第一章 离散时间信号与系统

Discrete-time signals and systems

1.2 离散时间系统

LSI系统的时域求解—线性卷积方法(1)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

LSI系统的时域求解——线性卷积方法

- 线性卷积的基本概念
- 线性卷积的深入理解
- 线性卷积的计算方法与步骤

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

一、线性卷积的基本概念

➢ **LSI系统：**

同时具有**线性和移不变性**的离散时间系统称为**LSI系统**。

LSI (Linear Shift Invariant) System

➢ **单位冲激(脉冲)响应$h(n)$：** *Impulse Response*

当输入为$\delta(n)$时，系统的输出用$h(n)$表示。 $h(n)=T\left[\delta(n)\right]$

➢ **线性卷积：** 卷积(和)：*Convolution (sum)*

当一个系统是**LSI系统**时，它的输出$y(n)$可以用输入$x(n)$与单位脉冲响应$h(n)$的线性卷积(卷积和)来表示。

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

当一个系统是**LSI系统**时，它的输出$y(n)$可以用输入$x(n)$与单位脉冲响应$h(n)$的**线性卷积**来表示。

$x(n)$ → 单位脉冲响应$h(n)$ → $y(n)$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

线性卷积

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

◆ 证明——用线性卷积求LSI系统输出

任一序列x(n)的表示方法: $x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$

$$\boxed{y(n)}=T[x(n)]=T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right]$$

利用线性的特性 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]$

$h(n)=\mathrm{T}[\delta(n)]$

利用移不变的特性 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

$$\boxed{=x(n)*h(n)}$$

二、线性卷积的深入理解

$\delta(n) \xrightarrow{T[\cdot]} y(n)=h(n)$

$x(0)\cdot\delta(n) \xrightarrow{T[\cdot]} y(n)=x(0)\cdot h(n)$

$\delta(n-1) \xrightarrow{T[\cdot]} y(n)=h(n-1)$

$x(1)\cdot\delta(n-1) \xrightarrow{T[\cdot]} y(n)=x(1)\cdot h(n-1)$

$\delta(n)+\delta(n-1) \xrightarrow{T[\cdot]} y(n)=h(n)+h(n-1)$

$x(0)\cdot\delta(n)+x(1)\cdot\delta(n-1) \xrightarrow{T[\cdot]} \boxed{y(n)=x(0)\cdot h(n)+x(1)\cdot h(n-1)}$

线性卷积 ⇒

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

三、线性卷积的计算方法与步骤

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

- **反褶**：画出$x(m)$与$h(m)$，以$m=0$的纵轴为对称轴将$h(m)$反褶成$h(-m)$。
- **移位**：将$h(-m)$移位n，得到$h(n-m)$，即$h(-m+n)$ 。
  当n为负，左移n位；当n为正，右移n位。 注意：$n\in[-\infty,\infty]$。
- **相乘**：将$h(n-m)$和$x(m)$的相同m值的对应点值进行相乘。
- **相加**：将所有对应点的乘积累加起来，得到某一个输出值 $y(n)$。

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

例： 已知某LSI系统的单位脉冲响应$h(n)$为：

$$h(n)=3\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

若该系统的输入为序列$x(n)$：

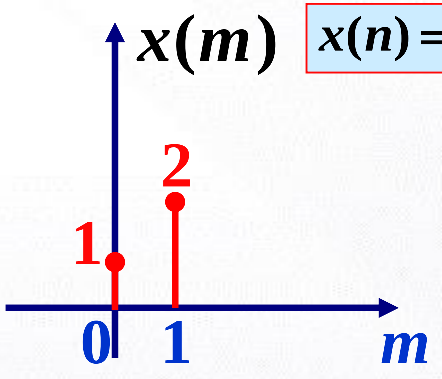
$$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)$$

试求该系统的输出响应$y(n)$。

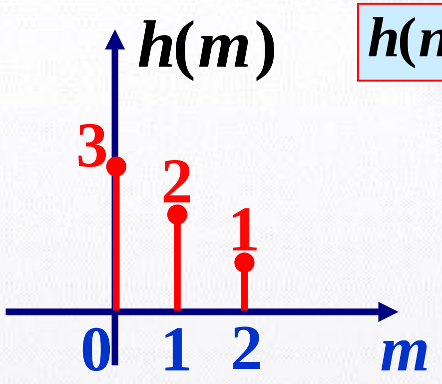
解： 根据题目已知条件，LSI系统的输出可以通过输入序列与系统单位脉冲响应的线性卷积求出。

