第七章 FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

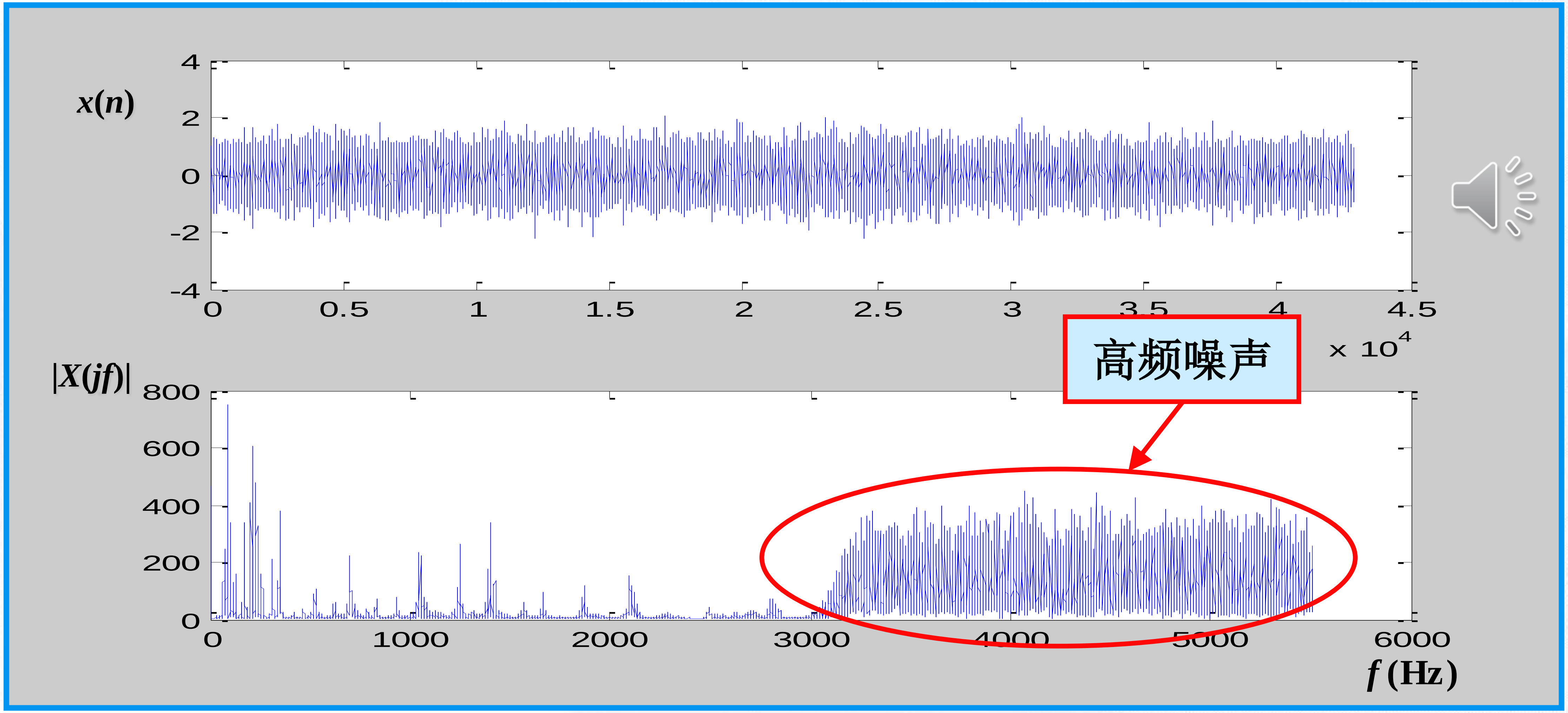
7.2　利用窗函数法设计FIR滤波器(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

窗函数法设计FIR滤波器

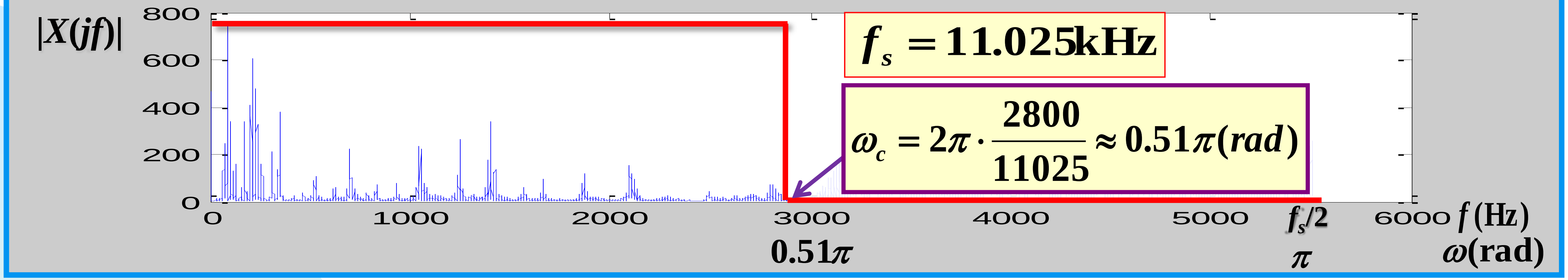
- 音频滤波实例
- 窗函数设计法的设计思路
- 加窗对滤波器频谱带来的影响以及窗函数的选择
- 窗函数设计法的步骤

有一个被高频噪声污染的音频信号，分析信号的频谱，用窗函数法设计一个FIR线性相位滤波器对该音频信号进行滤波处理，去除高频噪声。



➢ 分析理想低通滤波器的频率响应

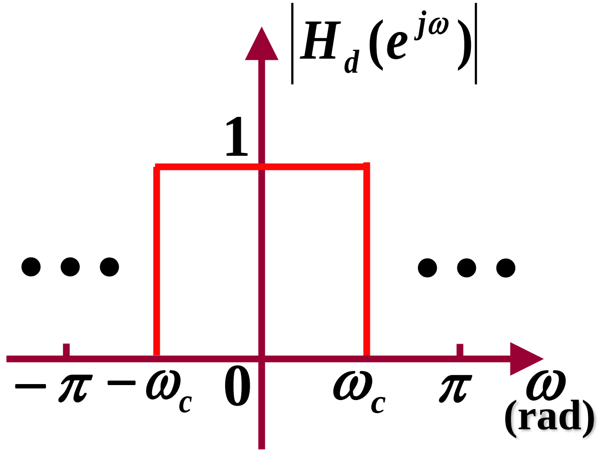
$$H_d(e^{j\omega})=\left|H_d(e^{j\omega})\right|e^{j\theta_d(\omega)}$$



$$f_s=11.025\text{kHz}$$

$$\omega_c=2\pi\cdot\frac{2800}{11025}\approx 0.51\pi(rad)$$

理想幅频、相频响应



$$\theta_d(\omega)=-\tau\omega$$

理想频率响应及单位脉冲响应

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\tau} & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

IDTFT

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega\tau}e^{j\omega n}d\omega$$

