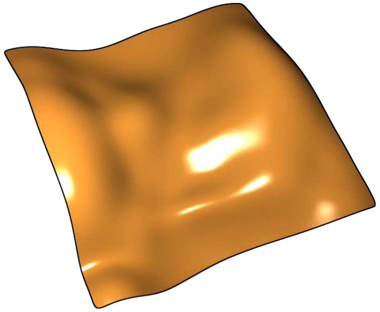
Informatique Graphique 3D & Réalité Virtuelle
Modélisation Géométrique : Fondements

Tamy Boubekeur



Définition

Modélisation

- Décrire un objet ou un phénomène par un ensemble de nombres et une structure entre ces nombres.
- Thème transverse: biologie, physique, chimie, sociologie, économie.
- Au cœur de la « science » informatique : les ordinateurs ne savent manipuler qu'un ensemble fini de nombres.

Définition

Modélisation Géométrique

- Décrire la forme d'un objet par un ensemble de valeurs.
- En pratique dans un espace de dimension 2, **3** ou 4 (3D+t)
- Cas 3D: **Surfaces** et volumes

Principe

1. Choix d’une **représentation**
2. Spécification des valeurs caractéristiques de cette représentation pour un objet donné
   - Conception virtuelle à l’aide de modeleurs 3D
   - Numérisation 3D
3. Manipulation de ces valeurs
   - Traitement automatique
   - Manipulation interactive

Focus

- **Les surfaces 3D** : représentation, génération et traitement
  - Interfaces *volume - volume*
  - «Ce que l'on voit d'un objet» > **informatique graphique**

- Objectif du cours :
  1. Acquérir une vision globale de la modélisation géométrique
  2. En comprendre les principes mathématiques et informatiques de base

SURFACES 3D

Définition

- Une surface 3D :
  - Un objet bidimensionnelle dans une espace tridimensionnel
  - Interface entre deux volumes
- Caractéristiques :
  - Topologie : définit la notion de voisinage entre points sur une surface
  - Géométrie : le « plongement » de la topologie dans un espace

Surface paramétrique

Définit par une fonction de paramétrisation d’un domaine du plan vers l’espace 3D

$$f : \Omega \rightarrow S, \Omega \subset \Re^2, S = f(\Omega) \subset \Re^3$$

Surface Implicite

Iso-surface 0 d'une fonction F :

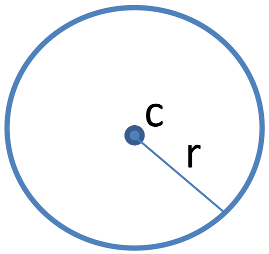
$$F : \Re^3 \rightarrow \Re, S = \left\{ x \in \Re^3 \middle| F(x) = 0 \right\}$$

Exemple 2D

Un cercle de centre c et de rayon r

Forme **paramétrique**

$$f:[0,2\pi]\rightarrow\Re^2, u\mapsto c+r\begin{pmatrix}\cos(u)\\ \sin(u)\end{pmatrix}$$



Valeurs caractéristique: {c,r}

Forme **implicite**

$$F:\Re^2\rightarrow\Re,(x,y)\mapsto\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2}-r$$

Comparaison

Selon les opérations de bases

- Itération sur la surface (évaluation, échantillonnage)
- Intersection : définir si un point est à l'intérieur ou à l'extérieur du solide contenu par la surfaces
- Modifications géométriques et topologiques

	Paramétrique	**Implicite**
Itération	**+**	**-**
Intersection	**-**	**+**
Mod. Géométrie	**+**	**-**
Mod. Topologie	**-**	**+**

Géométrie différentielle

- Outil majeur pour l’analyse géométrique
- Plan tangent et vecteur normal en un point
- Courbures moyenne, gaussienne
- Direction et valeurs de courbure maximum et minimum

