

## 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The  $z$  Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

2.1

$z$  变换的基本概念

2.2

离散时间信号傅里叶变换

2.3

系统函数及其与系统性质的关系

2.4

系统频率响应的意义

2.5

几何法画频率响应

2.6

特殊滤波器的设计



## 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The  $z$  Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

### 2.4 系统频率响应的意义(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

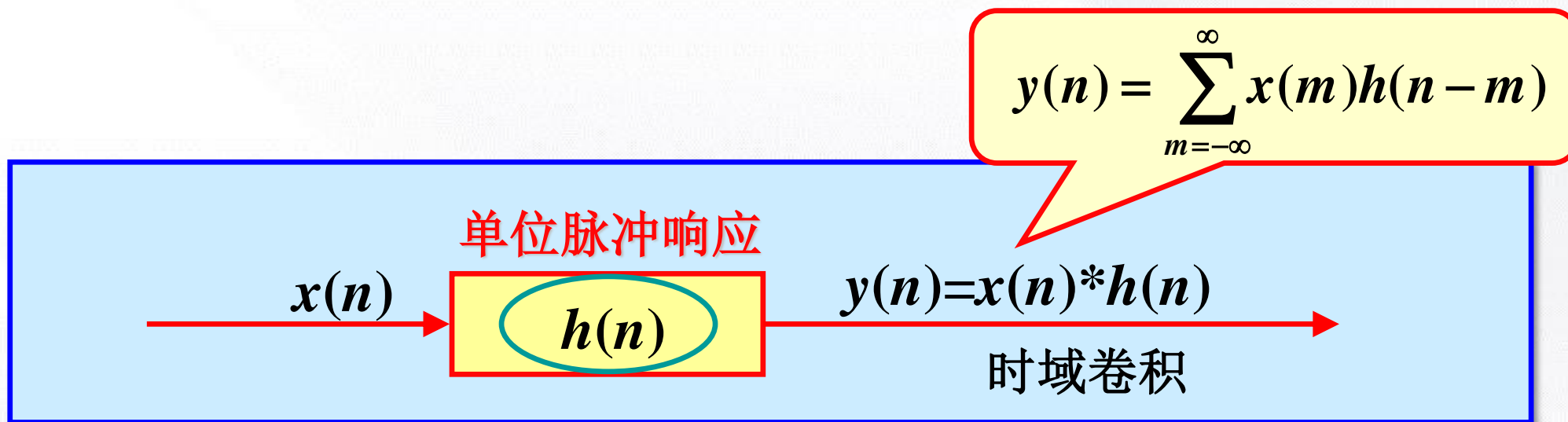




### 系统频率响应的意义

- **系统频率响应的基本概念**
  - **系统的幅频响应**
  - **系统的相频响应**
- **固定频率输入信号下的系统输出**

## 2.4 系统频率响应的意义



- $x(n)$ 中的信号含有不同频率成分，经过系统后，输出中这些频率成分发生了什么变化？
- 这些频率成分还在吗？
- 这些频率成分会在同一时刻输出吗？



# 一、系统频率响应的基本概念

## Frequency Response



華東理工大學

定义：LSI系统的频率响应是单位脉冲响应 $h(n)$ 的傅立叶变换

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

系统幅频响应：  
决定频率成分的去留

系统相频响应：  
决定频率成分的移位

幅度特性

*Magnitude specifies*

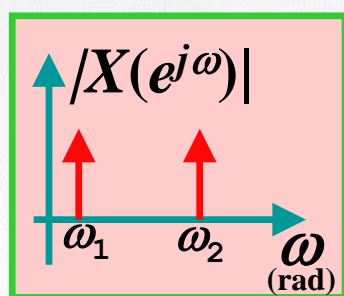
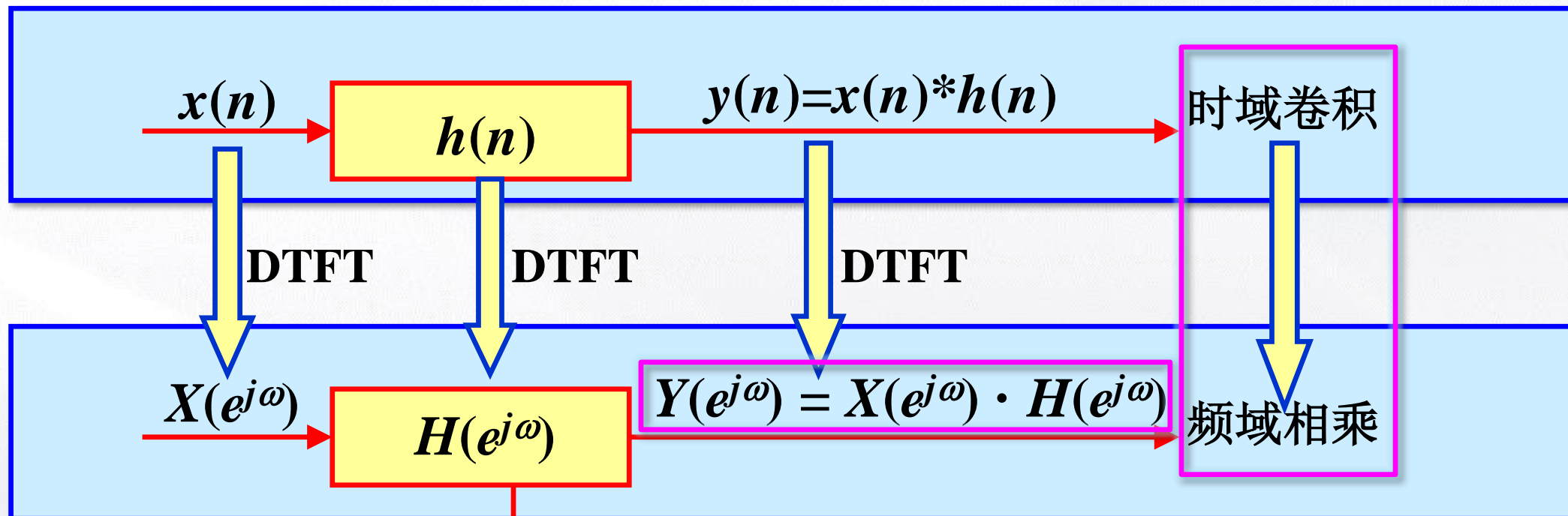
相位特性

*Phase specifies*

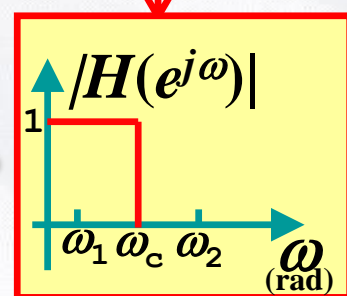




# 一、系统频率响应的基本概念

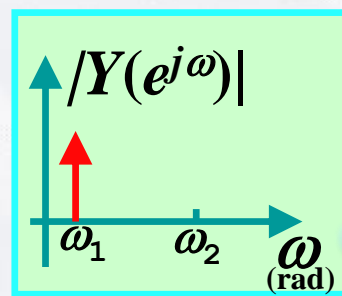


输入频谱



系统幅频响应

=



输出频谱



已知:

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$\underline{y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)}$$

