第二章 *z* 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

第二章 z 变换与LSI系统频域分析

The z Transform and Frequency domain analysis of LSI System

2.2 离散时间信号傅里叶变换

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

离散时间信号傅里叶变换

- 离散时间信号傅里叶变换的基本概念
- DTFT正变换和反变换的由来
- DTFT的共轭对称性质

一、离散时间信号傅里叶变换的基本概念

一个离散时间(非周期)信号及其频谱的关系，可以用离散时间信号(序列)的傅立叶变换来表示。

正变换：$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-j\omega n}$

（正变换可由z变换得来，它是z变换在单位圆上的特例）

反变换：

$$\mathrm{DTFT}^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

一、离散时间信号傅里叶变换的基本概念

说明： (1) 正变换的收敛条件为：

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)\cdot e^{-j\omega n}|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty}$$

若序列$x(n)$绝对可和，则它的傅立叶变换存在且连续。

(2) $X(e^{j\omega})$的特性：

由于时域上$x(n)$的离散，使得频域上的$X(e^{j\omega})$出现周期的特性，周期为2π。

$$\boxed{X(e^{j\omega})=X(e^{j(\omega+2\pi)})}$$

二、DTFT正变换和反变换的由来

(1) 正变换：可由z变换定义得到。

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot z^{-n}\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

(2) 反变换：若序列的z变换在单位圆上收敛时：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}e^{-j\omega}\mathrm{d}(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}e^{-j\omega}e^{j\omega}\,j\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

三、DTFT的共轭对称性质

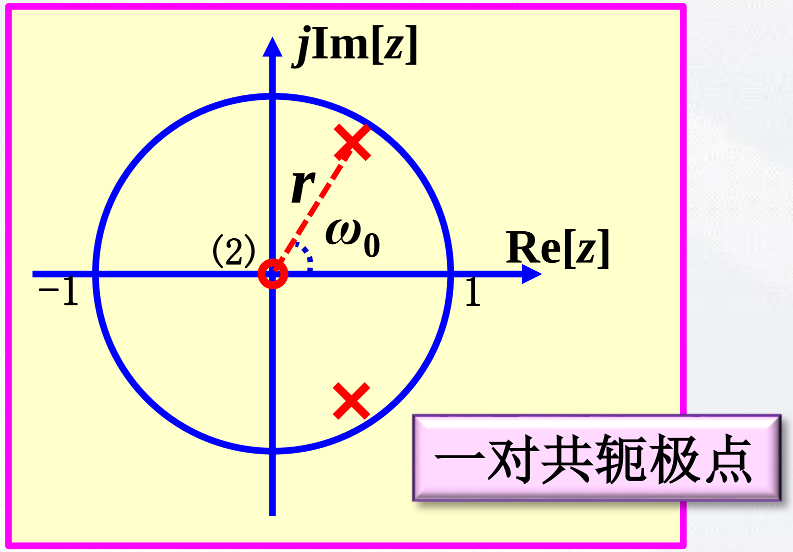
➢ 什么是共轭？

两头牛背上的架子称为轭，轭使两头牛同步行走。<u>共轭</u>即为<u>按一定的规律相配的一对</u>。

➢ 数学意义上的共轭复数

conjugate complex number

两个<u>实部相等，虚部互为相反数</u>的复数互为<u>共轭复数</u>。



$$H(z)=A\frac{z^2}{(z-re^{j\omega_0})(z-re^{-j\omega_0})}$$

$$\cos(\omega_0)=(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0})/2$$

$$H(z)=A\frac{z^2}{z^2-2r\cos(\omega_0)z+r^2}$$

实系数

1、共轭对称序列与共轭反对称序列的定义

共轭对称序列

$x_e(n)$

even

Conjugate-symmetric sequence

$$x_e(n)=x_e^*(-n)$$

$$x_e(n)=x_{er}(n)+jx_{ei}(n)$$
$$x_e^*(-n)=x_{er}(-n)-jx_{ei}(-n)$$

思考： $x(n)=e^{j\omega n}$ 的共轭对称性?

共轭对称

实部偶函数

虚部奇函数

$$x_{er}(n)=x_{er}(-n)$$

$$x_{ei}(n)=-x_{ei}(-n)$$

共轭反对称序列

$x_o(n)$

odd

Conjugate-antisymmetric sequence

$$x_o(n)=-x_o^*(-n)$$

$$x_o(n)=x_{or}(n)+jx_{oi}(n)$$
$$x_o^*(-n)=x_{or}(-n)-jx_{oi}(-n)$$

实部奇函数

虚部偶函数

$$x_{or}(n)=-x_{or}(-n)$$

$$x_{oi}(n)=x_{oi}(-n)$$

2、用共轭对称序列和共轭反对称序列表示一般序列

一般序列可用共轭对称序列与共轭反对称序列之和表示。

➢ 如何由 $x(n)$ 求 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ ？

$$x(n) = \underline{x_e(n) + x_o(n)}$$

$$x^*(-n) = x_e^*(-n) + x_o^*(-n) = \underline{x_e(n) - x_o(n)}$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[\underline{x(n) + x^*(-n)}], \quad x_o(n) = \frac{1}{2}[\underline{x(n) - x^*(-n)}]$$

3、关于频域函数$X(e^{j\omega})$的共轭对称性质描述

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \longrightarrow$ 共轭对称

$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}) \longrightarrow$ 共轭反对称

$$X_e(e^{j\omega}) = ½[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = ½[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

