第八章 多采样率数字信号处理

Multirate Digital Signal Processing

第八章　多采样率数字信号处理

Multirate Digital Signal Processing

8.1　信号的整数倍抽取(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

多采样率数字信号处理

➢ 研究多采样率信号处理的原因：

(1) 数字传输系统应具有传输多种抽样率信号(比如语音信号和视频信号)并自动地完成抽样率转换的能力。

(2) 音频信号的处理和应用中目前存在着多种抽样频率。例如，立体声音频信号采样频率是48 kHz，CD是44.1 kHz，而数字音频广播是32 kHz。

(3) 将数字信号在两个具有独立时钟的数字系统之间传递时，要求该数字信号的抽样率能根据时钟的不同而转换。

多采样率数字信号处理

(4) 用具有不同频带的低通、带通及高通滤波器对信号做子带分解，对分解后的信号再做抽样率转换及特征提取，可以最大限度地减少数据量，实现数据压缩的目的。

(5) 对一个信号抽样时，若抽样率过高，必然会造成数据的冗余，这时，希望能将该数字信号的抽样率减下来。

以上几个方面都是希望能对抽样率进行转换，或要求数字系统能工作在多抽样率状态。因此，建立在抽样率转换理论及其系统实现基础上的多抽样率数字信号处理已成为现代信号处理的重要内容。

一、信号的整数倍抽取过程

$$\underset{f_s}{x(n)} \xrightarrow{\quad\downarrow M\quad} \underset{f_s/M}{x(Mn)}$$

$$\boxed{x(n)} \xrightarrow[\text{采样率降低}]{M\text{倍抽取}(M>1)} \boxed{x(Mn)}$$

f_s $\qquad$ f_s/M

令：$\boxed{x_d(n) = x(Mn)}$，采样率f_s/M，采样间隔MT。

decimation / down sampling

时域采样定理

$$x_a(t) \xrightarrow{\text{采样间隔}T} x(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) \xleftarrow{T} X_a(j\Omega)$$

$\Updownarrow$ 频谱变化？

$$x_a(t) \xrightarrow{\text{采样间隔}MT} x_d(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X_d(e^{j\omega}) \xleftarrow{MT} X_a(j\Omega)$$

回忆采样定理：

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jr\Omega_s)$$

$\omega=\Omega T$

频谱横坐标换成数字角频率ω

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X_a(j\frac{\omega}{T}-jr\frac{2\pi}{T})$$

$T\to MT$

同理：

$$X_d(e^{j\omega})=\frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X_a(j\frac{\omega}{MT}-jr\frac{2\pi}{MT})$$

$$\boxed{X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\frac{\omega}{MT} - jr\frac{2\pi}{MT}\right)}$$

令：$r=i+kM$，$0 \le i \le M-1$， $-\infty \le k \le \infty$，即将原来的r分为无穷多个M段，然后分段进行上式的求和运算。

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left\{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\frac{\omega}{MT} - j\underbrace{(i+kM)}_{r=i+kM}\frac{2\pi}{MT}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left\{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\frac{\overbrace{\omega-2\pi i}^{\omega'}}{MT} - jk\frac{2\pi}{T}\right)\right\}$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\frac{\omega}{T} - jr\frac{2\pi}{T}\right)}$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j\omega'}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M}-\frac{2\pi i}{M}\right)}\right)$$

