第三章 离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

- 3.1 离散傅里叶级数及其性质
- 3.2 离散傅里叶变换的定义及性质
- 3.3 用DFT求解LSI系统输出
- 3.4 频域采样定理
- 3.5 模拟信号的谱分析方法

第三章　离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.2 离散傅里叶变换的定义及性质

离散傅里叶变换的性质(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

离散傅里变换的性质(1)

- DFT的**线性**性质
- **圆周(循环)移位**的基本**概念**与**实现方法**
- DFT的**时域圆周(循环)移位**性质
- DFT的**频域圆周(循环)移位**性质

一、DFT的线性性质

(1) 两序列都是N点时:

如果 $\mathrm{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$

$\mathrm{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$

则有：

$$\boxed{\mathrm{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)}$$

(2) $x_1(n)$和$x_2(n)$ 的长度N_1和N_2不等时:

选择：$N=\max[N_1, N_2]$

为DFT变换的长度，短者进行补零达到 N 点。

二、圆周(循环)移位的基本概念与实现方法

Circular Shift

一个有限长序列$x(n)$的圆周移位定义：

$$x_m(n) = x\left(\left(n+m\right)\right)_N R_N\left(n\right)$$

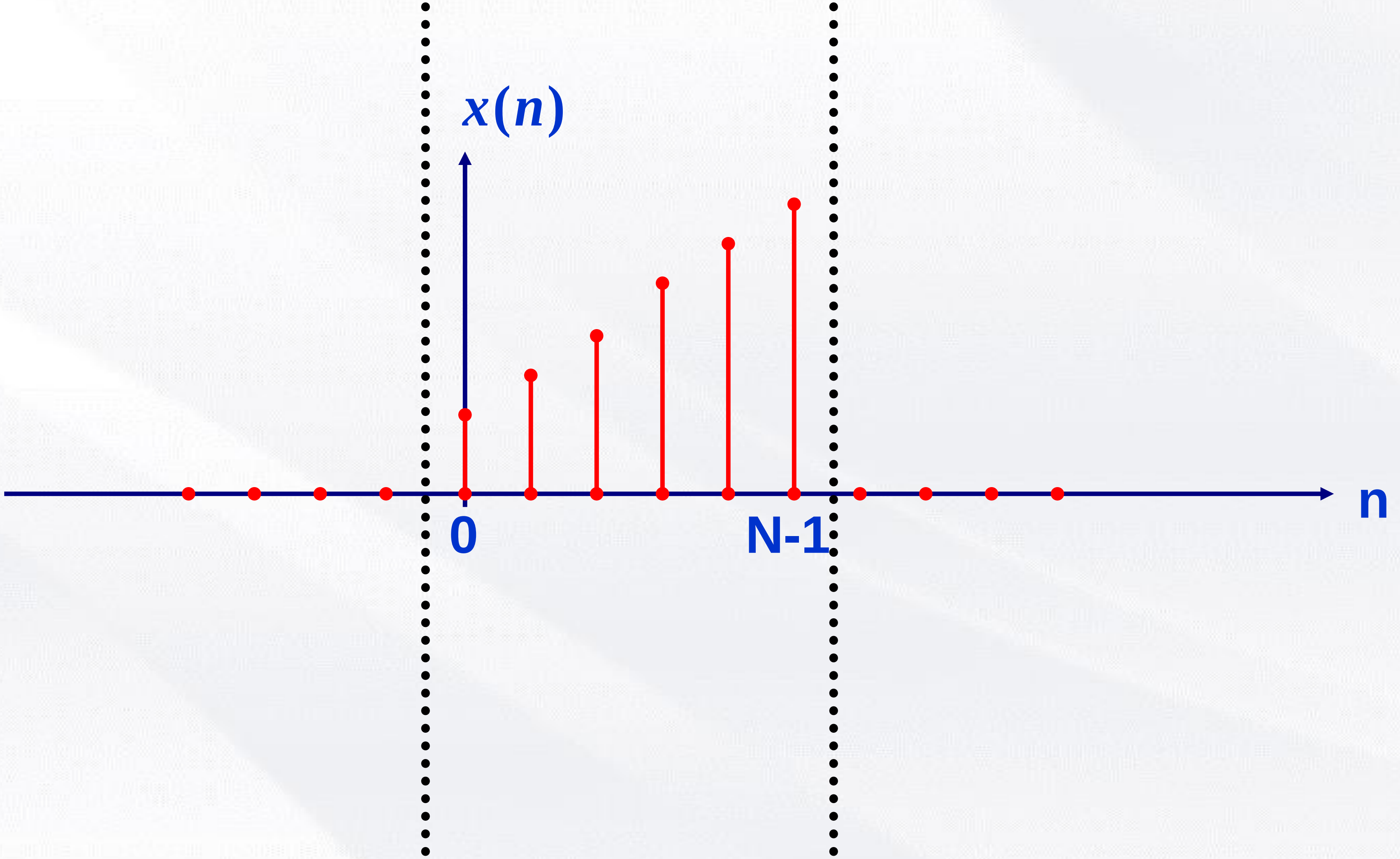
这里包括三层意思：

(1) 先将$x(n)$进行周期延拓 $\tilde{x}(n) = x\left(\left(n\right)\right)_N$

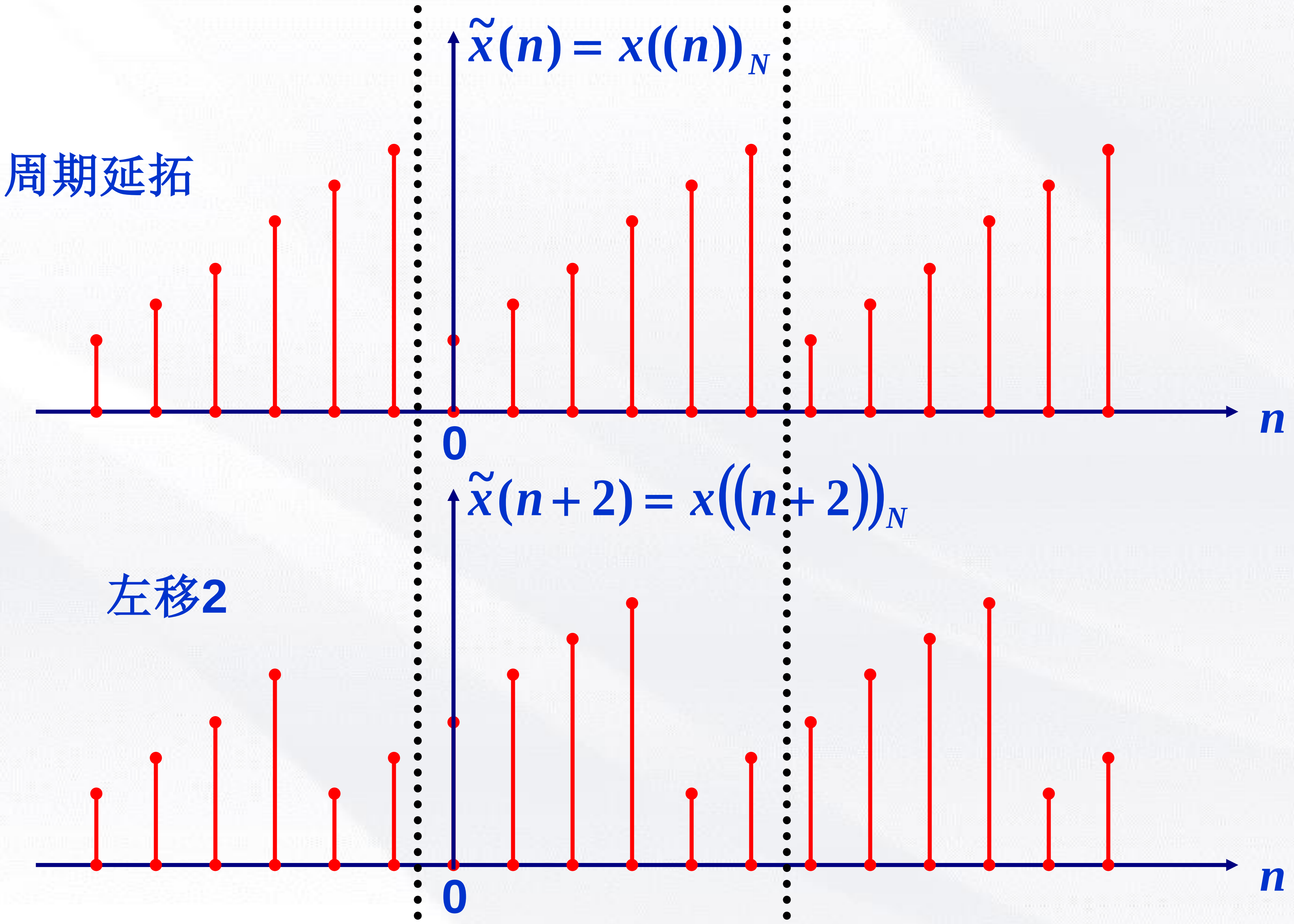
(2)再进行移位 $\tilde{x}(n+m) = x\left(\left(n+m\right)\right)_N$