4、时域与频域对应的共轭对称性质

① 序列实部的傅立叶变换等于序列傅立叶变换的共轭对称分量

$$\mathbf{DTFT[Re}[x(n)]] \Rightarrow X_e(e^{j\omega})$$

② 序列虚部的傅立叶变换等于序列傅立叶变换的共轭反对称分量

$$\mathbf{DTFT}[j\mathbf{Im}[x(n)]] \Rightarrow X_o(e^{j\omega})$$

4、时域与频域对应的共轭对称性质

证明①：设 $x(n) = x_r(n) + j\,x_i(n)$（其中，$x_r(n)$和$x_i(n)$为实序列）

$$X_?(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x_r(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

$$X_?^*(e^{-j\omega}) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n)\cdot e^{j\omega n}\right]^*$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r^*(n)\cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

②的证明类似①

$\because X_?(e^{j\omega}) = X_?^*(e^{-j\omega})$

$\therefore$ 此处?是e，即：$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$

4、时域与频域对应的共轭对称性质

③ 序列的共轭对称分量和共轭反对称分量的DTFT分别等于序列傅立叶变换的实部和虚部。

$$\mathrm{DTFT}[x_e(n)] \Rightarrow \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$$

$$\mathrm{DTFT}[x_o(n)] \Rightarrow j\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

证明：

$$\begin{aligned}\mathrm{DTFT}[x_e(n)] &= \mathrm{DTFT}[½[x(n)+x^*(-n)]] \\ &= ½[X(e^{j\omega})+X^*(e^{j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{DTFT}[x_o(n)] &= \mathrm{DTFT}[½[x(n)-x^*(-n)]] \\ &= ½[X(e^{j\omega})-X^*(e^{j\omega})] = j\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]\end{aligned}$$

4、时域与频域对应的共轭对称性质

④ 特殊情况：

当$x(n)$为实序列时，$X(e^{j\omega})$应该只剩下共轭对称分量。

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]$$

$$\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] = -\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})]$$

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})]$$

三、DTFT的共轭对称性质

例：设$h(n)$为实因果序列，且$H_R(e^{j\omega})=1+\cos\omega$，求 $h(n)$ 和$H(e^{j\omega})$。

$$\mathrm{DTFT}[h_e(n)] \Rightarrow \mathrm{Re}[H(e^{j\omega})]$$

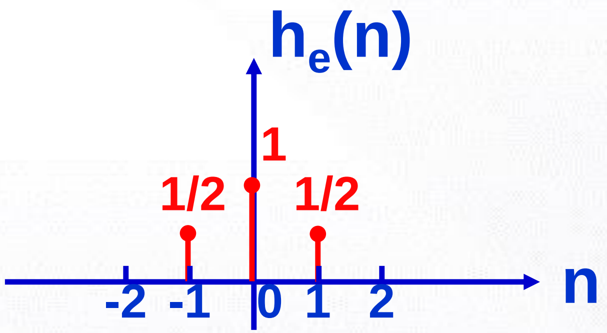
$$\mathrm{DTFT}[h_o(n)] \Rightarrow j\mathrm{Im}[H(e^{j\omega})]$$

解：

$$H_R(e^{j\omega}) = 1+\cos\omega = 1+\frac{1}{2}\left(e^{j\omega}+e^{-j\omega}\right)$$

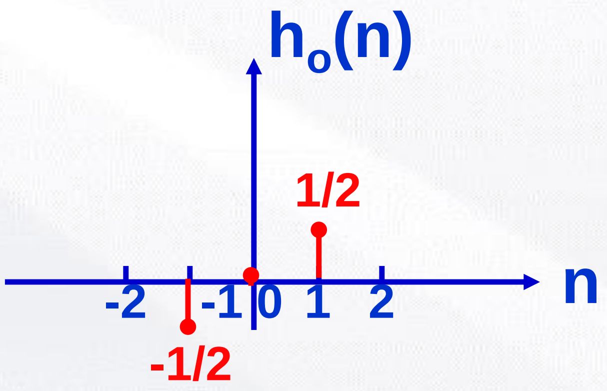
$$h_e(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n+1) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

三、DTFT的共轭对称性质



(1) 因为$h(n)$为实因果序列，所以有当$n<0$时，$h(n)=0$。

$$h_o(-1) = -1/2$$

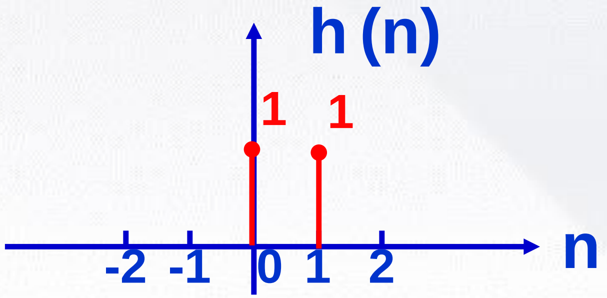


(2) 因为$h(n)$为实序列，所以$h_o(n)$为奇函数。

$$h_o(0)=0$$

$$h_o(1)=-h_o(-1)=1/2$$

(3) $h(n)=h_e(n)+ h_o(n)$



$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega}$$

离散时间信号傅里叶变换

- 离散时间信号傅里叶变换的基本概念
- DTFT正变换和反变换的由来
- DTFT的共轭对称性质