Propriétés de base

- Paramétrisation locale

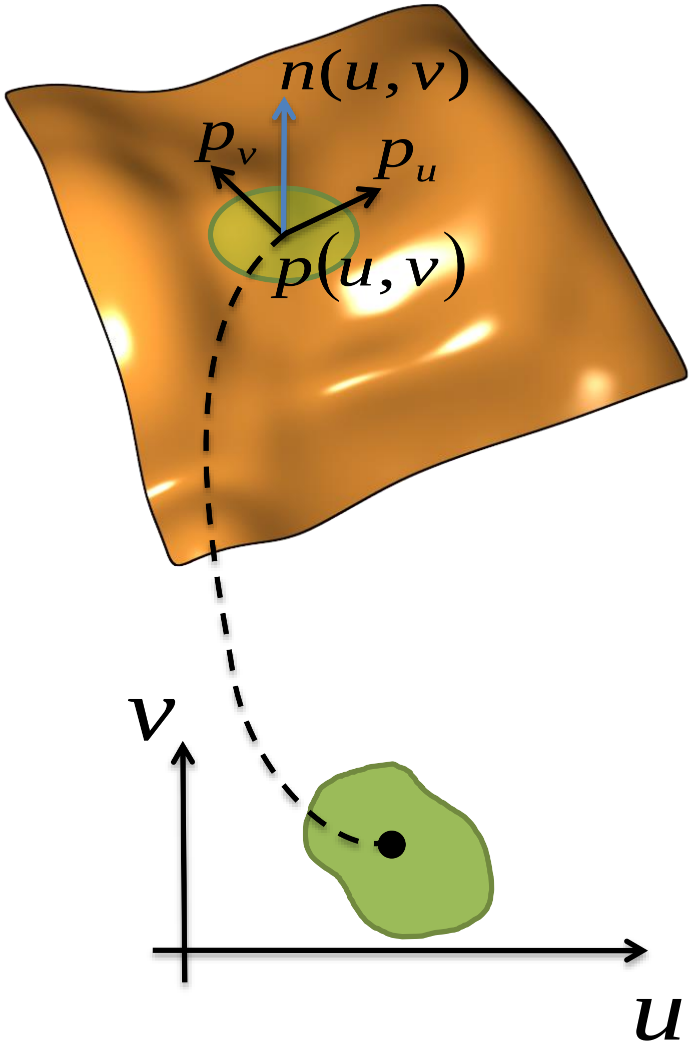
$$p(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, (u,v) \in D \subset \Re^2$$

- Plan tangent au point p définit par

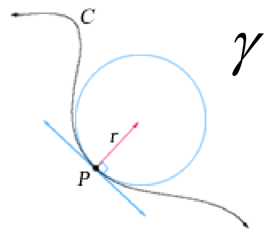
$$p_u = \frac{\partial p(u,v)}{\partial u} \qquad p_v = \frac{\partial p(u,v)}{\partial v}$$

- Vecteur Normal

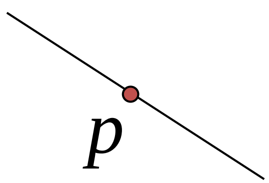
$$n(u,v) = \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}$$



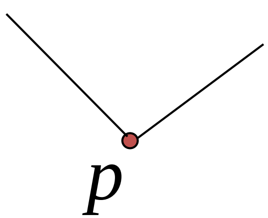
Courbure



$$\gamma = \frac{1}{r}$$



$$r = \infty; \gamma = 0$$



$$r = 0; \gamma = \infty$$

- Norme de la dérivée seconde de la courbe (accélération)
- Inverse du rayon de courbure
- Intuitivement : « à quel point la ligne est courbée en un point »
- Courbure algébrique :
  - Orientée/signée
  - Utilisation du **repère de Frénet**

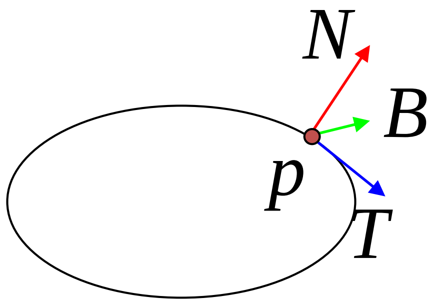
Relation au Repère de Frenet

- Un problème récurrent : faire évoluer un repère euclidien le long d'une courbe
- Repère de Frenet en p: {T,N,B}
  - T : tangente à la courbe en p
  - N : vecteur normal à la courbe en p
  - B : vecteur binormal à la courbe en p

$$v = \frac{\partial p}{du} \qquad T = \frac{v}{\|v\|}$$

$$a = \frac{\partial^2 p}{du^2} \qquad B = \frac{v \wedge a}{\|v \wedge a\|} \qquad N = \frac{v \wedge a}{\|v \wedge a\|}$$

courbure $$\boxed{\gamma = \frac{\|v \wedge a\|}{\|v\|^3}}$$



*<u>Note</u> : la variation de B est appelée **torsion ;** la torsion est nulle pour une courbe plane*