时域卷积

证明:  $\underline{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})}$

$$\begin{aligned}
 Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) * h(n)]e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m)e^{-j\omega n} \\
 &\quad \text{令 } k = n - m \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega(m+k)} = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m}}_{X(e^{j\omega})} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}}_{H(e^{j\omega})} \\
 &\rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

频域相乘



# 一、系统频率响应的基本概念



$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

## 1、系统的幅频响应（幅度响应，增益）—— $|H(e^{j\omega})|$

如果幅度响应在某些频率上很小的话，那么输出中输入的这些频率分量就受到抑制。

实际应用中，我们应该根据具体问题，有选择地抑制某些频率分量，而让某些频率分量通过。

这种频率的选择（是通过还是抑制），是依靠幅频响应的设计来完成的。





# 一、系统频率响应的基本概念



$|H(e^{j\omega})|$  的对数幅度 —  $20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$  dB

$$\text{增益}(dB) = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$$

$$20m(dB) \longleftrightarrow |H(e^{j\omega})| = 10^m$$

增益20dB

增益40dB

增益60dB

0dB	$ H(e^{j\omega})  = 1$
20dB	$ H(e^{j\omega})  = 10$
40dB	$ H(e^{j\omega})  = 100$
60dB	$ H(e^{j\omega})  = 1000$