无限长

以τ为中心偶对称

$$=\frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}$$

$$n\in[-\infty,\infty]$$

设计思路：

无限长 • 窗函数 = 有限长

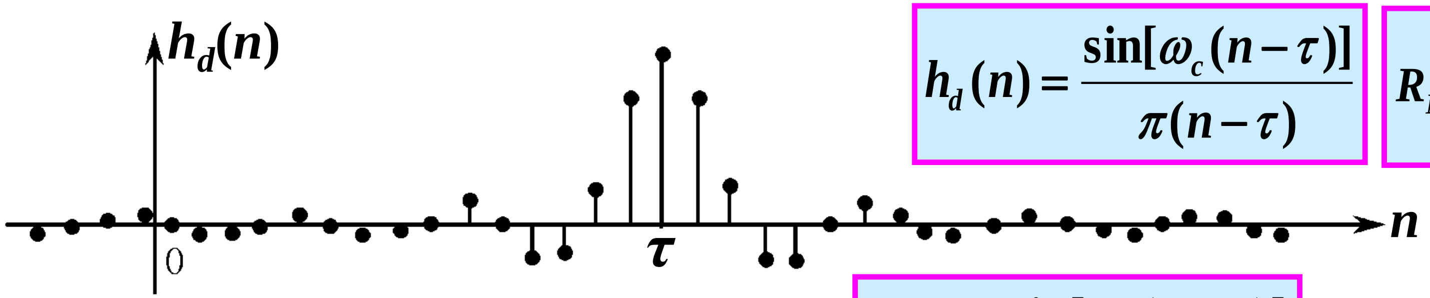
$H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{IDTFT}} h_d(n) \xrightarrow{\cdot\, w(n)} h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} H(e^{j\omega})$

幅频响应?

问题：**窗函数**会使滤波器**频率响应$H(e^{j\omega})$**发生什么变化？

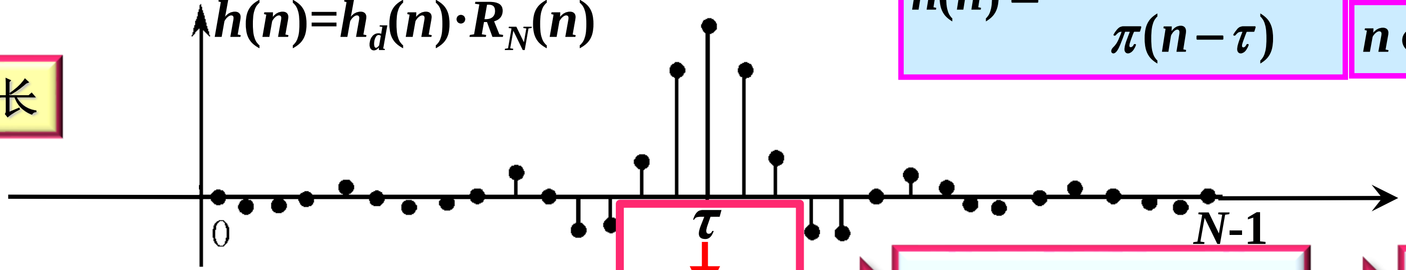
无限长

N点有限长



$$h_d(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}$$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & n \in [0, N-1] \\ 0 & other \end{cases}$$



$$h(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} \quad n \in [0, N-1]$$

$\theta(\omega) = -\tau\omega$

τ → $(N-1)/2$ ⇒ $h(n) = h(N-1-n)$ ⇒ 线性相位

时域相乘

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

$\xrightarrow{\text{DTFT}}$

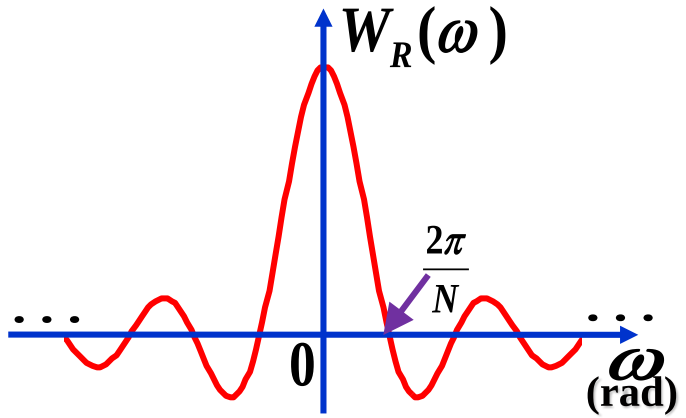
频域卷积

$$H(e^{j\omega})=H_d(e^{j\omega})*W(e^{j\omega})$$

设$w(n)=R_N(n)$，则 $\mathrm{DTFT}[R_N(n)]=W_R(e^{j\omega})$

$$W_R(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underline{R_N(n)}e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-jn\omega}=\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$\boxed{n\in[0,N-1]}$



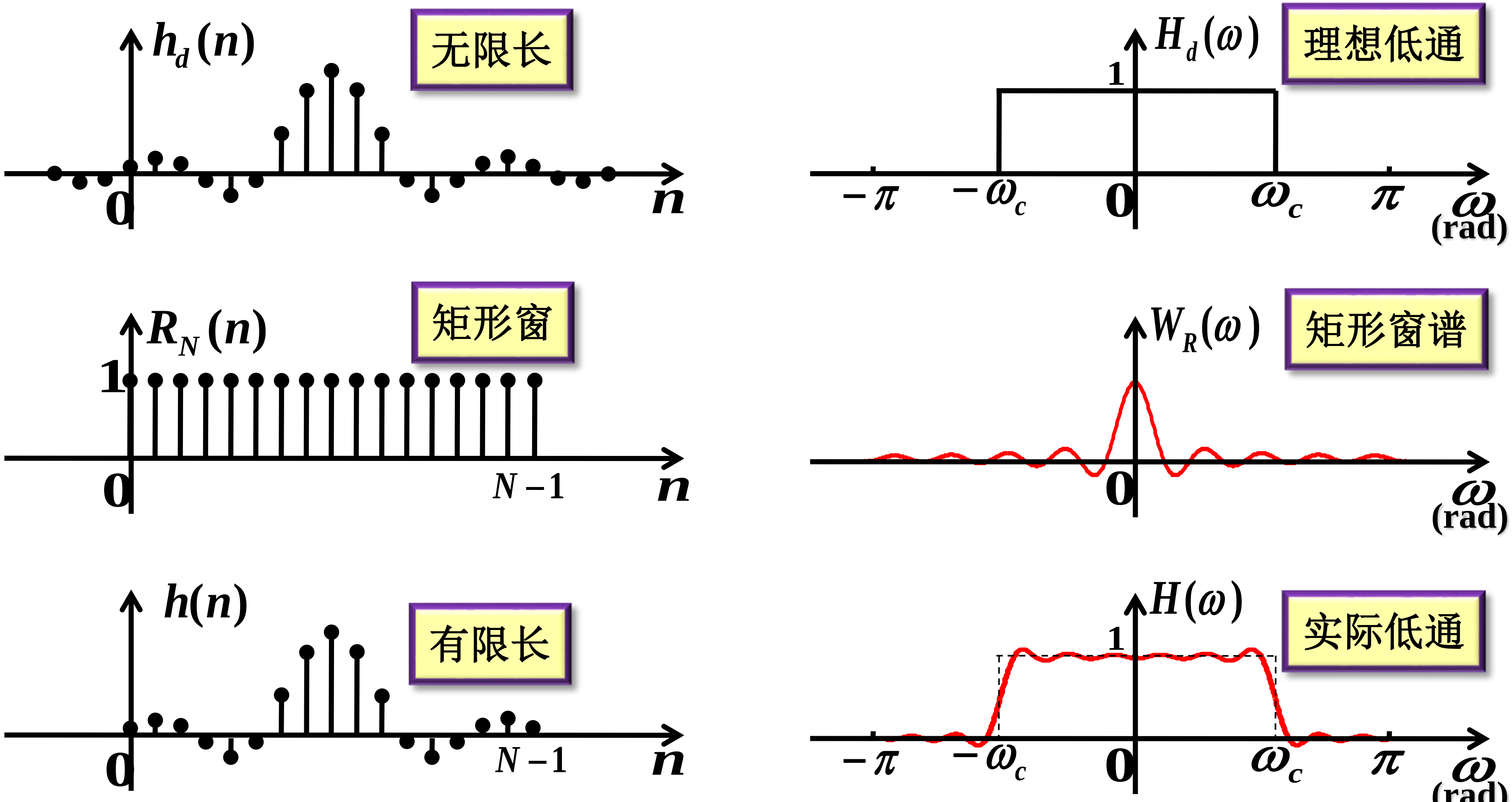
$$=\frac{\boxed{e^{-j\omega\frac{N}{2}}}}{\boxed{e^{-j\omega\frac{1}{2}}}}\frac{\boxed{(e^{j\omega\frac{N}{2}}-e^{-j\omega\frac{N}{2}})/2j}}{\boxed{(e^{j\omega\frac{1}{2}}-e^{-j\omega\frac{1}{2}})/2j}}=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\boxed{\frac{\sin(\frac{N}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}}=e^{-j\tau\omega}\boxed{W_R(\omega)}$$

