# 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

# 第二章 $z$ 变换与LSI系统频域分析

*The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System*

## 2.1 $z$ 变换的基本概念

### $z$ 变换及其收敛域

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

## $z$ 变换及其收敛域

- $z$变换的**由来**
- $s$平面与$z$平面的**映射关系**
- $z$变换**定义及其收敛域**

# 一、z 变换的由来

华东理工大学

z变换是离散系统与信号分析的重要工具，其地位犹如拉普拉斯变换在连续信号与系统中的地位。

z变换的定义可以从理想信号(离散信号)的拉普拉斯变换引出，也可以独立地对离散信号(序列)给出其定义。

# 一、z 变换的由来



$h(t) \Rightarrow h(n) \Rightarrow H(s) \Rightarrow H(z)$

$$H(s)=L[h(t)] \Rightarrow \hat{H}(s)=L[\hat{h}(t)]\ ,\quad H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

$$\hat{H}(s)=L[\hat{h}(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{\hat{h}(t)}e^{-st}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-nT)}e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

令 $z=e^{sT}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{h(nT)}e^{-snT}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{h(n)}e^{sT(-n)}=H(z)$$

# 二、s平面与z平面的映射关系

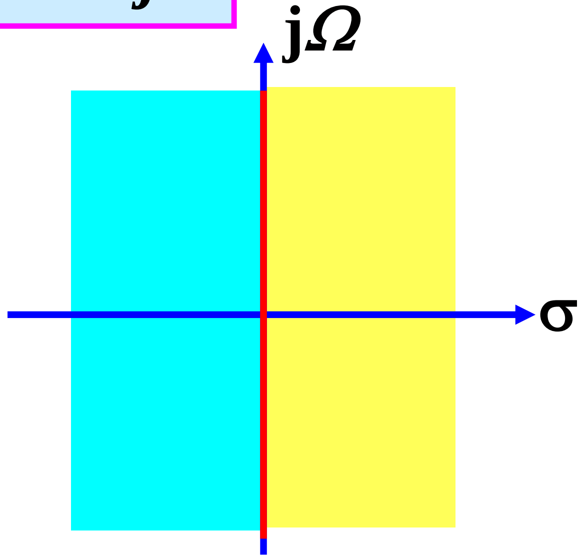
$z = e^{sT}$

$re^{j\omega} = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$

$r = e^{\sigma T}$

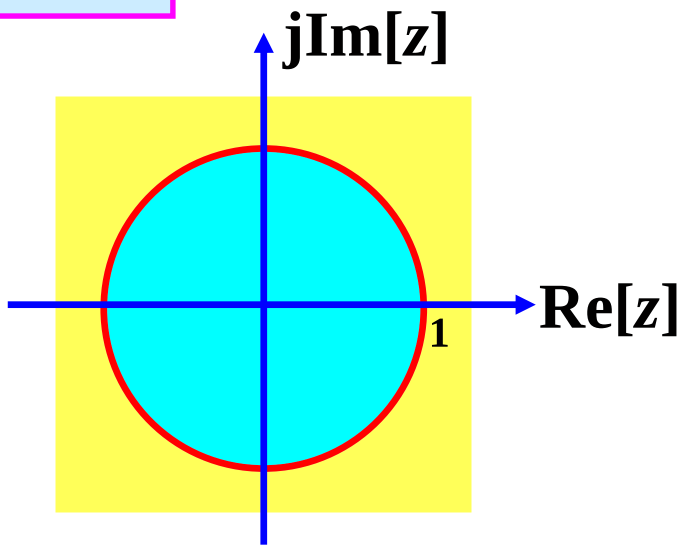
$\omega = \Omega T$

$s = \sigma + j\Omega$




S平面

$z = re^{j\omega}$



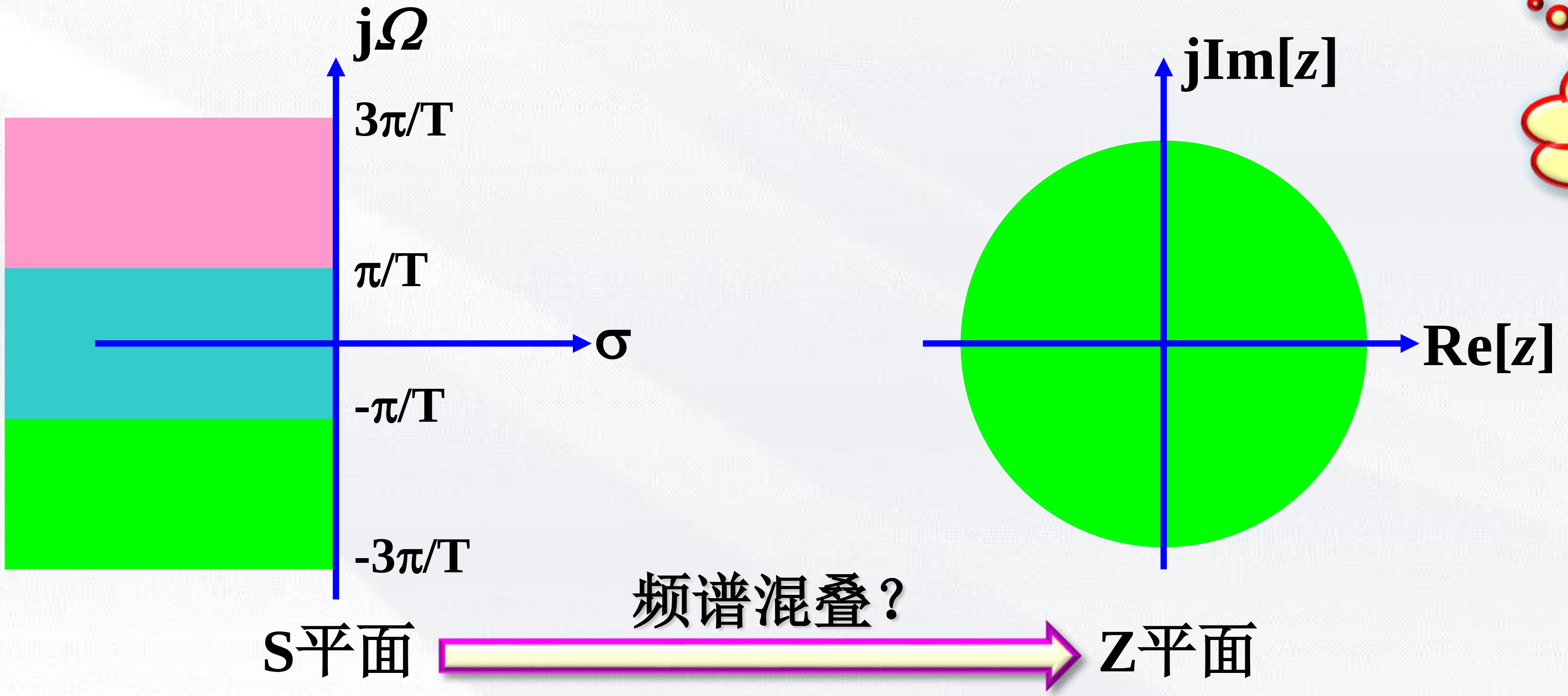

Z平面

## 二、s平面与z平面的映射关系

时域离散 → 频域周期

$z = e^{sT}$ → $re^{j\omega} = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$ → $r = e^{\sigma T}$, $\omega = \Omega T$