# 一、系统频率响应的基本概念



$$\text{衰減}(dB) = -20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| = -\text{增益}(dB)$$

$$-20m(dB) \longleftrightarrow |H(e^{j\omega})| = 10^{-m}$$

衰減20dB

→ -20dB

衰減40dB

→ -40dB

衰減60dB

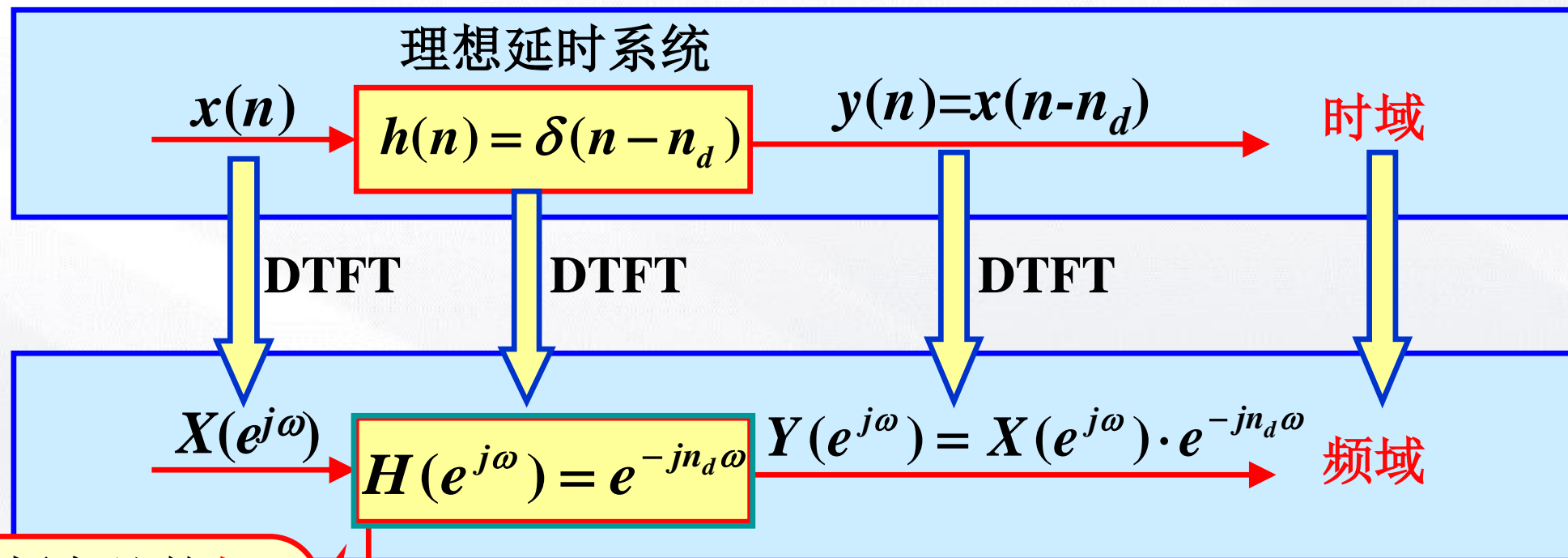
→ -60dB

0dB	$ H(e^{j\omega})  = 1$
$ H(e^{j\omega})  = 0.1$	
$ H(e^{j\omega})  = 0.01$	
$ H(e^{j\omega})  = 0.001$	

# 一、系统频率响应的基本概念



## 2、系统的相频响应（相位响应）—— $\theta(\omega)$



某频率处的相位响应实际上对应着时域上该处频率信号的移位情况。

$$|H(e^{j\omega})| = 1$$

$$\theta(\omega) = -n_d\omega$$

$$y(n) = x(n - n_d)$$

群延迟:

$$grd(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = n_d$$



## 二、固定频率输入信号下的系统输出



1、若输入  $x(n) = e^{j\omega_0 n}$  ( $-\infty \leq n \leq \infty$ ), 求输出  $y(n) = x(n) * h(n)$

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot e^{j\omega_0(n-m)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot e^{-j\omega_0 m} \longrightarrow H(e^{j\omega_0})$$

$$\therefore y(n) = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| e^{j(\omega_0 n + \theta(\omega_0))}$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$





## 二、固定频率输入信号下的系统输出



2、若输入  $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$

线性相位

$$\theta(\omega_0) = -\tau\omega_0$$

则:  $y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos[\omega_0 n + \varphi + \theta(\omega_0)] \Rightarrow \cos[\omega_0(n - \tau) + \varphi]$

其中,  $H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| e^{j\theta(\omega_0)}$

说明: 若系统频率响应  $H(e^{j\omega})$  存在且连续, 则有:

- 当系统的输入为正弦序列, 则输出为同频的正弦序列。
- 其幅度受  $H(e^{j\omega})$  的幅度  $|H(e^{j\omega})|$  加权;
- 其相位为输入相位与系统相位响应之和。





### 系统频率响应的意义

- 系统**频率响应**的基本概念
  - 系统的**幅频响应**
  - 系统的**相频响应**
- **固定频率输入**信号下的**系统输出**