8.1 信号的整数倍抽取

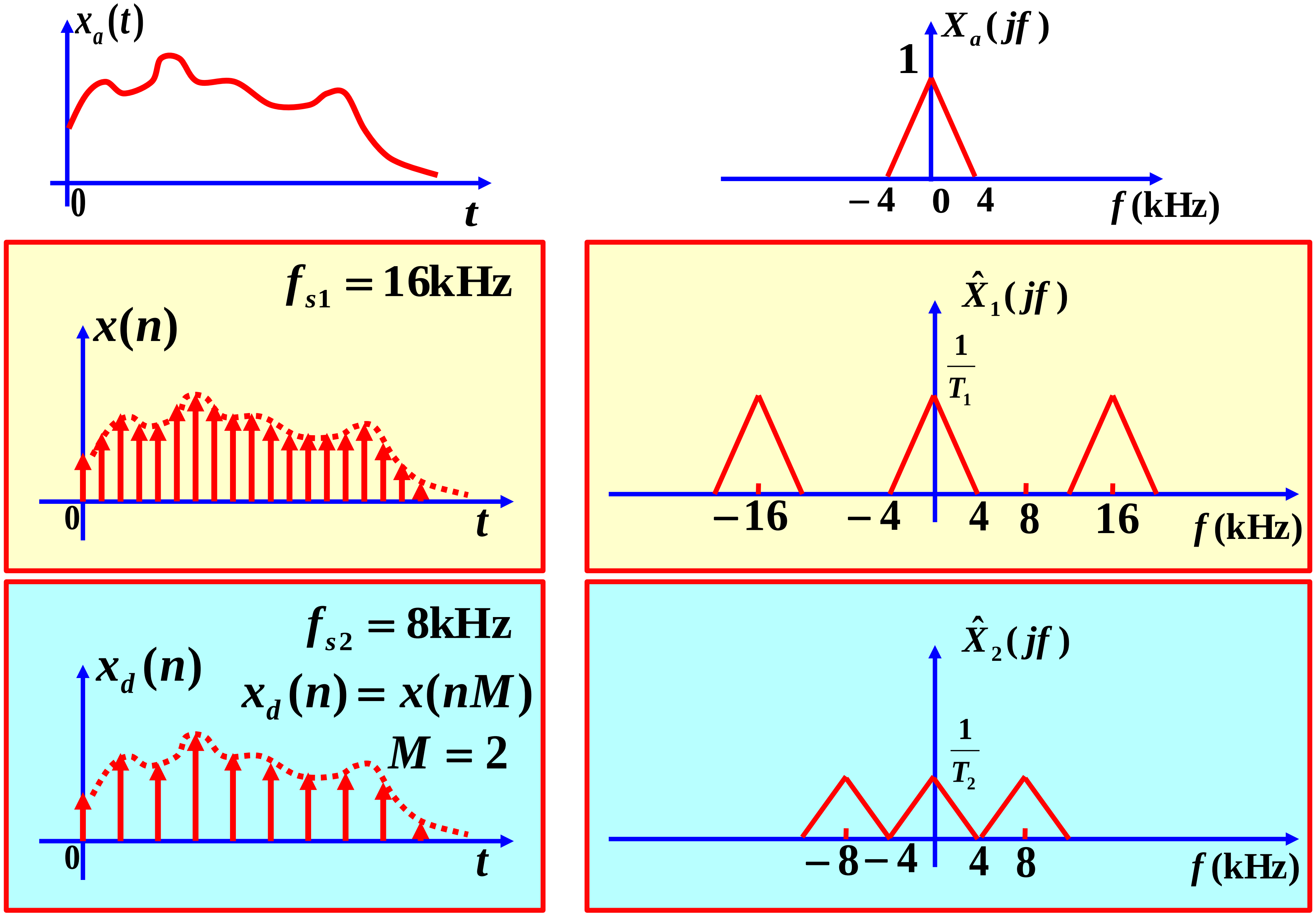
理解(1)：由$x(2n)$的DTFT推导去理解，设 $X(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

$$\boxed{\mathrm{DTFT}[x(2n)]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[x(r)+(-1)^r x(r)]e^{-j\omega\frac{r}{2}}$$

