Contrôle de connaissances de MDI 210

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits, ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.
Le barème (sur 34) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié ;
la note (sur 17) obtenue à cette épreuve sera complétée par la note des TP (sur 3).
Sauf mention contraire, un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours ne sera pas considéré comme juste.
L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Dans tout le sujet, **R** désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice 1 (8,5 points)

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_{\alpha,\beta}$ définie par :

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. (4 points) À l'aide de la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de $A_{1,1}$ (c'est-à-dire la matrice ne contenant que des 1) : on détaillera les calculs et on précisera, pour chaque vecteur propre, quelle valeur propre lui est associée.

Corrigé

On reprend les notations du cours en posant $A = A_{1,1}$. On élimine d'abord le terme β situé en $p = 1$ et $q = 2$. On obtient successivement $x = (a_{2,2} - a_{1,1})/(2a_{1,2}) = 0$, $t = 1$, $c = s = 1/\sqrt{2}$. Puis, en appliquant les formules et les notations du cours :

- $b_{1,3} = c.a_{1,3} - s.a_{2,3} = 0$,
- $b_{2,3} = s.a_{1,3} + c.a_{2,3} = \sqrt{2}$,
- $b_{1,1} = a_{1,1} - t.a_{1,2} = 0$,
- $b_{2,2} = a_{2,2} + t.a_{1,2} = 2$,
- $b_{3,3} = a_{3,3} = 1$.

D'où les matrices B_1 et Ω_1 obtenues après la première itération :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Omega_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On recommence en posant $A = B_1$, avec $p = 2$ et $q = 3$. On obtient $x = (1 - 2)/2\sqrt{2}$ puis t vérifiant $t^2 + 2xt - 1 = t^2 - t/\sqrt{2} - 1 = 0$, soit $t = -1/\sqrt{2}$, d'où $c = \sqrt{2/3}$, $s = -1/\sqrt{3}$. Puis :

- $b_{1,2} = c.a_{1,2} - s.a_{1,3} = 0$,
- $b_{1,3} = s.a_{1,2} + c.a_{1,3} = 0$,
- $b_{2,2} = a_{2,2} - t.a_{2,3} = 3$,
- $b_{3,3} = a_{3,3} + t.a_{2,3} = 0$,
- $b_{1,1} = a_{1,1} = 0$.

D'où les matrices B_2 et Ω_2 obtenues après cette seconde itération :

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}.$$

La matrice B_2 étant diagonale, la méthode s'arrête. Les valeurs propres de $A_{1,1}$ sont 0, 3 et 0.

Une base orthonormée de $A_{1,1}$ est donnée par le produit $\Omega_1\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$:

le vecteur $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ est associé à la valeur propre 0, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ à la valeur propre 3, $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ à la valeur propre 0. On vérifie facilement la relation $A_{1,1} = (\Omega_1\Omega_2)B_2(\Omega_1\Omega_2)^{-1}$ ou encore, puisque la matrice $\Omega_1\Omega_2$ est orthogonale, $A_{1,1} = (\Omega_1\Omega_2)B_2(\Omega_1\Omega_2)^t$.

Fin de corrigé

2. (1 point) En déduire les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de $A_{\alpha,\beta}$ pour tout réel α et tout réel β.

Corrigé

Remarquons la relation $A_{\alpha,\beta} = (\alpha - \beta)I + \beta A_{1,1}$, où I désigne la matrice identité. Soit x un vecteur propre de $A_{1,1}$ associé à la valeur propre λ. Comme x est aussi (comme tout vecteur) vecteur propre de I, il vient que x est vecteur propre de $A_{\alpha,\beta}$, pour la valeur propre $\alpha + \beta(\lambda - 1)$. En effet :

$$A_{\alpha,\beta}.x = ((\alpha - \beta)I + \beta A_{1,1})x = (\alpha - \beta)Ix + \beta A_{1,1}x = (\alpha - \beta)x + \beta\lambda x = (\alpha - \beta + \beta\lambda)x.$$

Les valeurs propres de $A_{\alpha,\beta}$ sont donc $\alpha - \beta$, $\alpha + 2\beta$ et $\alpha - \beta$, associées respectivement aux mêmes vecteurs propres que ceux de la question précédente. Comme précédemment, on a la relation $A_{\alpha,\beta} = (\Omega_1\Omega_2)D_{\alpha,\beta}(\Omega_1\Omega_2)^t$, où $D_{\alpha,\beta}$ est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de $A_{\alpha,\beta}$, c'est-à-dire $\alpha - \beta$, $\alpha + 2\beta$ et $\alpha - \beta$.

