

波动率风险和波动率风险溢价: 中国的独特现象

陈 蓉^{1,2}, 张不凡¹, 姚育婷¹

(1. 厦门大学 经济学院, 厦门 361005; 2. 厦门大学 管理学院, 厦门 361005)

摘 要 本文以美国市场作为对比, 运用多种方法深入考察了中国市场的波动率风险和波动率风险溢价, 发现中国市场具有与美国市场不同的异常现象. 首先, 与美国市场不同, 中国股票市场上的波动率风险整体而言并非系统性风险, 而是呈现出暴跌时期显著为负, 非暴跌时期显著为正的明显时变特征; 其次, 虽然中国市场的波动率风险是非系统性风险, 但期权隐含的波动率风险溢价却显著为负, 这与美国情形不同, 也不符合金融原理, 可能意味着中国期权价格存在高估. 进一步的模拟 Buy-Write 策略结果证实中国期权价格的确存在持续的系统性高估.

关键词 波动率风险; 波动率风险溢价; 测度转换; delta 中性; Buy-Write 策略

Volatility risk and volatility risk premium: Anomalies in China's market

CHEN Rong^{1,2}, ZHANG Bufan¹, YAO Yuting¹

(1. School of Economics, Xiamen University, Xiamen 361005, China;

2. School of Management, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract In comparison to the US market, we use several methods to study the volatility risk and the volatility risk premium in China's market. We find that there exist anomalies in China's market. First, unlike the US market, the volatility risk in China's market is not a systematic risk on the whole. It is time-varying, and shows significantly negative during crash period while significantly positive during non-crash period. Second, the option-implied volatility risk premium in China is negative although the volatility risk is not a systematic risk, which differs from the US market and does not match the principles of finance. That might mean the options should be continuously overpriced in China. It is proved by the simulation of the Buy-Write strategy.

Keywords volatility risk; volatility risk premium; change of measure; delta neutral; Buy-Write strategy

1 引言

2015 年, 中国市场迎来了第一个场内交易的期权品种——上证 50ETF 期权, 国内关于期权市场的研究也逐渐成为热点. 作为新兴市场, 中国期权市场有着一些独特的特征, 甚至呈现出与国外成熟市场相反的现象. 因此以中国期权市场与国外成熟市场的差异作为切入点, 从实证和理论上分析其原因, 研究和探讨中国期权市场的特点, 可以为中国市场的投资者和监管决策者更好地理解 and 运用期权提供有益的参考. 如丛明舒^[1]以期权隐含方差为度量指标, 通过比较中美两个市场的两个实证差异, 探讨了中国期权市场可能存在的

收稿日期: 2019-05-06

作者简介: 陈蓉 (1976–), 女, 福建人, 金融学博士, 厦门大学教授, 研究方向: 资产定价, 金融工程与风险管理, E-mail: aronge@xmu.edu.cn; 张不凡 (1983–), 男, 江苏人, 厦门大学金融工程博士研究生, 研究方向: 资产定价, 金融工程, E-mail: bufzhang@163.com; 姚育婷 (1990–), 女, 福建人, 厦门大学金融工程硕士, 研究方向: 资产定价, 金融工程, E-mail: yyting777@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金 (71871190, 71790601, 71471155, 71371161)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (71871190, 71790601, 71471155, 71371161)

中文引用格式: 陈蓉, 张不凡, 姚育婷. 波动率风险和波动率风险溢价: 中国的独特现象 [J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(12): 2995–3010.

英文引用格式: Chen R, Zhang B F, Yao Y T. Volatility risk and volatility risk premium: Anomalies in China's market[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(12): 2995–3010.

