Contrôle de connaissances de MDI 210

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits, ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.
Le barème (sur 34) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié ;
la note (sur 17) obtenue à cette épreuve sera complétée par la note des TP (sur 3).
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours ne sera pas considéré comme juste.
L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Dans tout le sujet, **R** désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice 1 (8,5 points)

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_{\alpha,\beta}$ définie par :

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. (4 points) À l'aide de la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de $A_{1,1}$ (c'est-à-dire la matrice ne contenant que des 1) : on détaillera les calculs et on précisera, pour chaque vecteur propre, quelle valeur propre lui est associée.

2. (1 point) En déduire les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de $A_{\alpha,\beta}$ pour tout réel α et tout réel β.

3. (3,5 points) Soit $x \in \mathbf{R}^3$. On considère la forme quadratique $Q_{\alpha,\beta}$ définie sur $\mathbf{R}^3$ par $Q_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2} x^t A_{\alpha,\beta} x$. Pour chaque valeur de α et de β, indiquer, en utilisant ce qui précède :

a. si $Q_{\alpha,\beta}$ admet un minimum global fini ; on précisera alors si ce minimum est atteint pour un seul $x \in \mathbf{R}^3$ ou pour plusieurs ;
b. si $Q_{\alpha,\beta}$ admet des minima locaux qui ne soient pas globaux.

Exercice 2 (9 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. (1 point) Soit $x \in \mathbf{R}^3$. En considérant $x^t A x$ et sans calculer les valeurs propres de A, montrer que A est définie positive.

2. (3 points) Appliquer la méthode de Cholesky à la matrice A.

3. (2 points) En utilisant la décomposition obtenue à la question 2, résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = 3 \\ 4y_2 + 6y_3 = 12 \\ y_1 + 6y_2 + 11y_3 = 23 \end{cases}.$$

4. (3 points) On considère le problème (P) de programmation linéaire suivant :

Maximiser $z = 3x_1 + 12x_2 + 23x_3 + 7x_4$

avec les contraintes
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 \leq 2 \\ 4x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 14 \\ x_1 + 6x_2 + 11x_3 - x_4 \leq 24 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 \leq 18 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_4 \leq 11 \end{cases}$$

et, pour $1 \leq j \leq 4$, $x_j \geq 0$.

Indiquer, en appliquant le théorème des écarts complémentaires, si $x = (1, 2, 1, 0)^t$ est une solution optimale de (P).

Exercice 3 (8,5 points)

Soit α un réel strictement positif ($\alpha > 0$). On considère le problème de programmation linéaire (P_α) défini de la façon suivante :

Maximiser $z = x_1 - x_2$

avec les contraintes
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -\alpha \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

et $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

N. B. : Dans tout l'exercice, s'il y a plusieurs variables candidates pour entrer ou sortir de la base quand on effectue une itération de l'algorithme du simplexe, on choisira nécessairement la variable conformément à la règle de Bland, même si le dictionnaire n'est pas dégénéré.

1. (3,5 points) Déterminer, à l'aide de l'algorithme du simplexe sous la forme des dictionnaires (une résolution géométrique ne sera pas considérée comme valable), les valeurs de α pour lesquelles (P_α) admet au moins une solution réalisable ; pour ces valeurs de α, préciser la solution réalisable de (P_α) que l'on obtient.
Indication : on étudiera un problème auxiliaire (A_α), que l'on donnera explicitement, obtenu à partir de (P_α) en ajoutant une variable que l'on appellera x_0.

2. (2 points) Pour les valeurs de α pour lesquelles (P_α) est réalisable, déterminer les valeurs de x_1 et x_2 permettant d'atteindre le maximum de (P_α).

3. (1 point) Écrire le problème dual (D_α) de (P_α).

4. (2 points) Que peut-on dire de l'optimum de (D_α) selon les valeurs de $\alpha > 0$ (quand cela est pertinent, on précisera la valeur des variables duales permettant d'atteindre cet optimum) ?

Exercice 4 (8 points)

Soit D le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \le 0 \\ 1 - x - 2y \le 0 \\ -x \le 0 \end{cases}$.

On souhaite minimiser la fonction f définie pour $(x, y) \in D$ par : $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

1. (1 point) Pour quels points de D les contraintes sont-elles qualifiées ?

2. (4 points) Appliquer au problème la méthode de plus grande descente admissible en partant du point de coordonnées (1, 1). On détaillera les calculs.
Indication : on pourra s'aider d'un dessin pour déterminer les directions suivies, mais on expliquera les choix qui seront faits.

3. (2 points) La condition de Karush, Kuhn et Tucker est-elle satisfaite pour le point obtenu à la question précédente ?

4. (1 point) Peut-on en déduire que le point trouvé à la question 2 est un minimum au moins local du problème ?

N. B. Le corrigé de l'épreuve est disponible sur le site pédagogique de MDI 210.