Fin de corrigé

3. (3,5 points) Soit $x \in \mathbf{R}^3$. On considère la forme quadratique $Q_{\alpha,\beta}$ définie sur $\mathbf{R}^3$ par $Q_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2} x^t A_{\alpha,\beta} x$. Pour chaque valeur de α et de β, indiquer, en utilisant ce qui précède :

a. si $Q_{\alpha,\beta}$ admet un minimum global fini ; on précisera alors si ce minimum est atteint pour un seul $x \in \mathbf{R}^3$ ou pour plusieurs ;

b. si $Q_{\alpha,\beta}$ admet des minima locaux qui ne soient pas globaux.

Corrigé

La matrice hessienne de $Q_{\alpha,\beta}$ étant $A_{\alpha,\beta}$, examinons le signe des valeurs propres de $A_{\alpha,\beta}$ pour répondre à ces questions. On sait, grâce à la question précédente, que les valeurs propres de $A_{\alpha,\beta}$ sont $\alpha - \beta$ et $\alpha + 2\beta$.

* 1^er cas : $\alpha - \beta < 0$. Par conséquent, $A_{\alpha,\beta}$ n'est pas positive. Or, une condition nécessaire de minimalité (locale) en x^* est la positivité de la matrice hessienne en x^*. On conclut dans ce cas que $Q_{\alpha,\beta}$ n'admet pas de minimum (local ou global) fini sur $\mathbf{R}^3$.

* 2^e cas : $\alpha - \beta = 0$; les valeurs propres de $A_{\alpha,\beta}$ valent alors 0, 3β et 0.

- 1^er sous-cas : $\beta > 0$. La matrice hessienne de $Q_{\beta,\beta}$ est alors positive mais non définie positive et la forme $Q_{\beta,\beta}$ est convexe mais non strictement convexe : la condition suffisante d'optimalité locale ne s'applique pas. Pour répondre néanmoins à la question, plaçons-nous dans une base orthonormée de vecteurs propres. Plus précisément, en reprenant les notations de la question précédente, on a $A_{\beta,\beta} = (\mathbf{\Omega}_1\mathbf{\Omega}_2)D_{\beta,\beta}(\mathbf{\Omega}_1\mathbf{\Omega}_2)^t$, où les termes diagonaux de $D_{\beta,\beta}$ sont 0, 3β et 0. L'expression de $Q_{\beta,\beta}$ devient alors :
$$Q_{\beta,\beta}(x) = \frac{1}{2} x^t A_{\beta,\beta} x = \frac{1}{2} x^t(\mathbf{\Omega}_1\mathbf{\Omega}_2)D_{\beta,\beta}(\mathbf{\Omega}_1\mathbf{\Omega}_2)^t x.$$
Posons $y = (\mathbf{\Omega}_1\mathbf{\Omega}_2)^t x$. On obtient $Q_{\beta,\beta}(x) = \frac{1}{2} y^t D_{\beta,\beta} y$. En posant, $y = (y_1, y_2, y_3)^t$, il vient $Q_{\beta,\beta}(x) = \frac{3\beta}{2} y_2^2$. Par conséquent, $Q_{\beta,\beta}$ atteint un minimum global (qui vaut 0) en tout point de $\mathbf{R}^3$ de la forme $(y_1, 0, y_3)^t$; il n'y a donc pas unicité de la solution optimale (on pourrait, mais cela n'est pas demandé, retrouver la forme des solutions x optimales en reprenant le changement de base : $x = \mathbf{\Omega}_1\mathbf{\Omega}_2 y$). Par ailleurs, tout minimum local est global du fait de la convexité de $Q_{\beta,\beta}$.
- 2^e sous-cas : $\beta = 0$. On a alors $Q_{0,0}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^3$: la valeur minimum de $Q_{0,0}$ est égale à 0 et tout point de $\mathbf{R}^3$ est un minimum global.
- 3^e sous-cas : $\beta < 0$. Une valeur propre de $Q_{\beta,\beta}$ est négative et, d'après un théorème du cours, $Q_{\beta,\beta}$ n'admet pas de minimum (local ou global) fini sur $\mathbf{R}^3$.

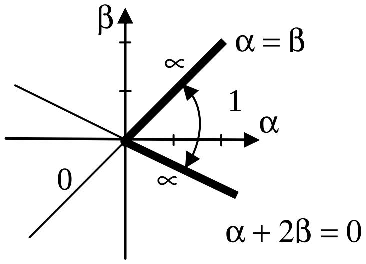
* 3^e cas : $\alpha - \beta > 0$.

