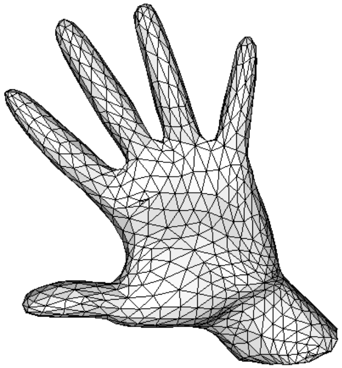
Informatique Graphique 3D & Réalité Virtuelle
Modélisation Géométrique : Maillages Polygonaux

Tamy Boubekeur

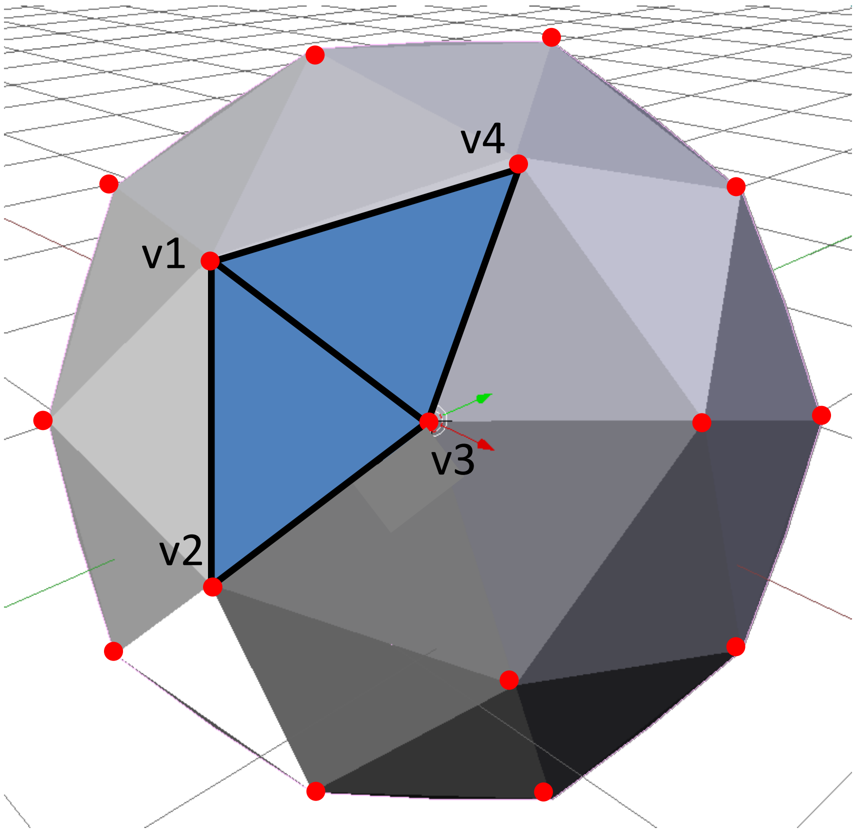


Définition

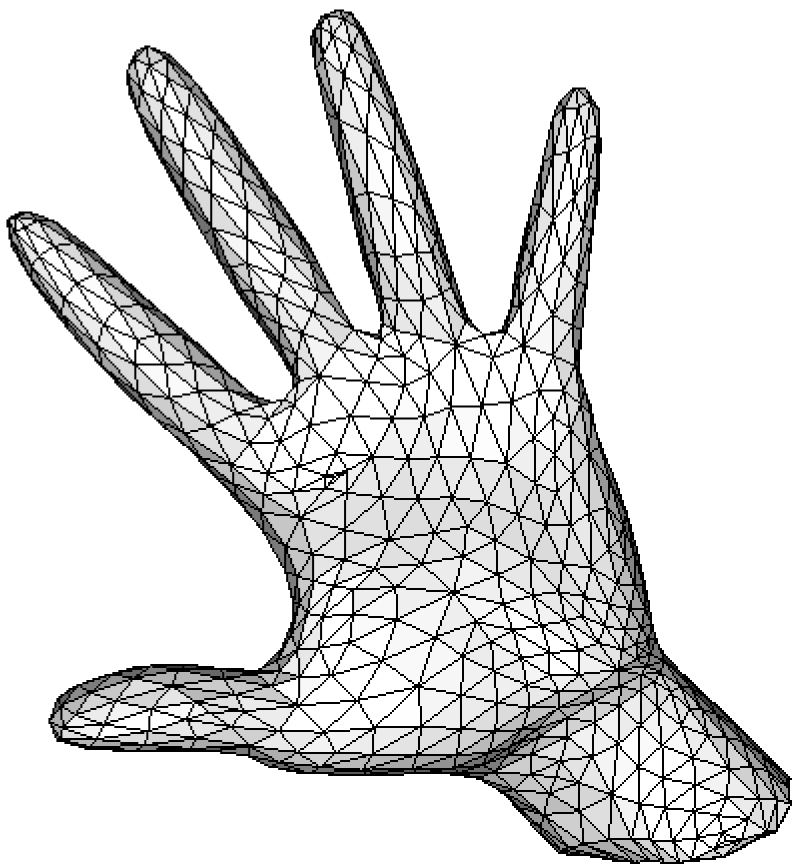
- Approximation de la surface d’un objet à l’aide d’un ensemble de polygones
- **Soupe de Polygones** : suites de n-uplets de coordonnées 3D correspondants aux polygones
- **Maillages indexés** : graphe avec géométrie et topologie séparés
  - Une liste de sommets (V)
  - Une liste de relation topologique:
    - Arêtes (Edge, E)
    - Faces (F)
- En pratique, {V,F} (example : OpenGL)

