Chapitre 1 : rappels d'algèbre linéaire

Première partie : Analyse matricielle - Généralités

Type de matrices

Dans toute la suite, on considère $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme corps de base. Un vecteur x sera représenté par un vecteur-colonne.
Une matrice carrée réelle A est dite :

- *symétrique* si $A^t = A$,
- *normale* si $AA^t = A^t A$,
- *orthogonale* si $AA^t = A^t A = I$, où I désigne la matrice identité.

Une matrice réelle symétrique ou orthogonale est normale.

Spectre d'une matrice

Définitions

Soit A une matrice carrée.
Une *valeur propre* de A est un scalaire λ tel qu'il existe un vecteur x non nul vérifiant : $Ax = \lambda x$. Le vecteur x est alors dit *vecteur propre* de A.
Le *spectre* de A est l'ensemble des valeurs propres de A. Le *rayon spectral* de A est le plus grand module des valeurs propres de A ; il est noté $\rho(A)$.

Les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique sont réelles.

Réduction d'une matrice

Définitions

Deux matrices carrées sont dites *semblables* si elles peuvent représenter la même application linéaire sur deux bases différentes. Si A et B sont semblables, il existe une matrice inversible P vérifiant $A = P^{-1}BP$; la matrice P s'appelle *matrice de passage*. Une matrice est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale ; cette matrice diagonale est constituée des valeurs propres de A comptées avec leur ordre de multiplicité.

Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle ne possède aucune valeur propre nulle.

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable ; il existe une matrice orthogonale O telle que $O^{\mathrm{t}}AO$ soit diagonale.

Le module des valeurs propres d'une matrice orthogonale vaut 1.

Valeurs singulières

Soit A une matrice carrée réelle.

On peut montrer que la matrice $A^{\mathrm{t}}A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont $\geqslant 0$. On appelle *valeurs singulières* de A les racines carrées positives des valeurs propres de $A^{\mathrm{t}}A$.

A est inversible si et seulement si ses valeurs singulières sont toutes strictement positives.

Chapitre 1 : Rappels d'algèbre linéaire

Seconde partie : normes

Définition d'une norme

Définition

Une **norme** sur un espace vectoriel E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ notée $||\ ;||$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout élément x de E, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- pour tout scalaire α et pour tout x de E, $||\alpha A|| = |\alpha|\ ||A||$
- pour tout couple (x, y) de E^2, $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

Normes vectorielles usuelles, propriétés

Soit $x = (x_i)_{1 \leq i \leqslant n}$ un vecteur.

Les trois normes vectorielles les plus usuelles sont les suivantes :

- $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (norme 1)
- $||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (norme 2, ou norme euclidienne)
- $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (norme infinie)

Plus généralement : $||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ (norme p).

Deux normes $||\ ||$ et $||\ ||'$ sont équivalentes sur un espace vectoriel E s'il existe deux constantes strictement positives C et C' telles que, pour tout x dans E : $C||x|| \leq ||x||' \leq C'||x||$

Dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont *équivalentes*.

Normes matricielles

$\mathcal{A}_n =$ l'anneau des matrices carrées réelles d'ordre n.

Une norme sur $\mathcal{A}_n$ est une norme qui vérifie de plus :

- pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}_n$, $||A \times B|| \leqslant ||A|| \times ||B||$.

On peut construire des normes matricielles à partir de normes vectorielles : elles sont dites *normes matricielles subordonnées*.
Pour cela, on définit $||A||$ par les formules équivalentes suivantes :

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{0<||x||\leqslant 1} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

On a : $||Ax|| \leqslant ||A|| \; ||x||$.

Normes matricielles subordonnées

Les normes matricielles subordonnées aux normes décrites plus haut sont, pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$:

$$\bullet ||A||_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_1}{||x||_1} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\bullet\ ||A||_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \sqrt{\rho(A^{\mathrm{t}} A)}$$

$$\bullet\ ||A||_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Si A est normale, *i.e.* A vérifie $AA^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} A$ (en particulier si A est symétrique), alors $||A||_2 = \rho(A)$.

Si A est orthogonale, $||A||_2 = 1$.

Remarque : $||A||_1$ et $||A||_\infty$ sont faciles à calculer mais pas $||A||_2$.

Exemple de norme non subordonnée : la norme euclidienne

Cette norme est définie par :

$||A||_E = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{trace } (A^{\mathrm{t}}A)}$

(la trace d'une matrice est la somme de ses termes diagonaux).

La norme $||A||_E$ est invariante par transformation orthogonale : si $O^{\mathrm{t}}O = I$, alors $||A||_E = ||AO||_E = ||OA||_E = ||O^{\mathrm{t}}AO||_E$.

$||A||_2 \leqslant ||A||_E \leqslant \sqrt{n}||A||_2$.

Chapitre 2 : problèmes de l'analyse numérique

Deux problèmes principaux :
- la résolution des systèmes linéaires
- le calcul des valeurs propres et vecteurs propres des matrices.

Avec les méthodes calculatoires de l'analyse numérique, il faut prendre en compte deux types de « qualité ».
- la *complexité*,
- l'acceptabilité de la solution (deux sortes d'erreurs : erreurs d'arrondi, erreurs de troncature).

Erreurs

Erreur d'arrondi : erreur due au codage où le nombre de chiffres représentant un réel est limité.

Erreur de troncature : dans les méthodes itératives, le calcul de la limite nécessiterait *a priori* un nombre infini d'itérations. Comme on arrête les calculs après un nombre k_0 d'itérations, on commet une erreur de troncature mesurée par $||x^\infty - x^{k_0}||$ (x^∞ représente la limite, x^{k_0} le résultat obtenu à la k_0^e itération et $|| \; ||$ une norme donnée).
Comme x^∞ est inconnu, on ne peut pas d'estimer l'erreur.

Conditionnement d'un système linéaire

On considère un système linéaire écrit sous la forme matricielle $Ax = b$.

Paramètre important des systèmes linéaires : leur *conditionnement*, attaché à la matrice A du système.

Le plus souvent, dans la pratique, les coefficients de A et les composantes du vecteur b sont les résultats de mesure et sont donc entachés d'une certaine erreur. Il est essentiel de voir comment une petite modification de A ou de b influe, indépendamment de la méthode utilisée, sur la solution supposée exacte du système.

