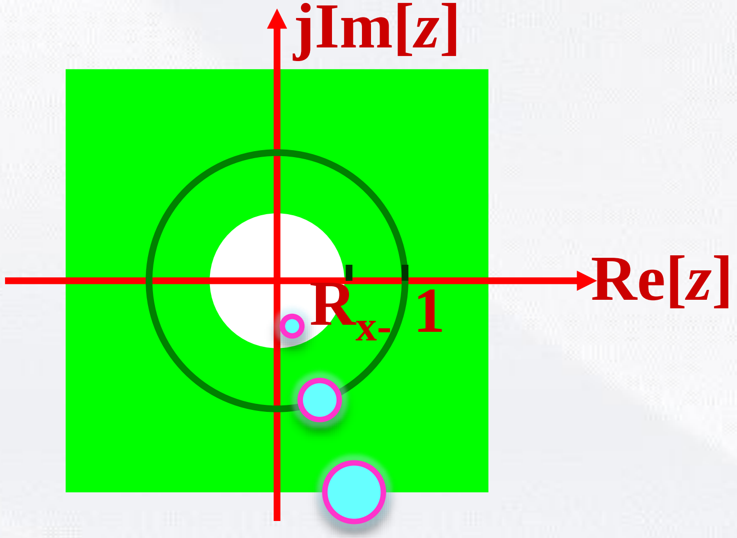
收敛条件：$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|=M<\infty$$

- 总结：系统因果稳定性的频域分析方法

系统因果：$|z| \in (R_{x-}, \infty]$

系统稳定：$|z| = 1$

系统因果稳定：$|z| \in (R_{x-}, \infty], \quad |R_{x-}| < 1$



系统函数$H(z)$的**极点在单位圆内**

例：判断系统的因果稳定性：$h(n)=\dfrac{1}{3}[\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)]$

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

时域分析：

非因果 ⇒ $h(-1)\neq 0$，$h(n)$不是因果序列

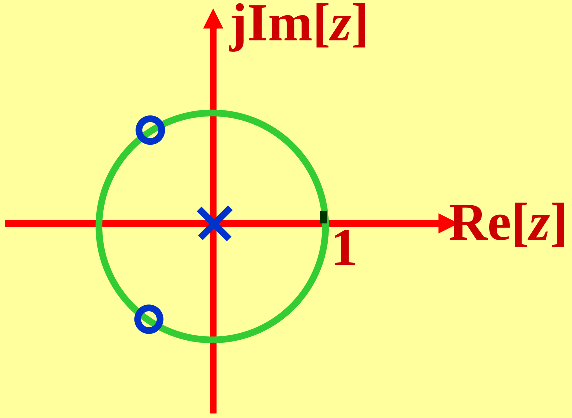
稳定 ⇒ $h(n)$是绝对可和的

频域分析：

$$H(z)=\sum_{n=-1}^{1}h(n)z^{-n}=\frac{1}{3}(z+1+z^{-1})$$

$$H(z)=\frac{1}{3}\frac{(z^2+z+1)}{z}$$ ⇒ 2个零点，1个极点

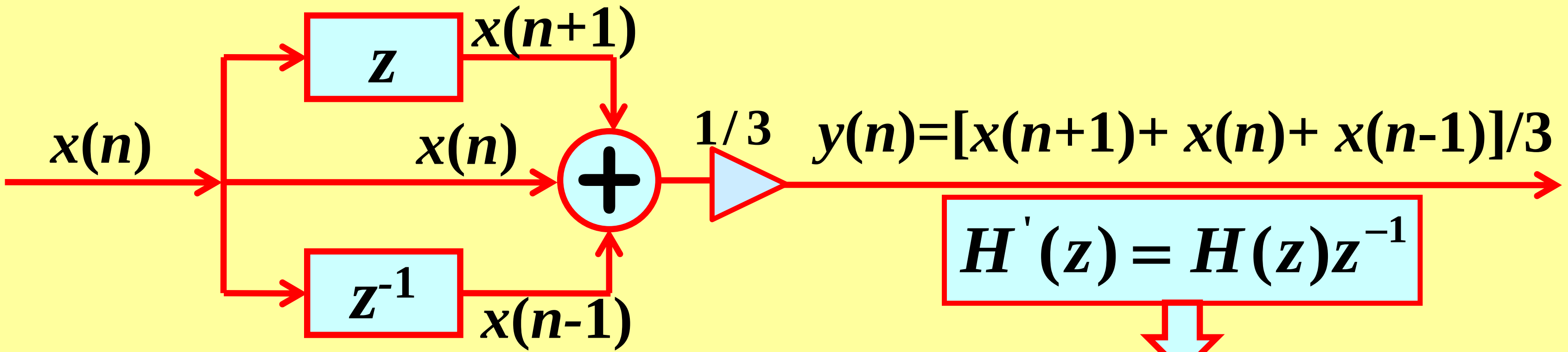
收敛域： $0<|z|<\infty$ ⇒ 系统非因果、稳定



将上例改造为因果稳定系统

$$h(n)=\frac{1}{3}\left[\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)\right]$$

