第三章 离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

第三章　离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.2 离散傅里叶变换的定义及性质

离散傅里叶变换的定义

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

一、离散傅里叶级数(DFS)

周期离散

离散周期

$$\tilde{X}(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k\in[-\infty,\infty]$$

$$\tilde{x}(n)=\mathrm{IDFS}[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad n\in[-\infty,\infty]$$

令 $\boxed{W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$

周期离散

$$\tilde{X}(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn} \qquad k\in[-\infty,\infty]$$

离散周期

$$\tilde{x}(n)=\mathrm{IDFS}[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn} \qquad n\in[-\infty,\infty]$$

二、离散傅里叶变换(DFT)的定义

周期序列只有有限个序列值有意义，我们可以把 N点有限长序列看作是周期为N的周期序列的一个周期，就可以利用离散傅立叶级数DFS来计算了。

➢ 离散傅立叶变换DFT的定义 **Discrete Forurier Transform**

设$x(n)$为有限长序列，点数为N，在$n=0\sim N-1$处有值。

$\tilde{x}(n)$ 为$x(n)$的以N为周期的周期延拓序列。 *periodic extension*

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其它}\, n\end{cases}$$

$$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)$$

二、离散傅里叶变换(DFT)的定义

$\tilde{x}(n)$ 与 $x(n)$ 的关系：

① $\tilde{x}(n)$ 的第一个周期：$n\in[0, N\text{-}1]$定义为“<u>主值区间</u>”。

② $x(n)$为$\tilde{x}(n)$的“<u>主值序列</u>”。

③ 对不同的r 值，$x(n+rN)$之间彼此不重叠，故可写为：

$$\boxed{\tilde{x}(n) = x(n模N) = x((n))_N}$$

其中，$(n模N)$或$((n))_N$数学上表示“<u>n对N取余数或取模值</u>”

例：$\tilde{x}(n)$ 的周期为N=9，求 $\tilde{x}(25)$ 和 $\tilde{x}(-5)$ 所对应的$x(n)$。

$$\tilde{x}(25) = x(25模9) = x((25))_9 = x(7)$$

$$\tilde{x}(-5) = x(-5模9) = x((-5))_9 = x(4)$$

二、离散傅里叶变换(DFT)的定义

同理，对频域的周期序列 $\tilde{X}(k)$ 也可看成是有限长序列 $X(k)$ 的周期延拓，$X(k)$ 为 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列。

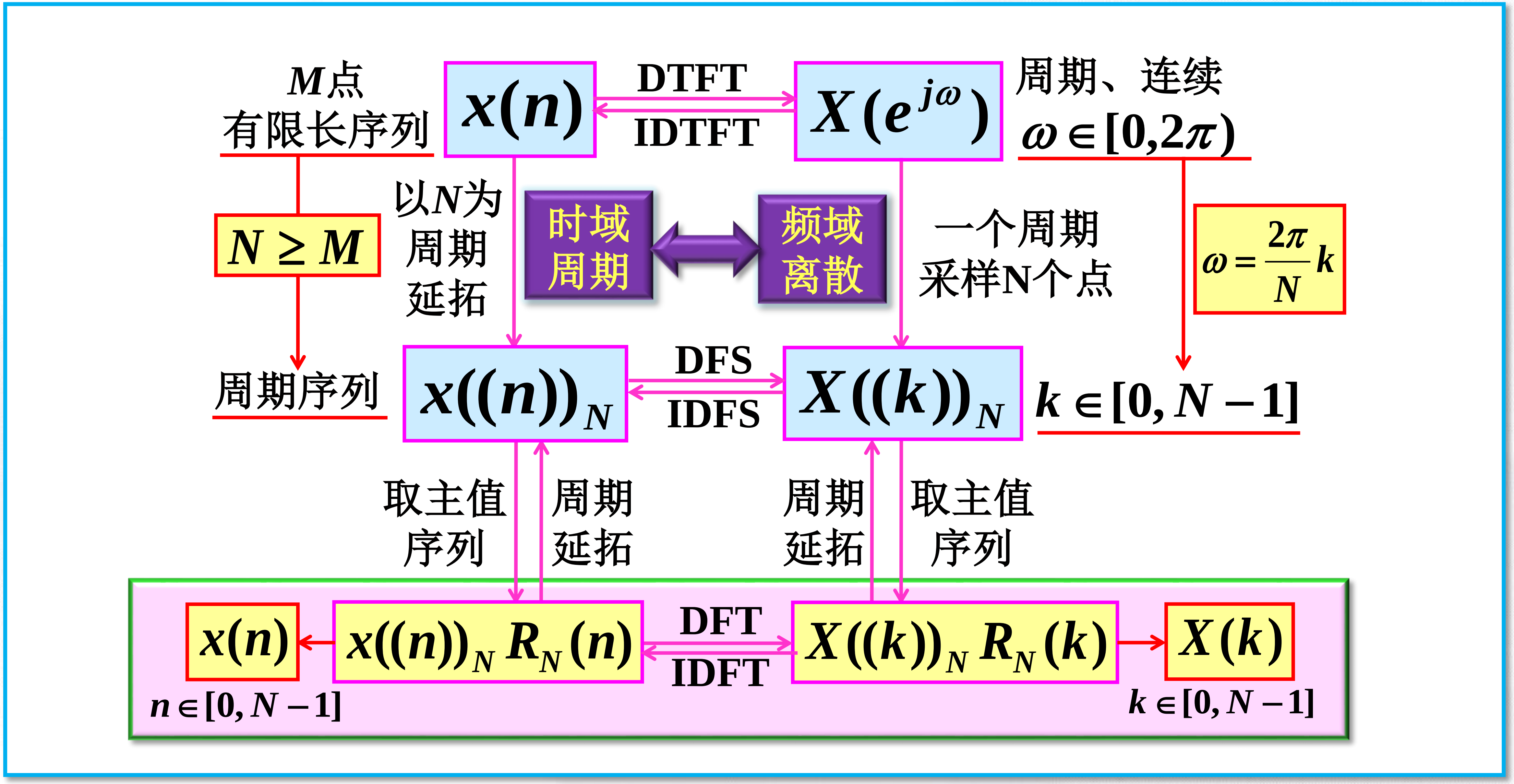
$$\tilde{X}(k) = X((k))_N \qquad X(k) = \tilde{X}(k)\cdot R_N(k)$$