Conditionnement d'un système linéaire, exemple

Considérons le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \text{ de solution } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Système perturbé en modifiant le vecteur du second membre :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix} \text{ de solution } \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}.$$

Une erreur relative de l'ordre de $1/300$ sur le second membre entraîne une erreur relative de l'ordre de 10 sur plusieurs coordonnées de la solution du système, et donc une amplification des erreurs relatives de l'ordre de 3000.

Conditionnement d'un système linéaire, second exemple

On considére maintenant de légères modifications sur la matrice :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

De petites variations des éléments de la matrice modifient considérablement la solution du système linéaire.

Conditionnement et erreurs

On considère le système $A(x + \delta x) = b + \delta b$.

On suppose A inversible. On a : $\delta x = A^{-1}\delta b$.

Si on choisit alors une norme matricielle $|| \ ||$, subordonnée à une norme vectorielle, on trouve :

$$||\delta x|| \leqslant ||A^{-1}|| \, ||\delta b||$$

et, de plus, $||b|| \leqslant ||A|| \, ||x||$

On a sur x une erreur relative $\dfrac{||\delta x||}{||x||}$ majorée par $||A|| \, ||A^{-1}|| \, \dfrac{||\delta b||}{||b||}$.

Définition

On appelle *conditionnement* de la matrice A (relativement à la norme $|| \ ||$) la quantité $||A|| \, ||A^{-1}||$, qu'on note $\mathrm{cond}_{|| \ ||}(A)$ ou $\mathrm{cond}(A)$.

Conditionnement et erreurs, suite

On pourrait prouver de même que si l'on apporte maintenant une petite variation aux coefficients de A, de sorte que cette matrice devienne $A + \delta A$, alors :

$$\frac{||\delta x||}{||x + \delta x||} \leqslant ||A|| \, ||A^{-1}|| \, \frac{||\delta A||}{||A||}.$$

Ces deux majorations prouvent l'intérêt du conditionnement. Une matrice est d'autant mieux conditionnée que son conditionnement (qui est toujours supérieur ou égal à 1) est proche de 1.

Conditionnement, suite

Théorème

Soit A une matrice inversible. On a :

• $\text{cond}(A) \geqslant 1$

• $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$

• pour tout $\alpha \neq 0$, $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$

• en notant cond_2 le conditionnement associé à $\|\ \|_2$ et en notant $\mu_1(A)$ et $\mu_n(A)$ la plus petite et la plus grande des valeurs singulières de A, $\text{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$

• si A est normale, $\text{cond}_2(A) = \dfrac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$ où les $\lambda_i(A)$ représentent les valeurs propres de A

• si A est orthogonale, $\text{cond}_2(A) = 1$

Un calcul de conditionnement

On considère la matrice utilisée précédemment :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a pour valeurs propres approchées :

$$\lambda_1 \approx 0,01015 < \lambda_2 \approx 0,8431 < \lambda_3 \approx 3,858 < \lambda_4 \approx 30,2887.$$

On a ainsi : $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \approx 2984.$

La matrice A a donc un très mauvais conditionnement, ce qui explique la sensibilité aux erreurs constatée précédemment.

Diminuer le conditionnement d'une matrice

Comme pour tout $\alpha \neq 0$, $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$, on ne peut pas diminuer le conditionnement de A en multipliant A par un scalaire.

On peut le faire en multipliant chaque ligne (et/ou chaque colonne) par un coefficient approprié ; c'est là le problème de l'*équilibrage d'une matrice*, qui peut s'énoncer comme suit :

étant donnée une matrice A, déterminer deux matrices diagonales inversibles D_1 et D_2 vérifiant :

$\mathrm{cond}(D_1 A D_2) = \inf_{\Delta_1, \Delta_2 \text{ diagonales inversibles}} \mathrm{cond}(\Delta_1 A \Delta_2)$.

On résout alors $Ax = b$ en deux étapes :
- résolution de $D_1 A D_2 y = D_1 b$
- résolution de $x = D_2 y$.

Équilibrage d'une matrice

Le conditionnement n'est pas une fonction simple des éléments de D_1 et D_2.

On pose $A' = \Delta_1 A \Delta_2$. En notant x_i le i^e élément de la diagonale de Δ_1 et y_i le i^e élément de la diagonale de Δ_2, on a : $a'_{ij} = x_i a_{ij} y_j$.

On pose $E = \{(i,j) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n \text{ et } a_{ij} \neq 0\}$.

On cherche deux matrices Δ_1 et Δ_2 diagonales et inversibles qui minimisent le rapport :

$$\frac{\max_{(i,j)\in E} |a'_{ij}|}{\min_{(i,j)\in E} |a'_{ij}|}.$$

Équilibrage d'une matrice, suite et fin

On passe aux logarithmes en posant $\alpha_{ij} = \ln|a_{ij}|$, $u_i = \ln|x_i|$, $v_j = \ln|y_j|$.
Le problème devient :

$$\text{minimiser}_{\,u_i, v_j \text{ avec } (i,j)\in E} \left[\max_{(i,j)\in E}(\alpha_{ij}+u_i+v_j) - \min_{(i,j)\in E}(\alpha_{ij}+u_i+v_j)\right],$$

d'où le programme linéaire suivant (on peut se restreindre par une translation au cas où le minimum sur les u_i et v_j de $\alpha_{ij}+u_i+v_j$ vaut 0) :

$$\begin{cases} \text{minimiser } z \\ \text{avec, pour tout } (i,j)\in E, \quad 0 \leqslant \alpha_{ij}+u_i+v_j \leqslant z \\ u_i \text{ et } v_j \text{ de signes quelconques.} \end{cases}$$

Chapitre 3 : résolution de systèmes linéaires

Généralités

Le problème

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée inversible de dimension n, $x = (x_i)$ et $b = (b_i)$ deux vecteurs colonnes de dimension n ; résoudre par rapport à x le système $Ax = b$.

Remarques

• Les méthodes numériques de résolution n'utilisent généralement pas le calcul de A^{-1}.

• Si A est sous forme triangulaire supérieure avec des termes diagonaux non nuls, la résolution est aisée.

