Contrôle de connaissances de MDI 210 - OPTIM

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4, manuscrites ou dactylographiées.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.
Sauf mention contraire, un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.
Le barème (sur 40) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (16 points)

Soient α_1 et α_2 deux réels quelconques et β_1 et β_2 deux réels non nuls avec $|\beta_1| \geq |\beta_2|$. Dans tout l'exercice, on considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

1. (6 points) Déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de A à l'aide de la méthode de Jacobi ; on détaillera les calculs de la première itération (on pourra être plus rapide pour les itérations suivantes, s'il y en a) et on indiquera clairement, pour chaque vecteur propre, quelle valeur propre lui est associée.

Corrigé

On pose $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq 4,\ 1\leq j\leq 4}$. On appelle B_1, B_2, etc. les matrices obtenues après chaque itération de la méthode de Jacobi.

En reprenant les notations du cours, on considère $p = 1$ et $q = 4$ (valeurs correspondant au plus grand terme non diagonal en valeur absolue). On obtient successivement :

$$x = (a_{4,4} - a_{1,1})/2a_{1,4} = 0 \ ;\ t = 1 \ ;\ c = s = 1/\sqrt{2}\ .$$

L'objectif étant d'annuler les termes situés en première ligne et quatrième colonne ou en quatrième ligne et première colonne, on obtient $b_{1,4} = b_{4,1} = 0$.

Pour $i \notin \{1, 4\}$, il vient $b_{1,i} = b_{i,1} = c.a_{1,i} - s.a_{4,i} = 0$; $b_{4,i} = b_{i,4} = s.a_{1,i} + c.a_{4,i} = 0$.

Par ailleurs, on a $b_{1,1} = a_{1,1} - t.a_{1,4} = \alpha_1 - \beta_1$ et $b_{4,4} = a_{4,4} + t.a_{1,4} = \alpha_1 + \beta_1$.

Les autres valeurs de A ne changent pas. La nouvelle matrice B_1 est illustrée ci-dessous :

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 + \beta_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage associée vaut $\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Pour la seconde itération, on obtient, en posant $B_1 = (b_{i,j})_{1\le i\le 4,\ 1\le j\le 4}$:

$$p = 2,\ q = 3\ ;\ x = (b_{3,3} - b_{2,2})/2b_{2,3} = 0\ ;\ t = 1\ ;\ c = s = 1/\sqrt{2}\ ;$$

puis la matrice B_2 par des calculs analogues aux précédents.

$$B_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1-\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2-\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2+\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1+\beta_1 \end{pmatrix}$$

et
$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B_2 étant diagonale, la méthode de Jacobi s'arrête. Les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de B_2, c'est-à-dire $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2$, $\alpha_1 + \beta_1$ et $\alpha_2 + \beta_2$.

Pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres, il suffit de former le produit $\Omega_1\Omega_2$ des matrices de passage. Compte tenu de la forme particulière des matrices Ω_i, ce produit est facile à effectuer. On obtient :

$$\Omega_1\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de $\Omega_1\Omega_2$ donnent une base orthonormée de vecteurs propres de A, respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2$, $\alpha_2 + \beta_2$ et $\alpha_1 + \beta_1$.

Fin de corrigé

2. (4 points) On pose $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4$ et on considère la forme quadratique Q définie sur $\mathbf{R}^4$ par :

$$Q(X) = \frac{1}{2}\left(2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2\right) + 4x_1x_4 - 3x_2x_3.$$

a. Déterminer, à l'aide de la question 1, les valeurs extrémales (maximale ou minimale) prises par Q sur $\mathbf{R}^4$, si de telles valeurs extrémales existent.

Corrigé

En reprenant la définition de la matrice A de la question 1, Q s'écrit $Q(X) = X^t.A.X/2$ pour $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\beta_1 = 4$ et $\beta_2 = -3$. On en déduit que la matrice hessienne $\nabla^2 Q(X)$ de Q vaut A, en tout point X de $\mathbf{R}^4$. Or, une condition nécessaire de minimalité (respectivement de maximalité) locale ou globale est que la matrice hessienne soit positive (respectivement négative), donc ici que les valeurs propres de A soient positives ou nulles (respectivement négatives ou nulles). Or, d'après la question 1, les valeurs propres de A valent –2, 6, 0 et 6.