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

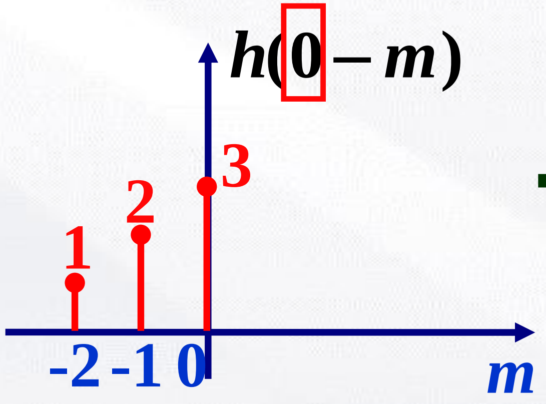
LSI系统的时域求解—线性卷积方法



$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)$

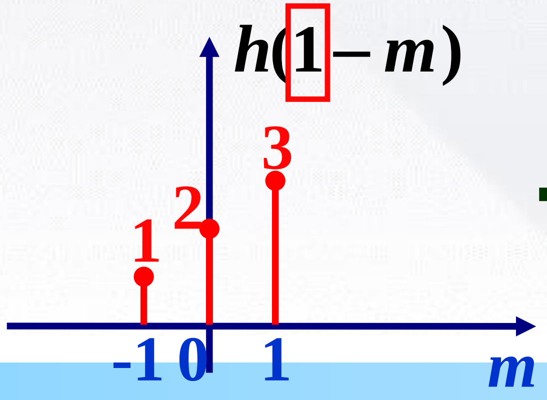


$h(n)=3\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$



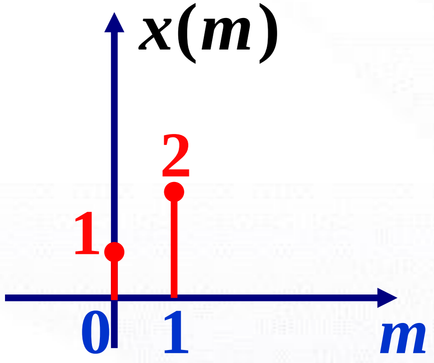
$y(\boxed{0}) = 1*3 = 3$

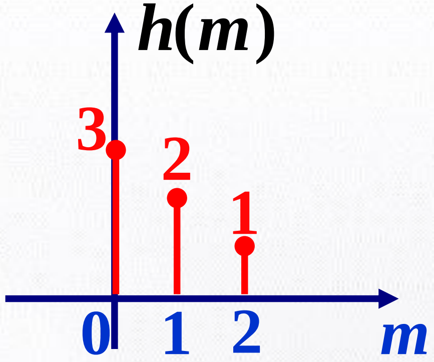
$$y(\boxed{n}) = x(n)*h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(\boxed{n}-m)$$