- On commence par résoudre la dernière relation, qui est une équation linéaire en la seule variable x_n,
- on reporte cette valeur dans l'avant-dernière relation qui devient une équation en x_{n-1},
- ...
- ainsi de proche en proche jusqu'à x_1.

Méthode de remontée

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1}x_1 + & \dots & + & a_{1,n-1}x_{n-1} & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 & & & \dots & & & & \\
 & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}
\right.
$$

$$
\Rightarrow \left\{
\begin{array}{l}
x_n = \dfrac{b_n}{a_{n,n}} \\
x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\
\dots \\
x_1 = \dfrac{b_1 - a_{1,2}x_2 - \dots - a_{1,n}x_n}{a_{1,1}}
\end{array}
\right.
$$

Cette méthode, dite *méthode de remontée*, nécessite $n(n-1)/2$ additions, $n(n-1)/2$ multiplications et n divisions.

Méthode de Gauss, exemple

Résoudre le système ci-dessous par la méthode de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{2}x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -1 \\ 10x_1 & - & 7x_2 & + & 13x_3 & = & -3 \end{array}\right.$$

On désire ne garder x_1 que sur la première ligne.
On multiplie la première ligne par -2 et on l'ajoute à la deuxième ligne, puis on multiplie la première ligne par -5 et on l'ajoute à la troisième ligne :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ & - & \mathbf{1}x_2 & + & 11x_3 & = & -11 \\ & - & 12x_2 & + & 28x_3 & = & -28 \end{array}\right.$$

Méthode de Gauss, exemple, suite et fin

On a :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ & - & \mathbf{1}x_2 & + & 11x_3 & = & -11 \\ & - & 12x_2 & + & 28x_3 & = & -28 \end{array}\right.$$

On ne veut avoir x_2 que dans les deux premières lignes. On multiplie la deuxième ligne par -12 et on l'ajoute à la troisième ligne :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ & - & x_2 & + & 11x_3 & = & -11 \\ & & & - & 104x_3 & = & 104 \end{array}\right.$$

Le système est triangulaire, on peut appliquer la méthode de remontées :

$x_3 = -1$, $x_2 = \dfrac{-11 - 11x_3}{-1} = 0$, $x_1 = \dfrac{5 - x_2 + 3x_3}{2} = 1$.

Méthode de Gauss

Utilisée lorsque la matrice A est inversible quelconque.

Le principe :

• À l'aide de combinaisons linéaires entre les lignes de A, on élimine successivement certaines inconnues des relations, pour obtenir une forme $(MA)x = Mb$ où MA est une matrice triangulaire supérieure. On ne calcule pas M, mais on construit directement MA et Mb.

• On résout $(MA)x = Mb$ par une méthode de remontée.

Étape d'élimination

- On suppose ici que $a_{1,1} \neq 0$ et on nomme *pivot* ce coefficient (si $a_{1,1} = 0$, on se ramène à $a_{1,1} \neq 0$ par un échange de lignes).
- Pour chaque ligne i, soit $\beta_{i,1} = \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$. On ajoute à la ligne i la première ligne multipliée par $-\beta_{i,1}$ (cela revient à multiplier A et b par la matrice E_1 différant de la matrice I par $e^1_{1,i} = -\beta_{i,1}$, $i \geqslant 2$).
- On obtient une matrice A_1 dont la première colonne n'a que des 0 sous le premier terme qui, lui, est non nul, et un vecteur b_1. On remarque que A et A_1 ont même déterminant car $\det(E_1) = 1$.
- On recommence en prenant comme pivot le coefficient $a^1_{2,2}$ supposé non nul ; soit $\beta_{i,2} = \dfrac{a^1_{i,2}}{a^1_{2,2}}$. On ajoute à la ligne i la deuxième ligne multipliée par $-\beta_{i,2}$ (cela revient à multiplier A^1 et b^1 par la matrice E_2 différant de la matrice I par $e^2_{i,2} = -\beta_{i,2}$, $i \geqslant 3$).
- On réitère jusqu'à obtenir A_{n-1} triangulaire supérieure.

Méthode de Gauss, remarques

• Le déterminant de A s'obtient par le produit des pivots multiplié par $(-1)^p$, où p représente le nombre de fois que le pivot n'était pas sur la diagonale.

Pour l'exemple traité ci-dessus, le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 10 & -7 & 13 \end{pmatrix}$$

vaut $2 \times (-1) \times (-104) = 208$.

• Si aucune interversion de lignes n'a été faite, on a :
$A_{n-1} = E_{n-1} E_{n-2} ... E_2 E_1 A$.

Second exemple d'application de la méthode de Gauss

On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{2}x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 6x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 27 \end{array}\right.$$

Après la première itération, en ayant choisi comme pivot la valeur 2, en gras ci-dessus, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -3 \\ & & 0x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \\ & & \mathbf{2}x_2 & + & 17x_3 & = & 36 \end{array}\right.$$

Le pivot est le coefficient de x_2 dans la dernière ligne (de valeur 2) ; on échange la deuxième et la troisième ligne.

Second exemple d'application, suite et fin

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = -3 \\ & & \mathbf{2}x_2 & + & 17x_3 & = 36 \\ & & 0x_2 & + & 5x_3 & = 10 \end{array}\right.$$

Le coefficient de x_2 dans la dernière ligne étant nul, il ne reste plus qu'à effectuer la remontée :

$$x_3 = 10/5 = 2,\ x_2 = \frac{36 - 17x_3}{2} = 1,\ x_1 = \frac{-3 - x_2 + 3x_3}{2} = 1.$$

Remarque : les lignes ayant été échangées une fois, le déterminant de A est égal au déterminant de la matrice correspondant au dernier système multiplié par -1. On a donc :

$\det(A) = (-1) \times 2 \times 2 \times 5 = -20.$

Choix du pivot

À cause des erreurs d'arrondi, le choix du pivot est important. Un pivot trop petit en valeur absolue peut conduire à de mauvaises solutions du fait de la division par le pivot.

Deux stratégies sont possibles :

• *Pivot partiel* : on choisit dans la colonne courante le terme de plus grande valeur absolue situé sous la diagonale ou sur celle-ci.

• *Pivot total* : on choisit le terme de plus grande valeur absolue de la matrice résiduelle, c'est-à-dire, si on est à l'étape $n-k+1$, la matrice constituée des k dernières lignes et des k dernières colonnes. Cette méthode est plus coûteuse en temps.

