

# 第一章 离散时间信号与系统

*Discrete-time signals and systems*

《数字信号处理》

1.1

离散时间信号 —— 序列

1.2

离散时间系统

1.3

常系数线性差分方程

1.4

连续时间信号的抽样



# 第一章 离散时间信号与系统

*Discrete-time signals and systems*

## 1.3 常系数线性差分方程

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁





### 线性常系数差分方程

- 线性常系数差分方程的**表达形式**
- 线性常系数差分方程的**求解方法**
- **MATLAB**中实现差分方程递推解的**filter函数**

# 一、线性常系数差分方程表达形式

*Linear constant-coefficient difference equations*

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

常系数：是指方程中 $a_k$ 和 $b_m$ 为常数。

阶数： $y(n)$ 项中变量序号的最高值与最低值之差。

线性： $y(n-k)$ 与 $x(n-m)$ 项都只有一次幂，且不存在相乘项。

该“线性”与线性系统的“线性”含义不同

## 二、线性常系数差分方程的求解

- ① **经典解法**：类似于模拟系统求解微分方程的方法，要求齐次解、特解，并由边界条件求待定系数。由于计算复杂，较少使用。
- ② **递推(迭代)法**：简单、适于用计算机进行求解。但只能得到一系列数值解，不易得到封闭式(公式)解答。
- ③ **变换域法**：将差分方程变换到 $z$ 域求解。
- ④ **卷积法**：由差分方程求出系统的 $h(n)$ ，再与已知的 $x(n)$ 进行卷积，得到 $y(n)$ 。

## 二、线性常系数差分方程的求解

例：用迭代法求解差分方程—求单位抽样响应 $h(n)$

设系统差分方程为： $y(n) - ay(n-1] = x(n)$ ，求 $h(n)$ 。

解：设 $x(n) = \delta(n)$ ，对因果系统，且有当 $n < 0$ 时， $y(n) = h(n) = 0$ 。

$$h(0) = ah(-1) + \delta(0) = 0 + 1 = 1$$

$$h(1) = ah(0) + \delta(1) = a + 0 = a$$

$$h(2) = ah(1) + \delta(2) = a^2 + 0 = a^2$$

.....

$$h(n) = ah(n-1) + 0 = a^n + 0 = a^n$$

迭代

故系统的单位抽样响应为： $h(n) = a^n u(n)$ 。这个系统显然是因果系统，当 $|a| < 1$ 时，它还是稳定系统。

注意：一个常系数线性差分方程，并不一定代表因果系统。

如果边界条件假设不同，可以得到非因果系统。



## 二、线性常系数差分方程的求解

例：设系统差分方程仍为： $y(n) - ay(n-1) = x(n)$ ，求 $h(n)$ 。

解：设 $x(n) = \delta(n)$ ，且有当 $n > 0$  时， $y(n) = h(n) = 0$ 。

可写出另一种递推关系： $y(n-1) = a^{-1}[y(n) - x(n)]$

$$h(0) = a^{-1}[h(1) - \delta(1)] = 0$$

$$h(-1) = a^{-1}[h(0) - \delta(0)] = -a^{-1}$$

$$h(-2) = a^{-1}[h(-1) + \delta(-1)] = -a^{-2}$$

.....