L'existence d'au moins une valeur propre strictement négative (respectivement strictement positive) fait que Q n'admet pas de minimum (respectivement de maximum), local ou global.
Fin de corrigé

b. On se limite maintenant à la boule B centrée en 0 et de rayon 1 pour la norme 2 (autrement dit, on se limite à X vérifiant $\|X\|_2 \leq 1$ où $\| \|_2$ désigne la norme 2). Déterminer, de nouveau à l'aide de la question 1, les valeurs extrémales (maximale ou minimale) prises par Q sur B, si de telles valeurs extrémales existent.
Indication : on pourra se placer dans $\mathbf{R}^4$ rapporté à la base orthonormée de vecteurs propres déterminée à la question 1.
Corrigé
Plaçons-nous dans $\mathbf{R}^4$ rapporté à la base orthonormée de vecteurs propres déterminée à la question 1. Dans cette base, Q s'écrit $Q(X) = (-2a^2 + 6b^2 + 6d^2)/2$, en notant a, b, c et d les coordonnées de X dans la nouvelle base, avec $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1$ (car la matrice de passage entre les deux bases, donnée par $\Omega_1\Omega_2$, est une matrice de rotation : la norme n'est donc pas modifiée quand on passe d'une base à l'autre). Constatons que l'on a les relations $Q(X) = (-2a^2 + 6b^2 + 6d^2)/2 \leq (6a^2 + 6b^2 + 6c^2 + 6d^2)/2 \leq 6/2 = 3$ pour tout vecteur de B. Le maximum de Q est donc majoré par 3. En prenant par exemple $X = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)^t$ pour la base initiale (ou, de façon équivalente $(0, 1, 0, 0)^t$ dans la base des vecteurs propres), on obtient $Q(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = 3$ (on notera que $(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ appartient bien à B). Le maximum de Q sur B est égal à la moitié de la plus grande des valeurs propres de $\nabla^2 Q$, c'est-à-dire ici 3.
Un raisonnement analogue montre que le minimum de Q sur B est égal à la moitié de la plus petite des valeurs propres de $\nabla^2 Q$, c'est-à-dire ici -1, ce minimum étant atteint pour $X = (1/\sqrt{2}, 0, 0, -1/\sqrt{2})^t$ (pour la base initiale ou, de façon équivalente $(1, 0, 0, 0)^t$ dans la base des vecteurs propres).
Fin de corrigé

3. (6 points) On suppose que l'on a, pour $1 \leq i \leq 2$, $|\alpha_i| > |\beta_i|$ et $\alpha_i \neq 0$.
a. Déterminer la décomposition LU de la matrice A en appliquant, à chaque itération, la stratégie du pivot partiel ; on détaillera les calculs de la première itération (on pourra être plus rapide pour les itérations suivantes, s'il y en a).
Corrigé
Les hypothèses $|\alpha_1| > |\beta_1|$ et $\alpha_1 \neq 0$ font que l'on choisit α_1 comme pivot à la première itération. Les termes de la première colonne situés en ligne 2 ou 3 étant nuls, il n'y a rien à faire pour les lignes 2 et 3. Pour la ligne 4, il convient de multiplier la première ligne par β_1/α_1 et de retrancher ce produit de la quatrième ligne. On obtient ainsi la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 - \dfrac{\beta_1^2}{\alpha_1} \end{pmatrix}.$$

On fait ensuite de même pour la deuxième ligne :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - \dfrac{\beta_2^2}{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 - \dfrac{\beta_1^2}{\alpha_1} \end{pmatrix},$$

Cette matrice étant triangulaire supérieure, il s'agit de la matrice U et le calcul de la décomposition est terminé. La matrice L est par ailleurs donnée par les coefficients dont on a multiplié les lignes à chaque étape :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2/\alpha_2 & 1 & 0 \\ \beta_1/\alpha_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Fin de corrigé

b. On considère le cas pour lequel on a $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Soit $X \in \mathbf{R}^4$ et soit b le vecteur $(0\ \ 4\ \ 5\ \ -3)^t$. Résoudre le système linéaire $A.X = b$ en utilisant la décomposition LU de A.