(3)最后取主值序列： $x_m(n) = x\left(\left(n+m\right)\right)_N R_N\left(n\right)$

二、圆周(循环)移位的基本概念与实现方法

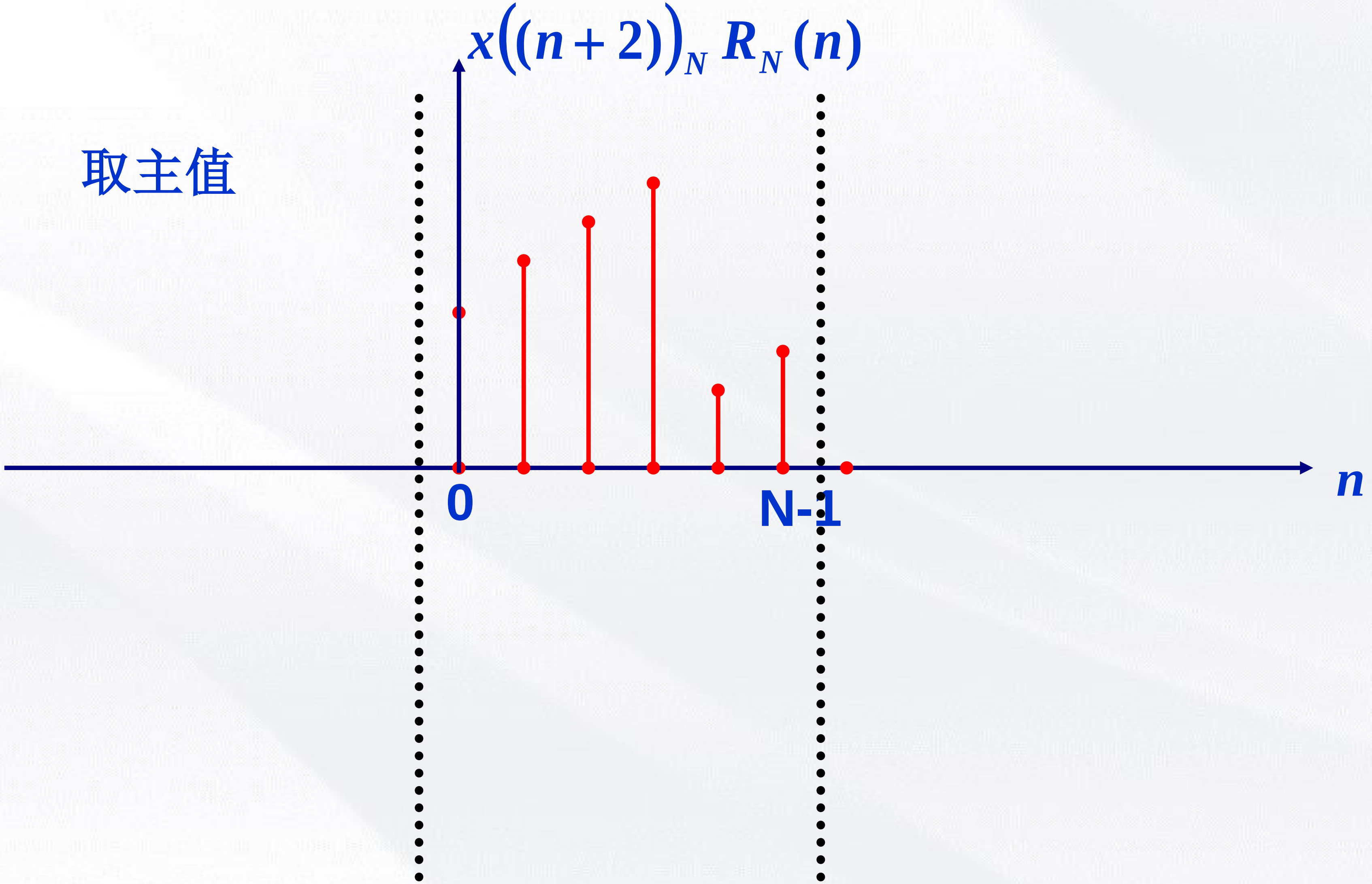


二、圆周(循环)移位的基本概念与实现方法



二、圆周(循环)移位的基本概念与实现方法

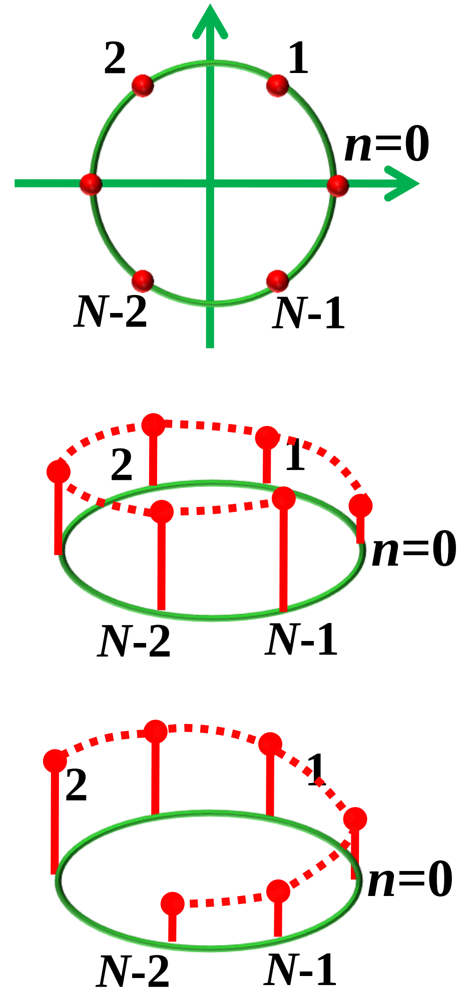
取主值



二、圆周(循环)移位的基本概念与实现方法

◆ 圆周(循环)移位的含义

由于我们取主值序列，即只观察n=0到N-1这一主值区间，当某一抽样从此区间一端移出时，与它相同值的抽样又从此区间的另一端进来。如果把$x(n)$排列一个N等分的圆周上，序列的移位就相当于$x(n)$在圆上旋转，故称作圆周移位。



三、DFT的时域圆周(循环)移位性质

$$X_m(k)=\mathrm{DFT}\left[x_m(n)\right]$$
$$=\mathrm{DFT}\left[x((n+m))_N R_N(n)\right]=W_N^{-km}X(k)=e^{j\frac{2\pi}{N}km}X(k)$$

四、DFT的频域圆周(循环)移位性质

$$\mathrm{IDFT}\left[X((k+l))_N R_N(k)\right]=W_N^{nl}x(n)=e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}x(n)$$

3.2 离散傅里叶变换的定义及性质

$$\delta(n) \xrightarrow{z变换} 1$$

$$\delta(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} 1$$

$$\delta((n))_N R_N(n) \xrightarrow{\text{N点DFT}} 1R_N(k)$$

$$\delta(n-m) \xrightarrow{z变换} z^{-m}$$

$$\delta(n-m) \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\omega m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{N}k$$

$$\boxed{\delta((n-m))_N} R_N(n) \xrightarrow{\text{N点DFT}} \boxed{e^{-j\frac{2\pi}{N}km}} R_N(k)$$

$$\boxed{\delta((n+m))_N} R_N(n) \xrightarrow{\text{N点DFT}} \boxed{e^{j\frac{2\pi}{N}km}} R_N(k)$$