- 1^er sous-cas : $\alpha + 2\beta > 0$. La matrice hessienne $A_{\alpha,\beta}$ de $Q_{\alpha,\beta}$ est alors définie positive. Un théorème du cours indique que $Q_{\alpha,\beta}$ admet un unique minimum global (en x^* vérifiant $\nabla Q_{\alpha,\beta}(x) = A_{\alpha,\beta}.x^* = 0$, c'est-à-dire pour $x^* = 0$, la valeur minimum de $Q_{\alpha,\beta}$ étant donc 0). Le fait que $A_{\alpha,\beta}$ soit définie positive entraîne la stricte convexité de $Q_{\alpha,\beta}$: par conséquent, il n'y a pas de minimum local qui ne soit pas global.
- 2^e sous-cas : $\alpha + 2\beta = 0$. On est donc dans le cas d'une valeur propre nulle et de deux valeurs propres strictement positives. Un raisonnement analogue à celui du premier sous-cas du deuxième cas montre que $Q_{\alpha,\beta}$ atteint un minimum global (qui vaut 0) en une infinité de points de $\mathbf{R}^3$ (correspondant à la forme $(0, y_2, 0)^t$ après changement de base) et que tout minimum local est global.

- 3^e sous-cas : $\alpha + 2\beta < 0$. Une valeur propre de $Q_{\alpha,\beta}$ est négative et, d'après un théorème du cours, $Q_{\beta,\beta}$ n'admet pas de minimum (local ou global) fini sur $\mathbf{R}^3$.

On peut résumer ce qui précède de la façon suivante :
* dans tous les cas, il n'y a pas de minimum local qui ne soit pas global ;
* pour α et β vérifiant simultanément $\alpha - \beta > 0$ et $\alpha + 2\beta > 0$, c'est-à-dire aussi pour $\alpha > \text{Max}(\beta, -2\beta)$, le minimum global vaut 0 et il n'est atteint qu'en un seul point de $\mathbf{R}^3$;
* pour $\alpha = \beta \geq 0$ ou ($\alpha = -2\beta$ et $\beta \leq 0$), le minimum global vaut 0 et il est atteint en une infinité de points de $\mathbf{R}^3$;
* dans les autres cas, il n'existe pas de minimum (global ou local).

Le dessin suivant résume ce qui précède : dans le secteur matérialisé par un arc de cercle, les deux demi-droites en gras étant exclues, la solution optimale est unique ; sur les deux demi-droites en gras, y compris l'origine, il existe une infinité de solutions optimales ; ailleurs, il n'existe pas de minimum.



Fin de corrigé

Exercice 2 (9 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. (1 point) Soit $x \in \mathbf{R}^3$. En considérant x^tAx et sans calculer les valeurs propres de A, montrer que A est définie positive.

Corrigé

Posons $x = (x_1, x_2, x_3)^t$. On obtient $x^tAx = x_1^2 + 4x_2^2 + 11x_3^2 + 2x_1x_3 + 12x_2x_3$, ce qui s'écrit aussi $x^tAx = (x_1 + x_3)^2 + (2x_2 + 3x_3)^2 + x_3^2$. Par conséquent, on a $x^tAx = 0$ si et seulement si $x = 0$, ce qui est la définition d'une matrice A définie positive.

Fin de corrigé

2. (3 points) Appliquer la méthode de Cholesky à la matrice A.

Corrigé

La matrice $A = (a_{ij})$ étant définie positive et symétrique, on peut lui appliquer la méthode de Cholesky. Cherchons la matrice $B = (b_{ij})$ triangulaire inférieure avec $A = BB^t$ et, pour $1 \leq i \leq 3$, $b_{ij} > 0$. Les formules du cours donnent successivement :

* $b_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$ et, pour $2 \leq i \leq 3$, $b_{i1} = a_{i1}/b_{11} = a_{i1}$; d'où la première colonne de B : $(1, 0, 1)^t$;

* $b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2} = 2$ et $b_{32} = (a_{32} - b_{31}b_{21})/b_{22} = 3$; d'où la deuxième colonne de B : $(0, 2, 3)^t$;

* $b_{33} = \sqrt{a_{33} - b_{31}^2 - b_{32}^2} = \sqrt{11 - 1^2 - 3^2} = 1$.

