Télécom ParisTech 25 avril 2017 Année 2016-2017 – P3

Contrôle de connaissances de MDI 210

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4, manuscrites ou dactylographiées.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.
Sauf mention contraire, un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.
Le barème (sur 40) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (16 points)

Soient α_1 et α_2 deux réels quelconques et β_1 et β_2 deux réels non nuls avec $|\beta_1| \geq |\beta_2|$. Dans tout l'exercice, on considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

1. (6 points) Déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de A à l'aide de la méthode de Jacobi ; on détaillera les calculs de la première itération (on pourra être plus rapide pour les itérations suivantes, s'il y en a) et on indiquera clairement, pour chaque vecteur propre, quelle valeur propre lui est associée.

2. (4 points) On pose $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4$ et on considère la forme quadratique Q définie sur $\mathbf{R}^4$ par :

$$Q(X) = \frac{1}{2}\left(2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2\right) + 4x_1x_4 - 3x_2x_3.$$

a. Déterminer, à l'aide de la question 1, les valeurs extrémales (maximale ou minimale) prises par Q sur $\mathbf{R}^4$, si de telles valeurs extrémales existent.

b. On se limite maintenant à la boule B centrée en 0 et de rayon 1 pour la norme 2 (autrement dit, on se limite à X vérifiant $\|X\|_2 \leq 1$ où $\| \|_2$ désigne la norme 2). Déterminer, de nouveau à l'aide de la question 1, les valeurs extrémales (maximale ou minimale) prises par Q sur B, si de telles valeurs extrémales existent.

Indication : on pourra se placer dans $\mathbf{R}^4$ rapporté à la base orthonormée de vecteurs propres déterminée à la question 1.

3. (6 points) On suppose que l'on a, pour $1 \leq i \leq 2$, $|\alpha_i| > |\beta_i|$ et $\alpha_i \neq 0$.

a. Déterminer la décomposition LU de la matrice A en appliquant, à chaque itération, la stratégie du pivot partiel ; on détaillera les calculs de la première itération (on pourra être plus rapide pour les itérations suivantes, s'il y en a).

b. On considère le cas pour lequel on a $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Soit $X \in \mathbf{R}^4$ et soit b le vecteur $(0 \;\; 4 \;\; 5 \;\; -3)^t$. Résoudre le système linéaire $A.X = b$ en utilisant la décomposition LU de A.

c. On considère encore le cas pour lequel on a $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. En fait, le vecteur b résulte de mesures imprécises. On considère une variation δb de b, ce qui entraîne une variation δX de la solution du système précédent : $A.(X + \delta X) = b + \delta b$. Donner une majoration de l'erreur relative $\|\delta X\|_2/\|X\|_2$ à l'aide de $\|\delta b\|_2/\|b\|_2$ et des valeurs propres de A.

Exercice 2 (13 points)
Soit a un réel. On considère le problème (P_a) d'optimisation linéaire suivant :

$$(P_a) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z = x_1 + ax_2 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

1. (2 points) Écrire le problème dual (D_a) de (P_a).
2. (2 points) À l'aide du théorème des écarts complémentaires, déterminer les valeurs de a, s'il en existe, pour lesquelles (7, 4) est une solution optimale de (P_a).

Dans toute la suite, on fixe la valeur de *a* à 2.
3. (5 points) Résoudre (P_2) à l'aide de l'algorithme du simplexe.
4. (1,5 point) Déduire de la question 3 une solution optimale de (D_2). On indiquera comment on obtient les valeurs optimales des variables duales.
5. (2,5 points) Les seconds membres des trois premières contraintes du problème (P_2) sont considérés comme des quantités disponibles de trois ressources : on dispose donc de 11 unités de la ressource 1 et de 7 unités des ressources 2 et 3. La fonction z est considérée comme étant un gain exprimé en euros. On peut acheter un peu plus de ces ressources à un prix unitaire de 2 € pour la ressource 1, de 1 € pour la ressource 2 et de 0,50 € pour la ressource 3. Quelle(s) ressource(s) peut-on conseiller d'acheter (on ne demande pas la quantité qu'on conseille d'acheter) ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (11 points)
On considère la fonction :

$$f(x, y) = 5x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 4y$$

1. (3 points) Montrer que f admet un unique minimum global sur $\mathbf{R}^2$ qu'on déterminera.
2. (8 points) On considère maintenant le problème (P) :

$$(P) \qquad \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x, y) \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} x + y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

a. Montrer que les contraintes sont qualifiées en tout point du domaine réalisable.
b. En utilisant la condition de Karush, Kuhn et Tucker, montrer que le point de coordonnées (0, 8) n'est pas un minimum du problème.
c. Appliquer la méthode de plus forte descente à pas optimal vue en cours à partir du point (0, 8). On pourra s'aider d'un dessin pour déterminer les directions à suivre. On indiquera les coordonnées du point de minimum obtenu et on indiquera la valeur de ce minimum. Que donne la condition de Karush, Kuhn et Tucker au point obtenu ? Ce point est-il un minimum global de (P) ?