第一章 离散时间信号与系统

Discrete-time signals and systems

1.2 离散时间系统

LSI系统的时域求解—线性卷积方法(2)

华东理工大学信息科学与工程学院 万永菁

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

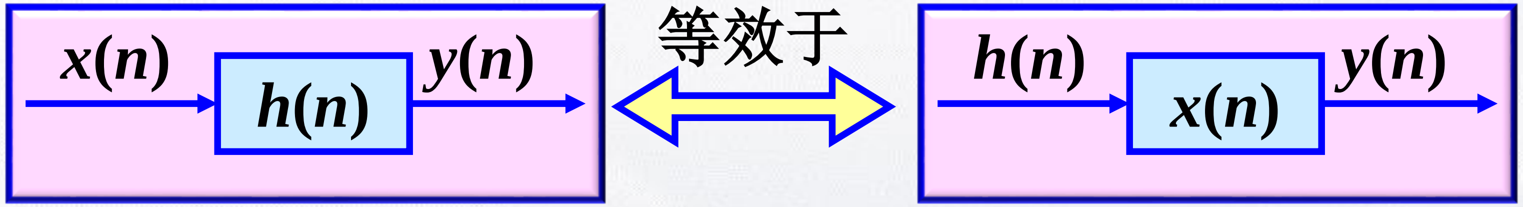
- 线性卷积的运算规则
- 线性卷积运算与应用举例
- 实序列的相关

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

四、线性卷积的运算规则

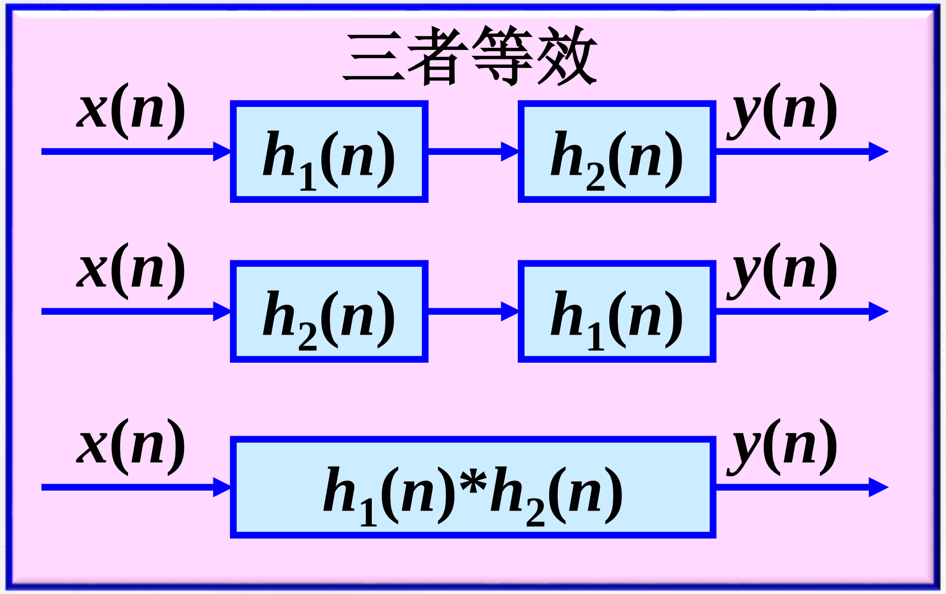
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \Leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

1、交换律 $y(n) = x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$



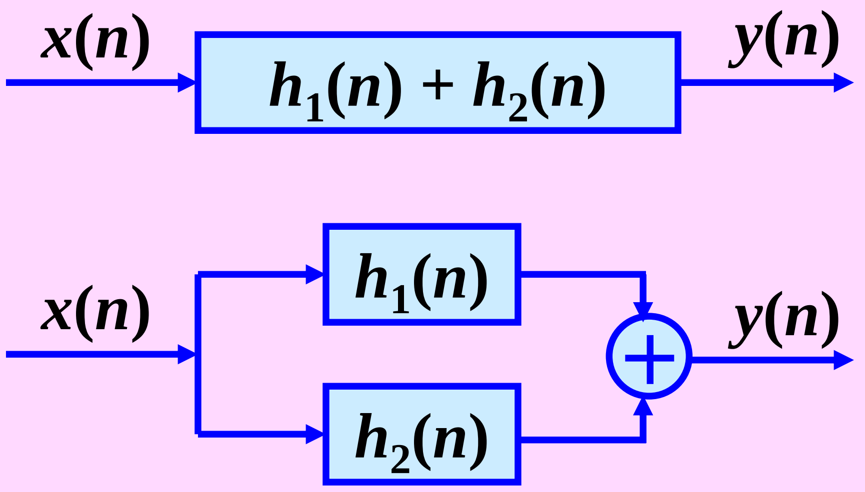
2、结合律

$$x(n)*h_1(n)*h_2(n)$$
$$= [x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$$
$$= [x(n)*h_2(n)]*h_1(n)$$
$$= x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$