On obtient finalement : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Fin de corrigé

3. (2 points) En utilisant la décomposition obtenue à la question 2, résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = 3 \\ 4y_2 + 6y_3 = 12 \\ y_1 + 6y_2 + 11y_3 = 23 \end{cases}.$$

Corrigé

Puisque A est égale à BB^t, résoudre le système $Ay = b$ avec $b = (3, 12, 23)^t$ et $y = (y_1, y_2, y_3)^t$ revient à résoudre $BB^ty = b$. Posons $z = (z_1, z_2, z_3)^t = B^ty$. On cherche d'abord la solution du système $Bz = b$:

$$\begin{cases} z_1 = 3 \\ 2z_2 = 12 \\ z_1 + 3z_2 + z_3 = 23 \end{cases}$$

dont la solution est $z = (3, 6, 2)^t$. Puis on résout le système $B^ty = z$:

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = 3 \\ 2y_2 + 3y_3 = 6 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

dont la solution (obtenue par exemple en appliquant la méthode de remontée) est $y = (1, 0, 2)^t$.

Fin de corrigé

4. (3 points) On considère le problème (P) de programmation linéaire suivant :

Maximiser $z = 3x_1 + 12x_2 + 23x_3 + 7x_4$

avec les contraintes
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 \le 2 \\ 4x_2 + 6x_3 + x_4 \le 14 \\ x_1 + 6x_2 + 11x_3 - x_4 \le 24 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 \le 18 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_4 \le 11 \end{cases}$$

et, pour $1 \le j \le 4$, $x_j \ge 0$.

Indiquer, en appliquant le théorème des écarts complémentaires, si $x = (1, 2, 1, 0)^t$ est une solution optimale de (P).

Corrigé

On commence par vérifier que la solution proposée est réalisable, ce qui est bien le cas. Le théorème des écarts complémentaires fait intervenir les contraintes du problème dual de (P). Ces contraintes duales sont les suivantes :

$$\begin{cases} y_1 \quad + \quad y_3 - \quad y_4 + \quad y_5 \geq \ 3 \\ \quad 4y_2 + \ 6y_3 + 7y_4 - 3y_5 \geq 12 \\ y_1 + 6y_2 + 11y_3 - 2y_4 \qquad \geq 23 \\ -2y_1 + \ y_2 - \quad y_3 \qquad + 5y_5 \geq \ 7 \end{cases}$$

Les deux dernières contraintes primales ne sont pas saturées par la solution x proposée. On en déduit que l'on a $y_4 = 0$ et $y_5 = 0$ (remarque : le fait que les autres contraintes soient saturées n'implique pas que les y_i correspondant soient nécessairement non nuls). De plus, les trois premières composantes de x étant non nuls, on en déduit que les trois premières contraintes duales sont saturées. On obtient ainsi le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} y_1 \quad + \quad y_3 - \quad y_4 + \quad y_5 = \ 3 \\ \quad 4y_2 + \ 6y_3 + 7y_4 - 3y_5 = 12 \\ y_1 + 6y_2 + 11y_3 - 2y_4 \qquad = 23 \end{cases}$$

Compte tenu du fait que y_4 et y_5 sont nuls, on retrouve le système linéaire de la question précédente. La solution de ce système est donc, d'après la question 3, $y = (1, 0, 2)^t$.
Il faut encore vérifier que cette solution est réalisable pour le problème dual. Or, la dernière contrainte duale n'est pas vérifiée. Par conséquent, la solution x proposée n'est pas la solution optimale de (P).
Fin de corrigé

Exercice 3 (8,5 points)

Soit α un réel strictement positif ($\alpha > 0$). On considère le problème de programmation linéaire (P_α) défini de la façon suivante :

Maximiser $z = x_1 - x_2$

avec les contraintes
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -\alpha \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

et $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

N. B. : Dans tout l'exercice, s'il y a plusieurs variables candidates pour entrer ou sortir de la base quand on effectue une itération de l'algorithme du simplexe, on choisira nécessairement la variable conformément à la règle de Bland, même si le dictionnaire n'est pas dégénéré.

1. (3,5 points) Déterminer, à l'aide de l'algorithme du simplexe sous la forme des dictionnaires (une résolution géométrique ne sera pas considérée comme valable), les valeurs de α pour lesquelles (P_α) admet au moins une solution réalisable ; pour ces valeurs de α, préciser la solution réalisable de (P_α) que l'on obtient.

Indication : on étudiera un problème auxiliaire (A_α), que l'on donnera explicitement, obtenu à partir de (P_α) en ajoutant une variable que l'on appellera x_0.

