第一章 离散时间信号与系统

Discrete-time signals and systems

1.4 连续时间信号的抽样

时域采样信号的恢复

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

时域采样信号的恢复

Reconstruction (重构)

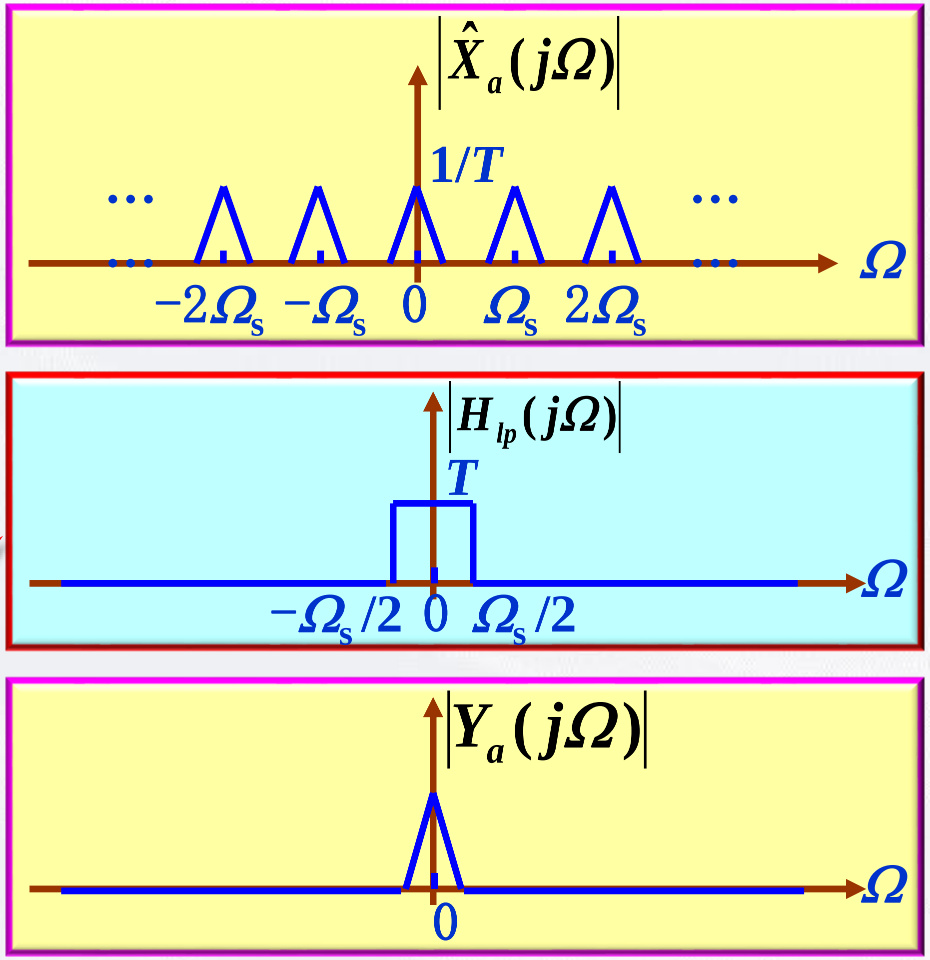
如果满足采样定理，信号的最高频率小于折叠频率，则采样后信号的频谱不会产生混叠，故可以恢复原信号。

理想低通滤波器

$$H_{lp}(j\Omega)=\begin{cases} T & |\Omega|<\Omega_s/2 \\ 0 & |\Omega|\ge\Omega_s/2 \end{cases}$$

Reconstruction filter

实际上，理想的低通滤波器是不能实现的，但我们可以在一定精度范围内用一个可实现的滤波器来逼近它。



时域采样信号的恢复

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{x_a(t)} \arrow[r, "FT"] \arrow[d] & X_a(j\Omega) \arrow[d] \\
\boxed{\stackrel{?}{=}} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \hat{x}_a(t) \arrow[r, "FT"] & \hat{X}_a(j\Omega) \arrow[d, "H(j\Omega)"] \\
 & \boxed{y_a(t)} & Y_a(j\Omega) \arrow[l, "FT^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\Omega - jk\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$y_a(t) = \hat{x}_a(t) * h(t) \Leftrightarrow Y_a(j\Omega) = \hat{X}_a(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$$

时域采样信号的恢复

讨论：如何由采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 来恢复原来的模拟信号 $x_a(t)$?