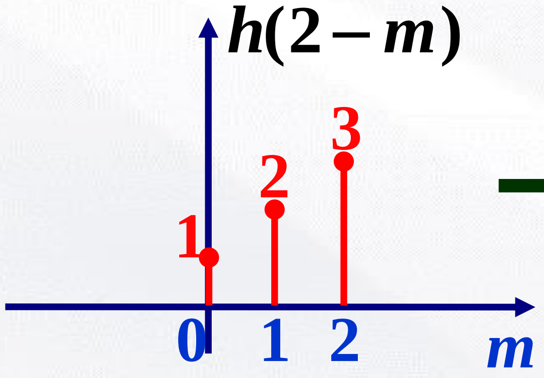
$y(\boxed{1}) = 1*2 + 2*3 = 8$

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

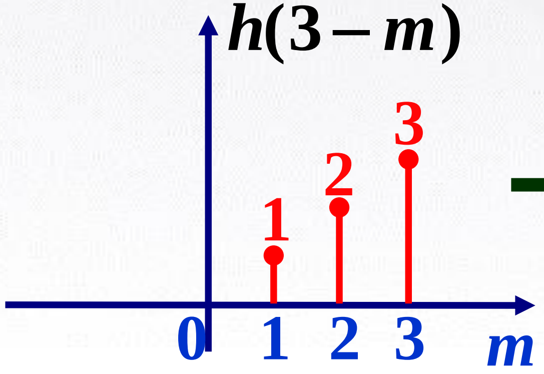




$$y(n)=x(n)*h(n)=\{\underline{3},8,5,2\}$$



$y(2) = 1*1 + 2*2 = 5$



$y(3) = 2*1 = 2$

$$\begin{array}{rrrrl}
 & \underline{3} & 2 & 1 & \leftarrow n=2 \\
 & & \underline{1} & 2 & \leftarrow n=1 \\
\hline
 & 6 & 4 & 2 & \leftarrow n=2+1=3 \\
\underline{3} & 2 & 1 & & \\
\hline
\end{array}$$

$y(n) = \{\underline{3}, 8, 5, 2\}$ $\leftarrow n=3$

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

说明： $x(n)*\delta(n-n_0)$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-n_0-m)$$

因为只有当 $m=n-n_0$ 时，
$\delta(n-m-n_0)=1$

$$=x(n-n_0)$$

$$\boxed{x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)}$$

LSI系统的时域求解—线性卷积方法


```
nx=[0:1];   x=[1 2];
```

$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)$

```
nh=[0:2];   h=[3 2 1];
```

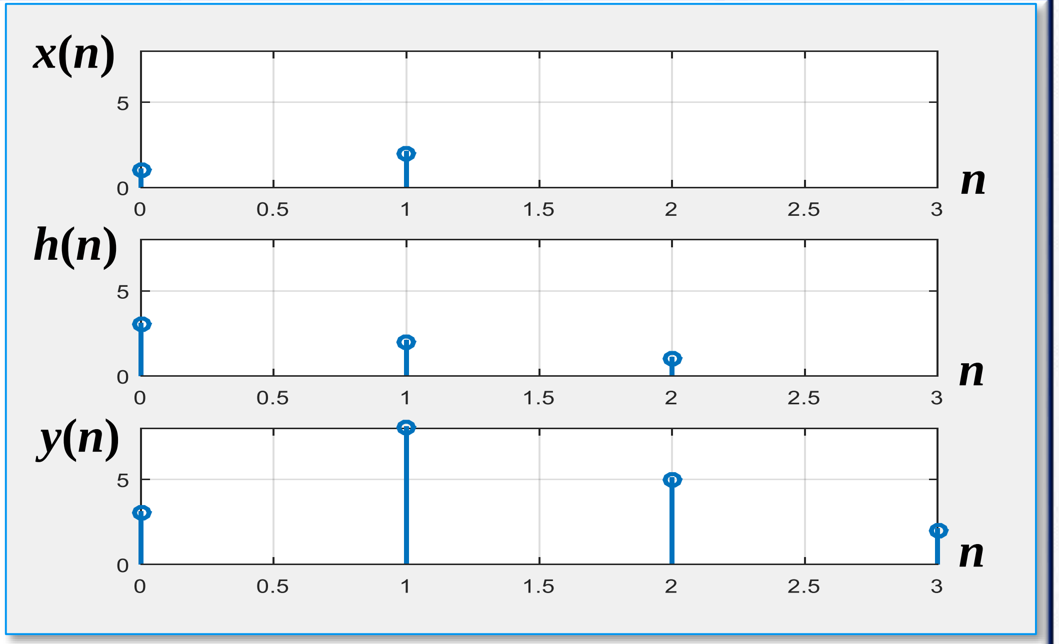
$h(n)=3\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$

```
y=conv(x,h);
```

→ conv函数实现卷积

```
ny=[0:3];
```

→ 定义好输出y的区间




```
subplot(311);stem(nx,x,'linewidth',2);
axis([min(ny) max(ny) 0 max(y)]);grid on;
subplot(312);stem(nh,h,'linewidth',2);
axis([min(ny) max(ny) 0 max(y)]);grid on;
subplot(313);stem(ny,y,'linewidth',2);
axis([min(ny) max(ny) 0 max(y)]);grid on;
```

```
y =
     3     8     5     2
```

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

- 线性卷积的**基本概念**
- 线性卷积的**深入理解**
- 线性卷积的**计算方法与步骤**