从DFS和IDFS的表达式可知，求和只是在n=0～N-1的主值区间上进行，所以它完全适用于$x(n)$和$X(k)$这两对主值序列。由此我们得到**有限长序列的离散傅立叶变换(DFT)的定义**：

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk} \qquad 0 \le n \le N-1$$

三、离散傅里叶变换(DFT)隐含的周期性



四、离散时间傅立叶变换与离散傅立叶变换的关系

DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

频域离散

$$\omega = \frac{2\pi}{N}k$$

DFS

$$\tilde{X}(k) = \mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

取主值序列

DFT

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

$$0 \le k \le N-1$$

注意：

① 回忆DFS，我们发现他们的形式基本一致，只是DFT仅考虑主值序列(有限长)，而DFS考虑的是一个周期序列。因此，DFT的定义形式中一定会有对主值区间范围的说明。

② $x(n)$与$X(k)$ 均有N点独立值，为N点序列，信息量相当。

③ 凡是说到DFT，有限长序列均是作为周期序列的一个周期来表示的，它隐含了周期性。DFT的真正幕后英雄是DFS。

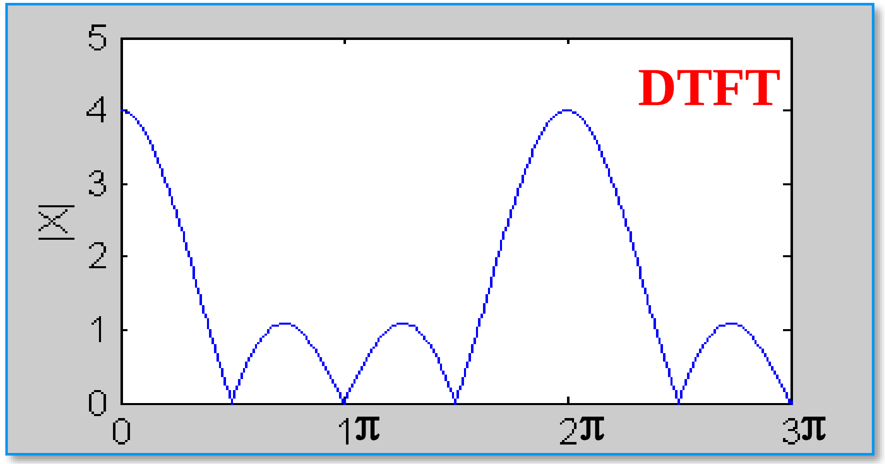
例：已知序列$x(n)=R_4(n)$，求$x(n)$的DTFT和8点和16点DFT。

(1) 求$x(n)$的DTFT。

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j2\omega}\left(e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}\left(e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega}\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$