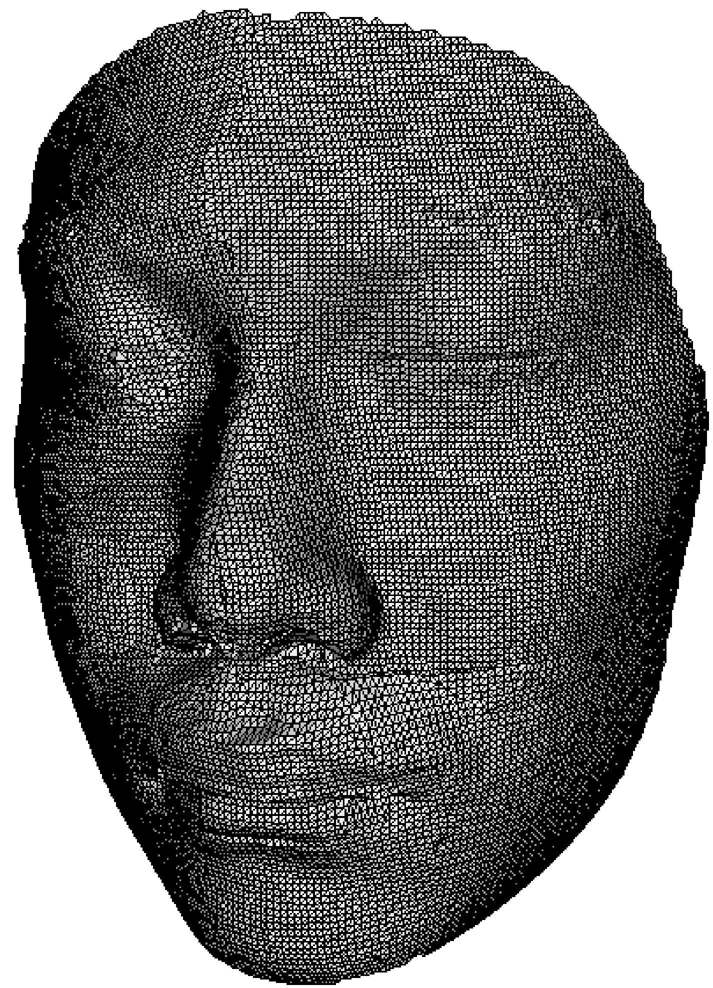
Exemple

- Ensemble de sommets (géométrie)
  - v1 (x, y, z)
  - v2 (x, y, z)
  - v3 (x, y, z)
  - v4 (x, y, z)
- Ensemble de faces (topologie)
  - (v1, v2, v3)
  - (v1, v3, v4)



Maillages Polygonaux : Exemples





Attributs aux sommets

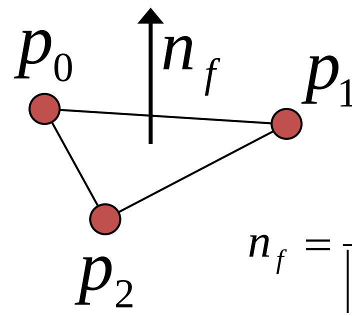
- Propriétés associées aux sommets (le plus souvent), arêtes ou faces → ***Attributs***
- Attributs de sommets :
  - Position (« p »)
  - Vecteur normal (« n »)
  - Coordonnées paramétrique (« (u,v) »)
  - Apparence : couleur, indice de matériel, etc
  - Paramètres physiques pour la simulation
  - etc

Autres attributs

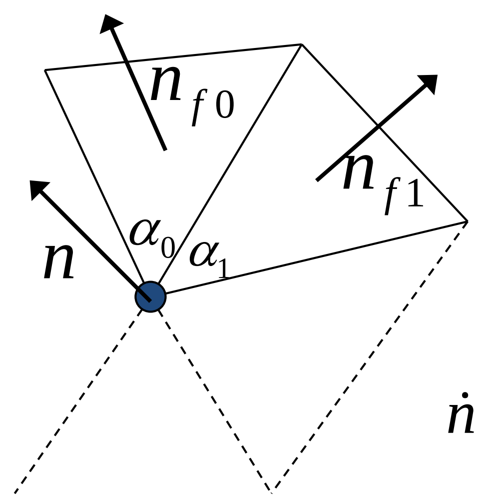
- Arêtes :
  - Plis vif (discontinuité du gradient)
- Faces :
  - Couleur

Normales

- **Essentielles pour le rendu**
  - BRDF
- Stockées par sommets
- Utiles pour certains traitement géométrique
  - Simplification
- Calcul :
  - Moyennes des normales des faces incidentes
  - Moyennes pondérée par les angles des arêtes incidentes
    - Plus robustes pour les distributions de triangles non uniformes



$$n_f = \frac{(p_1 - p_0) \wedge (p_2 - p_0)}{\left\|(p_1 - p_0) \wedge (p_2 - p_0)\right\|}$$



$$\dot{n} = \frac{\sum_i \alpha_i n_i}{\sum_i \alpha_i}$$

$$n = \frac{\dot{n}}{\left\|\dot{n}\right\|}$$

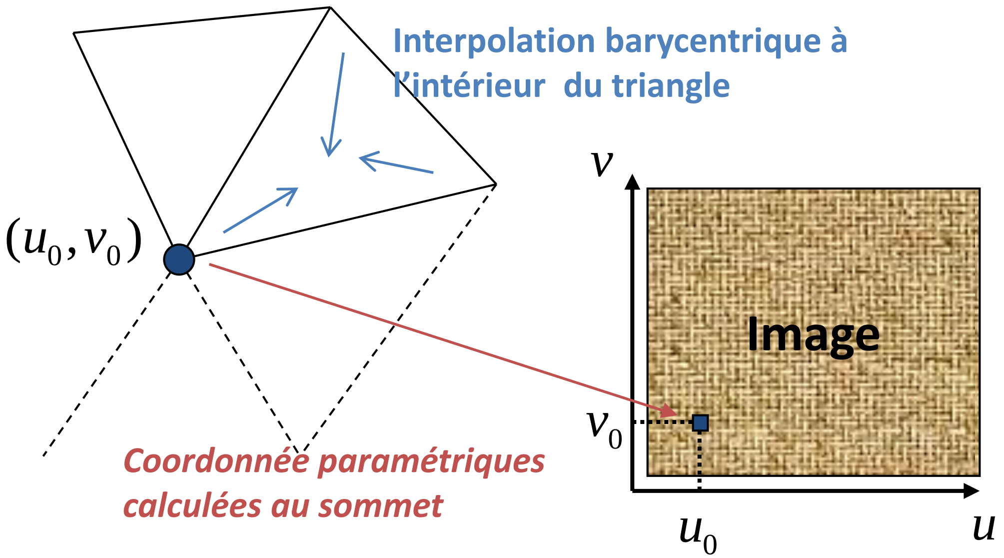
Coordonnées paramétriques

$$(u,v) \in \Re^2$$ par convention: $$(u,v) \in [0,1]^2$$

Définition d'une propriété de surface à partir d'un fonction bi-variée:

$$f :$$
$$\Re^2 \to \Re^n$$
$$u,v \to c$$

Exemple : valeur d'un pixel dans une images (« texture mapping »)