线性相位

矩形窗幅度响应

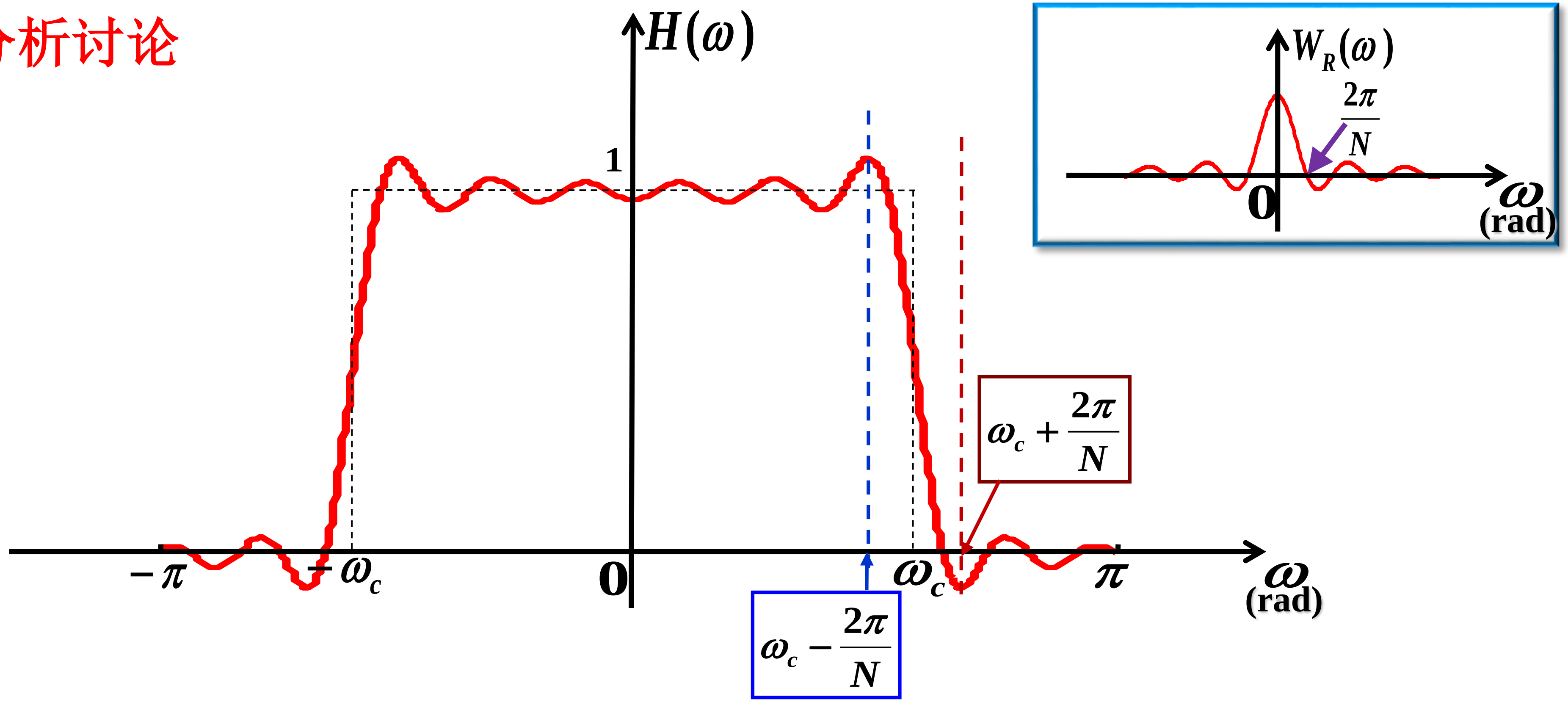
➢ 频域卷积给幅度响应带来的影响

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$



7.2 利用窗函数法设计FIR滤波器

➢ 分析讨论

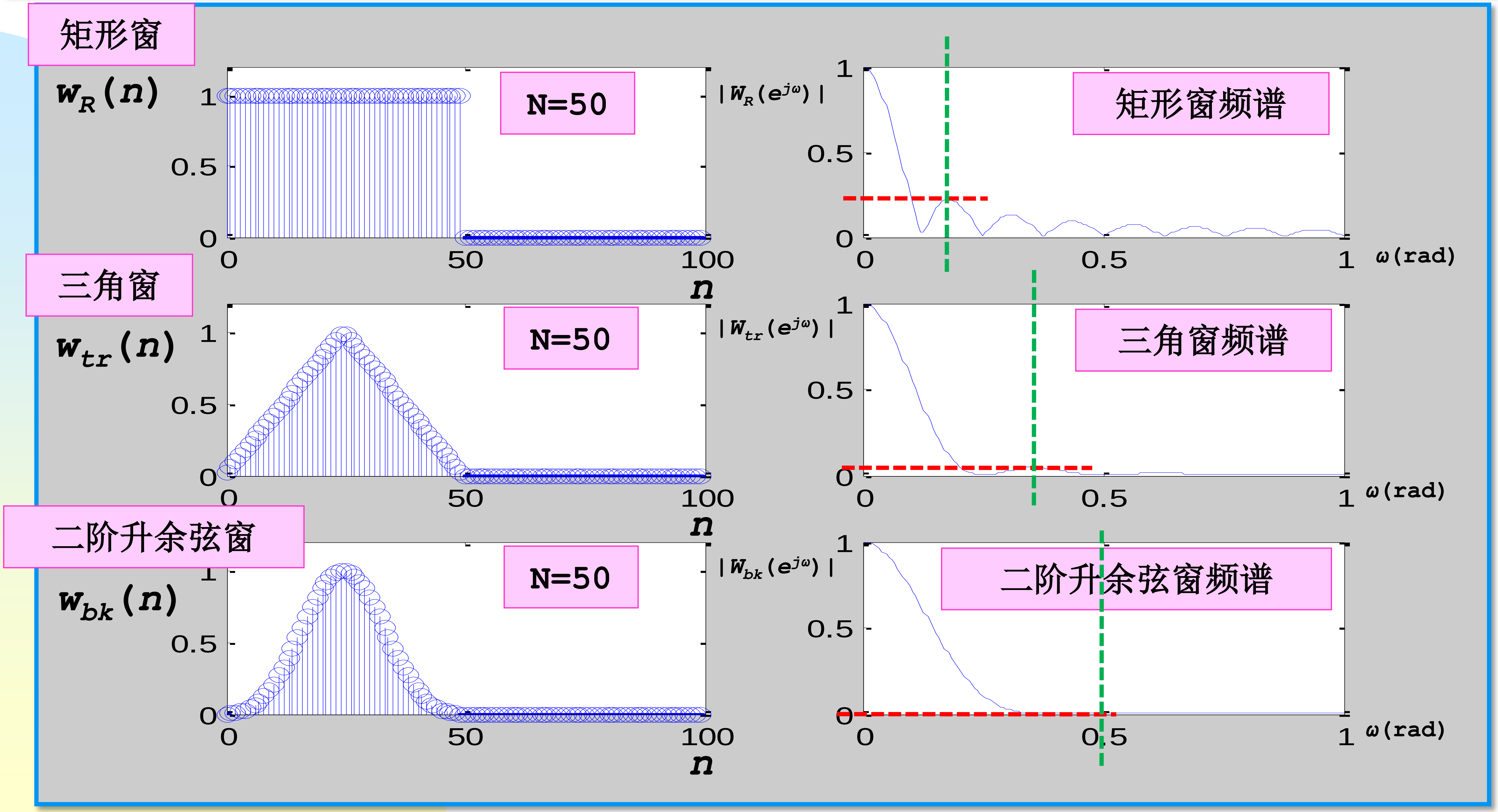


出现 过渡带 和 振荡起伏 的现象

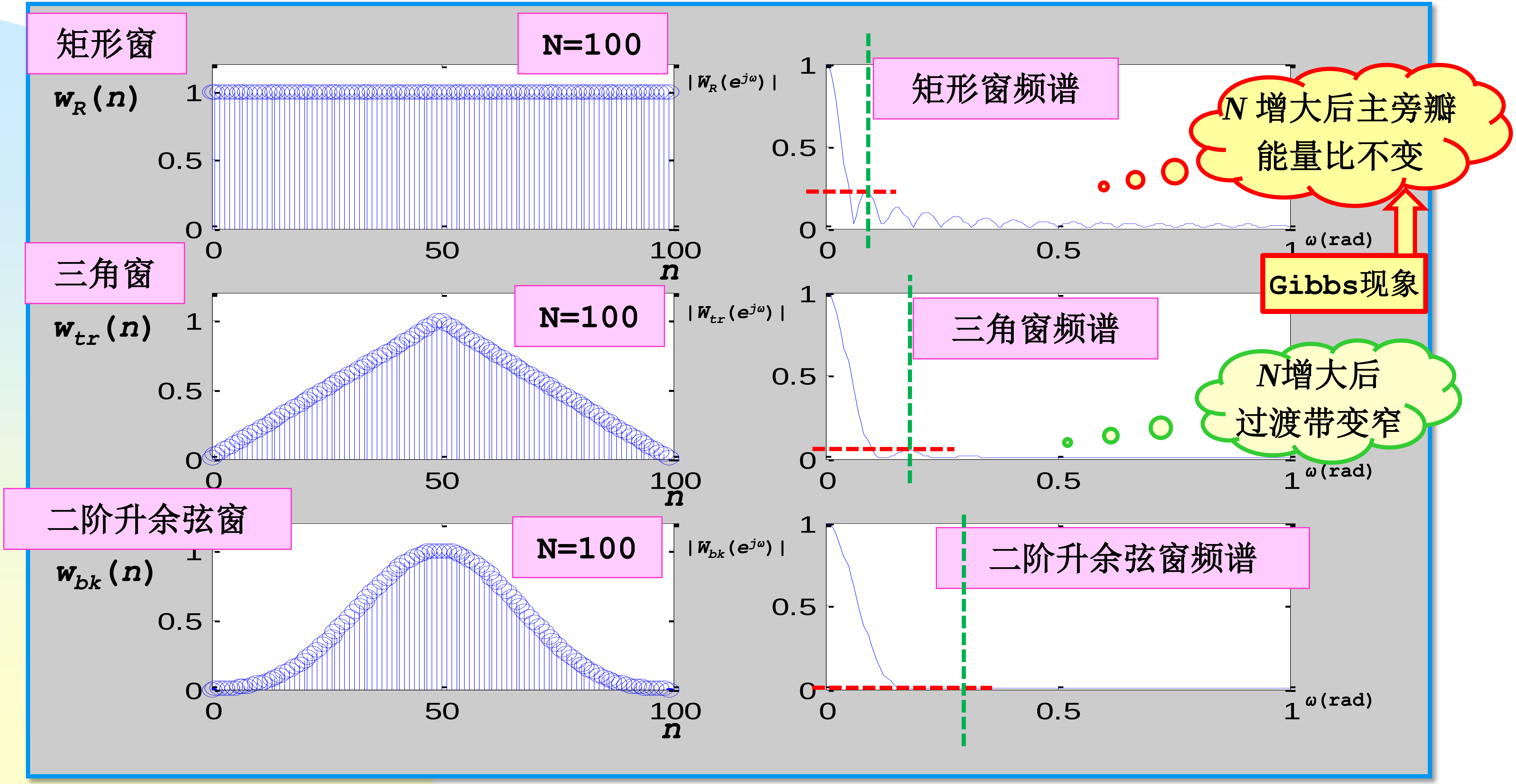
与窗函数形状和N值有关

仅与窗函数形状有关

➢ 不同窗函数$w(n)$及其它们的频谱$W(e^{j\omega})$

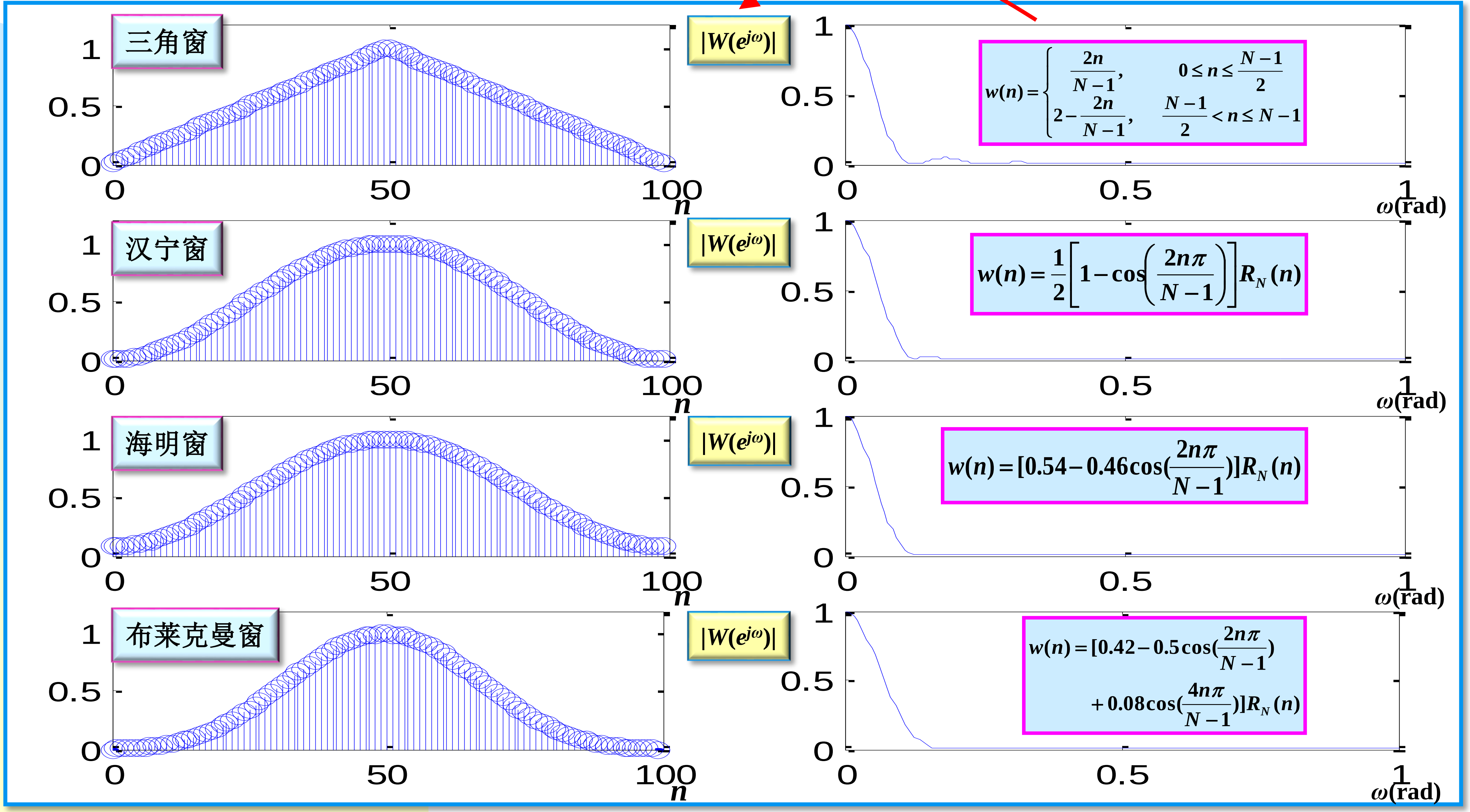


➢ **增加窗函数长度**后，窗函数$w(n)$及其它们的频谱$W(e^{j\omega})$