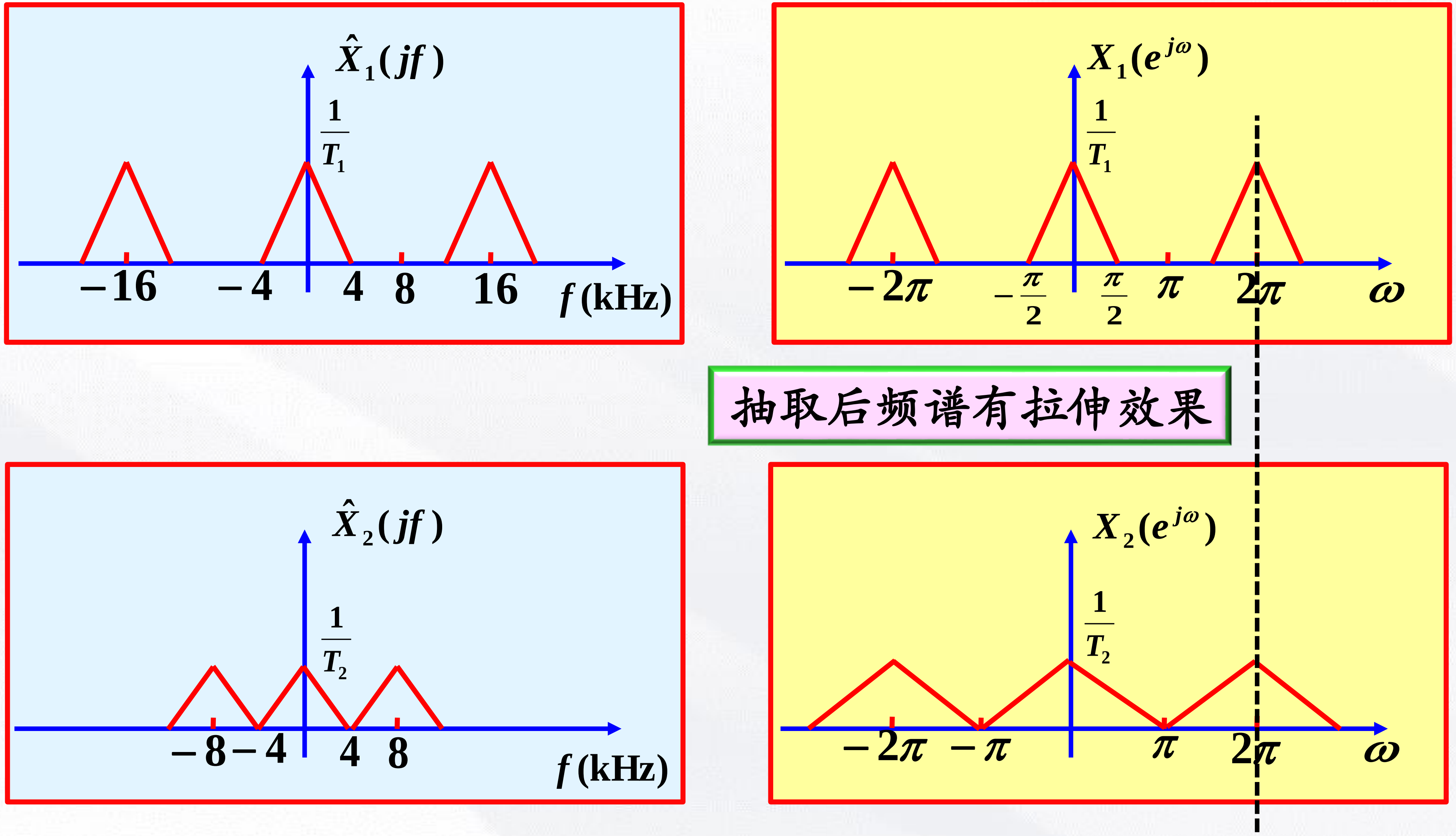
$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[x(r)+e^{jr\pi} x(r)]e^{-j\omega\frac{r}{2}} \quad \boxed{= \frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2}X(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})}$$

$$\boxed{X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M}-\frac{2\pi i}{M}\right)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{2}-\frac{2\pi i}{2}\right)}\right)}$$