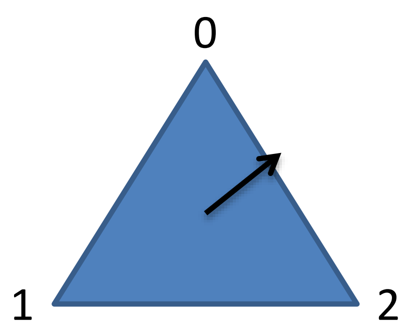
*Définition de coordonnées paramétriques continues sur l'ensemble des sommets d'un maillage : **<u>Paramétrisation</u>***

Connectivité

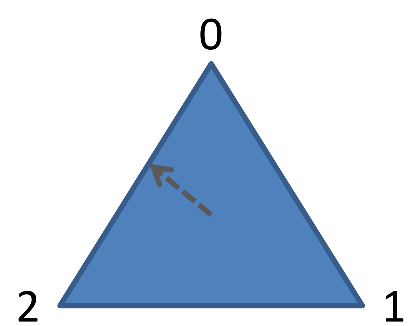
- 1-anneau voisinage (**1- voisinage**) d'un sommet v : ensemble des sommets reliés par une arête à v
- Valence d'un sommet : taille de 1-voisinage
- Maillage régulier :
  - Tous les sommets ont une valence régulière
  - Exemple :
    - valence 6 pour les maillages triangulaires
    - Valence 4 pour les maillages quadrangulaires
- Maillage semi-régulier :
  - La plupart des sommets ont une valence régulière
  - Peu de sommets *extraordinaires* (valence irrégulière)
- Maillage arbitraire :
  - La plupart des sommets sont extraordinaires

Orientation

- Lorsque le maillage est variété
- Basé sur l’ordre d’énumération des sommets pour une faces



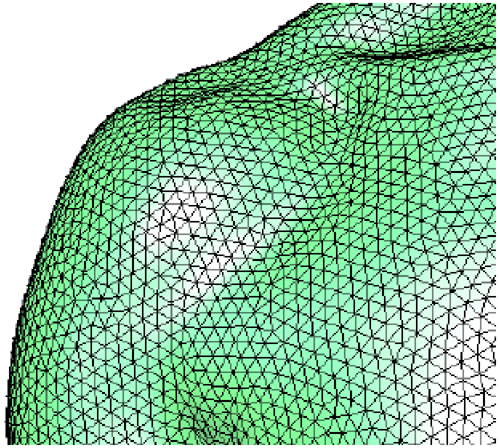
Sens trigonométrique (CCW)



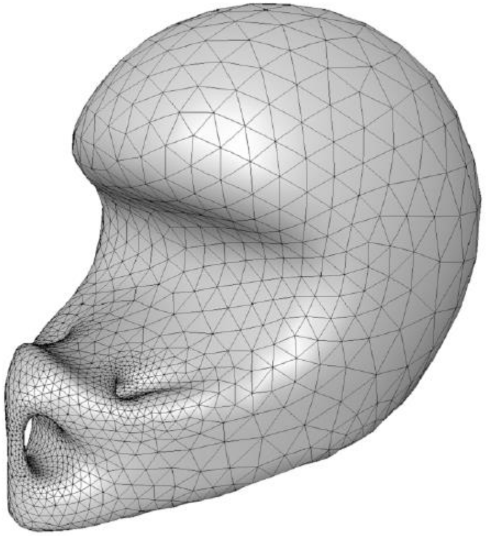
Sens inverse (CW)

Isotropie et Anisotropie

- Isotropie : les polygones ont une forme similaire sur tout le maillage
  - Triangles quasi-équilatéraux
    - Traitement géométrique numériquement plus stables
    - « Neutralité » pour la déformation
  - aucune restriction sur la taille
    - Basée courbure
      - e.g, courbure moyenne