Complexité

On peut évaluer le nombre d'opérations nécessaires pour la méthode de Gauss ; dans le cas où on ne choisit pas le pivot, on effectue en tout environ $\frac{n^3}{3}$ additions, autant de multiplications, $\frac{n^2}{2}$ divisions et donc au total un nombre d'opérations arithmétiques équivalent à $\frac{2n^3}{3}$.

Méthode de Gauss et factorisation LU, matrice E_k

Ici et dans la suite, on suppose qu'on applique la méthode de Gauss et qu'aucune interversion de lignes ou de colonnes n'est effectuée.

On s'intéresse au calcul de la matrice A_{n-1}, triangulaire inférieure, obtenue à la fin de la méthode de Gauss.

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & & \\ & & \dots & 0 & \dots & & \\ & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & -\beta_{k+1,k} & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & & & \\ 0 & & 0 & -\beta_{n,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

où, pour $i > k$, $\beta_{i,k} = \dfrac{a_{i,k}^{k-1}}{a_{k,k}^{k-1}}$; à la k^e étape, on multiplie la k^e ligne (ligne du pivot) par $-\beta_{i,k}$ pour obtenir, en ajoutant cette k^e ligne ainsi multipliée à la i^e ligne, la nouvelle i^e ligne.

Méthode de Gauss et factorisation LU, suite

On observe : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Cette égalité permet de se convaincre que :

$$E_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & & \\ & & \dots & 0 & \dots & & \\ & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{k+1,k} & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & & & \\ 0 & & 0 & \beta_{n,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode de Gauss et factorisation LU, suite

On observe :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & e & 1 & 0 & 0 \\ c & f & 0 & 1 & 0 \\ d & g & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & e & 1 & 0 & 0 \\ c & f & h & 1 & 0 \\ d & g & i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss et factorisation LU, suite

L'observation précédente permet de se convaincre de :

$$E_1^{-1} \dots E_{n-2}^{-1} E_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \\ \beta_{2,1} & 1 & 0 & \dots & & \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & 1 & 0 & \dots & \\ & & & \dots & & \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \beta_{n,3} & \dots & \beta_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

où, pour $i > k$, $\beta_{i,k} = \dfrac{a_{i,k}^{k-1}}{a_{k,k}^{k-1}}$; à la k^e étape, on multiplie la k^e ligne (ligne du pivot) par $-\beta_{i,k}$ pour obtenir, en ajoutant cette k^e ligne ainsi multipliée à la i^e ligne, la nouvelle i^e ligne.

Méthode de Gauss et factorisation LU, suite et fin

On rappelle : $A_{n-1} = E_{n-1}E_{n-2}...E_2E_1A$; la matrice A_{n-1} est obtenue à la fin de la méthode de Gauss et est triangulaire supérieure. On pose $U = A_{n-1}$.

D'où : $A = E_1^{-1}E_2^{-1}...E_{n-1}^{-1}U$.

On pose : $L = E_1^{-1}E_2^{-1}...E_{n-1}^{-1}$; la matrice L est triangulaire inférieure.

Définition

On appelle factorisation LU d'une matrice A une factorisation $A = LU$, où la matrice L est triangulaire inférieure et la matrice U triangulaire supérieure.

La méthode de Gauss nous a fourni une décomposition LU avec des 1 sur la diagonale de L.

Exemple de factorisation LU

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 10 & -7 & 13 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \times(-2) \\ \times 1 \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} \times(-5) \\ \\ \times 1 \end{array}$$

On additionne la première ligne multipliée par -2 à la deuxième ligne ; $\beta_{2,1} = a_{2,1}/a_{1,1} = 2$.
On additionne la première ligne multipliée par -5 à la troisième ligne ; $\beta_{3,1} = a_{3,1}/a_{1,1} = 5$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & -12 & 28 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \times(-12) \\ \times 1 \end{array} \right.$$

On additionne la deuxième ligne multipliée par -12 à la troisième ligne ; $\beta_{3,2} = a^1_{3,2}/a^1_{2,2} = 12$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & -104 \end{pmatrix}$$

Exemple de factorisation LU, suite et fin

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & -104 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier $A = LU$.

Exercice

Factorisation LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 14 \\ 1 & -2 & 10 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix}$?

Inverse de la matrice A ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 14 \\ 1 & -2 & 10 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \times -1 \\ \times 1 \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} \times 2 \\ \\ \times 1 \end{array}$$

$$\beta_{2,1} = a_{2,1}/a_{1,1} = 1, \beta_{3,1} = a_{3,1}/a_{1,1} = -2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \times 2 \\ \times 1 \end{array} \right. \qquad \beta_{3,2} = a^1_{3,2}/a^1_{2,2} = -2$$

$$A_2 = U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice, suite

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les trois colonnes de la matrice A^{-1}, on résout simultanément les systèmes $Ax = b$ avec $b = e_1, b = e_2, b = e_3$ où e_1, e_2 et e_3 sont les vecteurs de la base canonique.
$Ax = b \Leftrightarrow Ly = b$ et $Ux = y$.

$$Ly = e_1|e_2|e_3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr|r|r} y_1 & & & & & = & 1 & 0 & 0 \\ y_1 & + & y_2 & & & = & 0 & 1 & 0 \\ -2y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & = & 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr|r|r} y_1 & = & 1 & 0 & 0 \\ y_2 & = & -1 & 1 & 0 \\ y_3 & = & 0 & 2 & 1 \end{array} \right.$$

Exercice, suite

En reprenant $\left\{\begin{array}{rcr|r|r} y_1 & = & 1 & 0 & 0 \\ y_2 & = & -1 & 1 & 0 \\ y_3 & = & 0 & 2 & 1 \end{array}\right.$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on obtient pour $Ux = y$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|r|r} x_1 & - & 3x_2 & + & 14x_3 & = & 1 & 0 & 0 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & -1 & 1 & 0 \\ & & & & x_3 & = & 0 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr|r|r} x_1 & = & -2 & -1 & -2 \\ x_2 & = & -1 & 9 & 4 \\ x_3 & = & 0 & 2 & 1 \end{array}\right. \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Existence de la factorisation LU

Théorème d'existence de la factorisation LU

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée inversible telle que, pour tout k compris entre 1 et n, la sous-matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$ soit inversible. Alors, la factorisation $A = LU$ est possible (sans échange de lignes). De plus, avec $(L)_{ii} = 1$, la décomposition est unique.