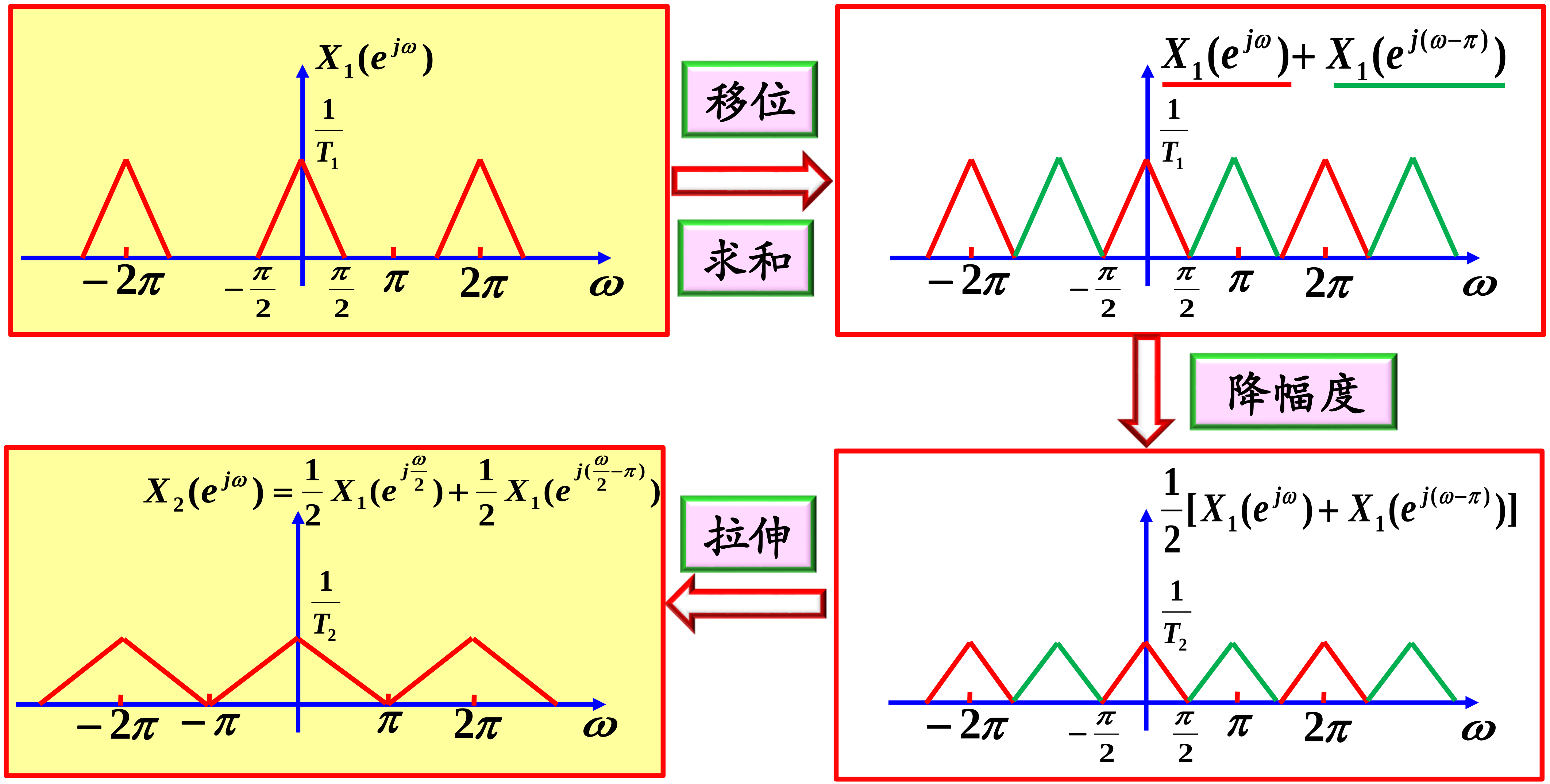
理解(2)：用图示采样定理的方法去理解

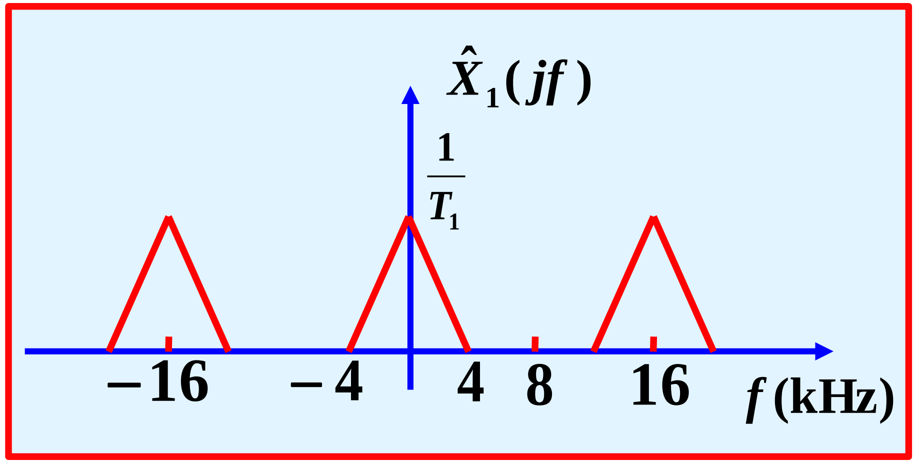


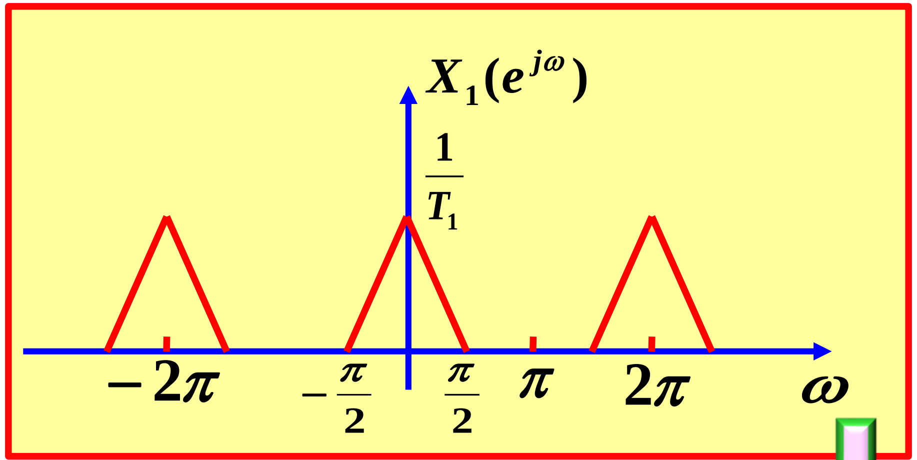
8.1 信号的整数倍抽取


$\hat{X}_1(jf)$
$\frac{1}{T_1}$
-16 -4 4 8 16 $f\,(\mathrm{kHz})$
$X_1(e^{j\omega})$
$\frac{1}{T_1}$
-2π $-\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$ π 2π ω
抽取后频谱有拉伸效果
$\hat{X}_2(jf)$