思路：因为采样后的频谱是乘以理想低通滤波器的频谱后得到原信号的频谱的，所以对应到时域，应该是采样信号与理想低通滤波器对应时域信号$h(t)$的卷积。这个卷积的结果即为$y_a(t)$，然后，我们将它与$x_a(t)$进行对比。

理想低通滤波器的冲激响应$h(t)$为：

$$\boxed{h(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t}\,\mathrm{d}\Omega$$

$$= \frac{Sin[\frac{\Omega_s}{2}t]}{\frac{\Omega_s}{2}t} = \boxed{\frac{Sin[\frac{\pi}{T}t]}{\frac{\pi}{T}t}}$$

时域采样信号的恢复

$$y_a(t) = \hat{x}_a(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(\tau)\delta(\tau - mT) \right] h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

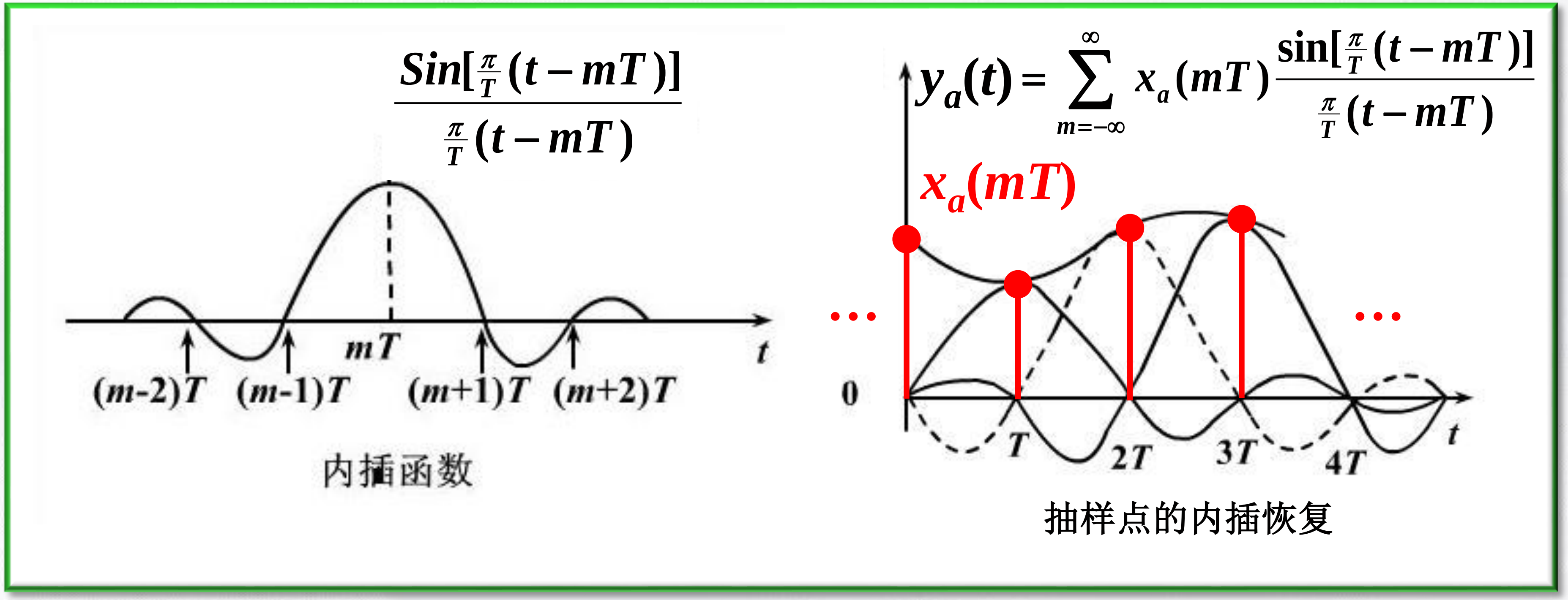
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}} x_a(\tau) h(t-\tau)\delta(\tau - mT)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{\tau = mT}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) h(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \boxed{\frac{Sin[\frac{\pi}{T}(t - mT)]}{\frac{\pi}{T}(t - mT)}}$$

时域采样信号的恢复

$$h(t-mT)=\frac{Sin[\frac{\pi}{T}(t-mT)]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)}$$



信号的采样值$x_a(mT)$经内插函数得到连续信号$y_a(t)$。

时域采样信号的恢复

$$y_a(t)=\hat{x}_a(t)*h(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_a(mT)\boxed{\frac{\sin[\frac{\pi}{T}(t-mT)]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)}}$$

Interpolation function

内插函数

说明： (1) 内插函数只有在采样点mT上为1。

(2) $y_a(t)$等于$x_a(mT)$乘上对应的内插函数的总和。

(3) 在每一个采样点上，只有该点所对应的内插函数不为零，这说明在采样点上信号值不变$y_a(mT)=x_a(mT)$，而采样点之间的信号由各加权内插函数波形的延伸叠加而成。

第一章 离散时间信号与系统

Discrete-time signals and systems

1.4 连续时间信号的抽样

时域采样信号的恢复

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