定价机制或定价效率问题。

本文将从波动率风险和波动率风险溢价的角度出发,对中国期权市场进行实证研究,通过与美国市场的对比,研究和探讨中国期权市场的特点。大量实证研究表明,作为期权定价的重要因素,资产价格的波动率是随机的。这意味着波动率本身就是风险源。根据资产定价的基本原理 (Cochrane^[2]),如果这一风险因子是系统性的,投资者承担波动率风险就会要求一定的风险补偿,即波动率风险溢价。正的系统性风险对应正的风险溢价,负的系统性风险则对应负的风险溢价。

国外学者基于美国市场等发达市场的研究表明,波动率风险溢价是显著为负的,投资者可以通过卖出期权获取波动率风险溢价,如 Coval 和 Shumway^[3], Bakshi 和 Kapadia^[4], Carr 和 Wu^[5] 等。与之相应,这些市场上的波动率风险是负的系统性风险:在这些市场上,波动率与股指显著负相关 (VIX 指数甚至被公认为是“恐慌指数”),当市场下跌时,波动率上升;反之亦然。这两者的关系是符合金融内在逻辑的:由于波动率和期权价格正相关,波动率 (其对应的可交易资产为期权,期权组合等波动率衍生品) 对于投资者来说是可以对冲市场下跌风险的“好资产”:当市场下跌时,波动率上升,使用期权组合构造的波动率衍生品多头获益,可以对冲整个市场下跌带来的风险。因此投资者愿意溢价购买期权以获得保险,这使得期权隐含的风险中性波动率高于实际波动率,也即波动率风险溢价为负。因此,从资产定价的基本原理来看,这些市场上的波动率风险和波动率风险溢价的内在逻辑是一致的。

由于中国一直没有推出正式的期权交易,对中国市场上波动率风险和波动率风险溢价的深入研究几乎空白。自上证 50ETF 期权诞生以来,中国的波动率风险与波动率风险溢价也开始受到关注。观察市场可以发现,中国市场的相关特征似乎与美国市场有所不同,中国市场上波动率的变化常常与市场的涨跌同向,上海证券交易所发布的中国波指 (iVX) 更像是“贪婪指数”而非“恐慌指数”。那么,中国的波动率风险和波动率风险溢价究竟呈现出怎样的特征? 是否与美国等发达市场不同? 其内涵和应用意义如何? 在期权市场运行渐上轨道之际,对中国市场的波动率风险及其风险溢价进行研究,并将其与发达的美国市场进行对比,显然是很有意义的。

本文首先运用相关性方法考察了中美股票市场上的波动率风险是否系统性风险,是正是负;随后运用测度转换方法和 delta 中性方法多角度考察了中美期权市场隐含的波动率风险溢价。结果发现中美市场存在两大不同:首先,从股票现货市场的研究结果来看,波动率风险在美国市场上是显著为负的系统性风险,在中国市场上却呈现非股灾期间显著为正,股灾期间显著为负,总体不显著异于零的特征;其次,美国期权市场隐含的波动率风险溢价显著为负,与股票现货市场上所发现的负系统性风险具有一致性;而在中国市场上,尽管股票现货市场上的波动率风险呈现上述不稳定特征,但期权隐含的波动率风险溢价却持续显著为负,与美国不同,也不符合金融基本原理。

这一不符是否意味着交易机会呢? 本文进一步构建并考察了 Buy-Write 策略的回测效果。结果表明,在中国市场上,基于 50ETF 期权的 Buy-Write 策略比 50ETF 有着更高的收益率和更小的标准差,夏普比率明显提高,这意味着中国的期权价格的确存在持续的系统性高估。

尽管听起来相对抽象,但波动率风险溢价在学术界和实务界中都具有重要的地位,从而具有重要的研究价值。波动率风险溢价是对现代资产定价理论的拓展与补充。传统的 CAPM 资产定价模型与实际市场难以弥合的差距促使大量学者对影响资产价格的其他风险因子进行了深入研究,波动率风险就是其中一个重要的因子。例如, Carr 和 Wu^[5] 的研究对美国市场上波动率是否系统性风险因子以及波动率风险溢价是否存在进行了探索,他们的研究表明波动率风险溢价对于提高资产定价模型的解释力和预测力是十分重要的;其次,波动率风险溢价是现实测度与风险中性测度下波动率期望值的转换枢纽,著名的 VIX 指数就是风险中性测度下的波动率期望,要将其转化为现实世界中人们对未来的波动率预期值,必须经由波动率风险溢价这一变量;第三,在金融交易中,波动率风险溢价也常常发挥着重要的作用,例如,若波动率是系统性风险因子,则多因子交易策略就需要将其纳入考量;又如,波动率风险溢价是对冲策略的影响要素之一,经典的金融理论认为金融衍生品是由标的资产衍生出来的冗余证券 (Black 和 Scholes^[6]),这意味着投资者可以在股票、债券和期权之间构造完全对冲策略,然而,如果存在波动率风险溢价,股票和债券的组合是无法对冲掉期权中的二阶