Corrigé

Comme α est strictement positif, l'origine n'est pas réalisable. On applique donc la méthode à deux phases. Considérons le problème auxiliaire (A_α) défini par :

Maximiser $w = -x_0$

avec les contraintes
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -\alpha + x_0 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$
et $x_0 \ge 0,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Remarque : une variante de ce qui précède consiste à ajouter x_0 à tous les seconds membres des contraintes en dehors des contraintes de signe. Cette variante est traitée un peu plus loin.

L'introduction des variables d'écart conduit au dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{l} x_3 = -\alpha + x_0 + x_1 + x_2 \\ x_4 = 4 - x_1 - x_2 \\ x_5 = 2 - x_2 \\ \hline w = -x_0 \end{array}$$

Ce dictionnaire n'est pas réalisable à cause de $-\alpha$, mais il le devient si on force x_0 à entrer en base et x_3 à en sortir. On obtient alors le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{l} x_0 = \alpha - x_1 - x_2 + x_3 \\ x_4 = 4 - x_1 - x_2 \\ x_5 = 2 - x_2 \\ \hline w = -\alpha + x_1 + x_2 - x_3 \end{array}$$

On constate que l'annulation des variables hors base donne bien une solution réalisable de (A_α). On peut appliquer l'algorithme du simplexe. Ici, x_1 et x_2 sont candidates pour entrer en base. La règle de Bland nous conduit à choisir x_1. La variable qui sort de la base dépend de la valeur de α :

- si on a $\alpha < 4$, seule x_0 est candidate pour sortir de la base ;
- si on a $\alpha = 4$, x_0 et x_4 sont toutes les deux candidates pour sortir de la base ; la règle de Bland nous conduit à choisir x_0 ;
- si on a $\alpha > 4$, seule x_4 est candidate pour sortir de la base.

On poursuit donc les calculs selon les deux cas $\alpha \le 4$ ou $\alpha > 4$.

* $\alpha \le 4$; alors x_0 sort de la base et on obtient le dictionnaire ci-dessous :

$$\begin{array}{l} x_1 = \alpha - x_2 + x_3 - x_0 \\ x_4 = 4 - \alpha - x_3 + x_0 \\ x_5 = 2 - x_2 \\ \hline w = -x_0 \end{array}$$

Il n'y a plus de variable hors base pourvue d'un coefficient strictement positif dans w : l'algorithme du simplexe s'arrête. L'optimum de (A_α) vaut 0 (ce que l'on obtient en annulant x_0) : le problème initial (P_α) est donc réalisable. De plus, l'élimination de x_0 et l'annulation des variables hors base conduisent à une solution réalisable de (P_α) : $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = \alpha$ (et $x_4 = 4 - \alpha$, $x_5 = 2$).

* $\alpha > 4$; alors x_4 sort de la base et on obtient le dictionnaire ci-dessous :

$$\begin{array}{l} x_1 = 4 - x_2 - x_4 \\ x_0 = \alpha - 4 + x_3 + x_4 \end{array}$$

$$x_5 = 2 - x_2$$

$$w = -\alpha + 4 - x_3 - x_4$$

Il n'y a plus de variable hors base pourvue d'un coefficient strictement positif dans w : l'algorithme du simplexe s'arrête. Mais l'optimum de (A_α), égal à $4 - \alpha$, n'est pas nul : le problème initial (P_α) n'est donc pas réalisable (ce qu'un dessin montrerait clairement).

Variante : on ajoute x_0 à tous les seconds membres des contraintes en dehors des contraintes de signe. On obtient alors le problème auxiliaire (A_α) défini par :

Maximiser $w = -x_0$

avec les contraintes $\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -\alpha + x_0 \\ x_1 + x_2 \le 4 + x_0 \\ x_2 \le 2 + x_0 \end{cases}$ et $x_0 \ge 0$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

L'introduction des variables d'écart conduit au dictionnaire suivant :

$$x_3 = -\alpha + x_0 + x_1 + x_2$$
$$x_4 = 4 + x_0 - x_1 - x_2$$
$$x_5 = 2 + x_0 - x_2$$

$$w = -x_0$$

Ce dictionnaire n'est pas réalisable à cause de $-\alpha$, mais il le devient si on force x_0 à entrer en base et x_3 à en sortir. On obtient alors le dictionnaire suivant :

$$x_0 = \alpha - x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_4 = 4 + \alpha - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 2 + \alpha - x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$w = -\alpha + x_1 + x_2 - x_3$$

On constate que l'annulation des variables hors base donne bien une solution réalisable de (A_α). On peut appliquer l'algorithme du simplexe. Ici, x_1 et x_2 sont candidates pour entrer en base. La règle de Bland nous conduit à choisir x_1. La variable qui sort de la base dépend de la valeur de α :

- si on a $\alpha < 4$, seule x_0 est candidate pour sortir de la base ;
- si on a $\alpha = 4$, x_0 et x_4 sont toutes les deux candidates pour sortir de la base ; la règle de Bland nous conduit à choisir x_0 ;
- si on a $\alpha > 4$, seule x_4 est candidate pour sortir de la base.