$$\boxed{1}R_N(n) \xrightarrow{\text{N点DFT}} \boxed{N\delta((k))_N} R_N(k)$$

$$\mathrm{DFT}[1R_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n) W_N^{nk} = \boxed{\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk}}$$

直接求和

$$= \frac{W_N^{k\cdot 0}(1-W_N^{k\cdot N})}{1-W_N^{k}}$$

$$= \boxed{\frac{(1-W_N^{k\cdot N})}{1-W_N^{k}}} = \begin{cases} \boxed{N, \quad k=0} \\ \boxed{0, \quad k\in[1, N-1]} \end{cases} = N\delta(k)$$

$$\boxed{k\in[0, N-1]}$$

等比数列公式

$$\boxed{1}R_N(n) \xrightarrow{\text{N点DFT}} \boxed{N\delta((k))_N}R_N(k)$$

$$\boxed{e^{j\frac{2\pi}{N}nl}}R_N(n) \xrightarrow{\text{N点DFT}} \boxed{N\delta((k-l))_N}R_N(k)$$

$$\boxed{e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}}R_N(n) \xrightarrow{\text{N点DFT}} \boxed{N\delta((k+l))_N}R_N(k)$$

例：已知序列 $x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$，求：

$$x((n+2))_8 R_8(n) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x((n-2))_8 R_8(n) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x((-n+2))_8 R_8(n) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x((-n-2))_8 R_8(n) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$x(n)=\{\underline{1},2,3,4\}$