Corrigé

On résout le système $A.X = LU.X = b$ en deux temps : $L.Y = b$ et $U.X = Y$. Le système $L.Y = b$ s'écrit, en posant $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 4 \\ \dfrac{1}{2} y_2 + y_3 = 5 \\ \dfrac{1}{2} y_1 + y_4 = -3 \end{cases}$$

L'application d'une méthode de remontée (ou plutôt, ici, de descente) donne la solution $Y = (0\ \ 4\ \ 3\ \ -3)^t$.

Puis on résout le système $U.X = Y$, qui s'écrit, en posant $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ \dfrac{3}{2} x_3 = 3 \\ \dfrac{3}{2} x_4 = -3 \end{cases}$$

L'application d'une méthode de remontée donne la solution $X = (1\ \ 1\ \ 2\ \ -2)^t$.

Fin de corrigé

c. On considère encore le cas pour lequel on a $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. En fait, le vecteur b résulte de mesures imprécises. On considère une variation δb de b, ce qui entraîne une variation δX de la solution du système précédent : $A.(X + \delta X) = b + \delta b$. Donner une majoration de l'erreur relative $\|\delta X\|_2/\|X\|_2$ à l'aide de $\|\delta b\|_2/\|b\|_2$ et des valeurs propres de A.

Corrigé

Par définition du conditionnement cond_2 d'un système linéaire pour la norme 2, on a :

$$\|\delta X\|_2/\|X\|_2 \le \mathrm{cond}_2(A).\|\delta b\|_2/\|b\|_2.$$

De plus, les valeurs propres de A sont, d'après la première question, 1, 1, 3 et 3 : la matrice A est donc inversible. Comme par ailleurs A est symétrique, on a alors $\mathrm{cond}_2(A) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$, où λ_{max} (respectivement λ_{min}) est la plus grande (respectivement petite) valeur propre de A en valeur absolue. Ici $\lambda_{max} = 3$ et $\lambda_{min} = 1$, d'où finalement $\|\delta X\|_2/\|X\|_2 \le 3\|\delta b\|_2/\|b\|_2$.

Fin de corrigé

Exercice 2 (13 points)

Soit a un réel. On considère le problème (P_a) d'optimisation linéaire suivant :

$$(P_a) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z = x_1 + ax_2 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

1. (2 points) Écrire le problème dual (D_a) de (P_a).

Corrigé

Le problème (P_a) étant mis sous forme standard, on obtient directement l'expression de (D_a) :

$$\text{Minimiser } w = 11y_1 + 7y_2 + 7y_3$$

avec les contraintes $\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 + y_3 \ge a \\ y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0, \; y_3 \ge 0 \end{cases}$

Fin de corrigé

2. (2 points) À l'aide du théorème des écarts complémentaires, déterminer les valeurs de a, s'il en existe, pour lesquelles (7, 4) est une solution optimale de (P_a).

Corrigé

La solution $x_1 = 7$, $x_2 = 4$ est réalisable car cette solution vérifie toutes les contraintes du problème. Elle est optimale si et seulement s'il existe y_1, y_2 et y_3 vérifiant les relations suivantes :

$y_3 = 0$ car $x_2 < 7$ (la troisième contrainte primale n'est pas saturée)

$y_1 + y_2 = 1$, car $x_1 \ne 0$

$y_1 + y_3 = a$, car $x_2 \ne 0$

et $\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 + y_3 \ge a \\ y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0, \; y_3 \ge 0 \end{cases}$ (contraintes du problème dual).

