# 第二章 z 变换与LSI系统频域分析

*The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

## 2.1 z 变换的基本概念

### z 反变换

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

# 一、z反变换的基本概念 Inverse z Transform



概念：由$X(z)$求出原序列 $x(n)$，称为z反变换。表示为：

$$\boxed{x(n)=Z^{-1}[X(z)]}$$

z反变换实际上是求$X(z)$的幂级数展开式。

z反变换常用的三种方法：

围线积分法、部分分式法、幂级数展开法(长除法)。

## 二、部分分式(展开)法 Partial Fraction Expansion



$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$$

我们可以将X(z)展开成部分分式的形式，然后求每个部分分式的z变换。

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=X_1(z)+X_2(z)+\ldots+X_k(z)$$

即：

$$x(n)=Z^{-1}[X_1(z)]+Z^{-1}[X_2(z)]+\ldots+Z^{-1}[X_k(z)]$$

# 部分分式(展开)法的求解步骤

① 先将$X(z)$因式分解：

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}$$

$$=\sum_{n=0}^{M-N}B_n z^{-n}+\sum_{k=1}^{N-r}\frac{A_k}{1-z_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{r}\frac{C_k}{[1-z_i z^{-1}]^k}$$

其中：$z_i$为$X(z)$的一个$r$阶极点，各个$z_k$是$X(z)$的单极点。

$B_n$是$X(z)$的整式部分的系数，当$M<N$时，$B_n=0$ 。

# 部分分式(展开)法的求解步骤



② 根据留数定理求系数$A_k$ 和$C_k$ ：

$$A_k = (1 - z_k z^{-1}) X(z)\Big|_{z=z_k}$$

$$= (z - z_k)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=z_k} = \mathrm{Res}\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_k}$$

$$C_k = \frac{1}{(r-k)!}\left\{\frac{d^{r-k}}{dz^{r-k}}\left[(z-z_i)^r \frac{X(z)}{z^k}\right]\right\}_{z=z_i}$$

# 二、部分分式(展开)法

通常：右边序列的收敛域在模最大的极点所在的圆之外。

左边序列的收敛域在模最小的极点所在的圆之内。

| 序　列 | $z$ 变换 | 收敛域 |
|---|---|---|
| $x(n)=a^n u(n)$ | $X(z)=\dfrac{z}{z-a}=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ | $\|z\|>\|a\|$ |
| $x(n)=-a^n u(-n-1)$ | $X(z)=\dfrac{z}{z-a}=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ | $\|z\|<\|a\|$ |
| $x(n)=a^{n-1}u(n-1)$ | $X(z)=\dfrac{1}{z-a}=\dfrac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$ | $\|z\|>\|a\|$ |
| $x(n)=-a^{n-1}u(-n)$ | $X(z)=\dfrac{1}{z-a}=\dfrac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$ | $\|z\|<\|a\|$ |

## 二、部分分式(展开)法

例：设：$X(z)=\dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$，$|z|>2$，求$x(n)$

解：$\because X(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)(z-0.5)}$

$$\boxed{\therefore \frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-2)(z-0.5)}=\frac{A_1}{(z-2)}+\frac{A_2}{(z-0.5)}}$$

其中：$A_1=\left[(z-2)\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=2}=\left[\dfrac{z}{(z-0.5)}\right]_{z=2}=\dfrac{4}{3}$

$$A_2=\left[(z-0.5)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0.5}=\left[\frac{z}{(z-2)}\right]_{z=0.5}=-\frac{1}{3}$$

# 二、部分分式(展开)法

$$\therefore \quad \frac{X(z)}{z}=\frac{4}{3}\frac{1}{(z-2)}-\frac{1}{3}\frac{1}{(z-0.5)}$$

$$\therefore \quad X(z)=\frac{4}{3}\frac{z}{(z-2)}-\frac{1}{3}\frac{z}{(z-0.5)}$$

$$\therefore \quad X(z)=\frac{4}{3}\frac{1}{(1-2z^{-1})}-\frac{1}{3}\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}$$

$$\therefore \quad x(n)=\left[\frac{4}{3}2^n-\frac{1}{3}(0.5)^n\right]u(n)$$

收敛域 $|z|>2$

# 三、幂级数展开法(长除法) Power Series Expansion

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\ldots+x(-1)z^{1}+x(0)z^{0}+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\ldots$$

1、方法：直接用分子多项式除以分母多项式，得到$x(n)$。

2、注意：应依据收敛域来决定$x(n)$。

◆ 当 $X(z)$的收敛域为 $|z|>R_{x-}$时，$x(n)$为因果(右边)序列，故$X(z)$应向$z$的降幂级数方向展开；

◆ 当$X(z)$的收敛域为 $|z|<R_{x+}$时，$x(n)$为反因果(左边)序列，故$X(z)$应向 $z$的升幂级数方向展开。

# 三、幂级数展开法(长除法)

例：设：$X(z)=\dfrac{3z^{-1}}{(1-3z^{-1})^2}$ ,$|z|>3$,求$x(n)$

解：∵|z|>3，所以x(n)为因果序列，X(z)应按z的降幂排列。

$$X(z)=\frac{3z}{(z-3)^2}=\frac{3z}{z^2-6z+9}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3z^{-1}+18z^{-2}+81z^{-3}+\dots \\
\hline
z^2-6z+9 & 3z \\
 & 3z-18+27z^{-1} \\
\hline
 & \quad 18-27z^{-1} \\
 & \quad 18-108z^{-1}+162z^{-2} \\
\hline
 & \qquad 81z^{-1}-162z^{-2} \\
 & \qquad 81z^{-1}-486z^{-2}+729z^{-3} \\
\hline
 & \qquad\qquad \cdots\cdots
\end{array}
$$

# 三、幂级数展开法(长除法)

得： $X(z) = 3z^{-1}+18z^{-2}+81z^{-3}+\dots$

$= 3z^{-1}+2\times 3^2\times z^{-2}+3\times 3^3\times z^{-3}+\dots$

$\therefore\ x(n) = n3^n u(n-1)$

◆ 几种方法的比较：

首先，围线积分法、部分分式法和长除法均可以用来计算z的反变换。围线积分法概念清晰，但判断条件略复杂，使用时一定要分清各种情况；相比之下，部分分式法计算起来就容易许多，但前提是$X(z)$是一个较容易被因式分解的有理分式；长除法大多用在工程实践中，当$X(z)$很难被因式分解，且工程不要求反变换的结果很精确或能用解析式表示时，则通常选择长除法。

# 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

## 2.1 $z$ 变换的基本概念

### $z$ 反变换

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