3、分配律

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)] = x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n)$$



两者等效

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

例1：有两个序列：$x(n)$和$h(n)$

$x(n)$不为零的区间为：$N_1 \le n \le N_2$

$h(n)$不为零的区间为：$N_3 \le n \le N_4$

设：$y(n)= x(n)*h(n)$

问：$y(n)$不为零的区间为：________________________。

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

$n \in [-\infty, \infty]$

$x(m)$：$[N_1, N_2]$

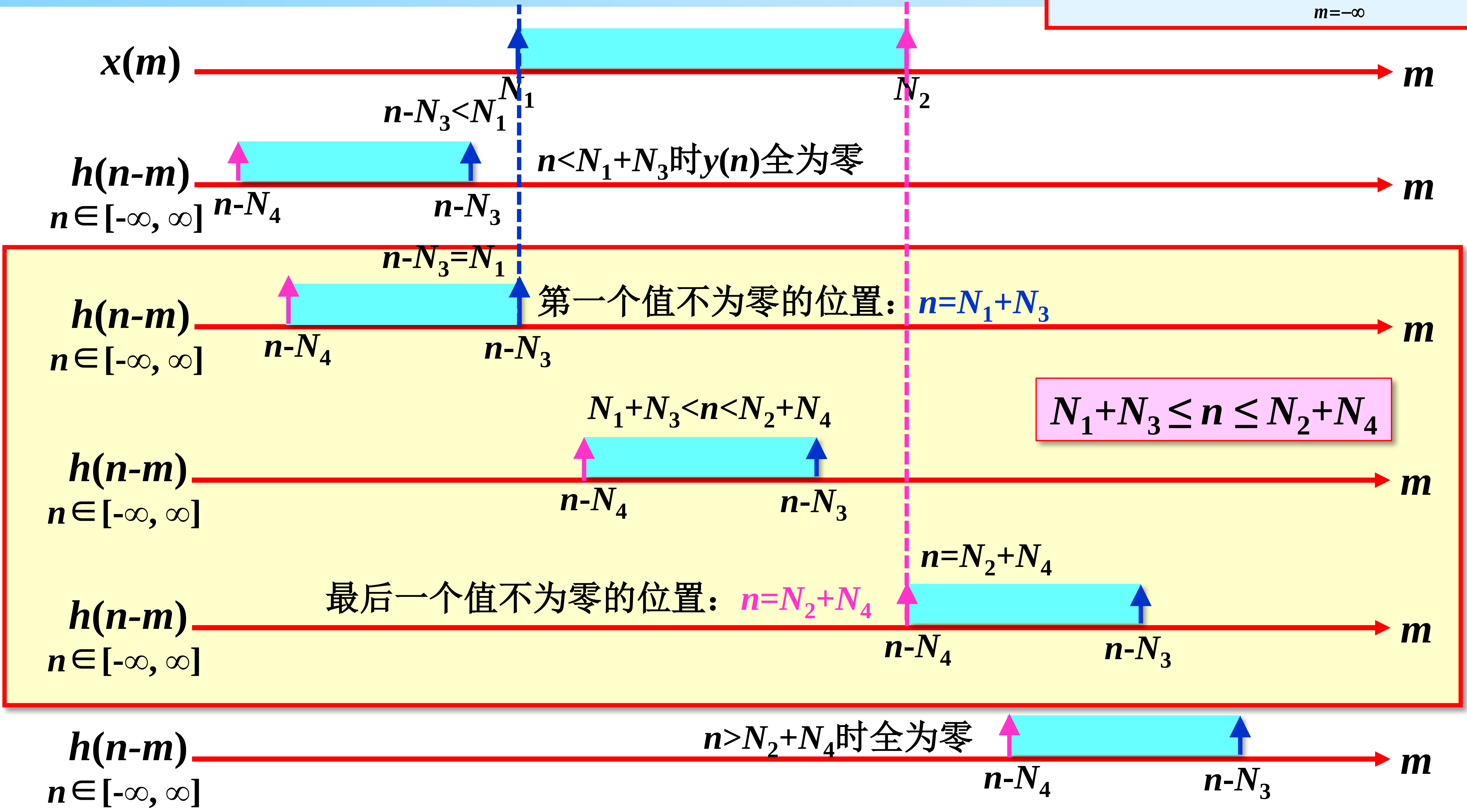
$h(m)$：$[N_3, N_4]$

$h(-m)$：$[-N_4, -N_3]$

$h(n-m)$：$[n-N_4, n-N_3]$

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$



LSI系统的时域求解—线性卷积方法

例1：有两个序列：$x(n)$和$h(n)$

$x(n)$不为零的区间为：$N_1 \le n \le N_2$

$h(n)$不为零的区间为：$N_3 \le n \le N_4$

设：$y(n) = x(n) * h(n)$

问：$y(n)$不为零的区间为：$\underline{N_1+N_3} \le n \le \underline{N_2+N_4}$。

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m)}$$

$\Rightarrow$

$x(m)$：$[\underline{N_1}, \underline{N_2}]$