Si la factorisation LU échoue (échange de lignes nécessaires), on peut permuter au départ les lignes de la matrice A pour obtenir une matrice A' pour laquelle la factorisation LU est possible.

Si on doit résoudre plusieurs systèmes linéaires de même matrice A, on calcule la factorisation LU. La résolution de tout système $Ax = b$ se ramène à la résolution de deux systèmes de matrices triangulaires : $Ly = b$ puis $Ux = y$ ($n(n-1)$ additions, $n(n-1)$ multiplications et $2n$ divisions).

La méthode de Gauss-Jordan

Phase d'élimination : on élimine les termes non diagonaux.

Cette méthode est notamment utilisée pour le calcul de l'inverse d'une matrice. On résout alors simultanément les n systèmes linéaires $Ax_j = e_j$, l'inconnue étant le vecteur colonne x_j (le j^{e} vecteur de la matrice inverse), les e_j constituant les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La méthode de Gauss-Jordan, suite

Exemple : Calcul de l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 14 \\ 1 & -2 & 10 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix}.$$

On résout les trois systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcc|c|c} x_1 & - & 3x_2 & + & 14x_3 & = & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 10x_3 & = & 0 & 1 & 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 19x_3 & = & 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

La méthode de Gauss-Jordan, suite

On a les trois systèmes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc|c|c} x_1 & - & 3x_2 & + & 14x_3 & = & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 10x_3 & = & 0 & 1 & 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 19x_3 & = & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Première itération (avec pivot partiel), échange :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc|c|c} -\mathbf{2}x_1 & + & 4x_2 & - & 19x_3 & = & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 10x_3 & = & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 14x_3 & = & 1 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

La méthode de Gauss-Jordan, suite

On avait :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc|c|c} -\mathbf{2}x_1 & + & 4x_2 & - & 19x_3 & = & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 10x_3 & = & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 14x_3 & = & 1 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcc|c|c} -\mathbf{2}x_1 & + & 4x_2 & - & 19\,x_3 & = & 0 & 0 & 1 \\ & & 0x_2 & + & 1/2\,x_3 & = & 0 & 1 & 1/2 \\ & - & x_2 & + & 9/2\,x_3 & = & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right.$$

La méthode de Gauss-Jordan, exemple, suite

On avait :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl|c|c} -\mathbf{2}x_1 & + & 4x_2 & - & 19\,x_3 & = & 0 & 0 & 1 \\ & & 0x_2 & + & 1/2\,x_3 & = & 0 & 1 & 1/2 \\ & - & x_2 & + & 9/2\,x_3 & = & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right.$$

Deuxième itération (avec pivot total) :

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl|c|c} -2x_1 & - & 19x_3 & + & 4x_2 & = & 0 & 0 & 1 \\ & & \mathbf{9/2}\,x_3 & - & x_2 & = & 1 & 0 & 1/2 \\ & & 1/2\,x_3 & + & 0x_2 & = & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right.$$

On élimine les termes de la deuxième colonne sauf le terme diagonal. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rrcrcl|c|c} -2x_1 & & - & 2/9\,x_2 & = & 38/9 & 0 & 28/9 \\ & 9/2\,x_3 & - & x_2 & = & 1 & 0 & 1/2 \\ & & & \mathbf{1/9}\,x_2 & = & -1/9 & 1 & 4/9 \end{array}\right.$$

La méthode de Gauss-Jordan, exemple, suite et fin

On avait : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr|r|r} -2x_1 & & & - & 2/9\ x_2 & = & 38/9 & 0 & 28/9 \\ & & 9/2\ x_3 & - & x_2 & = & 1 & 0 & 1/2 \\ & & & & \mathbf{1/9}\ x_2 & = & -1/9 & 1 & 4/9 \end{array}\right.$

Troisième et dernière itération :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|r|r} -2x_1 & & & & & = & 4 & 2 & 4 \\ & & 9/2 & x_3 & & = & 0 & 9 & 9/2 \\ & & & & 1/9\, x_2 & = & -1/9 & 1 & 4/9 \end{array}\right.$$

On résout :

$$\left\{\begin{array}{rcr|r|r} x_1 & = & -2 & -1 & -2 \\ x_2 & = & -1 & 9 & 4 \\ x_3 & = & 0 & 2 & 1 \end{array}\right. \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trois échanges : $\det(A) = (-1)^3 \times (-2) \times \dfrac{9}{2} \times \dfrac{1}{9} = 1.$

Méthode de Cholesky

Méthode de Cholesky : factorisation intéressante dans le cas des matrices **symétriques définies positives**.

On peut choisir alors une factorisation LU avec $U = L^{\mathrm{t}}$ en renonçant à avoir des termes diagonaux tous égaux à 1 dans L.

Théorème

Soit A une matrice symétrique définie positive. Il existe une matrice triangulaire inférieure B vérifiant $A = BB^{\mathrm{t}}$. De plus, on peut imposer que les éléments diagonaux de la matrice B soient tous strictement positifs et la factorisation $A = BB^{\mathrm{t}}$ est alors unique.

Méthode de Cholesky, suite

En pratique, on calcule la matrice $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & & b_{nn} \end{pmatrix}$

colonne par colonne, à partir des égalités la définissant :

pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} b_{ik} b_{jk} = a_{ji}$.

- Pour la première colonne, la formule donne :
  - $\star$ $b_{11} = \sqrt{a_{11}}$
  - $\star$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$, $b_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{b_{11}}$.
- Pour $2 \leqslant j \leqslant n$:
  - $\star$ sur la diagonale, $b_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} {b_{jk}}^2}$
  - $\star$ pour $j < i \leqslant n$, $b_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk}}{b_{jj}}$.

Méthode de Cholesky, remarques

Remarques.
1. La preuve du théorème précédent permettrait de montrer que les b_{ij} ainsi obtenus sont bien définis, grâce au fait que A est définie positive.

2. Le déterminant de la matrice A peut se calculer facilement :

$$\det(A) = (b_{11} b_{22} ... b_{nn})^2.$$

Un système $Ax = b$ devient alors $BB^{t}x = b$.