风险的, 必须引入其他高阶衍生品。

虽然有着重要的研究价值, 然而关于中国市场的波动率风险和波动率风险溢价的深入研究由于长期缺少正式的期权交易而几乎空白, 因此在中国期权市场终于开始发展的今天, 对其展开深入研究具有着重要意义。本文通过与美国市场的对比, 对中国市场的波动率风险与波动率风险溢价进行了深入的实证研究, 发现并证实了中国市场的独特现象, 相信对相关领域的研究和实际运用能提供有益的参考。

全文结构安排如下: 第 2 部分为文献综述; 第 3 部分简要介绍了研究思路和方法; 第 4 部分为数据描述; 第 5 部分通过多种方法考察了中美市场的波动率风险和波动率风险溢价特征; 第 6 部分考察了 Buy-Write 交易策略的效果; 第 7 部分为结论。

2 文献综述

国内外学者对波动率风险和波动率风险溢价的深入研究是 2000 年以后开始的。尽管方法不同, 这些文献的研究对象均为美国或香港等境外市场, 并且都发现期权隐含的波动率风险溢价显著为负, 而这源于其对应的波动率风险为负, 即股票和期权市场中波动率与股指负相关 (Bakshi 和 Kapadia^[4])。这些文献的主要工作是用不同的方法估计波动率风险溢价, 并考察波动率风险溢价特征。根据估计方法, 现有文献大致可分为三类: 测度转换法, delta 中性法和随机波动率模型法。

所谓测度转换法, 是运用现实测度与风险中性测度下波动率期望值之差等于波动率风险溢价的原理, 分别提取两个测度下的波动率期望值, 从两者差异中分离出波动率风险溢价。运用此方法的文献包括 Carr 和 Wu^[5], Bollerslev^[7], 陈蓉和曾海为^[8], Bekaert 和 Hoerova^[9] 等。Delta 中性法则是构造期权与其标的资产的 delta 中性组合, 通过考察该组合的收益来研究波动率风险溢价, 相关文献包括 Coval 和 Shumway^[3], Bakshi 和 Kapadia^[4], 陈蓉和方昆明^[10] 等。在随机波动率模型法中, 研究者则在特定的随机过程假设下纳入波动率风险溢价, 运用多种计量方法直接进行估计, 如 Chernov 和 Ghysels^[11], Pan^[12], Duan 和 Yeh^[13], 吴鑫育和周海林^[14] 等。

这三类估计方法各有侧重和优缺点。测度转换法对模型要求最少, 有严谨的理论基础, 可以直接估计出波动率风险溢价, 但对市场数据要求较高, 当数据质量不佳时可能会造成较大的误差 (比如期权行权价格过少时会导致离散误差和截断误差); delta 中性法可操作性强, 但从中提取的波动率溢价信息只是理论上的近似, 其中可能包含了其他未被识别的风险溢价; 运用随机波动率模型的文献一般重点在于估计随机过程参数, 波动率风险溢价只是附属成果, 这一方法的最大不足在于其需要对资产价格所服从的随机过程进行假设, 不同的模型设定可能会得到不同的结论。

其他一些文献则直接研究股票市场上的波动率风险是否系统性风险。例如, Glosten 等^[15], Engle 和 Ng^[16] 关于美国和日本市场的研究发现, 市场预期收益与波动率负相关, 且市场下跌相比上涨会导致波动率更显著的变化。Bollerslev 等^[17] 使用日内高频数据进一步验证了收益率与波动率的显著负相关性, 且市场下跌导致的波动率的上升往往会持续数日。国内的相关研究极少, 就笔者所见, 只有郑振龙和汤文玉^[18] 运用 Fama-Macbeth 方法对中国股票市场的波动率风险溢价进行了研究, 得到了中国市场波动率风险价格为负的结论。对此现象, 最广泛接受的解释来自 Black^[19] 和 Christie^[20] 提出的金融杠杆假说, 即股票下跌导致公司负债率上升, 风险变大导致波动率上升。