Courbure normale

- Courbure de la courbe C sur la surface S
- C = intersection de S et d’un plan passant par
  - **n**
  - **t**, un vecteur dans le plan tangent défini par l’angle φ autour de **n**

$$t = \cos\varphi \frac{p_u}{\|p_u\|} + \sin\varphi \frac{p_v}{\|p_v\|}$$

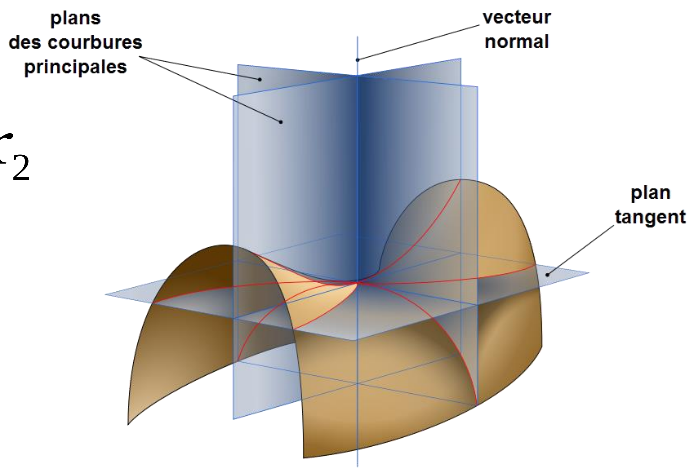
$$\kappa_n(\varphi) = \kappa\big(C(p)\big)$$

Courbure de surface

- Courbures principales
  - Courbure maximum $\kappa_1 = \kappa_{\max} = \max_{\varphi} \kappa_n(\varphi)$
  - Courbure minimum $\kappa_2 = \kappa_{\min} = \min_{\varphi} \kappa_n(\varphi)$

- Courbure moyenne $H = \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \kappa_n(\varphi) d\varphi$