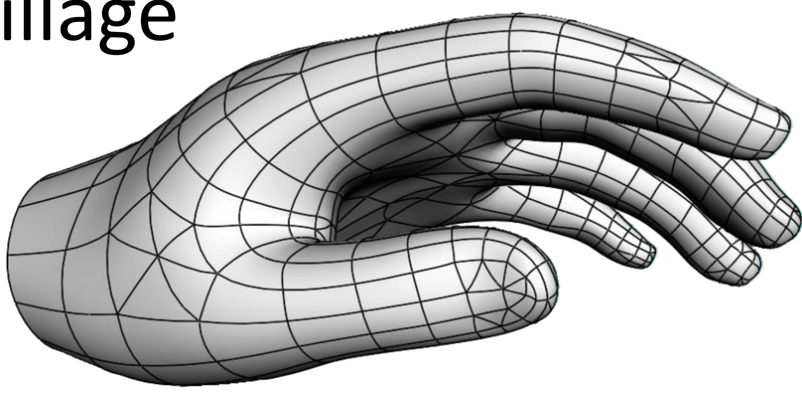
Maillage triangulaire isotrope



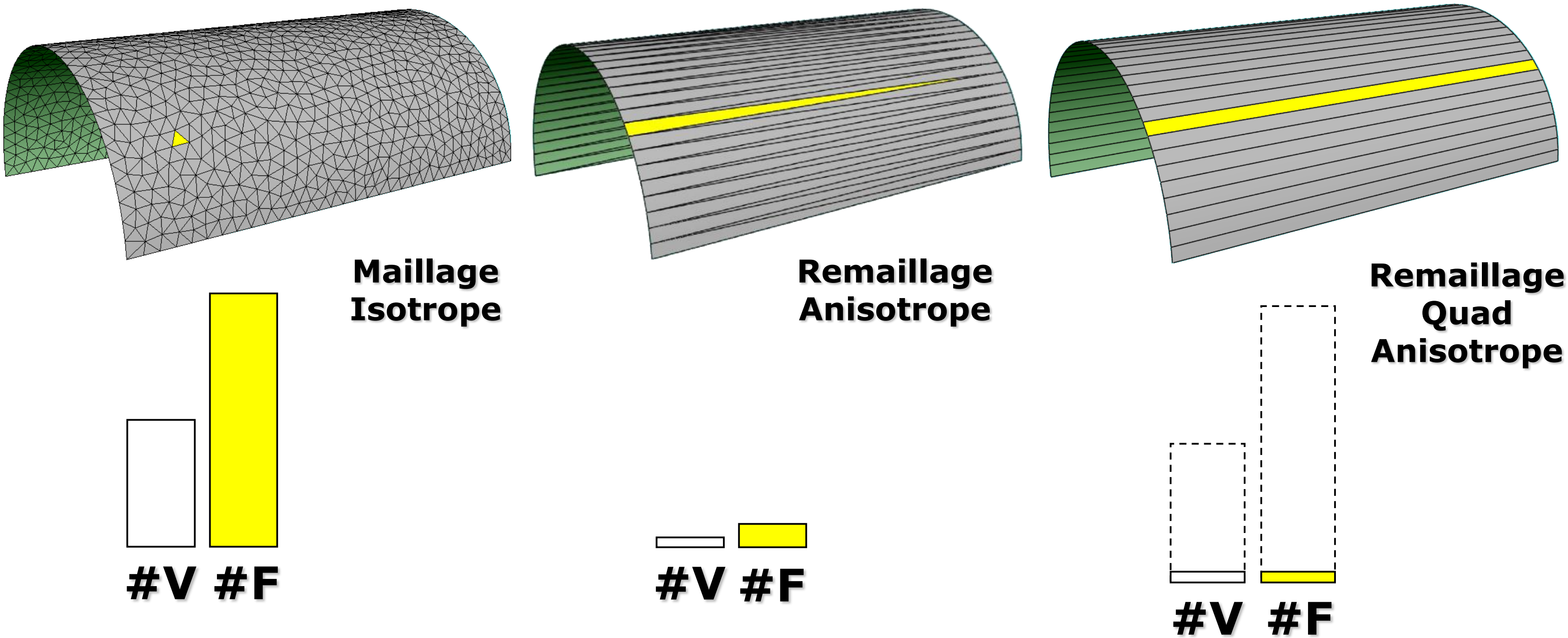
Maillage triangulaire basé courbure

Isotropie et Anisotropie

- Anisotropie : la forme des polygones suit la géométrie de la surface
  - Arêtes alignées sur les directions de *courbures principales*
  - Lignes de flots
  - Distances géodésiques
- Notion d'**optimalité** du maillage



Isotropie et Anisotropie



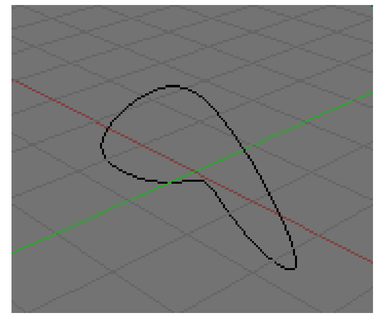
Quelques Constructions Simples

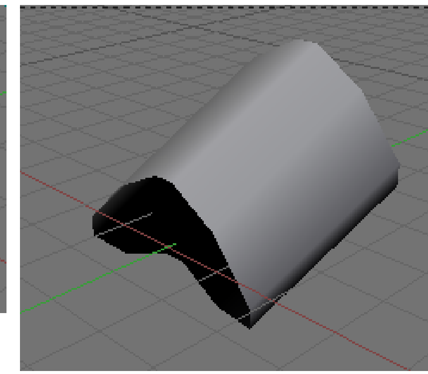
Extrusions : forme défini par une courbe 2D et une trajectoire 3D

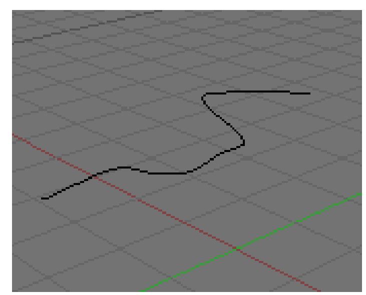
Révolution : forme défini par la révolution d’une courbe de profil 2D

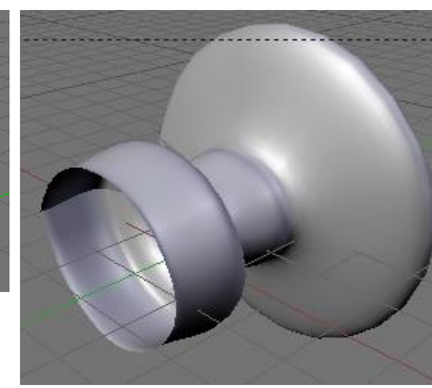
Cylindre généralisé : combinaison d’un extrusion et d’une révolution (« *swept surface* » ou surface de balayage)

- 3 courbes : coupe, trajectoire et profil
- Basée sur le repère de Frenet le long de la trajectoire