Pour résoudre le système, on résout $By = b$ puis $B^{t}x = y$.

Méthode de Cholesky, complexité

Au total (la factorisation et les deux résolutions), on a effectué de l'ordre de

- $n^3/6$ additions,
- $n^3/6$ multiplications,
- $n^2/2$ divisions,
- n extractions de racines carrées,

soit de l'ordre de $n^3/3$ opérations, environ la moitié des opérations mises en œuvre par la méthode de Gauss.

On a intérêt à appliquer la méthode de Cholesky plutôt que la méthode de Gauss quand A est symétrique définie positive.

Méthode de Cholesky, exemple

Soit le système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & & & = & 4 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -8 \\ & & 3x_2 & + & 10x_3 & = & -20 \end{array}\right.$

La matrice A correspondante est : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est symétrique définie positive. En effet, soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ représenté comme un vecteur colonne :

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{t}}Ax &= 4{x_1}^2 - 4x_1x_2 + 2{x_2}^2 + 6x_2x_3 + 10{x_3}^2 \\ &= (2x_1 - x_2)^2 + (x_2 + 3x_3)^2 + {x_3}^2. \end{aligned}$$

Si x est non nul, $x^{\mathrm{t}}Ax$ est un réel strictement positif.

Méthode de Cholesky, exemple, suite

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Première étape : on calcule B.

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2,\ b_{21} = \frac{a_{21}}{b_{11}} = -1,\ b_{31} = \frac{a_{31}}{b_{11}} = 0$$

$$b_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{k=1}^{1} {b_{2k}}^2} = \sqrt{2-1} = 1$$

$$b_{32} = \frac{a_{32} - \sum_{k=1}^{1} b_{3k} b_{2k}}{b_{22}} = \frac{3 - 0 \times (-1)}{1} = 3$$

$$b_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{k=1}^{2} {b_{3k}}^2} = \sqrt{10 - 0 - 9} = 1.$$

D'où : $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det(A) = (2 \times 1 \times 1)^2 = 4$.

Méthode de Cholesky, exemple, suite

Seconde étape : on résout $By = b$ et $B^t x = y$.

On avait : $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -20 \end{pmatrix}$.

Le système $By = b$ s'écrit : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2y_1 & & & & & = & 4 \\ -y_1 & + & y_2 & & & = & -8 \\ & & 3y_2 & + & y_3 & = & -20 \end{array} \right.$
qui a pour solution $y_1 = 2, y_2 = -6, y_3 = -2$.

Méthode de Cholesky, exemple, suite

On a : $B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Le système $B^t x = y$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & -6 \\ & & & & x_3 & = & -2 \end{array} \right.$$

qui a pour solution $x_3 = -2, x_2 = 0, x_1 = 1$.

La solution du système est donc : $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Si on avait un autre système à résoudre avec la même matrice A, seule la seconde étape serait appliquée.

Chapitre 4 : valeurs propres et vecteurs propres

Calculer des valeurs propres, c'est difficile

Pour $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \rightarrow$ « Compagne du polynôme P » $=$

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & \ldots & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la compagne de P vaut $(-1)^n P(\lambda)$; elle a donc pour valeurs propres les racines de P.

Théorème d'Abel $\rightarrow$ impossible de calculer les racines de tout polynôme à partir du degré 5 à l'aide d'un nombre fini d'applications des quatre opérations arithmétiques usuelles plus l'extraction de racines.

Si une méthode de recherche de valeurs propres convergeait toujours en un nombre fini de ces opérations, il en serait alors de même de la recherche des racines d'une équation polynomiale quelconque, ce qui est contraire au résultat d'Abel.

Idée de base

Pour calculer une approximation des valeurs propres d'une matrice A, l'idée de base est de rechercher une matrice semblable à A, *i.e.* de la forme $P^{-1}AP$, triangulaire ou diagonale ; sa diagonale sera constituée des valeurs propres de A.

Dans ce chapitre une seule méthode, la méthode de Jacobi, qui s'applique au cas des matrices symétriques réelles.

Rappelons que les valeurs propres d'une telle matrice sont réelles.

Méthode de Jacobi

Soit A une matrice symétrique réelle non diagonale, soient deux indices p et q vérifiant $\mathbf{p} < \mathbf{q}$ tels que a_{pq} soit non nul. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \dots & & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & \dots & & & & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \dots & & & \dots & & \\ & & & \cos\theta & & \dots & & \sin\theta & & & \\ & & & & 1 & \dots & & & & & \\ & & & & & \dots & & & & & \\ & & & & & \dots & 1 & & & & \\ & & & -\sin\theta & & \dots & & \cos\theta & & & \\ & & \dots & & & \dots & & & \dots & & \\ 0 & 0 & & & & \dots & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & \dots & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Omega_{pp} = \Omega_{qq} = \cos\theta, \Omega_{pq} = \sin\theta, \Omega_{qp} = -\sin\theta.$

Méthode de Jacobi, suite

La matrice Ω est orthogonale. C'est la matrice de rotation d'angle $-\theta$ dans le plan défini par les p^{e} et q^{e} vecteurs de base.

On pose : $B = \Omega^t A \Omega$. La matrice B, elle aussi symétrique, est semblable à la matrice A et admet donc les mêmes valeurs propres que A. On peut vérifier les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \text{si } i \notin \{p,q\} \text{ et } j \notin \{p,q\}, \quad b_{ij} = b_{ji} = a_{ij} \\ \text{si } i \notin \{p,q\}, \quad b_{pi} = b_{ip} = a_{pi}\cos\theta - a_{qi}\sin\theta \\ \text{si } i \notin \{p,q\}, \quad b_{qi} = b_{iq} = a_{pi}\sin\theta + a_{qi}\cos\theta \\ b_{pp} = a_{pp}\cos^2\theta + a_{qq}\sin^2\theta - a_{pq}\sin 2\theta \\ b_{qq} = a_{pp}\sin^2\theta + a_{qq}\cos^2\theta + a_{pq}\sin 2\theta \\ b_{pq} = b_{qp} = a_{pq}\cos 2\theta + \dfrac{a_{pp} - a_{qq}}{2}\sin 2\theta. \end{cases}$$

Méthode de Jacobi, suite

On a : $b_{pq} = b_{qp} = a_{pq} \cos 2\theta + \dfrac{a_{pp} - a_{qq}}{2} \sin 2\theta$. On remarque l'équivalence : $b_{pq} = 0 \Leftrightarrow \cot 2\theta = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$.
Pour faire en sorte d'avoir $b_{pq} = 0$, on va choisir θ pour qu'il vérifie la formule ci-dessus. Il y a quatre solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, deux solutions successives différant de $\pi/2$. Il y a donc une unique solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, **c'est la solution retenue**.
On pose : $t = \tan\theta, s = \sin\theta, c = \cos\theta$.

$$\cot 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

Méthode de Jacobi, suite

On pose : $x = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ et on a $\cot 2\theta = \dfrac{1-t^2}{2t}$.