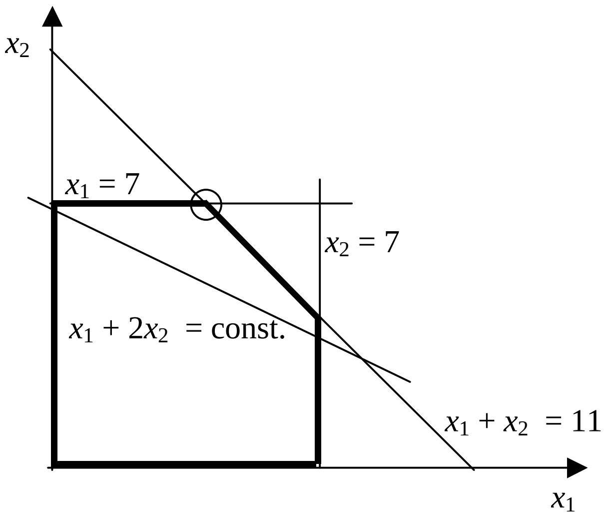
Le système admet pour unique solution $y_1 = a$, $y_2 = 1 - a$, $y_3 = 0$. Ces valeurs vérifient toutes les relations si et seulement si les trois valeurs sont positives ou nulles, autrement si et seulement si a appartient à l'intervalle [0, 1]. La solution (7, 4) est donc optimale si et seulement si a appartient à [0, 1].

Fin de corrigé

Dans toute la suite, on fixe la valeur de *a* à 2.

3. (5 points) Résoudre (P_2) à l'aide de l'algorithme du simplexe.

Corrigé
Le domaine réalisable est l'intérieur du polygone dessiné en gras ci-dessous.



L'introduction des variables d'écart donne le premier dictionnaire :

$$\begin{array}{l} x_3 = 11 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 7 - x_1 \\ x_5 = 7 - x_2 \\ \hline z = x_1 + 2x_2 \end{array}$$

On fait entrer x_2 en base ; x_5 sort alors de celle-ci. On obtient le deuxième dictionnaire :

$$\begin{array}{l} x_2 = 7 - x_5 \\ x_3 = 4 - x_1 + x_5 \\ x_4 = 7 - x_1 \\ \hline z = 14 + x_1 - 2x_5 \end{array}$$

On fait entrer x_1 en base ; x_3 sort alors de celle-ci. On obtient le troisième dictionnaire :

$$\begin{array}{l} x_1 = 4 - x_3 + x_5 \\ x_2 = 7 - x_5 \\ x_4 = 3 + x_3 - x_5 \\ \hline z = 18 - x_3 - x_5 \end{array}$$

Tous les coefficients dans z sont négatifs ou nuls : le dictionnaire courant est optimal. La solution optimale de (P_2) est $x_1 = 4$, $x_2 = 7$ (avec alors $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 0$) et le maximum de z vaut 18.
Fin de corrigé

4. (1,5 point) Déduire de la question 3 une solution optimale de (D_2). On indiquera comment on obtient les valeurs optimales des variables duales.
Corrigé
L'opposé des coefficients des variables d'écart dans l'expression de z du dictionnaire optimal de (P_2) donne une solution optimale de (D_2). On obtient ainsi $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ (on peut facilement vérifier que la valeur minimale de w vaut 18, c'est-à-dire le maximum de z, comme l'indique le théorème de la dualité).
Fin de corrigé

5. (2,5 points) Les seconds membres des trois premières contraintes du problème (P_2) sont considérés comme des quantités disponibles de trois ressources : on dispose donc de 11 unités de la ressource 1 et de 7 unités des ressources 2 et 3. La fonction z est considérée comme étant un gain exprimé en euros. On peut acheter un peu plus de ces ressources à un prix unitaire de

2 € pour la ressource 1, de 1 € pour la ressource 2 et de 0,50 € pour la ressource 3. Quelle(s) ressource(s) peut-on conseiller d'acheter (on ne demande pas la quantité qu'on conseille d'acheter) ? Justifier la réponse.

Corrigé

On remarque d'abord que la solution optimale du problème (P_2) est non dégénérée (les variables en base sont non nulles dans le dernier dictionnaire de la question 3). On peut appliquer un théorème du cours : si le vecteur des ressources b varie de δb assez petit, l'optimum de la fonction z varie de $y\delta b$, où y est la solution optimale du problème dual ; ici, d'après la question 4, on a $y = (1, 0, 1)^t$.