$\frac{1}{T_2}$
-8 -4 4 8 $f\,(\mathrm{kHz})$
$X_2(e^{j\omega})$
$\frac{1}{T_2}$
-2π $-\pi$ π 2π ω

$$X_2(e^{j\omega})=\mathrm{DTFT}[x(2n)]=\frac{1}{2}X_1(e^{j\frac{\omega}{2}})+\frac{1}{2}X_1(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})$$



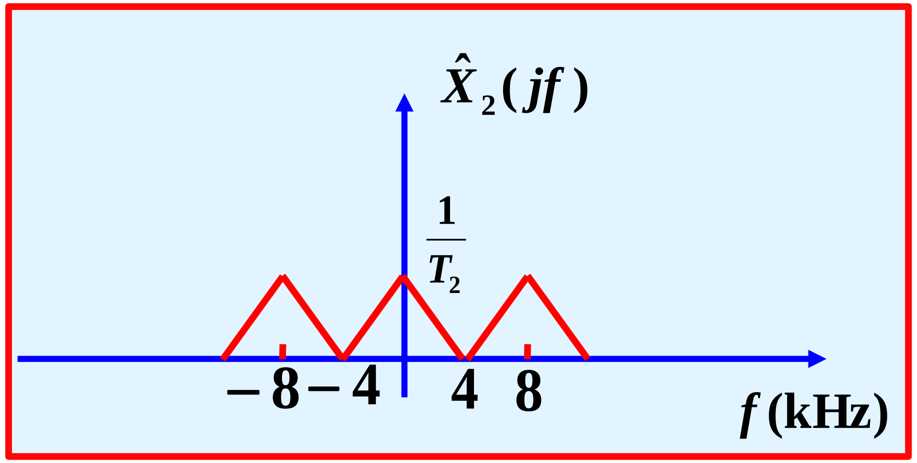


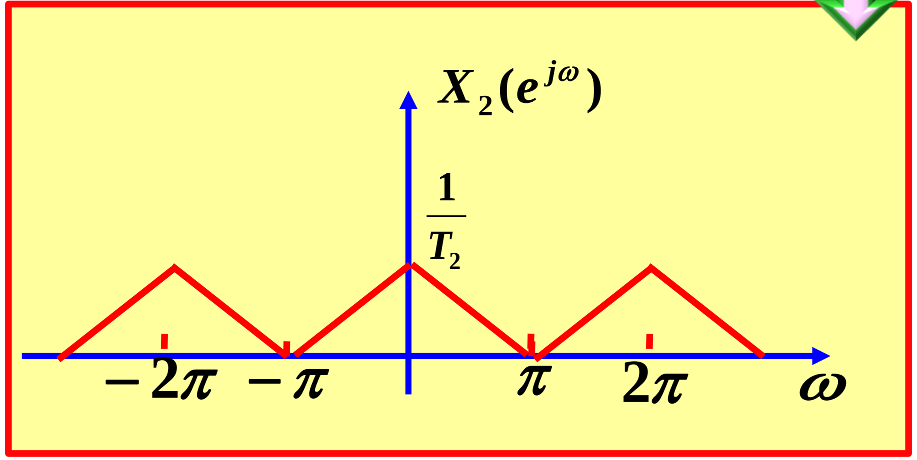


是否会发生频谱混叠?