线性关系



## 三、$z$变换定义及其收敛域



➢ LSI系统单位脉冲响应的$z$变换即是系统函数$H(z)$

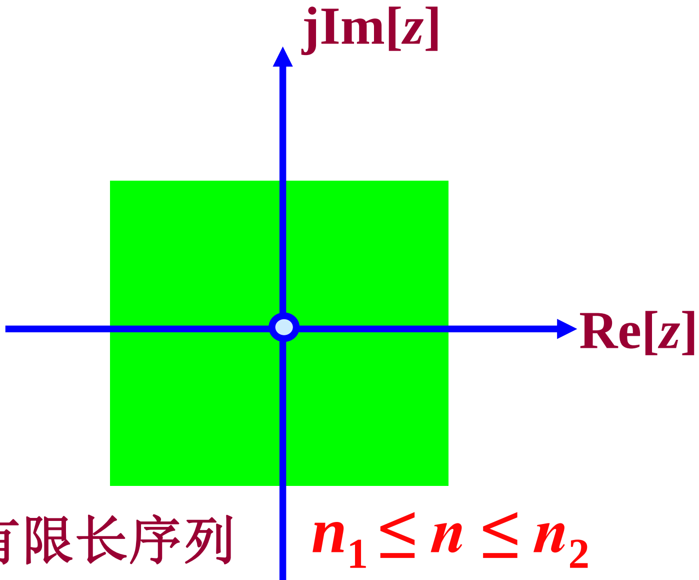
$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

➢ LSI系统的系统函数$H(z)$的收敛域

收敛条件：$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|=M<\infty$$

要满足收敛条件，$|z|$的值必须在一定范围内，这个范围就是**收敛域**。*Region of Convergence* (ROC)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right| = M < \infty$$