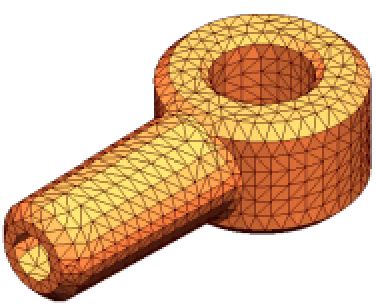


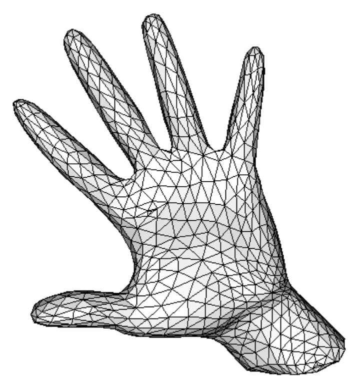


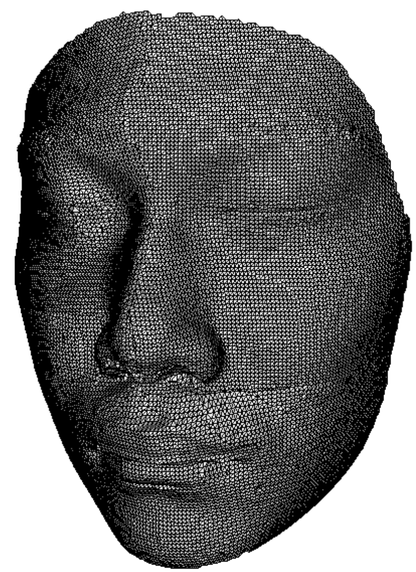


Courbure d’un maillage

- Formellement,
  - nulle à l’intérieur des polygones (zone parfaitement plane)
  - infini sur les arêtes des polygones (plis vifs)
- Mais
  - Maillage = échantillonnage d’une surface lisse
  - Courbure de la surface lisse sous-jacente ?
    - Optimiser un patch paramétrique prêt du maillage, et considérer **ses** propriétés différentielles
    - **Géométrie Différentielle Discrète**

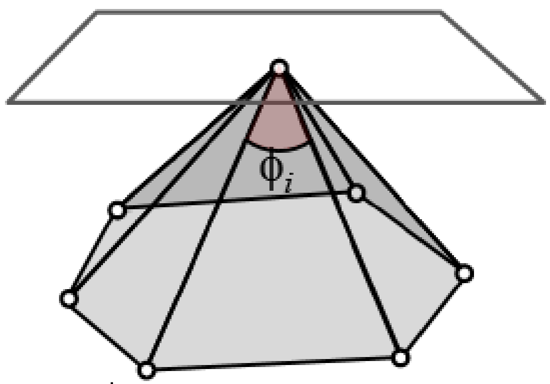




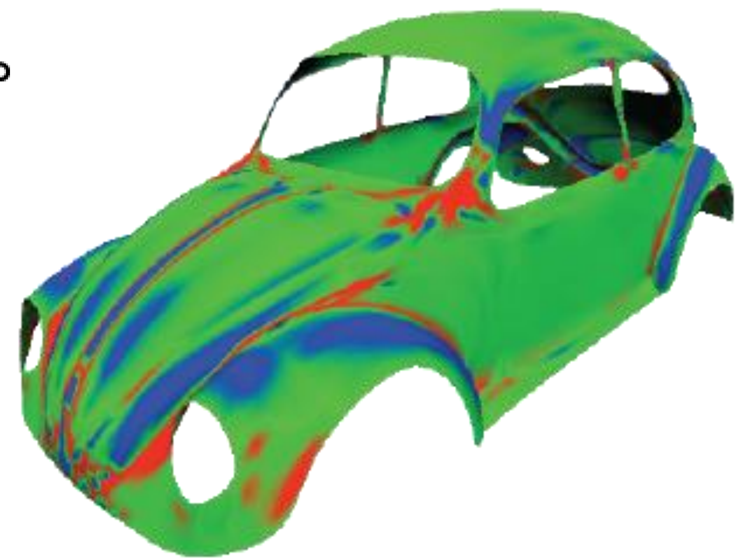


Courbure gaussienne discrète

- Approximée par le défaut angulaire au sommet



$$K = 2\pi - \sum_{i=1}^{|N(v)|} \phi_i$$



Courbure Moyenne

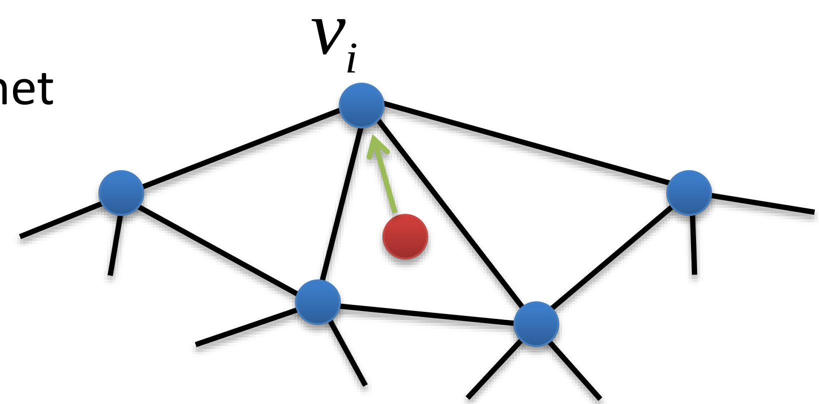
$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Définit via l'opérateur de **Laplace-Beltrami**

$$\boxed{\Delta_M \mathbf{p} = -H\mathbf{n}}$$

Opérateur de Laplace-Beltrami Discret

- Coordonnées différentielles d’un sommet



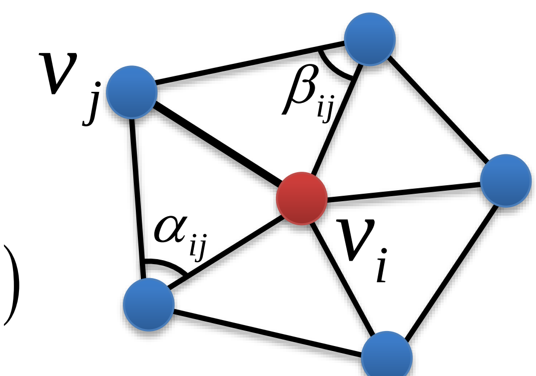
$$\delta_i = v_i - \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} v_j$$

valence *1-voisinage*

- Discrétisation de l’opérateur de *Laplace-Beltrami*
- Pondération uniforme : Laplacien *topologique*

$$L(v_i) = \frac{1}{|N(v_i)|} \sum_{j \in N(v_i)} (v_j - v_i) \approx -Hn$$

- Discrétisation tenant compte de la géométrie : Laplacien *géométrique.* Exemple : *les* ***poids cotangent***