$h(n-m)$：$[\underline{n-N_4}, \underline{n-N_3}]$

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

例2：　某LSI系统的单位脉冲响应$h(n)$为：

$$h(n)=\delta(n)+\alpha\delta(n-R)$$

其中，$0<\alpha<1$，R为正整数。　$\boxed{x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)}$

若该系统的输入为$x(n)$，试写出系统输出$y(n)$表达式。

解：LSI系统的输出可以通过输入序列与系统单位脉冲响应的线性卷积求出。

$$\begin{aligned}y(n)=x(n)*h(n)&=x(n)*[\delta(n)+\alpha\delta(n-R)]\\&=x(n)*\delta(n)+\alpha\cdot x(n)*\delta(n-R)\\&=x(n)+\alpha x(n-R)\end{aligned}$$

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

➢ 例2的实际应用： $\boxed{y(n) = x(n) + \alpha x(n-R)}$

直接声音和它的延迟了R个周期、并存在衰减的单个回声求和可以用于产生回声的效果。

$$x(n) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} T[\cdot] \\ h(n) = \delta(n) + \alpha\delta(n-R) \end{array}} \rightarrow y(n)$$

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)}$$

LSI系统的时域求解—线性卷积方法

读入音频文件

```
[x,Fs,bits]=wavread('c:\\wav\\good.wav');
a=0.3;  R=10000;
h=[1 zeros(1,R-1), a];
y=conv(x,h);
```