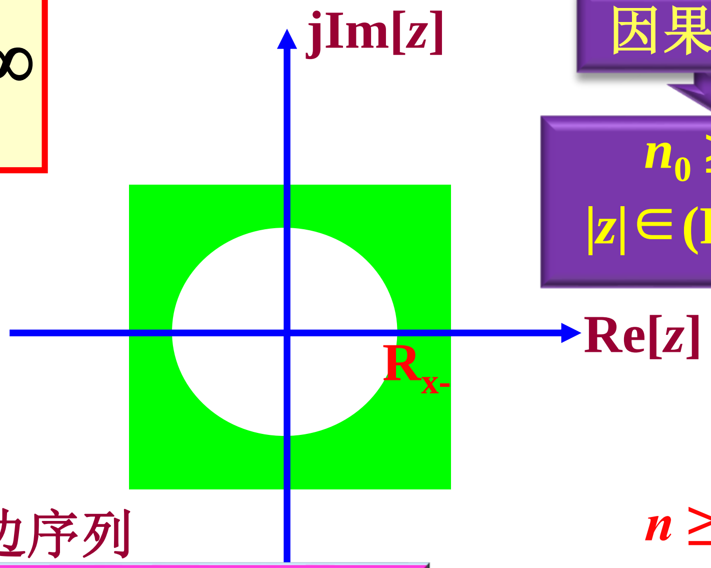

$n_1 \geq 0$
$|z| \in (0,\infty]$

$n_2 \leq 0$
$|z| \in [0,\infty)$

有限长序列 $n_1 \leq n \leq n_2$

**Finite-duration sequence**

$n_1 \leq 0$ , $n_2 \geq 0$
$|z| \in (0,\infty)$
有限$z$平面



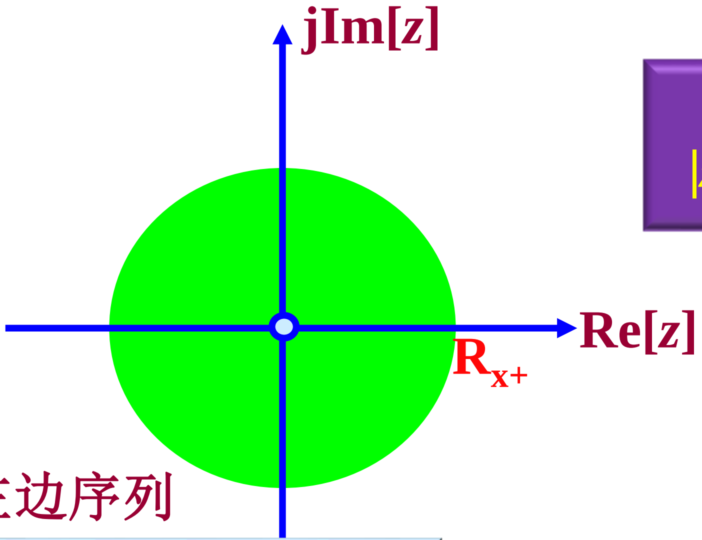

因果序列

$n_0 \geq 0$
$|z| \in (R_{x-}, \infty]$

右边序列

**Right-sided sequence**

$n \geq n_0$
$|z| \in (R_{x-},\infty)$

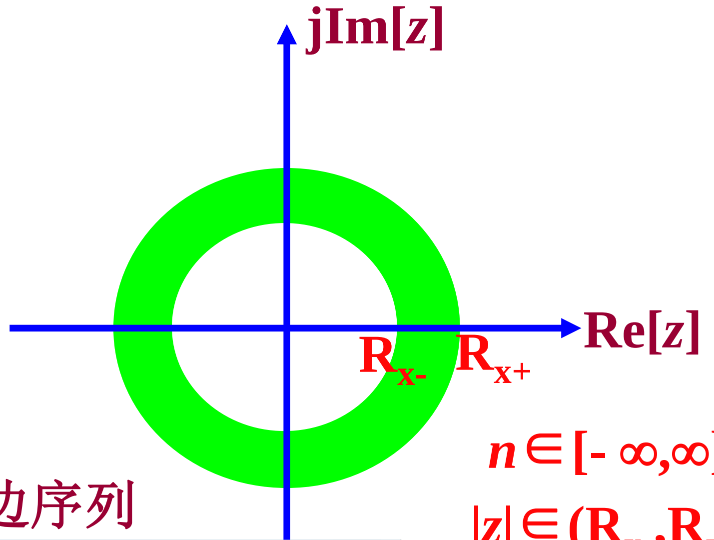



$n_0 \leq 0$
$|z| \in [0, R_{x+})$

左边序列

**Left-sided sequence**

$n \leq n_0$
$|z| \in (0,R_{x+})$




$n \in [-\infty,\infty]$
$|z| \in (R_{x-},R_{x+})$

双边序列

**Two-sided sequence**

例：$z$变换及收敛域的求法

(1) 序列 $x(n)=\delta(n)$ 的$z$变换及收敛域。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

仅当$n=0$时，$\delta(n)=1$
而此时：$z^{-n}=z^{0}=1$

$X(z)$为常数1，说明收敛域是整个$z$的闭平面：$|z|\in[0,\infty]$

全$z$平面

(2) 序列 $x(n)=a^{n}u(n)$ 的$z$变换及收敛域。

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^{n}=\frac{(az^{-1})^{0}[1-(az^{-1})^{\infty}]}{1-az^{-1}}=\frac{[1-(az^{-1})^{\infty}]}{1-az^{-1}}$$

当$|az^{-1}|<1$，即：$|z|>|a|$时，$(az^{-1})^{\infty}=0$，此时$X(z)$为：$\boxed{X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}}$

说明：

① 序列 $x(n)=a^n u(n)$ 是一个右边序列，而且是因果序列，它的收敛域应该是 $|z|>R_{x-}$ 的形式，从本题的结果中也得到了验证：$|z|>|a|$。

② 我们再来分析$X(z)$：

$$\boxed{X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}}$$

可以从$X(z)$的解析式中看出，$z=a$处为极点。由于在收敛域内一定没有极点，所以对于一般的右边序列而言，其$z$变换的收敛域一定在模最大的有限极点所在的圆之外(若为因果序列，收敛域还包括∞点)。

(3) 序列 $x(n)=-a^nu(-n-1)$ 的z变换及收敛域。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}-a^nz^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}-a^{-n}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}-(a^{-1}z)^n=-\frac{(a^{-1}z)[1-(a^{-1}z)^{\infty}]}{1-a^{-1}z}$$

当$|a^{-1}z|<1$，即：$|z|<|a|$时，$(a^{-1}z)^{\infty}=0$，此时$X(z)$为：

$$\boxed{X(z)=-\frac{(a^{-1}z)}{1-a^{-1}z}=-\frac{z}{a-z}=\frac{z}{z-a}}$$

说明：序列 $x(n)=-a^nu(-n-1)$ 是一个左边序列，它的收敛域的形式 $|z|<|a|$验证了这一点。

分析例(2)和例(3)：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 右边序列 | $x(n)=a^n u(n)$ | $X(z)=\dfrac{z}{z-a}$ | $\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$ |
| 左边序列 | $x(n)=-a^n u(-n-1)$ | $X(z)=\dfrac{z}{z-a}$ | $\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$ |