On poursuit donc les calculs selon les deux cas $\alpha \le 4$ ou $\alpha > 4$.

* $\alpha \le 4$; alors x_0 sort de la base et on obtient le dictionnaire ci-dessous :

$$x_1 = \alpha - x_2 + x_3 - x_0$$
$$x_4 = 4 - \alpha - x_3 + 2x_0$$
$$x_5 = 2 - x_2 + x_0$$

$$w = -x_0$$

Il n'y a plus de variable hors base pourvue d'un coefficient strictement positif dans w : l'algorithme du simplexe s'arrête. L'optimum de (A_α) vaut 0 (ce que l'on obtient en annulant x_0) : le problème initial (P_α) est réalisable. De plus, l'élimination de x_0 et l'annulation des variables hors base conduisent à une solution réalisable de (P_α) : $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = \alpha$ (et $x_4 = 4 - \alpha$, $x_5 = 2$).

* $\alpha > 4$; alors x_4 sort de la base et on obtient le dictionnaire ci-dessous :

$$x_1 = 2 + \alpha/2 - x_2 + x_3/2 - x_4/2$$
$$x_0 = \alpha/2 - 2 + x_3/2 + x_4/2$$
$$x_5 = \alpha/2 - x_2 + x_3/2 + x_4/2$$
$$\overline{w = -\alpha/2 + 2 - x_3/2 - x_4/2}$$

Il n'y a plus de variable hors base pourvue d'un coefficient strictement positif dans w : l'algorithme du simplexe s'arrête. Mais l'optimum de (A_α), égal à $2 - \alpha/2$, n'est pas nul : le problème initial (P_α) n'est donc pas réalisable (ce qu'un dessin montrerait clairement).

Fin de corrigé

2. (2 points) Pour les valeurs de α pour lesquelles (P_α) est réalisable, déterminer les valeurs de x_1 et x_2 permettant d'atteindre le maximum de (P_α).

Corrigé

On a donc $\alpha \leq 4$. On part du dictionnaire optimal obtenu pour (A_α), on élimine x_0 et on restaure l'expression de la fonction z. On obtient alors un dictionnaire réalisable pour (P_α) :

$$x_1 = \alpha - x_2 + x_3$$
$$x_4 = 4 - \alpha - x_3$$
$$x_5 = 2 - x_2$$
$$\overline{z = x_1 - x_2 = \alpha - 2x_2 + x_3}$$

Ici, x_3 entre en base et x_4, seule candidate, en sort. On obtient :

$$x_3 = 4 - \alpha - x_4$$
$$x_1 = 4 - x_2 - x_4$$
$$x_5 = 2 - x_2$$
$$\overline{z = 4 - 2x_2 - x_4}$$

Il n'y a plus de variable hors base pourvue d'un coefficient strictement positif dans z : l'algorithme du simplexe s'arrête. La solution optimale de (P_α) s'obtient en annulant les variables hors base : $x_2 = x_4 = 0$, $x_1 = 4$ (et $x_3 = 4 - \alpha$, $x_5 = 2$), et le maximum de (P_α) vaut 4.

Fin de corrigé

3. (1 point) Écrire le problème dual (D_α) de (P_α).

Corrigé

Le problème (P_α) étant mis sous forme standard, on obtient immédiatement (D_α) :

Minimiser $w = -\alpha y_1 + 4y_2 + 2y_3$

avec les contraintes $\begin{cases} -y_1 + y_2 \geq 1 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \geq -1 \end{cases}$

et $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$

Fin de corrigé

4. (2 points) Que peut-on dire de l'optimum de (D_α) selon les valeurs de $\alpha > 0$ (quand cela est pertinent, on précisera la valeur des variables duales permettant d'atteindre cet optimum) ?