On cherche à avoir $\cot 2\theta = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ i.e. $\dfrac{1-t^2}{2t} = x$; t doit vérifier l'équation : $t^2 + 2xt - 1 = 0$.

Le produit des racines vaut -1 et θ est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$
$\to$ t est la racine de l'équation de plus petite valeur absolue si les racines ne sont pas 1 et -1, et vaut 1 si $x = 0$.

Comme on a $c > 0$, il vient $c = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $s = ct = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Formule pour b_{pp}

Rappels : $x = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} = \dfrac{1 - t^2}{2t}$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $s = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$,
$b_{pp} = a_{pp} \cos^2\theta + a_{qq} \sin^2\theta - a_{pq} \sin 2\theta$.

$$a_{qq} = a_{pp} + \frac{1-t^2}{t} a_{pq}$$

$$\begin{aligned} b_{pp} &= a_{pp} \frac{1}{1+t^2} + \left[a_{pp} + \frac{1-t^2}{t} a_{pq} \right] \frac{t^2}{1+t^2} - 2a_{pq} \frac{t}{1+t^2} \\ &= a_{pp} \left[\frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2} \right] - t a_{pq} \left[\frac{2}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} \right] \\ &= a_{pp} - t a_{pq}. \end{aligned} \tag{1}$$

On montre de même : $b_{qq} = a_{qq} + t a_{pq}$.

Méthode de Jacobi, suite

Avec $c = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $s = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ les égalités :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{si } i \notin \{p,q\} \text{ et } j \notin \{p,q\}, \quad b_{ij} = b_{ji} = a_{ij} \\ \text{si } i \notin \{p,q\}, \quad b_{pi} = b_{ip} = a_{pi}\cos\theta - a_{qi}\sin\theta \\ \text{si } i \notin \{p,q\}, \quad b_{qi} = b_{iq} = a_{pi}\sin\theta + a_{qi}\cos\theta \\ b_{pp} = a_{pp}\cos^2\theta + a_{qq}\sin^2\theta - a_{pq}\sin 2\theta \\ b_{qq} = a_{pp}\sin^2\theta + a_{qq}\cos^2\theta + a_{pq}\sin 2\theta \end{array}\right.$$

deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{si } i \notin \{p,q\} \text{ et } j \notin \{p,q\}, b_{ij} = b_{ji} = a_{ij} \\ \text{si } i \notin \{p,q\}, \quad b_{pi} = b_{ip} = ca_{pi} - sa_{qi} \\ \text{si } i \notin \{p,q\}, \quad b_{qi} = b_{iq} = sa_{pi} + ca_{qi} \\ b_{pp} = a_{pp} - ta_{pq} \\ b_{qq} = a_{qq} + ta_{pq}. \end{array}\right.$$

Une étape de la méthode de Jacobi

- On choisit dans la matrice courante deux indices p et q, avec $\mathbf{p < q}$.
- On pose $x = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$.
- On résout : $t^2 + 2xt - 1 = 0$. On retient pour t la **racine de plus petite valeur absolue** si les racines ne sont pas 1 et -1, et **1 si** $\mathbf{x = 0}$.
- On calcule : $c = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $s = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.
- On calcule les nouveaux coefficients :

$$\begin{cases} \text{si } i \notin \{p,q\} \text{ et } j \notin \{p,q\},\, b_{ij} = b_{ji} = a_{ij} \\ \text{si } i \notin \{p,q\}, \quad b_{pi} = b_{ip} = ca_{pi} - sa_{qi} \\ \text{si } i \notin \{p,q\}, \quad b_{qi} = b_{iq} = sa_{pi} + ca_{qi} \\ b_{pp} = a_{pp} - ta_{pq} \\ b_{qq} = a_{qq} + ta_{pq}. \end{cases}$$

Remarque

Cette transformation, qui a le mérite d'annuler des éléments non diagonaux, risque de rendre en même temps non nuls des éléments qui étaient précédemment nuls.
C'est inévitable, puisque, dans le cas contraire, on diagonaliserait la matrice A avec environ n^3 opérations élémentaires, alors qu'on a vu que cela était impossible.

Premier théorème

Théorème

On a : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^2$,

$\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2 = \sum_{i=1}^n b_{ii}^2$.

La première relation résulte de la conservation de la norme $|| \, ||_E$ par une transformation othogonale.
La transformation modifie uniquement les éléments des lignes et colonnes p et q. Les éléments diagonaux autres que a_{pp} et a_{qq} sont invariants ainsi que leurs carrés. On a :

$$\begin{aligned} b_{pp}^2 + b_{qq}^2 &= a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2t^2 a_{pq}^2 + 2ta_{pq}(a_{qq} - a_{pp}) \\ &= a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2 + 2a_{pq}(t^2 a_{pq} + t(a_{qq} - a_{pp}) - a_{pq}). \end{aligned}$$

Or, le choix de t fait que l'on a $t^2 + t\dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{a_{pq}} - 1 = 0$.
D'où le résultat énoncé : $b_{pp}^2 + b_{qq}^2 = a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2$.

Deux remarques

Le poids de la matrice se déporte, au cours des itérations de la méthode de Jacobi, sur la diagonale de la matrice : les éléments non diagonaux ont un poids qui diminue.

Il semble que pour accélérer la convergence du procédé, on ait intérêt à choisir comme couple (p, q) les indices d'un élément non diagonal de valeur absolue maximum. C'est ce choix qui est fait dans la méthode de Jacobi dite classique.