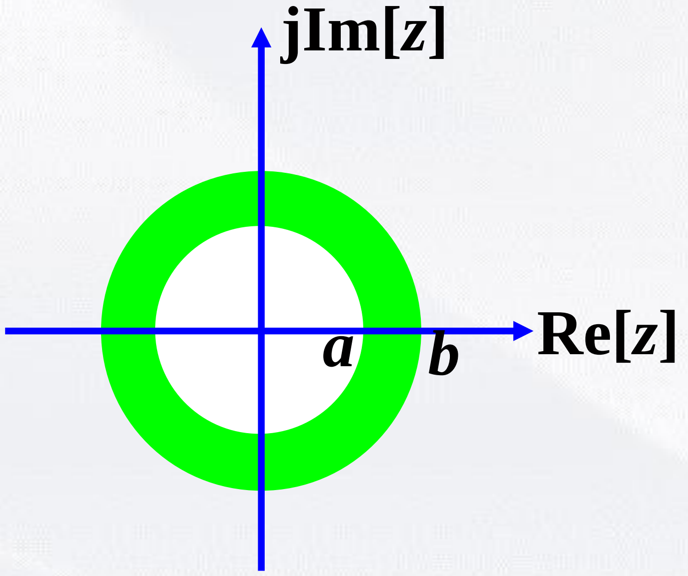
两个$X(z)$是一样的，而这两个$X(z)$所对应的$x(n)$是完全不同的。

仅由$X(z)$的表达式不能推断$x(n)$，还必须知道$X(z)$收敛域，才可以求出$x(n)$。

(4) 序列 $x(n)=\begin{cases} a^n & n\geq 0 \\ -b^n & n\leq -1 \end{cases}$ 的z变换及收敛域。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n}$$

$$=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}$$



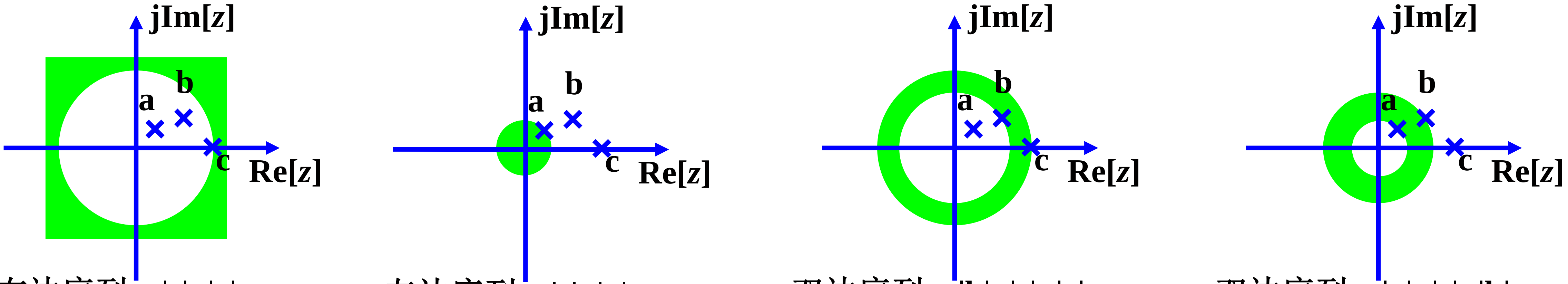

上式成立的条件是：$|a|<|z|<|b|$(收敛域)。

通常：右边序列的收敛域在模最大的极点所在的圆之外。

左边序列的收敛域在模最小的极点所在的圆之内。

(5) 请说出$X(z)$可能的收敛域及其所对应的序列的特性：

$$X(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\quad ,\quad 其中|a|<|b|<|c|$$




右边序列：$|z|>|c|$　　左边序列：$|z|<|a|$　　双边序列：$|b|<|z|<|c|$　　双边序列：$|a|<|z|<|b|$

## $z$ 变换及其收敛域

- $z$变换的由来
- $s$平面与$z$平面的映射关系
- $z$变换定义及其收敛域