$$h(-n) = -a^{-n}$$

迭代

该系统的单位抽样响应为： $h(n) = -a^n u(-n-1)$ 。这个系统显然非因果系统，但它的差分方程与前一题相同。

## 二、线性常系数差分方程的求解

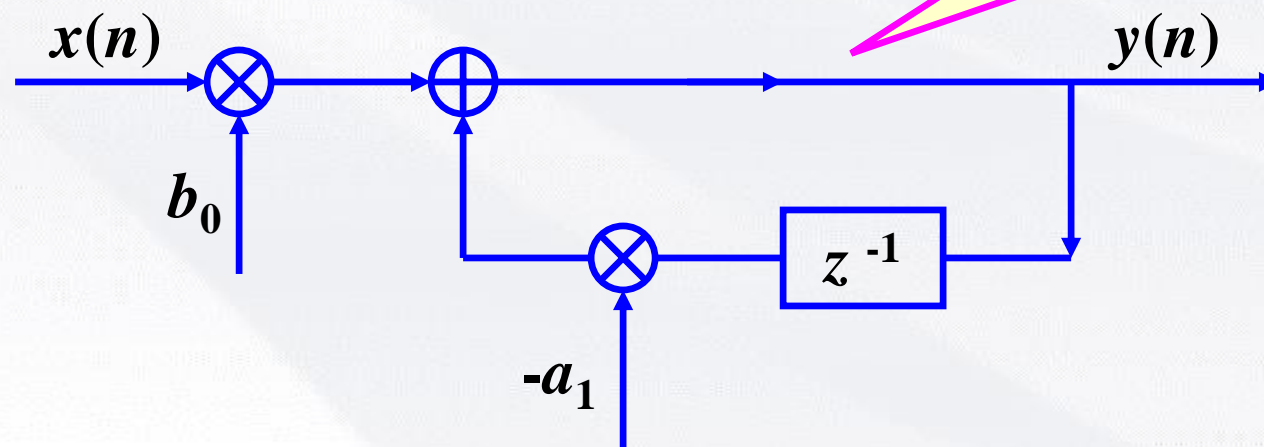
差分方程表示法的一个优点是：

可以直接得到系统的结构，这里的结构是指将输入变换成输出的运算结构。

例：差分方程：

$$y(n] = b_0x(n) - a_1y(n-1]$$

该差分方程所表示的结构为：



从图中可以看出需要多少个加法器、乘法器和延迟单元。



### 三、MATLAB中实现差分方程递推解的函数



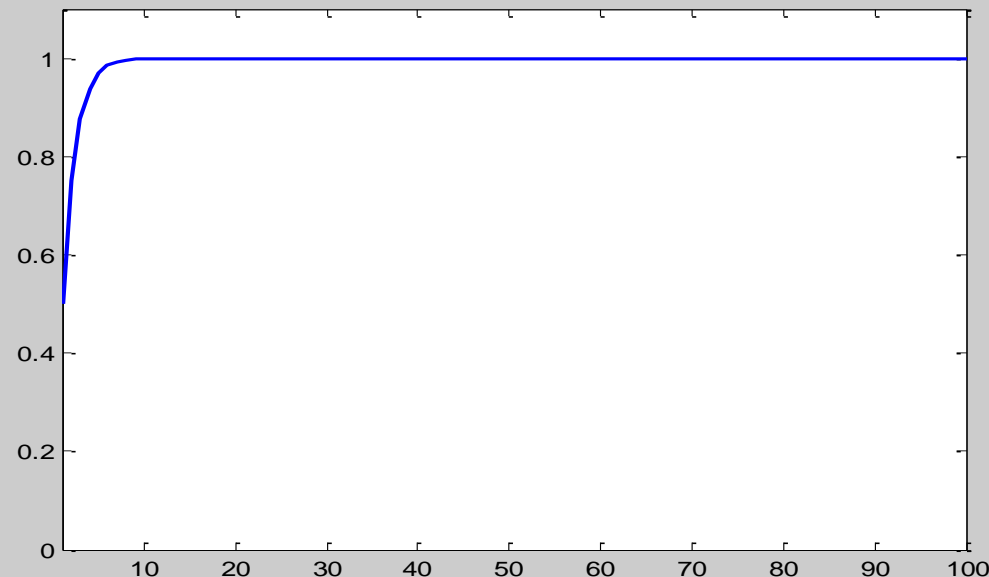
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

函数形式:  $y = \text{filter}(b, a, x)$

其中:  $b=[b_0, b_1, \dots, b_M]$ ;  $a=[a_0, a_1, \dots, a_N]$ ; 且  $a_0 \neq 0$   
 $x$ 为输入序列,  $y$ 为输出序列。

例如:  $y(n) - 0.5y(n-1) = 0.5x(n)$

```
b=0.5; a=[1, -0.5];  
x=ones(1,100);  
y=filter(b,a,x);
```





### 线性常系数差分方程

- 线性常系数差分方程的**表达形式**
- 线性常系数差分方程的**求解方法**
- **MATLAB**中实现差分方程递推解的**filter函数**