抽取后频谱有拉伸效果

频谱不混叠的条件：当$\pi/M \le |\omega| \le \pi$ 时，$X_1(e^{j\omega})=0$。





第八章 多采样率数字信号处理

Multirate Digital Signal Processing

8.1 信号的整数倍抽取(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

第八章 多采样率数字信号处理

Multirate Digital Signal Processing

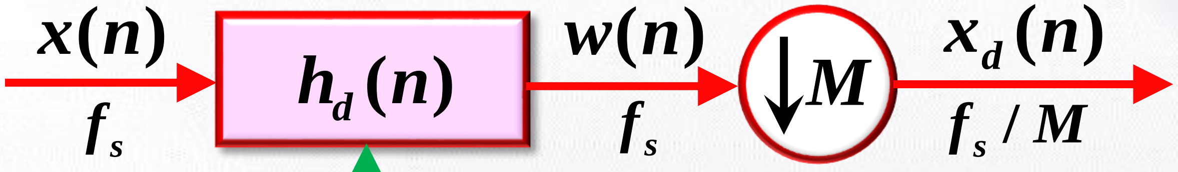
8.1 信号的整数倍抽取(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

8.1 信号的整数倍抽取

华东理工大学

二、抽取滤波器(抗混叠滤波器)与抽取器级联



抽取滤波器(抗混叠滤波器)，起到宁缺毋滥的效果

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & 0\le|\omega|<\pi/M \\ 0 & \pi/M\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

$$w(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h_d(k)x(n-k)$$

由$H_d(e^{j\omega})$设计因果FIRDF，得到实际系统单位脉冲响应$h_d(n)$。

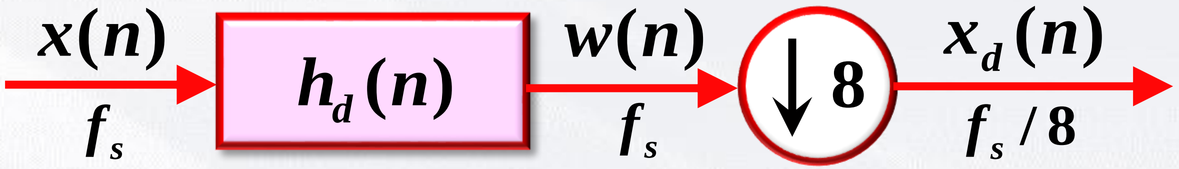
$$x_d(n)=w(Mn)=\sum_{k=0}^{\infty}h_d(k)x(Mn-k)$$

8.1 信号的整数倍抽取

例：已知 信号$x(n)$的取样频率$f_s=2f_h$，f_h为信号最高频率。设计一个将取样率降低到1/8的抽取器系统。

(1) 画出系统框图，并注明系统中各信号的取样频率；
(2) 写出抗混叠滤波器的理想幅度响应；
(3) 用窗函数法设计一个40阶的抗混叠滤波器，采用汉宁窗；
(4) 写出系统的差分方程。

(1) 系统框图



(2) 抗混叠滤波器的理想幅度响应

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & 0\le|\omega|<\dfrac{\pi}{8}\\ 0 & \dfrac{\pi}{8}\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

(3) 用窗函数法设计一个40阶的抗混叠滤波器，采用汉宁窗；

$$N-1=40$$

$$\omega_c=0.125\pi(\text{rad})$$

$$\tau=\frac{(N-1)}{2}=20$$

$$w(n)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right)\right]R_N(n)$$

$$h_d(n)=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{8}(n-20)\right]}{\pi(n-20)}0.5\left[1-\cos\left(\frac{\pi n}{20}\right)\right]R_{41}(n)$$

(4) 写出系统的差分方程。

$h(k)$即b系数

$$x_d(n)=\sum_{k=0}^{40}h(k)x(8n-k)$$

FIR滤波器的差分方程即线性卷积表达式

第八章　多采样率数字信号处理

Multirate Digital Signal Processing

8.1　信号的整数倍抽取(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