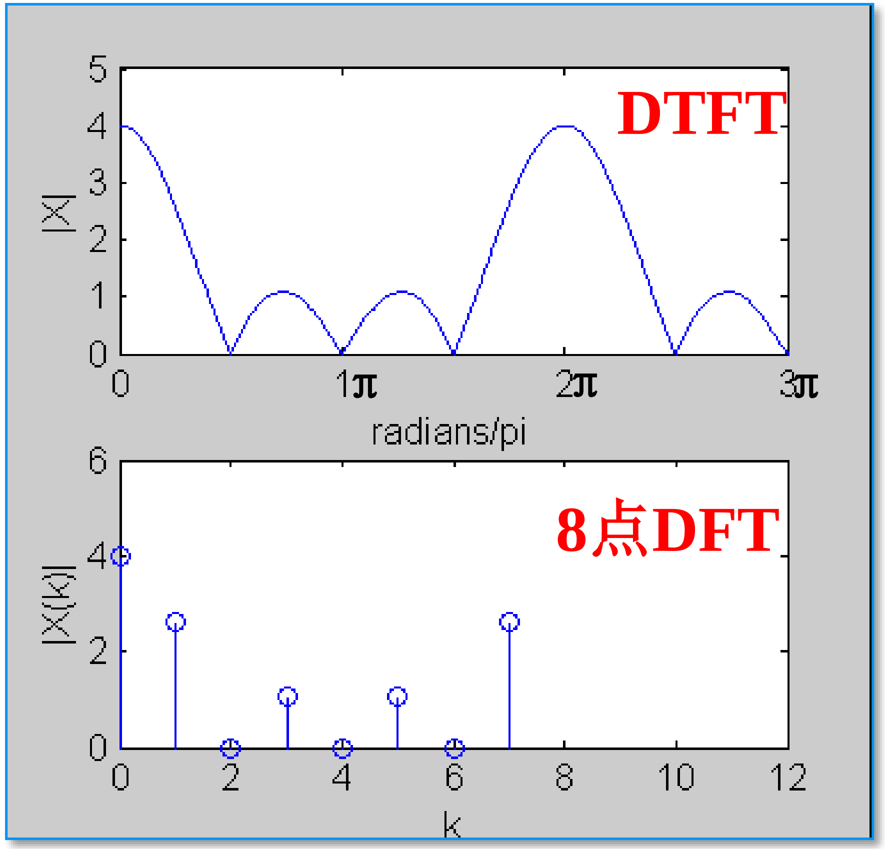
(2) 求$x(n)$的**8点DFT**。

$$X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\Bigg|_{\omega=\frac{\pi}{4}k}$$

$$=e^{-j\frac{3\pi}{8}k}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}$$

$$\boxed{0\le k\le 7}$$

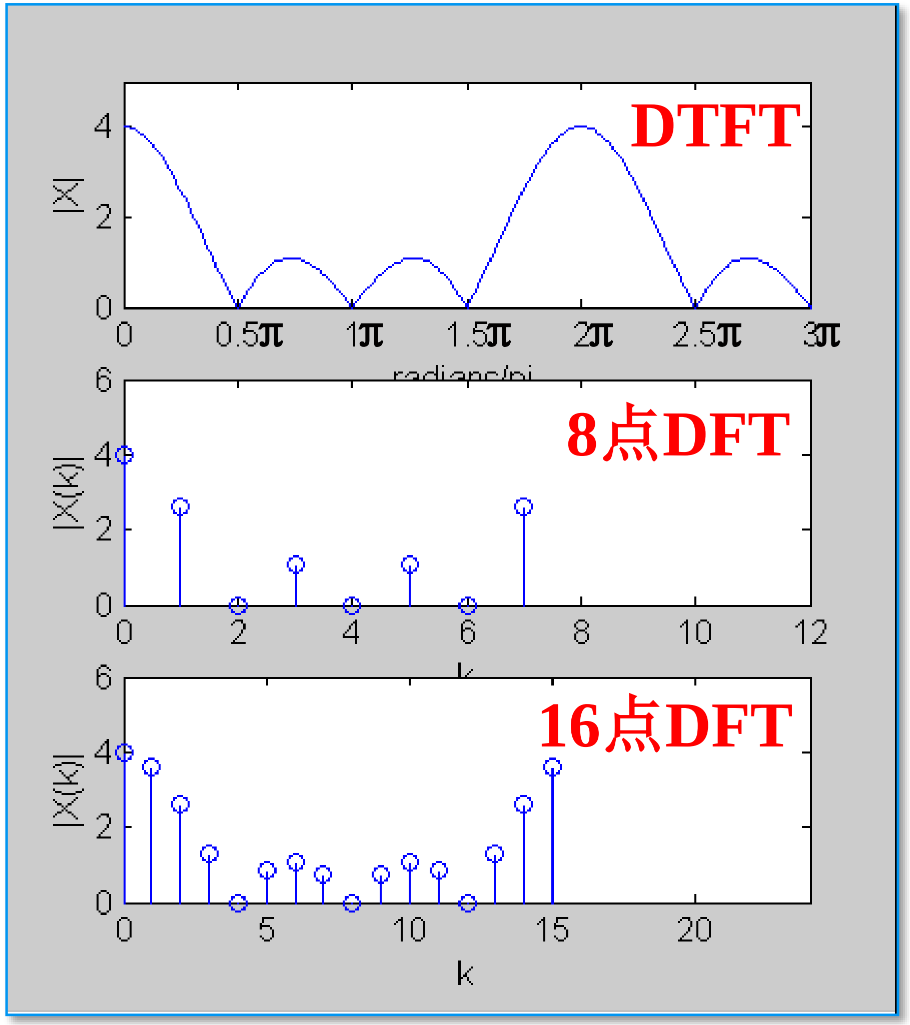


(3) 求$x(n)$的**16点DFT**。

$$X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{16}k}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left.\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right|_{\omega=\frac{\pi}{8}k}$$

$$=e^{-j\frac{3\pi}{16}k}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{16}k\right)}\qquad \boxed{0\le k\le 15}$$



第三章　离散傅里叶变换

Discrete Forurier Transform

3.2 离散傅里叶变换的定义及性质

离散傅里叶变换的定义

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