Corrigé

Pour $\alpha \leq 4$, le théorème de la dualité permet de conclure que le minimum de (D_α) est égal au maximum de (P_α), c'est-à-dire 4. En considérant le dernier dictionnaire de (P_α), on obtient les valeurs optimales des variables duales : en appelant d_{i+2} le coefficient de la i^e variable d'écart dans l'expression de z (c'est-à-dire la variable x_{i+2}) on sait que, pour $1 \leq i \leq 3$, les relations

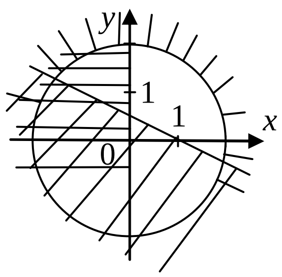
$y_i = -d_{i+2}$ fournissent une solution optimale du problème dual. D'où, ici, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, ce qui permet de retrouver le fait que le minimum de (D_α) est égal au maximum de (P_α) : 4.
Pour $\alpha > 4$, montrons que (D_α) n'est pas minoré. Pour cela, il suffit de considérer les solutions de la forme $y_1 \geq 0$, $y_2 = y_1 + 1$ et $y_3 = 0$. Les contraintes sont toutes satisfaites et w vaut alors $(4 - \alpha)\, y_1 + 4$, ce qui tend vers $-\infty$ quand y_1 tend vers $+\infty$.
Fin de corrigé

Exercice 4 (8 points)

Soit D le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ 1 - x - 2y \leq 0 \\ -x \leq 0 \end{cases}$.

On souhaite minimiser la fonction f définie pour $(x, y) \in D$ par : $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

1. (1 point) Pour quels points de D les contraintes sont-elles qualifiées ?
Corrigé
Commençons par dessiner le domaine D : celui-ci est représenté ci-dessous, par la partie non hachurée, délimitée par un arc de cercle et deux segments de droite.

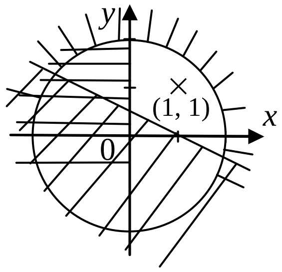


On définit trois fonctions g_1, g_2, g_3 par $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \leq 0$, $g_2(x, y) = 1 - x - 2y \leq 0$, $g_3(x, y) = -x \leq 0$. Déterminons la matrice hessienne de g_1 : $\nabla^2 g_1(x, y) = 2I$, où I désigne la matrice identité. La matrice hessienne de g_1 est donc (définie) positive en tout point et, par conséquent g_1 est convexe. De même, g_2 et g_3 sont convexes car elles sont affines.
De plus, l'intérieur strict de D est non vide (par exemple le point (1, 1) en fait partie).
Un théorème du cours permet alors d'affirmer que les contraintes sont qualifiées en tout point de D.
Fin de corrigé

2. (4 points) Appliquer au problème la méthode de plus grande descente admissible en partant du point de coordonnées (1, 1). On détaillera les calculs.
Indication : on pourra s'aider d'un dessin pour déterminer les directions suivies, mais on expliquera les choix qui seront faits.
Corrigé
Déterminons le gradient $\nabla f(x, y)$ de f en un point (x, y) appartenant à D :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

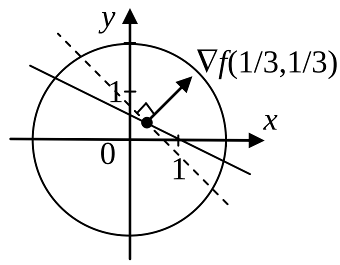
* 1re itération.
Au point $(x_1, y_1) = (1, 1)$, aucune des trois contraintes n'est saturée, comme le montre le dessin ci-dessous, où le point (1, 1) est représenté par une croix.



Autrement dit, le point (1, 1) est dans l'intérieur strict du domaine. La direction de plus grande descente d_1 est donc donnée par l'opposé du gradient de f en (x_1, y_1) : $d_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Cherchons un point (x_2, y_2) sous la forme $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + s\, d_1 = \begin{pmatrix} 1-3s \\ 1-3s \end{pmatrix}$, où s est un scalaire (positif), de façon à minimiser $f(x_2, y_2)$ tout en restant dans D. Pour cela, on pose $h(s) = f(x_2, y_2) = 3(1 - 3s)^2$. Le minimum de h est atteint en $s = 1/3$. Mais cela donne $x_2 = y_2 = 0$, ce qui n'est pas un point de D. Cela provient du fait que l'on dépasse la contrainte g_2. On est donc limité par cette contrainte lors du déplacement dans la direction d_1. Le mieux que l'on puisse faire dans cette direction consiste à saturer g_2, ce qui correspond à un point (x_2, y_2) vérifiant $g_2(x_2, y_2) = 0$. Ce qui donne $1 - 3(1 - 3s) = 0$, ou encore $s = 2/9$, d'où $(x_2, y_2) = (1/3, 1/3)$.

