第一章 离散时间信号与系统

Discrete-time signals and systems

1.2 离散时间系统

离散时间系统因果性及稳定性

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

离散时间系统因果性及稳定性的基本概念及判断方法

- 因果系统
  - 一般系统 $y(n)=\mathrm{T}[x(n)]$ 的因果性定义及判断方法
  - LSI系统的因果性条件
- 稳定系统
  - 一般系统 $y(n)=\mathrm{T}[x(n)]$ 的稳定性定义及判断方法
  - LSI系统的稳定性条件

一般系统的因果性定义及判断方法 Causal system

➢ 一般系统：$y(n)=T[x(n)]$ 的因果性定义

定义：某时刻的输出只取决于此时刻和此时刻以前的输入的系统。

即：$n=n_0$时的输出$y(n_0)$只取决于$n \le n_0$的输入$x(n)$。

例：(1) $y(n)=nx(n)$ 因果，$y(n_0)$只取决于$n=n_0$的输入$x(n)$

(2) $y(n)=x(n+2)$ 非因果，$y(0) = x(2)$ Noncausal system

(3) $y(n)=x(n^2)$ 非因果，$y(2) = x(4)$

(4) $y(n)=x(-n)$ 非因果，$y(-2) = x(2)$

(5) $y(n)=\sin(n+2)x(n)$ 因果，$\sin(n+2)$不是输入

LSI系统的因果性条件

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)$$

$$=\underbrace{h(-\infty)}_{\neq 0?}\boxed{x(n+\infty)}+\ldots+\underbrace{h(-2)}_{\neq 0?}\boxed{x(n+2)}+\underbrace{h(-1)}_{\neq 0?}\boxed{x(n+1)}$$

$$+h(0)\underline{x(n)}+h(1)\underline{x(n-1)}+\ldots+h(\infty)\underline{x(n-\infty)}$$

非因果

解释：如果存在$n<0$时，$h(n)\neq 0$，那么$y(n)$就将与$m>0$的$x(n+m)$有关，按照因果系统的定义，此时系统非因果。

定义：若LSI系统的$h(n)$满足：当$n<0$时，$h(n)=0$，那么，该LSI系统为因果系统。

LSI系统的因果性条件

例：已知LSI系统的单位脉冲响应$h(n)$，判断系统的因果性。

单位脉冲序列

当$n<0$时，$h(n) = 0$

单位阶跃序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

(1) $h(n)=\delta(n-2)+\underline{\delta(n+2)}$ 非因果，$h(-2)\neq 0$

(2) $h(n)=0.5^n\underline{u(n-2)}$ 因果，当$n\geq 2$时，$h(n)\neq 0$

(3) $h(n)=2^n\underline{u(-n-1)}$ 非因果，当$n\leq -1$时，$h(n)\neq 0$

(4) $h(n)=0.5^n$ 非因果，当$-\infty\leq n\leq\infty$时，$h(n)$ 有值

一般系统的稳定性定义及判断方法 Stable system

➢ 一般系统：$y(n)$=T[$x(n)$] 的稳定性定义

n不受限制
$n\in[-\infty, \infty]$

定义：有界输入产生有界输出的系统。

即： 如果 $|x(n)| \le M < \infty$， 则有 $|y(n)| \le P < \infty$。

例：(1) $y(n) = nx(n)$ 不稳定，$n=\infty$时，$y(n)=\infty$

(2) $y(n) = x(n^2)$ 稳定，有界输入产生有界输出

(3) $y(n) = \dfrac{1}{3}\sum_{k=n-1}^{n+1} x(k)$ 稳定，有界输入产生有界输出

(4) $y(n) = \sum_{k=n_0}^{n} x(k)$ 不稳定，$y(n)$是n-n_0+1项输入的求和，当$n=\infty$时，$y(n)=\infty$

LSI系统的稳定性条件

定义：一个LSI系统是稳定系统的充分必要条件是：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| = q < \infty$$

单位脉冲响应绝对可和

Absolutely summable

从线性卷积理解LSI系统稳定性条件：

$$|y(n)| = |h(n) * x(n)| = \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, x(n-m)\right|$$

输入有界

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)| = q < \infty$$

输出有界

LSI系统的稳定性条件

例：已知LSI系统的单位脉冲响应$h(n)$，判断系统的稳定性。

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| = q < \infty}$$

$h(n)$绝对可和

例：(1) $h(n)=\delta(n-2)+\delta(n+2)$ 稳定

(2) $h(n)=0.5^n u(n-2)$ 稳定，$n\geq 2$有值，收敛

(3) $h(n)=2^n u(-n-1)$ 稳定，$n\leq -1$有值，收敛

(4) $h(n)=0.5^n$ 不稳定，$h(n)$不满足绝对可和

离散时间系统因果性及稳定性的基本概念及判断方法

- 因果系统
  - 一般系统 $y(n)=\mathrm{T}[x(n)]$ 的因果性定义及判断方法
  - LSI系统的因果性条件
- 稳定系统
  - 一般系统 $y(n)=\mathrm{T}[x(n)]$ 的稳定性定义及判断方法
  - LSI系统的稳定性条件