Deux théorèmes

Théorème

La suite des matrices obtenues par la méthode de Jacobi converge vers une matrice diagonale contenant les valeurs propres de A.

La méthode de Jacobi permet aussi d'obtenir une approximation des vecteurs propres d'une matrice A, au moins quand les valeurs propres de A sont distinctes :

Théorème

Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont distinctes, alors la suite des produits des matrices Ω, en mettant **à chaque étape** la nouvelle matrice Ω **à droite du produit**, converge vers une matrice orthogonale dont les vecteurs colonnes constituent une base orthonormale de vecteurs propres de la matrice A.

Si on veut calculer une approximation des valeurs propres, il faut garder, à chaque étape i, la matrice Ω_i correspondante.

Exemple 1

Appliquer la méthode de Jacobi à la recherche d'approximations des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a que $a_{1,2}$ et $a_{2,1}$ à considérer.

On a $p = 1$, $q = 2$ (il faut avoir $p < q$).

On a $x = 0$ et donc $t = 1, s = c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemple 1, suite

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on rappelle : } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- terme inchangé (ici, un seul *a priori*) : $b_{33} = a_{33} = 5$

- première ligne et première colonne, sauf diagonale :
$b_{12} = b_{21} = 0,\ b_{13} = b_{31} = ca_{13} - sa_{23} = 0$

- deuxième ligne et deuxième colonne, sauf diagonale :
$b_{23} = b_{32} = sa_{13} + ca_{23} = 0$

- termes diagonaux qui changent *a priori* :
$b_{11} = a_{11} - ta_{12} = 1 - 2 = -1,\ b_{22} = a_{22} + ta_{12} = 1 + 2 = 3.$

On obtient donc : $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

Exemple 1, suite

On a obtenu :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Omega_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Jacobi converge en une itération et nous donne les valeurs propres (exactement) ainsi que les vecteurs propres de A.

Les valeurs propres de A valent : -1, 3 et 5.
La base orthonormale de vecteurs propres est constituée de :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Exemple 2

Appliquer la méthode de Jacobi à la recherche d'approximations des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Première étape.

On choisit la plus grande valeur absolue d'un coefficient non diagonal : il s'agit de la valeur 4, avec $p = 1, q = 3$.

On calcule x : $x = \frac{7-1}{2\times 4} = \frac{3}{4}$.

On résout l'équation $t^2 + 2xt - 1 = 0$, c'est-à-dire : $t^2 + \frac{3}{2}t - 1 = 0$, qui a pour racines $t = 1/2$ et $t = -2$. On retient la plus petite racine en valeur absolue : $t = 1/2$.

On calcule c et s : $c = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ et $s = tc = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Exemple 2, suite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \; t = 1/2, \; c = \frac{2}{\sqrt{5}}, s = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$b_{13} = b_{31} = 0$

b_{22} reste inchangé : $b_{22} = -3$

$$b_{12} = b_{21} = ca_{12} - sa_{32} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times 2 - \frac{\sqrt{5}}{5} \times (-1) = \sqrt{5}$$

$$b_{32} = b_{23} = sa_{12} + ca_{32} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \times (-1) = 0$$

$$b_{11} = a_{11} - ta_{13} = 1 - \frac{1}{2} \times 4 = -1$$

$$b_{33} = a_{33} + ta_{13} = 7 + \frac{1}{2} \times 4 = 9 \quad \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2, seconde étape

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } \Omega_1 = \begin{pmatrix} 2\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 2\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

On pose : $p = 1, q = 2$. On calcule : $x = \frac{-3+1}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$t^2 - 2\frac{\sqrt{5}}{5}t - 1 = 0$ donne : $t = \frac{\sqrt{5}}{5}(1+\sqrt{6})$ et $t = \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\sqrt{6})$.

On retient : $t = \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\sqrt{6})$.

$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \approx 0,839$ et $s = ct \approx -0,544$.

$c_{33} = b_{33} = 9,\ c_{12} = c_{21} = 0$

$c_{11} = b_{11} - tb_{12} = -1 - \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\sqrt{6})\sqrt{5} = -2+\sqrt{6}$

$c_{22} = b_{22} + tb_{12} = -3 + \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\sqrt{6})\sqrt{5} = -2-\sqrt{6}$

$c_{13} = c_{31} = cb_{13} - sb_{23} = 0,\ c_{23} = c_{32} = sb_{13} + cb_{23} = 0.$

Exemple 2, suite et fin

D'où $C = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage Ω_2 approchée est donnée par :

$$\Omega_2 \approx \begin{pmatrix} 0,839 & -0,544 & 0 \\ 0,544 & 0,839 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La méthode est terminée. Les valeurs propres de A valent : $-2+\sqrt{6}$, $-2-\sqrt{6}$, 9.

Une base orthonormale approchée de vecteurs propres s'obtient en calculant le produit $\Omega_1\Omega_2$:

$$\Omega_1\Omega_2 \approx \begin{pmatrix} 0,75 & -0,486 & 0,447 \\ 0,544 & 0,839 & 0 \\ -0,375 & 0,243 & 0,894 \end{pmatrix}$$

.

Exemple 3

Appliquer une itération de la méthode de Jacobi à la matrice
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Plus grande valeur absolue d'un coefficient non diagonal : 4.

On pose : $p = 1, q = 3,\ x = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$.

$t^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$ donne : $t = \frac{1}{2}$ ou $t = -2$. On retient : $t = \frac{1}{2}$.

$c = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $s = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

$b_{22} = -3,\ b_{13} = b_{31} = 0$

$b_{12} = b_{21} = ca_{12} - sa_{32} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times 2 - \frac{\sqrt{5}}{5} \times 0 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$b_{32} = b_{23} = sa_{12} + ca_{32} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \times 0 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$b_{11} = a_{11} - ta_{13} = -1,\ b_{33} = a_{33} + ta_{13} = 9.$

Exemple 3, suite et fin

On a obtenu :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 4\frac{\sqrt{5}}{5} & -3 & 2\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 2\frac{\sqrt{5}}{5} & 9 \end{pmatrix} \text{ alors que : } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple montre que des coefficients peuvent passer de nuls à non nuls. Néanmoins, en passant de A à B, le poids de la matrice s'est concentré sur la diagonale.

Il faudrait poursuivre la méthode pour calculer une approximation des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice A.