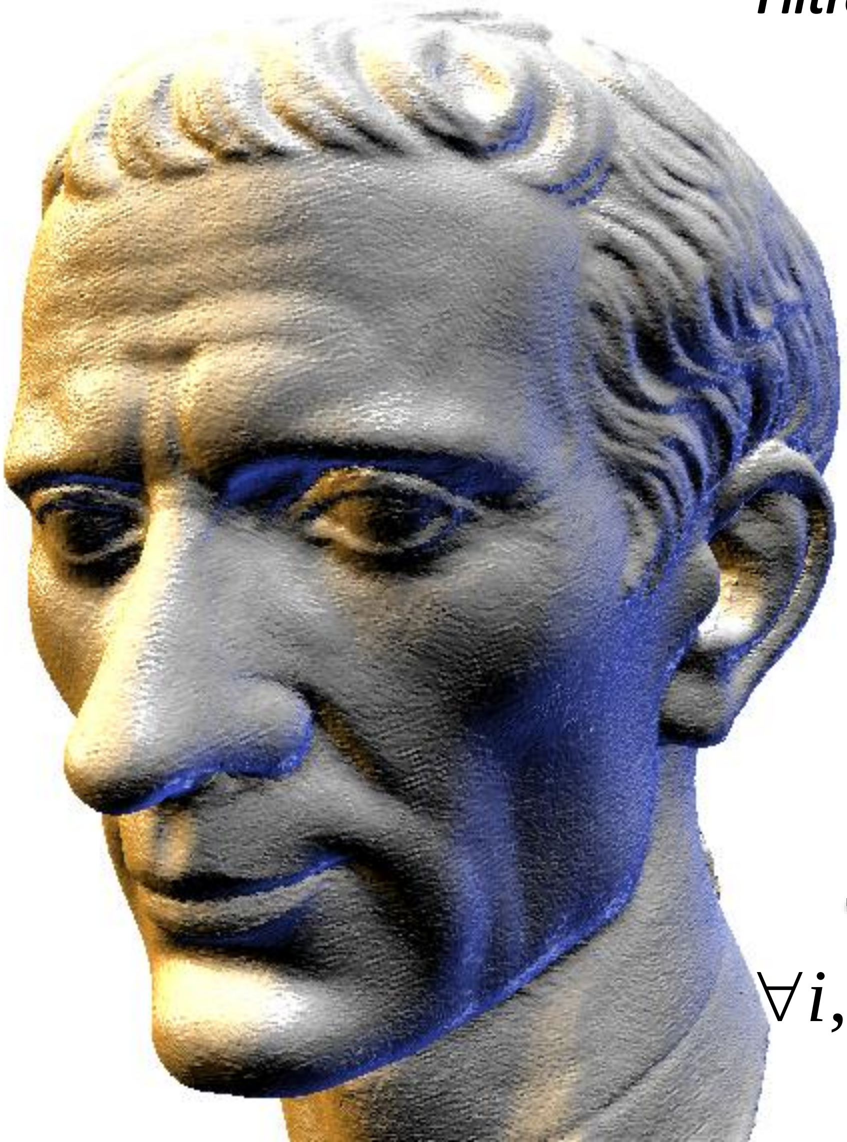


Aire de la cellule de Voronoï

$$L^g(v_i) = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in N(i)} \frac{1}{2} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(v_i - v_j)$$

Lissage Laplacien

Filtre passe-bas



$$\forall i, v_i := v_i - \delta_i$$

Filtrage Bilatéral

- Filtrage sélectif [Jones 2003] inspiré du filtre bilatéral pour images [Tomasi 98]
- Exploite la distance au plans tangents des faces voisines pour pondérer l'influence dans un second noyau gaussien (i.e., bilatéral)