* 2e itération.
Au point (x_2, y_2), seule la contrainte g_2 est saturée. On cherche donc une direction qui soit à la fois de descente et admissible pour g_2. Le gradient de f en (x_2, y_2) vaut $(1, 1)^t$. Dans le dessin ci-dessous, la droite en pointillés correspond à la perpendiculaire au gradient en $(x_2, y_2) = (1/3, 1/3)$. Les directions de stricte descente sont celles qui font un angle strictement supérieur à $\pi/2$ avec le gradient. Le dessin ci-dessous permet de constater que la direction admissible de plus grande pente, c'est-à-dire faisant le plus grand angle possible avec le gradient de f en (x_2, y_2), est donnée par le bord de la contrainte associée à g_2, dans le sens supérieur gauche.



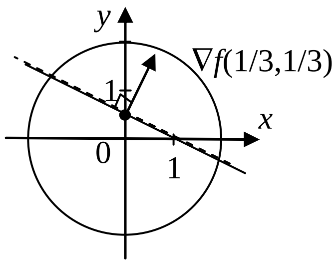
Un vecteur directeur de cette droite, dans le sens voulu, est $d_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche donc un point (x_3, y_3) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + s\, d_2 = \begin{pmatrix} 1/3 - 2s \\ 1/3 + s \end{pmatrix},$$

où s est un scalaire (positif), de façon à minimiser $f(x_3, y_3)$ tout en restant dans D. Pour cela, on pose $h(s) = f(x_3, y_3) = (1/3 – 2s)^2 + (1/3 – 2s)(1/3 + s) + (1/3 + s)^2$. Par dérivation de h, on voit que le minimum de h est atteint en $s = 1/6$, ce qui donne $x_3 = 0$ et $y_3 = 1/2$, ce qui est bien un point de D. On a donc $(x_3, y_3) = (0, 1/2)$.

* 3e itération.

Au point (x_3, y_3), les contraintes g_2 et g_3 sont saturées. On cherche donc une direction qui soit à la fois de descente et admissible. Le gradient de f en (x_3, y_3) valant $(1/2, 1)^t$, un dessin comme celui donné ci-dessous permet de constater qu'il n'y a plus de direction admissible qui soit aussi de descente. En effet, la droite en traits pointillés représentant encore la perpendiculaire au gradient, on constate que toutes les directions de stricte descente sont non admissibles. La méthode s'arrête.



Le point déterminé par la méthode est finalement $(x_3, y_3) = (0, 1/2)$.

Fin de corrigé

3. (2 points) La condition de Karush, Kuhn et Tucker est-elle satisfaite pour le point obtenu à la question précédente ?

Corrigé

Au point $(x_3, y_3) = (0, 1/2)$, les contraintes g_2 et g_3 sont saturées. Les contraintes étant qualifiées en (x_3, y_3), la condition de Karush, Kuhn et Tucker consiste donc à savoir s'il existe deux réels positifs ou nuls, λ_2 et λ_3, vérifiant $\nabla f(x_3, y_3) = –\lambda_2 \nabla g_2(x_3, y_3) – \lambda_3 \nabla g_3(x_3, y_3)$, c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or, ce système admet pour solution $\lambda_2 = 1/2$ et $\lambda_3 = 0$. Ces deux nombres étant positifs ou nuls, la condition de Karush, Kuhn et Tucker est satisfaite en $(x_3, y_3) = (0, 1/2)$.

Fin de corrigé

4. (1 point) Peut-on en déduire que le point trouvé à la question 2 est un minimum au moins local du problème ?

Corrigé

La condition de Karush, Kuhn et Tucker est ici une condition suffisante de minimalité locale. En effet, on a déjà constaté que les contraintes sont qualifiées en (x_3, y_3) et que les fonctions g_2 et g_3 (seules contraintes saturées en (x_3, y_3)) sont convexes. Montrons qu'en outre f est convexe. Pour cela, considérons la matrice hessienne de f : $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant (égal au produit des valeurs propres) et la trace (égale à la somme des valeurs propres) étant tous deux positifs, on en déduit que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x, y)$ sont positives ou nulles (en fait, elles valent 1 et 3) : f est convexe. Donc la condition de Karush, Kuhn et Tucker est bien une condition suffisante d'optimalité locale : $(x_3, y_3) = (0, 1/2)$ est un minimum, au moins local, du problème.

Fin de corrigé

N. B. Le corrigé de l'épreuve est disponible sur le site pédagogique de MDI 210.