$$h(n)=\delta(n)+\alpha\delta(n-R)$$

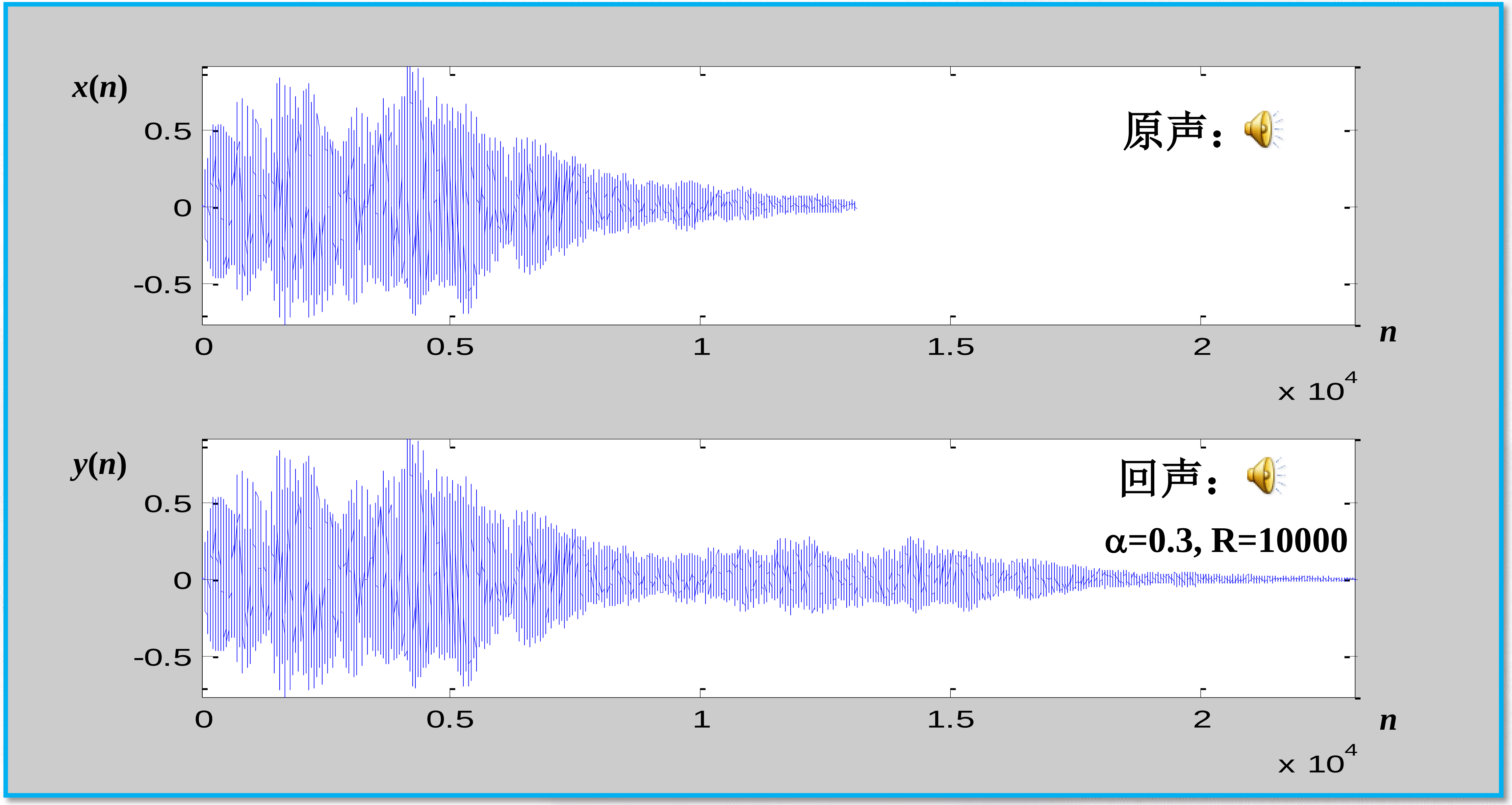
$$y(n)=x(n)*h(n)=x(n)+\alpha x(n-R)$$

```
figure(1);
subplot(211); nx=0:length(x)-1;
plot(nx,x);axis([0 length(y)-1 min(x) max(x)])
subplot(212); ny=0:length(y)-1;
plot(ny,y);axis([0 length(y)-1 min(y) max(y)])
```

写入音频文件

```
wavwrite(y,Fs,'c:\\good1.wav');
```

LSI系统的时域求解—线性卷积方法



五、序列的相关

实际工作中，常需要研究经过一段时间差后，两个信号之间的相似程度，可以用**相关函数**来表征。

- 实序列的互相关 *cross-correlation*

$$r_{xy}(n) = x(n) * y(-n)$$

$$r_{yx}(n) = y(n) * x(-n)$$

- 实序列的自相关 *auto-correlation*

$$r_{xx}(n) = x(n) * x(-n)$$

序列相关的理解

华东理工大学

线性卷积公式的理解：

$$y(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}y(m)x(n-m)$$

$x(m)$反褶后得到$x(-m)$

$n>0$，$x(-m+n)$相当于$x(-m)$右移n位

$n<0$，$x(-m+n)$相当于$x(-m)$左移n位

$n=-\infty$时，$x(-m-\infty)$

$n=\infty$时，$x(-m+\infty)$

$$r_{yx}(n)=y(n)*x(-n)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}y(m)x(m-n)$$