- Courbure gaussienne $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$



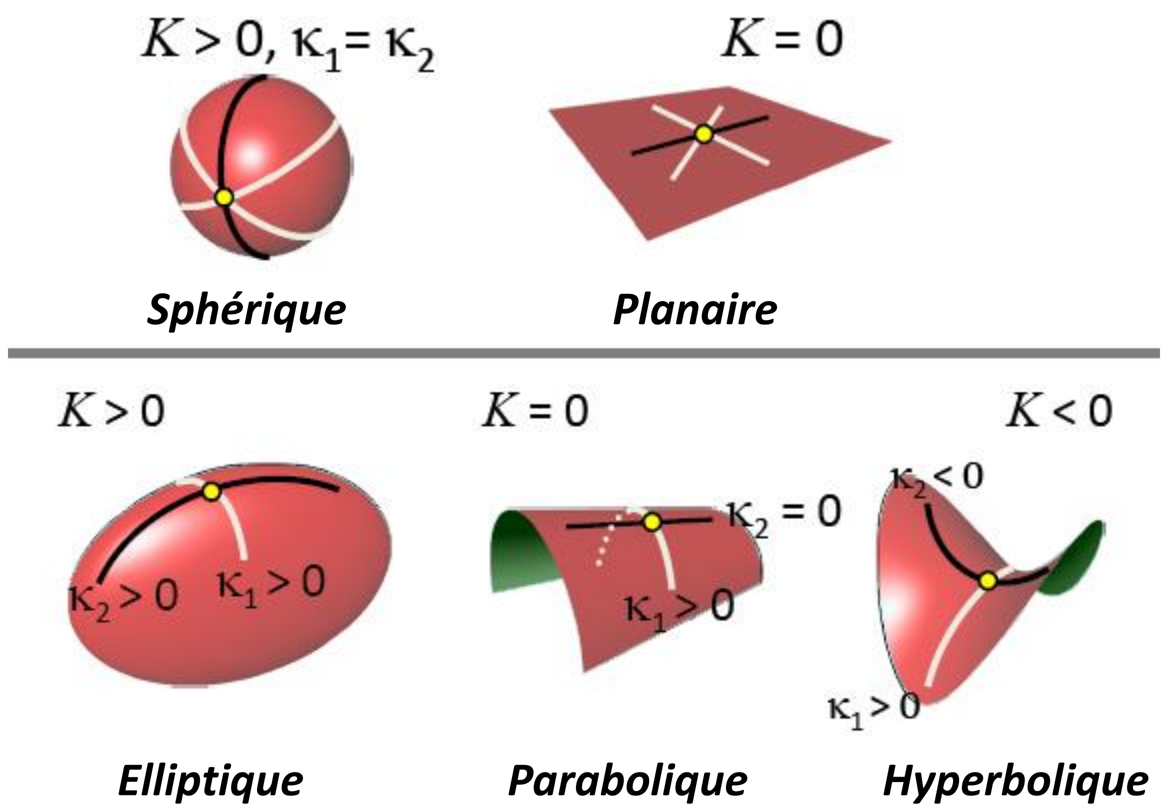
Classification par la courbure

Isotrope

Toute direction principale

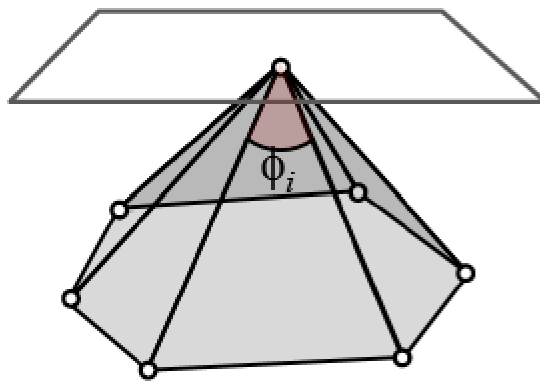
Anisotrope

2 directions principales



Courbure gaussienne discrète

- Approximée par le défaut angulaire au sommet



$$K = 2\pi - \sum_{i=1}^{|N(v)|} \phi_i$$

Courbure Moyenne

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Définit via l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\boxed{\Delta_M \mathbf{p} = -H\mathbf{n}}$$

Variétés

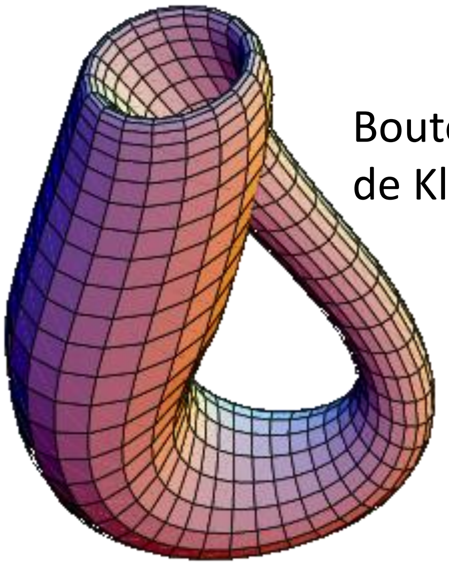
- Une surface 3D est une **2-variété** (*2-manifold*)
  - Fermée pour les surface « physiques »
  - Possiblement ouverte sinon
    - Bords et coins
- 2-variété – le voisinage de tout point de la surface est *homéomorphe* à :
  - une disque (intérieur)
  - un demi-disque (bord)
  - un quart de disque (coin)

Homéomorphisme : isomorphisme entre deux espace topologiques – bijection continue, dont la réciproque est continue, de l'un dans l'autre.

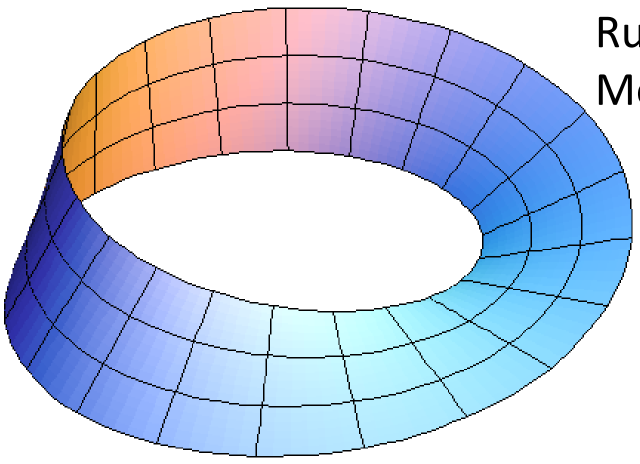
Orientabilité

Variété **orientable**

– Il n’existe aucun sous-ensemble de la surface qui soit homéomorphe au Ruban de Moebius



Bouteille de Klein



Ruban de Moebius

Invariants Topologiques

Pour les 2-variétés fermées orientables:

Caractéristique D'Euler : X=V-E+F

- Invariant d'un groupe topologique pour les polyèdres

Genre d'une surface : **(2-X)/2**

- nombre maximum de courbes de coupe fermées, sans point commun sur la surface, la conservant d'un seul tenant