➢ 各种窗函数及其参数

DTFT



窗谱指标和加窗后滤波器性能指标

窗函数类型	窗谱性能指标		加窗后滤波器性能指标	
	主瓣宽度 (rad)	旁瓣峰值 (dB)	过渡带宽 $\Delta\omega$ (rad)	阻带最小衰减 α_s(dB)
矩形窗	4π/N	-13	1.8π / N	-21
三角形窗	8π/N	-25	6.1π / N	-25
汉宁窗	8π/N	-31	6.2π / N	-44
海明窗	8π/N	-41	6.6π / N	-53
布拉克曼窗	12π/N	-57	11π / N	-74

A

α_s → 窗函数类型 $\xrightarrow{\Delta\omega}$ $N = \dfrac{A}{\Delta\omega}$

第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.2　利用窗函数法设计FIR滤波器(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

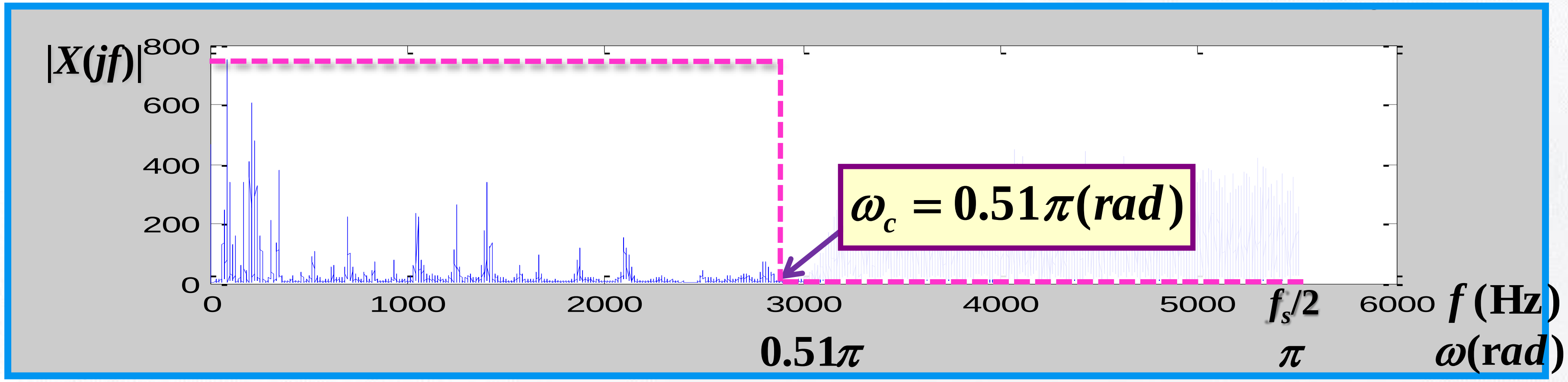
第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.2　利用窗函数法设计FIR滤波器(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

音频去噪实例分析



$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}$$

确定过渡带宽 → $\Delta\omega = 0.05\pi$ → $w(n)$

确定阻带衰减 → $\alpha_s = 20\text{dB}$ / $\alpha_s = 40\text{dB}$ / $\alpha_s = 60\text{dB}$