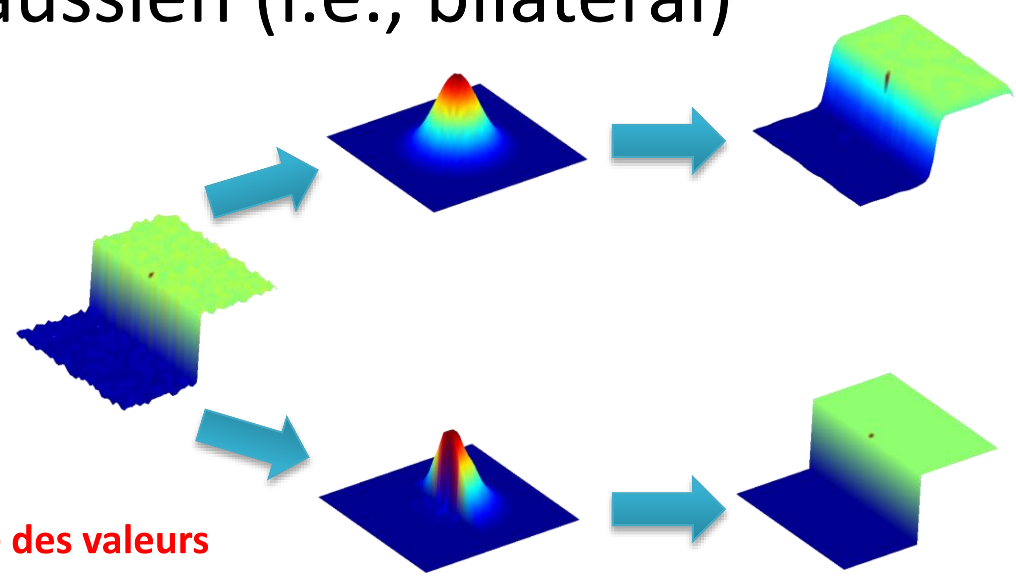
Echantillon filtré

Valeurs voisines

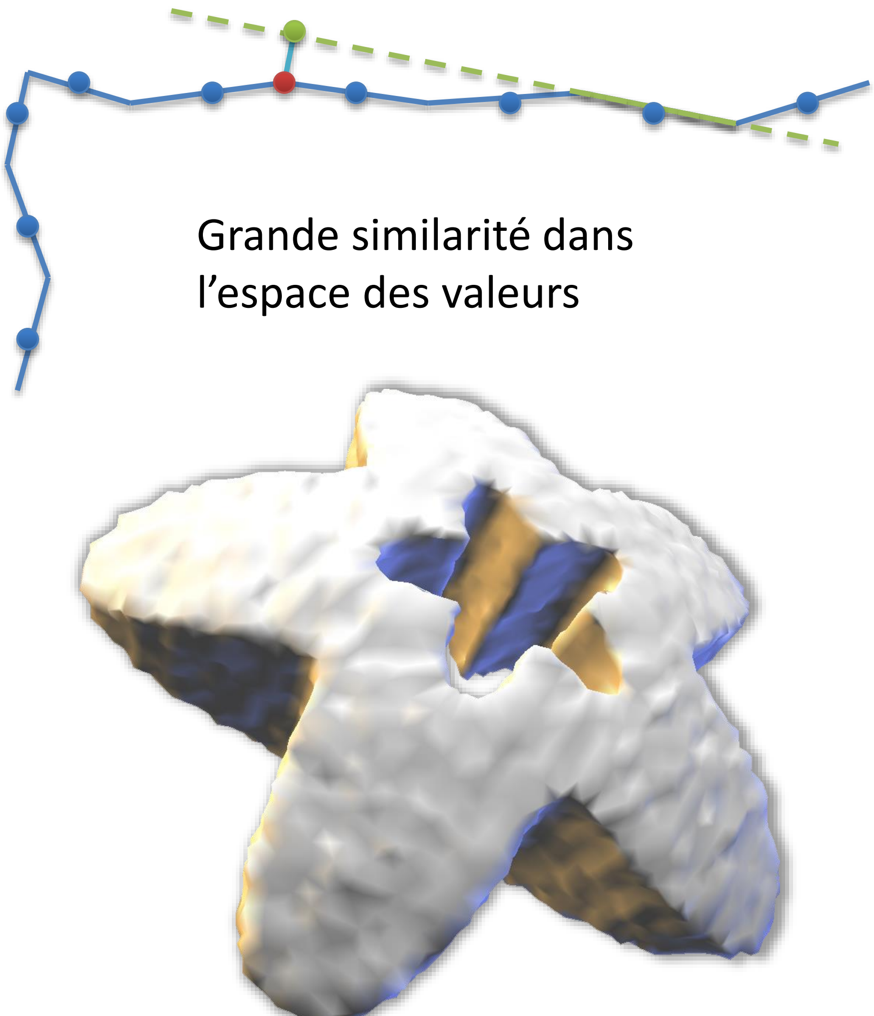
$$BL(p) = \sum_{q} S(\|q-p\|)\, R(\|I(q)-I(p)\|)\, I(q)$$

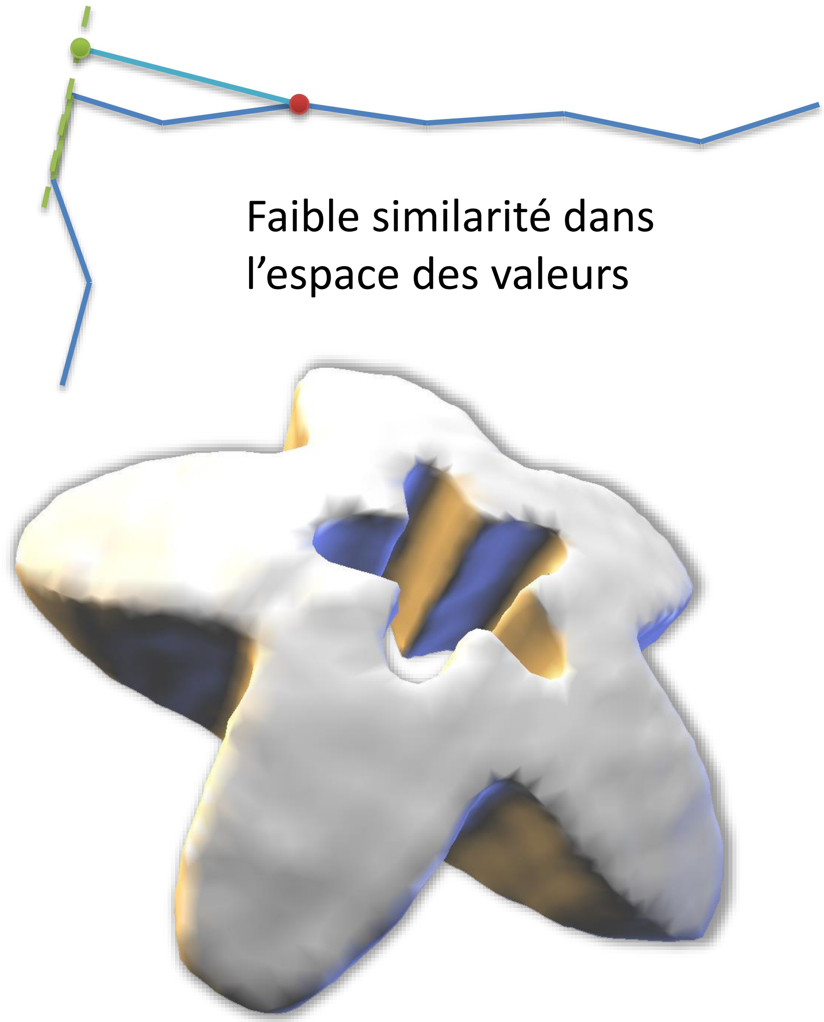
Noyau sur le domaine

Noyau dans l'espace des valeurs



Pondération caractéristique





Applications

- Maillages très bien adaptés au rendu 3D
  - Format natif des cartes 3D (GPU)
  - Format natif des moteurs de rendu haute qualité (Renderman, MentalRay)
- Représentation naturelle pour le traitement géométrique
  - Reconstruction à partir de nuages de points, filtrage, simplification, optimisation, raffinement, subdivision, etc…
  - Topologie arbitraire
  - Outils de géométrie discrète