Si on achète une quantité supplémentaire t_1 (t_1 petit) de la ressource 1, le profit augmente de $y_1 = 1$ € par unité, soit t_1 € au total, mais la dépense pour cet achat est de $2t_1$ € : on ne conseille donc pas d'acheter de la ressource 1.

La ressource 2 n'étant pas épuisée dans la solution optimale de la question 3, on n'a pas intérêt à acheter une quantité supplémentaire de cette ressource (ce que traduit $y_2 = 0$).

Si on achète une quantité supplémentaire t_3 (t_3 petit) de la ressource 3, le profit augmente de $y_3 = 1$ € par unité, soit t_3 € au total, et la dépense pour cet achat n'est que de $t_3/2$ euros : on conseille donc d'acheter de la ressource 3.

Fin de corrigé

Exercice 3 (11 points)

On considère la fonction :

$$f(x, y) = 5x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 4y$$

1. (3 points) Montrer que f admet un unique minimum global sur $\mathbf{R}^2$ qu'on déterminera.

Corrigé

Montrons que la fonction f est strictement convexe. La matrice hessienne de cette fonction est :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $\nabla^2 f(x, y)$ vaut 16 : le produit des valeurs propres (égal au déterminant) est strictement positif ; les valeurs propres sont de même signe et non nulles.

La trace de $\nabla^2 f(x, y)$ vaut 12 ; la somme des valeurs propres (égale à la trace) est positive : les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(x, y)$ sont donc strictement positives, ce qui implique que f est une fonction strictement convexe. La convexité de f fait que tout minimum local est global. La stricte convexité de f fait qu'il n'existe qu'un seul point atteignant le minimum. Cet unique minimum global est caractérisé par le fait que le gradient de f s'annule en ce point. Or :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 10x + 2y - 12 \\ 2x + 2y - 4 \end{pmatrix}.$$

Pour que (x, y) soit un minimum global, il faut et il suffit donc d'avoir :

$$\begin{cases} 10x + 2y - 12 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases},$$

système qui a pour solution : $x = 1$, $y = 1$.

La fonction f admet donc un minimum global au point (1, 1). La valeur minimum de f est –8.

Fin de corrigé

2. (8 points) On considère maintenant le problème (P) :

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x, y) \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} x + y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

a. Montrer que les contraintes sont qualifiées en tout point du domaine réalisable.

Corrigé

Mettons le problème sous la forme du cours en introduisant les trois fonctions suivantes :

$$g_1(x, y) = 8 - x - y,\ g_2(x, y) = -x,\ g_3(x, y) = -y\ ;$$

les contraintes s'écrivent alors $g_1(x, y) \leq 0$, $g_2(x, y) \leq 0$, $g_3(x, y) \leq 0$.

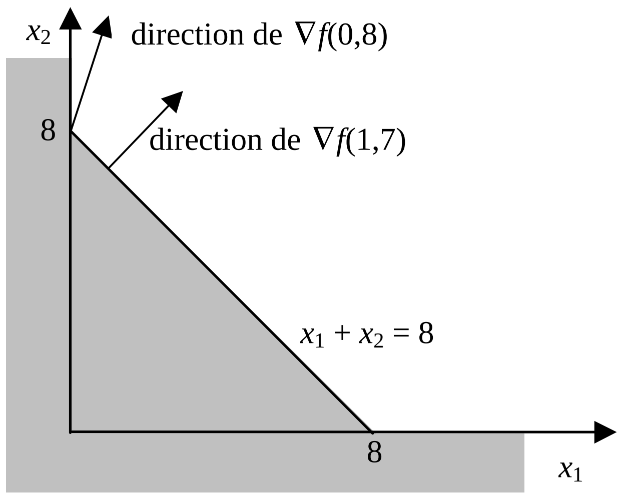
Les fonctions g_i ($1 \leq i \leq 3$) sont convexes car affines. De plus, l'intérieur du domaine réalisable est non vide (par exemple, le point (5, 5) en fait partie. Un théorème du cours indique alors que les contraintes sont qualifiées en tout point.

Fin de corrigé

b. En utilisant la condition de Karush, Kuhn et Tucker, montrer que le point de coordonnées (0, 8) n'est pas un minimum du problème.