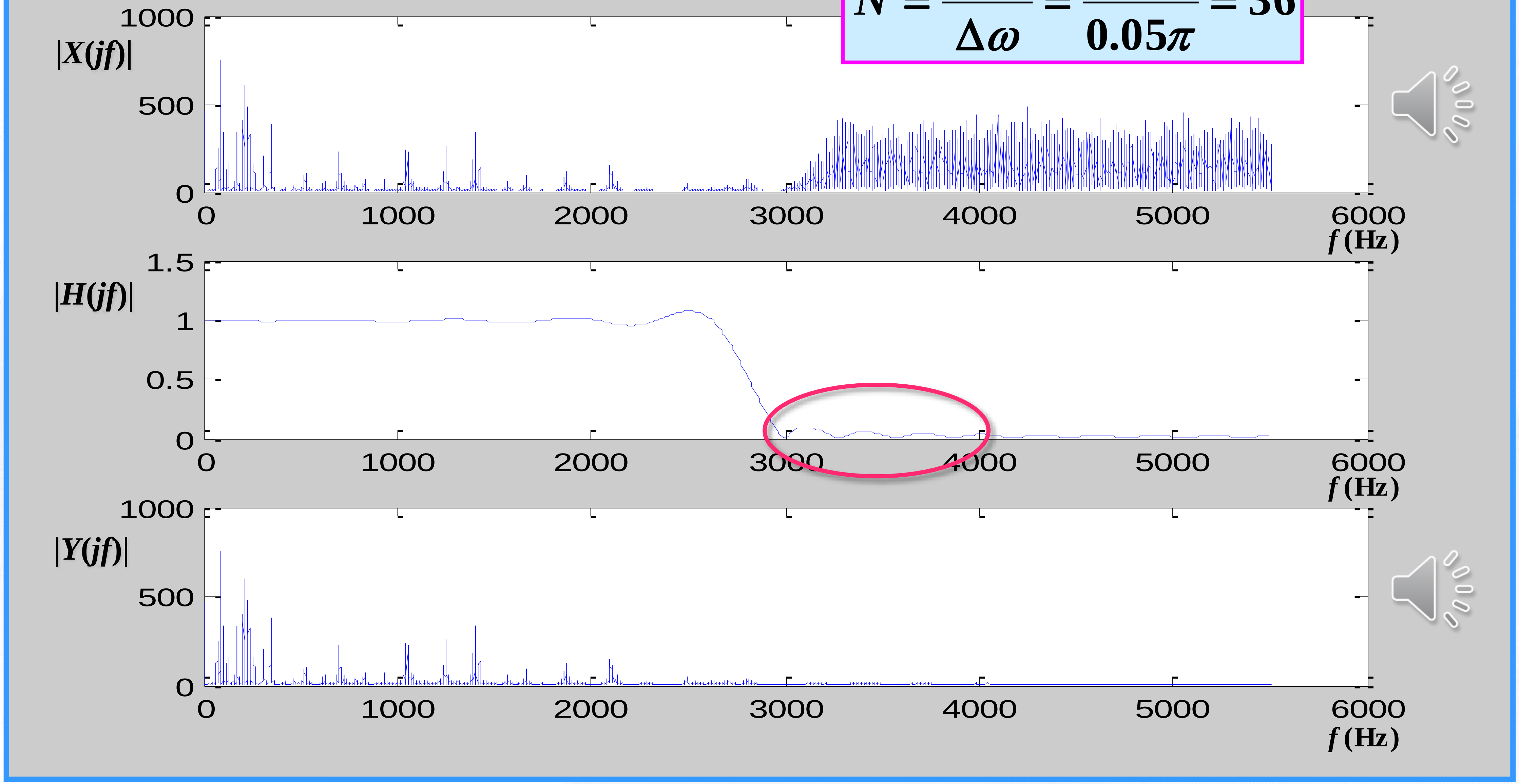
$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[h(n)]$$

音频去噪仿真结果与分析

$\alpha_s = 20\text{dB}$ → 矩形窗

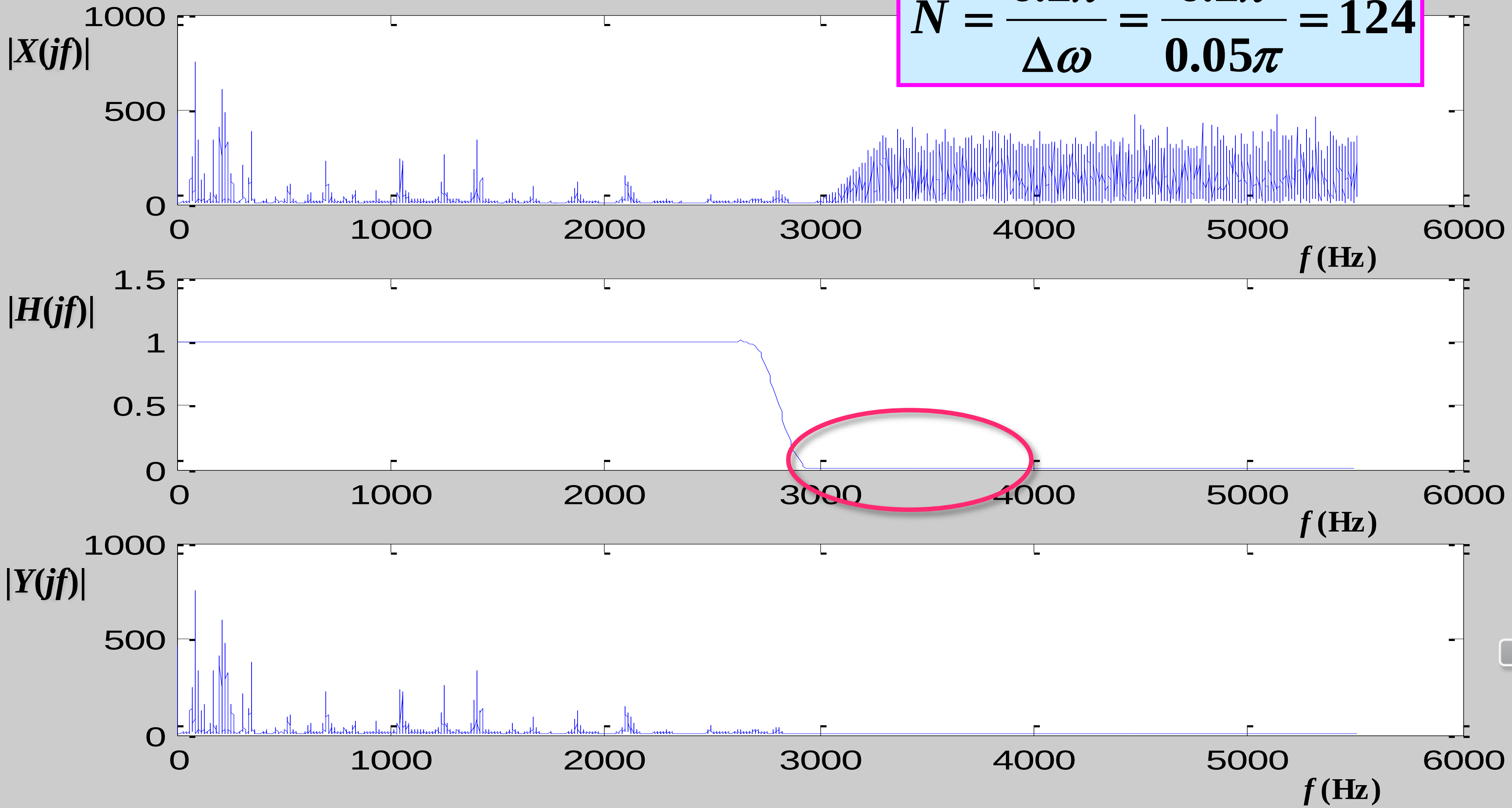
$$N = \frac{1.8\pi}{\Delta\omega} = \frac{1.8\pi}{0.05\pi} = 36$$