$n=3$

$n\in[1,N-1]$

$x((n))_8R_8(n)=\{\boxed{1},2,3,4,0,0,0,0\}$

$x((n+2))_8R_8(n)=\{\underline{3},4,0,0,0,0,1,2\}$

$x((n-2))_8R_8(n)=\{\underline{0},0,1,2,3,4,0,0\}$

翻转

$x(n)=\{\underline{1},2,3,4\}$ $x(-n)=\{4,3,2,\underline{1},\}$

$x((-n))_8R_8(n)=\{\boxed{1},0,0,0,0,4,3,2\}$

$x((-n+2))_8R_8(n)=\{\underline{3},2,1,0,0,0,0,4\}$

$x((-n-2))_8R_8(n)=\{\underline{0},0,0,4,3,2,1,0\}$

检验当$n=3$时：

$$x((-3-2))_8=x((-5))_8=x(-5\bmod 8)=x(3)=4$$

例：若 $X(k)$ 是序列 $x(n)$ 的 4点 DFT，已知：

$$x(n)=\{\underline{1},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4}\}$$

若 $Y(k)$ 是序列 $y(n)$ 的 4点 DFT，且：

$$Y(k)=W_4^{3k}X(k)$$

$$y(n)=x(n-3)$$

$$=e^{-j\frac{2\pi}{4}k3}X(k)\rightarrow e^{-j\omega 3}X(e^{j\omega})\rightarrow z^{-3}X(z)$$

求序列 $y(n)$ 。

周期、取主值

$$y(n)=x((n-3))_4R_4(n)=x((n+1))_4R_4(n)$$

$$y(n)=\{\underline{\frac{3}{4}},\frac{2}{4},\frac{1}{4},1\}$$

$$x(n)=\{\underline{1},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4}\}\qquad Y(k)=W_2^{k}X(k)=W_4^{2k}X(k)$$

$X(k)$ 是序列 $x(n)$ 的 4点 DFT

$Y(k)$ 是序列 $y(n)$ 的 4点 DFT

$$y(n)=x((n-2))_4R_4(n)=\{\underline{\frac{2}{4}},\frac{1}{4},1,\frac{3}{4}\}$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot m\cdot k}$$

$$Y(k)=e^{-j\frac{3\pi}{2}k}X(k)=e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot k}X(k)=W_4^{3k}X(k)$$

$$y(n)=x((n-3))_4R_4(n)=\{\underline{\frac{3}{4}},\frac{2}{4},\frac{1}{4},1\}$$

3.2 离散傅里叶变换的定义及性质

例：求序列 $x(n)$ 的 10点 DFT：

$$x(n)=\cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right)\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

基础知识：

$$(N\text{点}1)\ \boxed{1}\ \xrightarrow{\text{DFT}}\ \boxed{N\delta((k))_N R_N(k)}$$

(求$R_N(n)$的N点DFT)

$$\boxed{e^{j\frac{2\pi}{N}nl}}\ \xrightarrow{\text{DFT}}\ \boxed{N\delta((k-l))_N R_N(k)}$$

$$x(n)=\cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right)\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

$$=\left(\frac{e^{j\frac{3\pi}{5}n}+e^{-j\frac{3\pi}{5}n}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^{j\frac{4\pi}{5}n}-e^{-j\frac{4\pi}{5}n}}{2j}\right)$$

$$=\frac{e^{j\frac{2\pi}{10}\cdot 7\cdot n}+e^{j\frac{2\pi}{10}\cdot 1\cdot n}-e^{-j\frac{2\pi}{10}\cdot 1\cdot n}-e^{-j\frac{2\pi}{10}\cdot 7\cdot n}}{4j}$$

$$x(n)=\frac{1}{4j}\left(e^{j\frac{2\pi}{10}\cdot 7\cdot n}+e^{j\frac{2\pi}{10}\cdot 1\cdot n}-e^{-j\frac{2\pi}{10}\cdot 1\cdot n}-e^{-j\frac{2\pi}{10}\cdot 7\cdot n}\right)$$

$$X(k)=\frac{10}{4j}\left[\delta(k-7)+\delta(k-1)-\delta(k+1-10)-\delta(k+7-10)\right]$$

$$\boxed{X(k)=\frac{5}{2j}\left[\delta(k-1)-\delta(k-3)+\delta(k-7)-\delta(k-9)\right]}$$

$k\in[0,9]$

第三章　离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.2 离散傅里叶变换的定义及性质

离散傅里叶变换的性质(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