Corrigé

Le dessin ci-dessous indique le domaine réalisable (partie non grisée). Y sont aussi représentées des directions utiles ultérieurement.



Avec les notations précédentes, le problème (P) s'écrit :

$$\begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x, y) \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} g_1(x, y) \leq 0 \\ g_2(x, y) \leq 0 \\ g_3(x, y) \leq 0 \end{cases} . \end{array}$$

Au point (0, 8), on a $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y) = 0$ et $g_3(x, y) \neq 0$. La condition de Karush, Kuhn et Tucker consiste donc à chercher s'il existe deux réels positifs ou nuls λ_1 et λ_2 vérifiant :

$$\nabla f(0, 8) = -\lambda_1 \nabla g_1(0, 8) - \lambda_2 \nabla g_2(0, 8).$$

Or, on a : $\nabla g_1(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla f(0, 8) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Les constantes λ_1 et λ_2 doivent vérifier :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 \qquad = 12 \end{cases}$$

système dont la solution est $\lambda_1 = 12$ et $\lambda_2 = -8$. Cette dernière valeur étant négative, la condition de Karush, Kuhn et Tucker n'est pas vérifiée. Celle-ci étant une condition nécessaire, on en déduit que (0, 8) n'est pas un minimum de (P).

Fin de corrigé

c. Appliquer la méthode de plus forte descente à pas optimal vue en cours à partir du point (0, 8). On pourra s'aider d'un dessin pour déterminer les directions à suivre. On indiquera les coordonnées du point de minimum obtenu et on indiquera la valeur de ce minimum. Que donne la condition de Karush, Kuhn et Tucker au point obtenu ? Ce point est-il un minimum global de (P) ?

Corrigé

Le fait que la condition de Karush, Kuhn et Tucker n'est pas vérifiée correspond au fait qu'il existe des directions de descente admissibles. La direction de descente admissible de plus grande pente est celle qui fait le plus grand angle avec $\nabla f(0, 8)$ tout en ne sortant pas du domaine réalisable. Suivre la direction de plus grande pente consiste à suivre à partir du point (0, 8) la droite $x + y = 8$ en partant vers la droite (voir le dessin ci-dessus). Cherchons le minimum de la restriction de f au segment de cette droite d'abscisse comprise entre 0 et 8. Les points de ce segment peuvent s'écrire (s, 8 – s), avec $0 \leq s \leq 8$. Posons $v(s) = f(s, 8 - s)$.

Sur ce segment, la fonction v vaut, pour s réel positif et (s, 8 – s) réalisable :

$$v(s) = f(s, 8 - s) = 5s^2 + (8 - s)^2 + 2s(8 - s) - 12s - 4(8 - s)$$

$$v(s) = 4s^2 - 8s + 32 .$$

D'où : $\quad v'(s) = 8s - 8 .$

Par conséquent, $v(s)$ atteint son minimum pour $s = 1$, c'est-à-dire pour le point (1, 7) qui est sur le segment considéré. On constate sur le dessin qu'il n'y a plus de direction de descente : le point (1, 7) est le minimum obtenu par cette méthode de descente.

Vérifions ceci grâce à la condition de Karush, Kuhn et Tucker. Au point (1, 7), seule la contrainte $g_1(x, y) \leq 0$ est saturée. La condition de Karush, Kuhn et Tucker s'énonce donc : il existe λ_1 réel positif ou nul tel que $\nabla f(1, 7) = -\lambda_1 \nabla g_1(1, 7)$. Or, $\nabla f(1, 7) = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_1(1, 7) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; λ_1 existe et vaut 12 ; il est positif. La condition de Karush, Kuhn et Tucker est vérifiée. La fonction f étant convexe et les fonctions g_1, g_2 et g_3 étant convexes (puisque linéaires), cette condition est suffisante pour affirmer qu'il s'agit d'un minimum global du problème. Le minimum de f sur le domaine réalisable est atteint au point (1, 7) et vaut 28, valeur obtenue après remplacement des valeurs de x et y dans la définition de f.

Fin de corrigé