音频去噪仿真结果与分析

$\alpha_s = 40\text{dB}$ → 汉宁窗

$$N = \frac{6.2\pi}{\Delta\omega} = \frac{6.2\pi}{0.05\pi} = 124$$

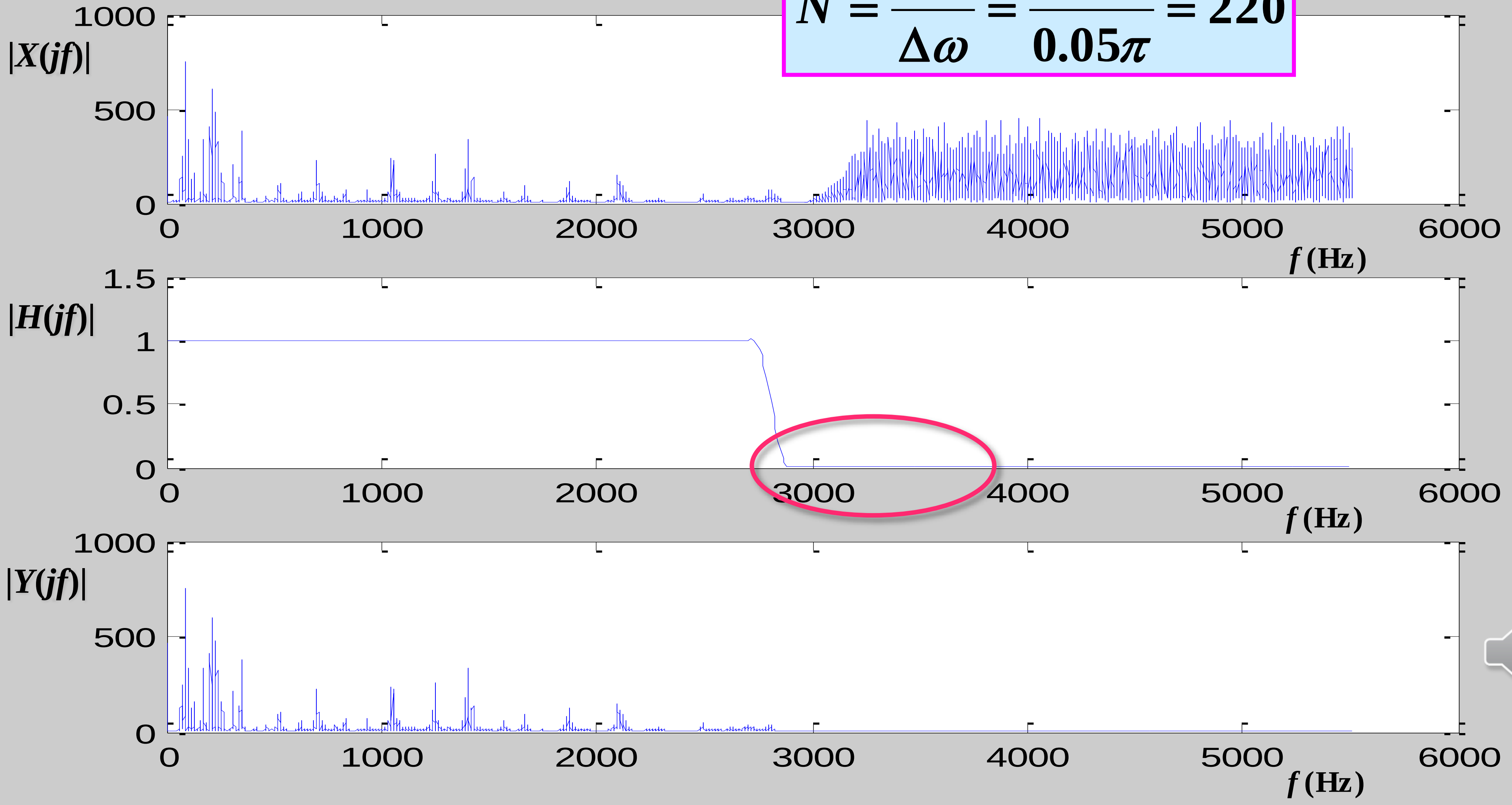


➢ 音频去噪仿真结果与分析

$\alpha_s = 60\text{dB}$ → 布莱克曼窗

华东理工大学

$$N = \frac{11\pi}{\Delta\omega} = \frac{11\pi}{0.05\pi} = 220$$



例：请设计一个线性相位FIR低通滤波器，技术指标如下：

(1) 抽样频率为 f_s=15KHz；

(2) 通带截止频率为 f_p =1.5KHz；

(3) 阻带截止频率为 f_{st} =3KHz；

(4) 阻带衰减不小于50dB。

解： (1) 求数字滤波器指标

$$\omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_s} = 0.2\pi(\mathrm{rad}) \qquad \omega_{st} = 2\pi \frac{f_{st}}{f_s} = 0.4\pi(\mathrm{rad})$$

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_{st}}{2} = 0.3\pi(\mathrm{rad})$$

$$\alpha_s = 50dB \qquad \Delta\omega = \left|\omega_{st} - \omega_p\right| = 0.2\pi(\mathrm{rad})$$

(2) 求$h_d(n)$：

$$\boxed{H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega$$

$$= \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} \qquad \tau = \frac{(N-1)}{2}$$