$x(-m)$反褶后得到$x(m)$

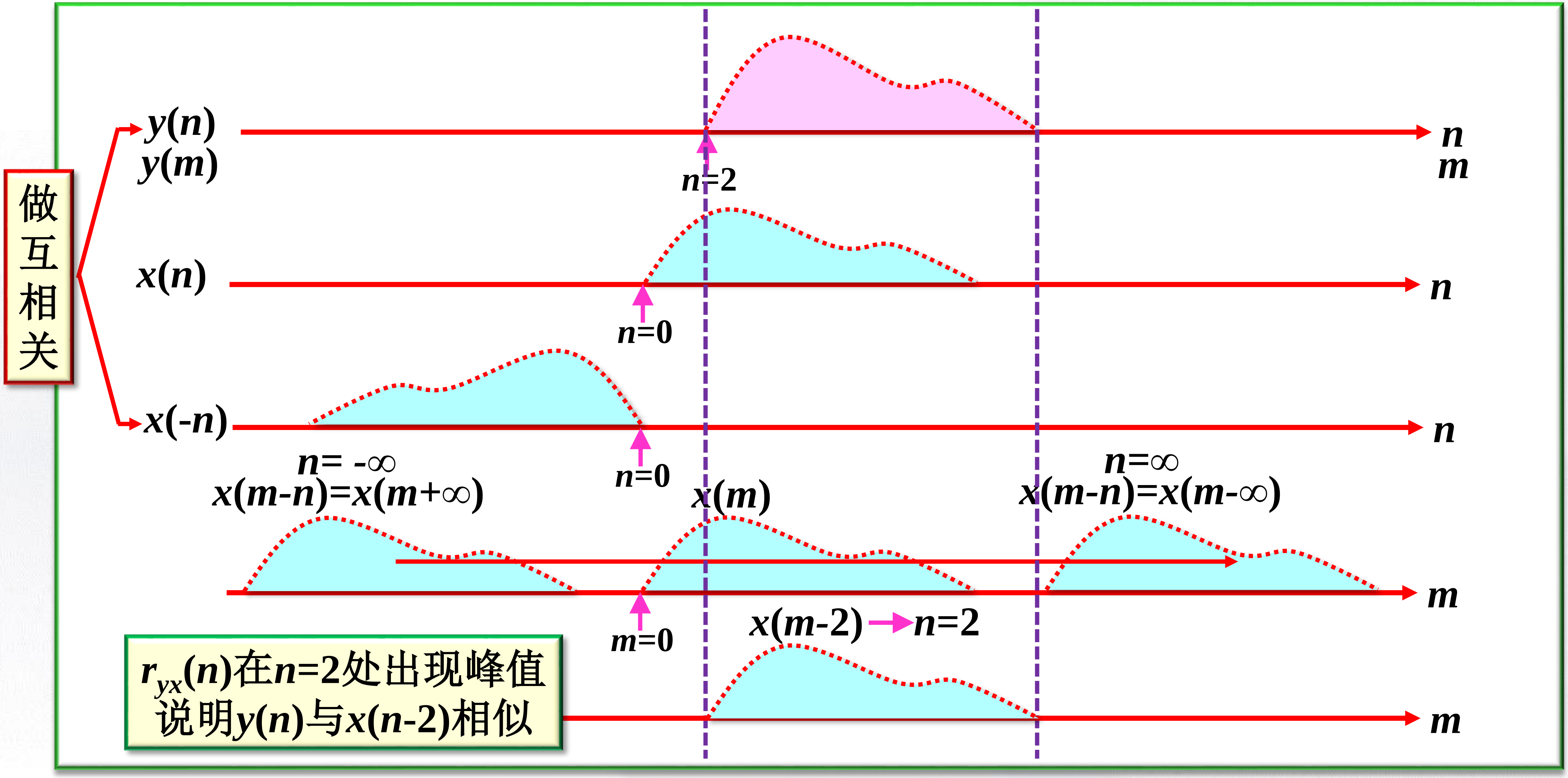
$n>0$，$x(m-n)$相当于$x(m)$右移n位

$n<0$，$x(m-n)$相当于$x(m)$左移n位

$n=-\infty$时，$x(m+\infty)$

$n=\infty$时，$x(m-\infty)$

序列相关的理解： $r_{yx}(n) = y(n) * x(-n)$



$r_{yx}(n)$在n=2处出现峰值
说明$y(n)$与$x(n$-2)相似

序列相关的理解

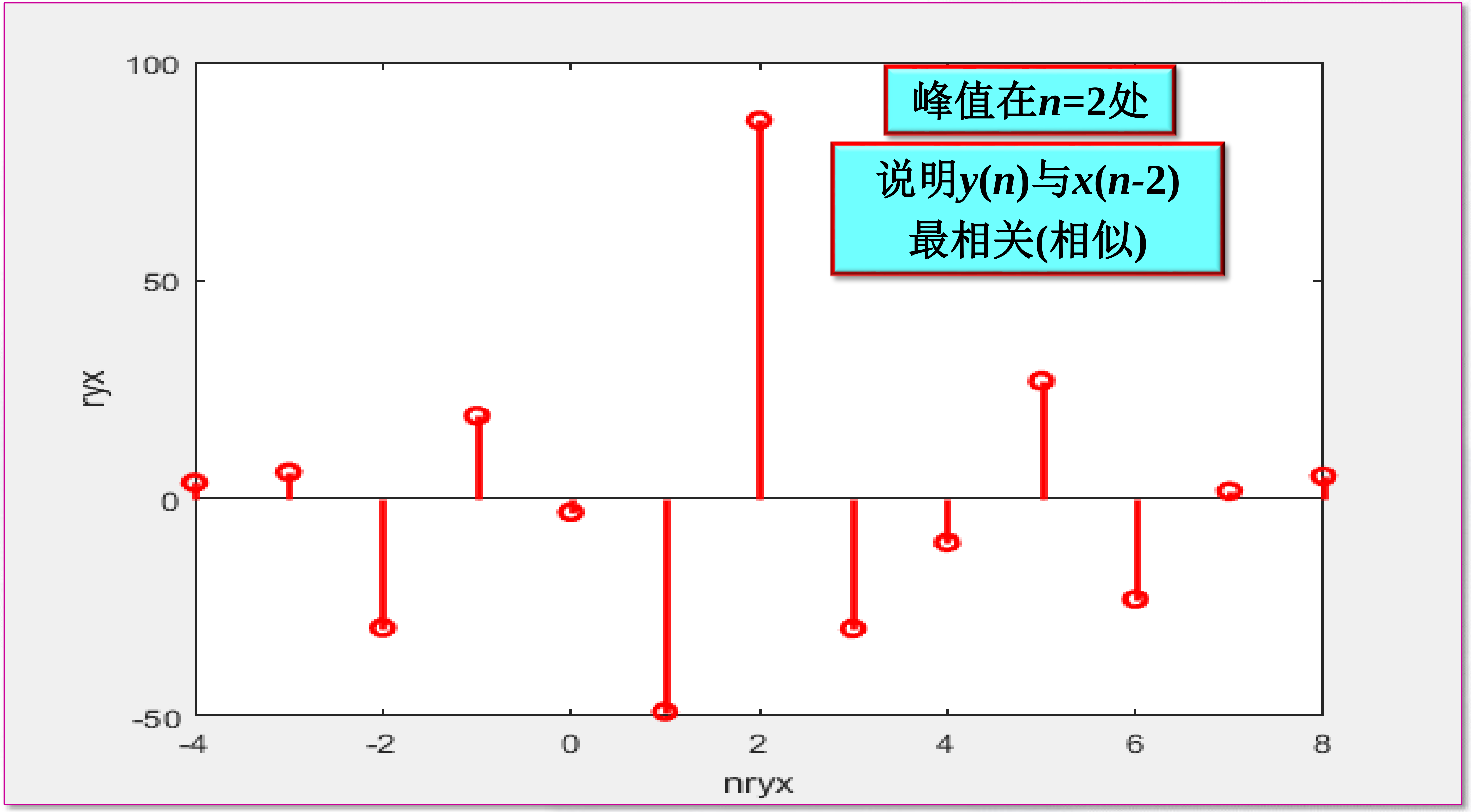
例：设$x(n) = \{3, 5, -7, 2, -1, -3, 2\}$，$y(n)=x(n-2)+w(n)$，其中$w(n)$为零均值和单位方差的高斯序列，计算$x(n)$与$y(n)$的互相关$r_{yx}$。

```
nx=[0:6]; x = [3,5,-7,2,-1,-3,2];
ny=[2:8]; y0 = x;

w = randn(1,length(y0));
y = y0+w;

ryx = xcorr(y,x);
nryx = [-4:8];

stem(nryx,ryx,'r','linewidth',2);
xlabel('nryx');ylabel('ryx');
```

$\boxed{x(n)}$ $\boxed{x(n-2)}$ $\boxed{w(n)}$ $\boxed{y(n)=x(n-2)+w(n)}$

$$r_{yx}(n)=\underbrace{y(n)}_{[2:8]} * \underbrace{x(-n)}_{[-6:0]}$$

序列相关的理解



LSI系统的时域求解—线性卷积方法

- 线性卷积的运算规则
- 线性卷积运算与应用举例
- 实序列的相关