Structures de données

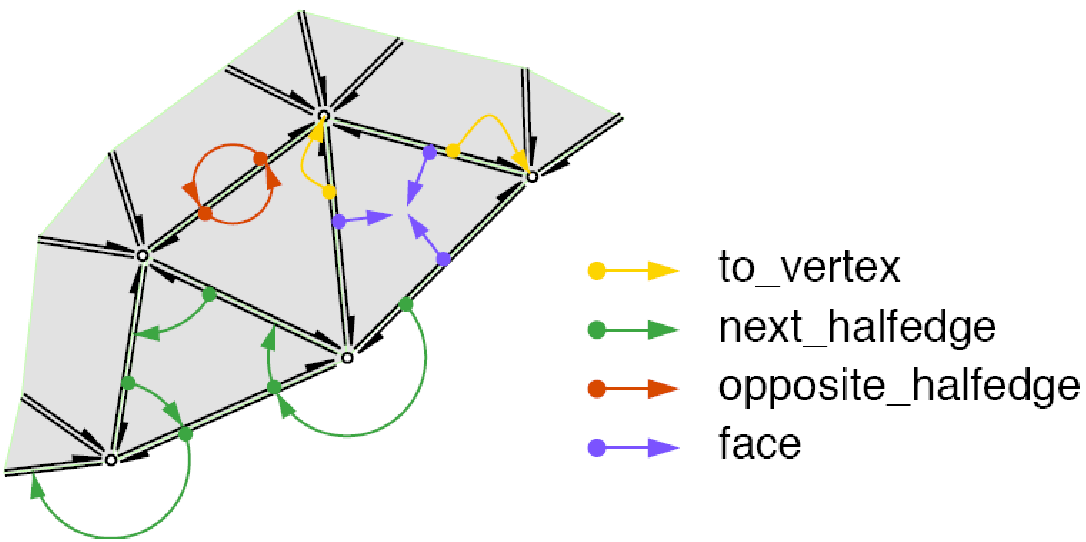
- Maillages indexés
  - Simple, format GPU natif pour le rendu
  - Pas d’accès direct et complet aux voisins d’un sommet

- Structure en Demi-Arête (***Half-Edge***)

Structure en Demi-Arêtes

Chaque arête est séparée en 2 demi-arêtes, orientées dans le sens trigonométrique de leurs faces respectives/

Chaque demi-arête, on référence :
- un sommet
- sa face adjacente (nulle aux bords)
- la prochaine demi-arête sur la face (sens trigonométrique)
- la demi-arête opposée
- la demi-arête précédente (optionnel)



Maillage :
- Sommets
    - + pour chaque sommet : référence vers une de ses demi-arêtes relatives
- Faces
    - + pour chaque face : référence vers une de ses demi-arêtes relatives
- Collection de demi-arêtes

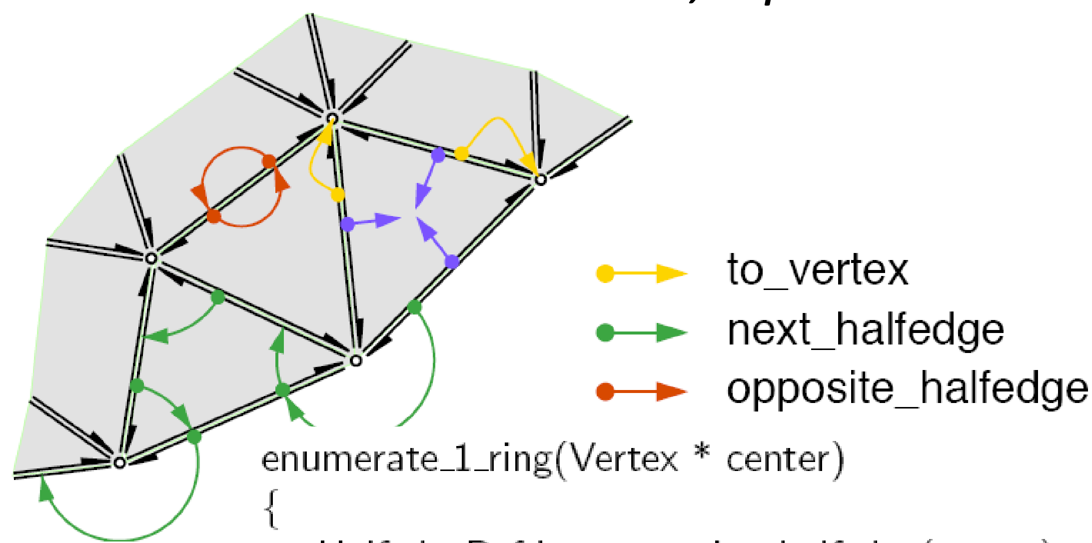
Implémentation Demi-Arêtes

Disponible en ligne :
CGAL, OpenMesh

```
struct Halfedge {
    HalfedgeRef     next_halfedge;
    HalfedgeRef     opposite_halfedge;
    FaceRef         face;
    VertexRef       to_vertex;
};

struct Face {
    HalfedgeRef     halfedge;
};

struct Vertex {
    HalfedgeRef     outgoing_halfedge;
};
```




```
enumerate_1_ring(Vertex * center)
{
    HalfedgeRef h = outgoing_halfedge(center);
    HalfedgeRef hstop = h;
    do {
        VertexRef v = to_vertex(h);
        // do something with v
        h = next_halfedge(opposite_halfedge(h));
    } while ( h != hstop );
}
```

Traitement de Maillages

- Reconstruction
- **Subdivision** $\longrightarrow$ Sur-échantillonnage
- **Simplification** $\longrightarrow$ Sous-échantillonnage
- Remaillage $\longrightarrow$ Ré-échantillonnage
- **Paramétrisation**
- Quadrangulation

Références

- Livres : Polygonal Mesh Processing
- Outils : Meshlab, Blender, Graphite
- Bibliothèque : CGAL, OpenMesh, TriMesh