(3) 选择窗函数：由 $\alpha_s = 50dB$确定海明窗（-53dB）

$$w(n) = [0.54 - 0.46\cos(\frac{2n\pi}{N-1})]R_N(n)$$

(4) 确定N 值

海明窗带宽：$\Delta\omega = \dfrac{6.6\pi}{N}$

$$\Delta\omega = \left|\omega_{st} - \omega_p\right| = 0.2\pi(\mathrm{rad})$$

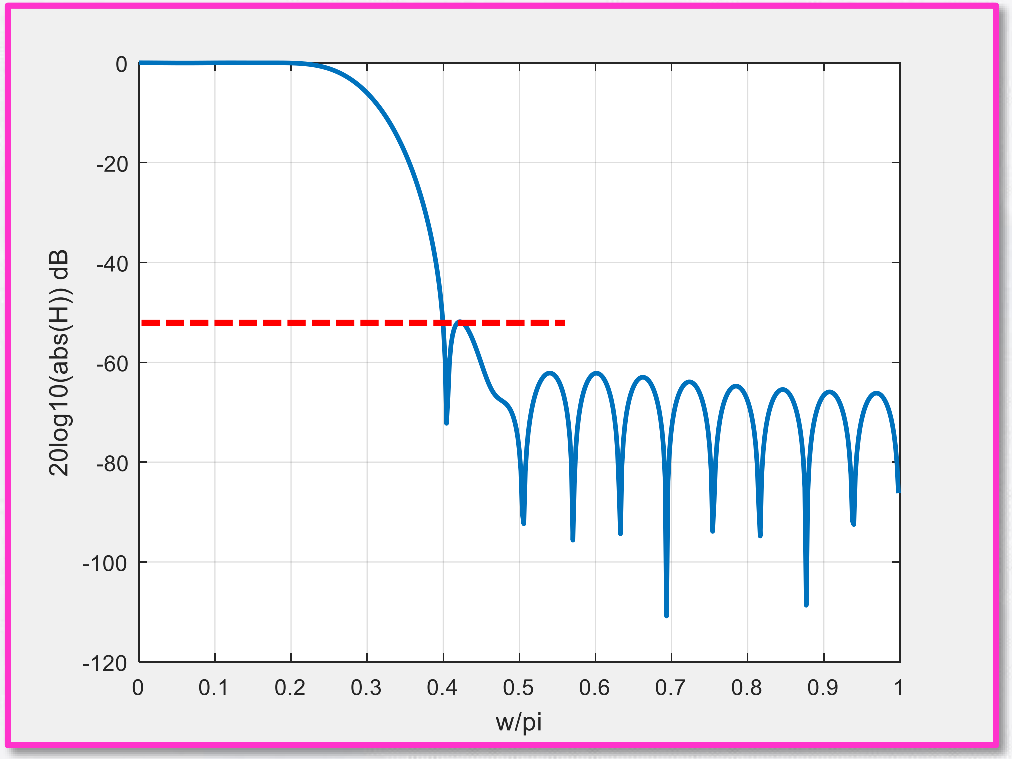
$$N = \frac{A}{\Delta\omega} = \frac{6.6\pi}{0.2\pi} = 33 \qquad \tau = \frac{(N-1)}{2} = 16$$

(5) 确定FIR滤波器的$h(n)$

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\frac{\sin\left[0.3\pi(n-16)\right]}{\pi(n-16)}\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{n\pi}{16}\right)\right]R_{33}(n)$$

(6) 求$H(e^{j\omega})$，验证。

若不满足技术指标，则改变N或窗形状重新设计。



第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.2　利用窗函数法设计FIR滤波器(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.2　利用窗函数法设计FIR滤波器(3)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

理想高通的频响：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_c \le |\omega| < \pi \\ 0 & 0 \le |\omega| \le \omega_c \end{cases}$$

$$\tau=\frac{N-1}{2}$$

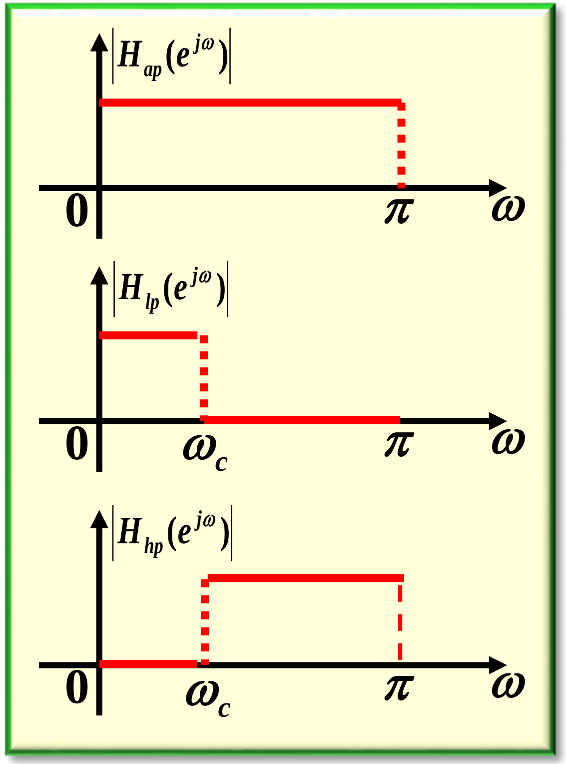
N必须为奇数！

其单位抽样响应：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega+\int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{\pi(n-\tau)}\left[\sin[\pi(n-\tau)]-\sin[\omega_c(n-\tau)]\right]$$

高通滤波器(ω_c)＝全通滤波器－低通滤波器(ω_c)



➢ 线性相位FIR带通滤波器的设计

理想带通的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 < \omega_1 \le |\omega| \le \omega_2 < \pi \\ 0 & 其它\omega \end{cases}$$

$$N = \frac{A}{\Delta\omega}$$

$$\Delta\omega = \min(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2)$$

$$\Delta\omega_1 = |\omega_{p1} - \omega_{s1}|$$

$$\Delta\omega_2 = |\omega_{p2} - \omega_{s2}|$$

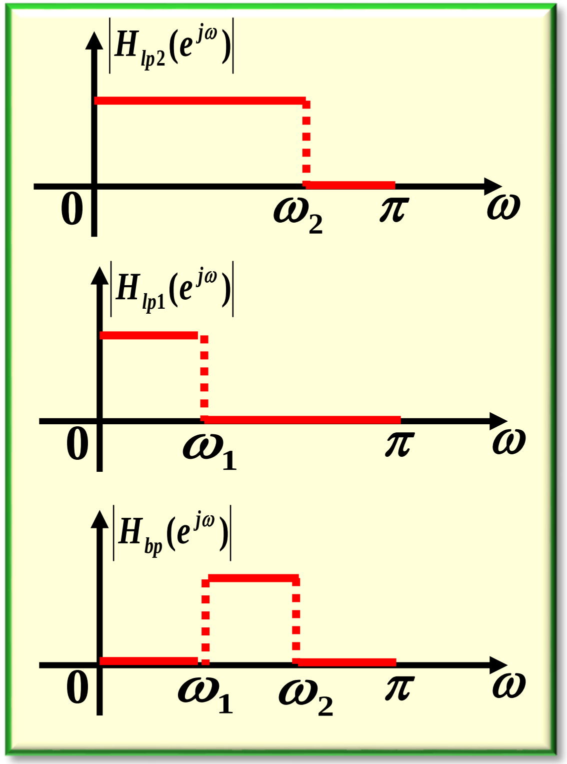
$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

其单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(n-\tau)}\left[\sin[\omega_2(n-\tau)] - \sin[\omega_1(n-\tau)]\right]$$

带通滤波器(ω_1,ω_2) = 低通滤波器(ω_2) − 低通滤波器(ω_1)



线性相位FIR带阻滤波器的设计

理想带阻的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 \le |\omega| \le \omega_1,\ \ \omega_2 \le |\omega| \le \pi \\ 0 & \text{其它}\omega \end{cases}$$

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

N必须为奇数！

其单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_2} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega + \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega + \int_{\omega_2}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(n-\tau)}\left[\sin[\pi(n-\tau)] + \sin[\omega_1(n-\tau)] - \sin[\omega_2(n-\tau)]\right]$$

带阻滤波器(ω_1, ω_2) = 高通滤波器(ω_2) + 低通滤波器(ω_1)

第七章　FIR数字滤波器设计

FIR Digital Filter Design

7.2　利用窗函数法设计FIR滤波器(3)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