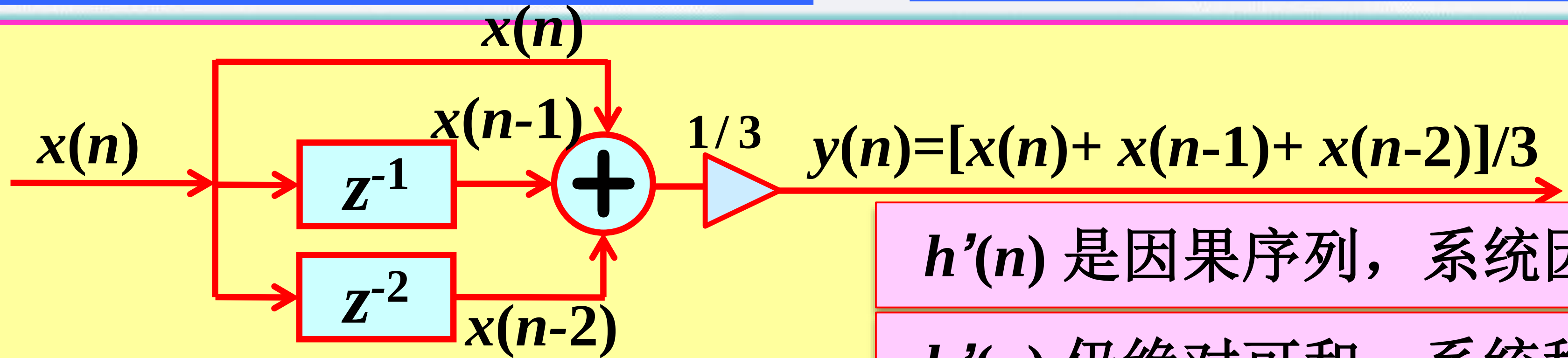
$$H(z)=\sum_{n=-1}^{1}h(n)z^{-n}=\frac{1}{3}(z+1+z^{-1})$$



$$H^{'}(z)=H(z)z^{-1}$$

$$h^{'}(n)=\frac{1}{3}\left[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)\right]$$