Genre 0

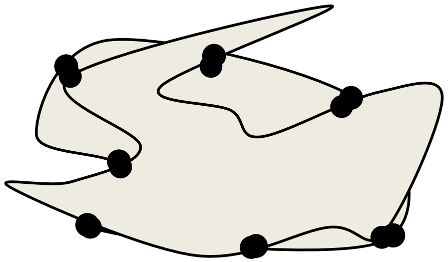
Genre 1

Genre 2

Qualités géométriques I

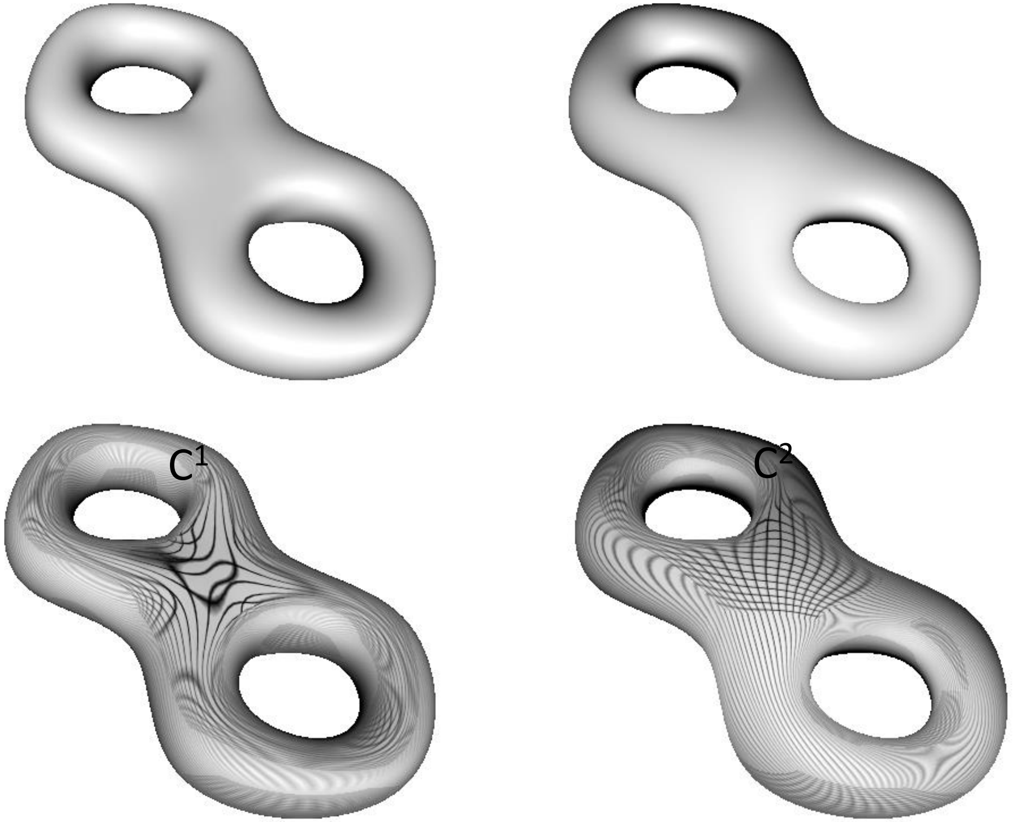
- Position des points de la surface dans l'espace Euclidien
- Gradient de la surface
- Laplacien de la surface
- Variation et maximaux de courbure
- Continuité
  - **Paramétrique C^k**
    - k >0 pour les surface dîtes *lisses* (continuité des dérivées)
    - k>1 pour obtenir des réflexions continues
  - **Géométrique G^k**
    - contrainte moins forte

- Singularités :
  - Pointes
  - Arêtes vives
  - Croisements



Qualités géométriques II

- Importance des propriétés géométrique en pratique
  - Continuité C^2 : *continuité de la réflexion*



Tour d'horizon

REPRÉSENTATION DES SURFACES 3D

Surfaces complexes

- Pas de forme analytique simple pour les surfaces complexes
- Composition (implicite ou paramétrique)
- Définition de surface par morceaux à l'aide d'une collection de primitives (implicites ou paramétriques) simples
- **Modèle de Représentation :** structure d'un grand ensemble de valeur modélisant une forme.

Représentation des Surfaces

Familles principales :

- Surfaces discrètes
  - **Maillages Polygonaux**
  - Surfaces de Points
- Surfaces continues
  - Surfaces Spline
  - **Surfaces de Subdivision**
  - Surfaces Implicites