$$H^{'}(z)=\sum_{n=0}^{2}h(n)z^{-n}=\frac{1}{3}(1+z^{-1}+z^{-2})$$



$h'(n)$ 是因果序列，系统因果

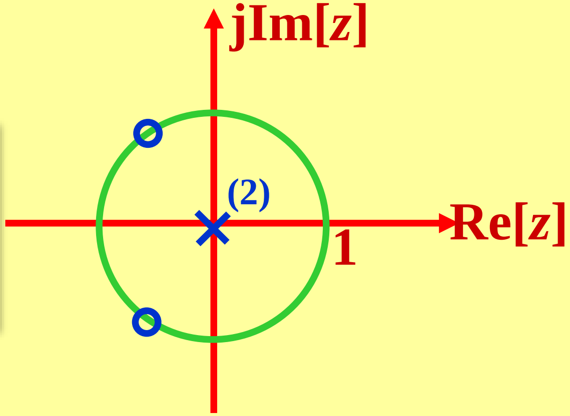
$h'(n)$ 仍绝对可和，系统稳定

结果分析：

$$H'(z)=\frac{1}{3}(1+z^{-1}+z^{-2})=\frac{1}{3}\frac{(z^2+z^1+1)}{z^2}$$

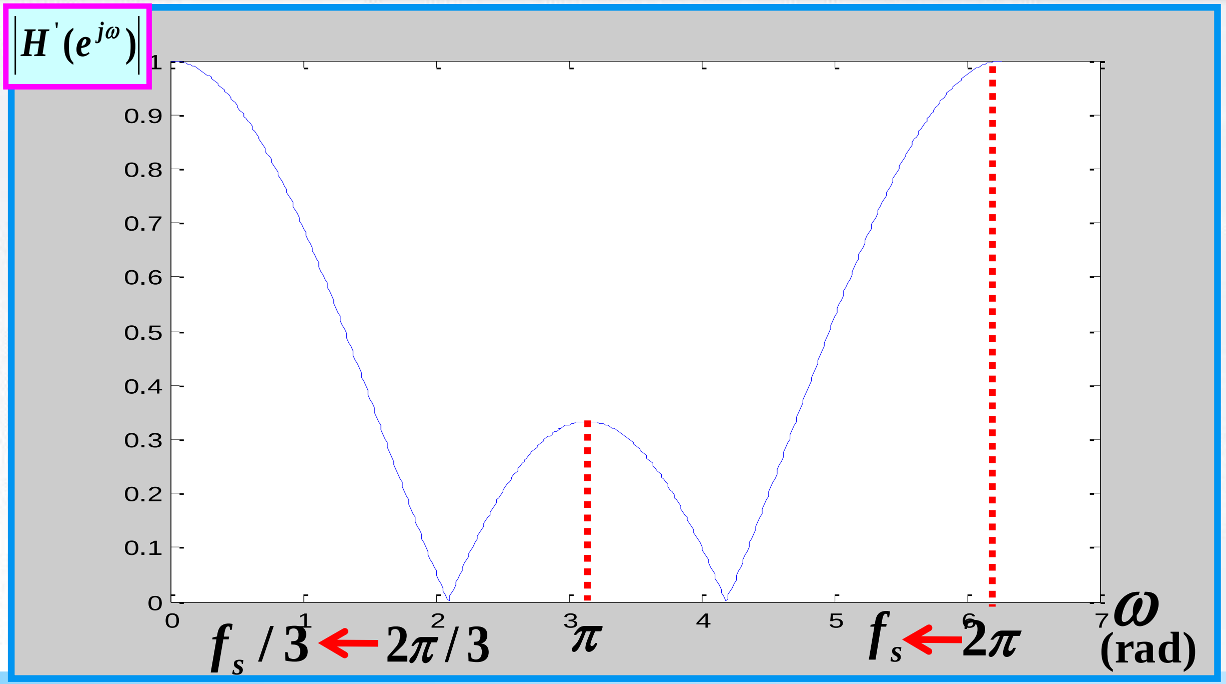
華東理工大學

2个零点
2个极点



收敛域： $|z|>0$

系统因果、稳定



$$H'(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=H'(e^{j\omega})$$

$$=\frac{1}{3}(1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega})$$

例：已知线性移不变因果系统的差分方程为：

$$y(n) + 0.2y(n-1) - 0.24y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

(1)求系统函数$H(z)$和系统收敛域。

(2)判别系统的稳定性。

(3)求系统的单位取样响应$h(n)$。

解：(1)求系统函数$H(z)$和系统收敛域

$$Y(z)+0.2z^{-1}Y(z)-0.24z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$$

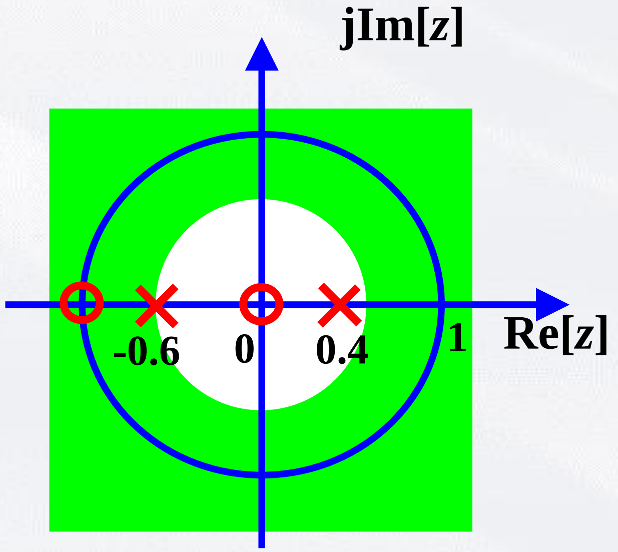
因果 $\Rightarrow$ 收敛域：$|z|>0.6$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1+0.2z^{-1}-0.24z^{-2}}=\frac{z^2+z}{z^2+0.2z-0.24}=\frac{z(z+1)}{(z+0.6)(z-0.4)}$$

(2) 判别系统的稳定性。

$$H(z)=\frac{z(z+1)}{(z+0.6)(z-0.4)}$$

收敛域：|z|>0.6，因此，单位圆在收敛域内，系统稳定。



(3) 求系统的单位取样响应$h(n)$。

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{(z+1)}{(z+0.6)(z-0.4)}=\frac{A}{(z+0.6)}+\frac{B}{(z-0.4)}$$

$$A=\left.\frac{(z+1)}{(z-0.4)}\right|_{z=-0.6}=-0.4 \qquad B=\left.\frac{(z+1)}{(z+0.6)}\right|_{z=0.4}=1.4$$

$$H(z)=\frac{-0.4z}{(z+0.6)}+\frac{1.4z}{(z-0.4)}$$

因果

收敛域：|z|>0.6

$$h(n)=-0.4(-0.6)^n u(n)+1.4(0.4)^n u(n)$$

第二章 z 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

2.3 系统函数及其与系统性质的关系

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