可以看到, 已有的相关研究呈现两个特点: 第一, 结论较为一致, 波动率风险是负的系统性风险, 而期权隐含的波动率风险溢价也显著为负, 两者之间具有内在一致性, 符合金融学的基本原理; 第二, 由于中国期权市场迟迟未出, 几乎所有研究都是基于境外市场的, 郑振龙和汤文玉^[18] 只能分析股票风险溢价的方法对中国市场进行研究。

2015 年中国首次推出场内期权, 为学术界进行相关研究提供了新的市场基础。丛明舒^[1] 通过实证发现并指出了中美两个市场的两个差异: 一是美国市场未来股票超额收益关于期权隐含方差的回归系数稳定为正, 而中国市场的这个回归系数却显著为负; 二是中国市场期权隐含方差与标的资产实现方差的比值要显著低于美国, 即中国市场期权的波动率风险价格的绝对值低于美国。尽管与本文一样对中美期权市场对波动率问题进行比较研究, 丛明舒^[1] 着力于期权隐含方差对股票定价的影响, 其实证研究的是股票收益率中源于

波动率的风险溢价问题。而本文所考察的则是期权收益率中的波动率风险溢价问题,考察其是否具有与众不同的特征,与美国的市場现象有何差异。也就是说,本文是将期权作为一个相对独立的资产进行研究,而不将其视为股票的冗余衍生品,这是近年来国际期权研究的一个新视角。另一方面,本文从资产定价的基本原理,从系统性风险的角度来探索中国市场的波动率风险和风险溢价问题,并基于其探索相应的交易策略。

3 研究思路与方法

如前所述,本文将首先通过相关性来考察中国股票现货市场上的波动率风险是否系统性风险,是正是负;然后估计期权隐含的波动率风险溢价,考察其是否异于零,是正是负,并基于此对比这两者之间是否存在内在一致性;由于发现中国期权可能存在定价偏高的现象,本文最后运用 Buy-Write 策略对这一高估进行了验证。尽管如文献综述所述,已有研究已经表明美国市场上的波动率风险和波动率风险溢价均显著为负,为了充分进行对比,本文运用同样的实证方法考察了美国市场的情形。需要说明的是,由于本文主要目的是讨论中美市场上的一般规律,与丛明舒^[1]一样,在中美对比中本文采用的是两个市场上的可得数据,并不需要保证两个市场的样本期完全一致。这一节介绍本文涉及到的主要研究方法。

3.1 波动率风险的系统性与正负性

根据资产定价的基本原理 (Cochrane^[2]),投资于某一资产是否应获取风险溢价,从本质上取决于该资产与人们效用函数中关注的对象(一般以财富表示)是否具有相关性。与之具有显著相关性的,则可以认为其具有系统性风险,是无法分散的,承担相应风险应获取风险溢价。用随机贴现因子框架表示即为:

$$E(r_i) - r^f = -r^f \text{cov}(m, r_i). \quad (1)$$

随机贴现因子 m 的本质是效用(财富)。但在现实世界中,贴现因子是不可观测的,通常将总财富组合(包括证券,不动产,人力资本等)的收益率与贴现因子联系起来,并将股票指数的收益率作为总财富收益率的代理变量。因此研究股指和某资产收益的协方差或相关性可以确定该资产的风险是否系统性风险,承担对应风险是否应获取风险溢价。进一步的,具体到考察波动率风险的系统性(即承担波动率风险是否应获取风险溢价),可以使用股指收益率与波动率收益率(变化率)¹的相关性或协方差来研究波动率风险的系统性。因此本文通过考察上证 50²与其波动率变化之间的相关性和协方差³是否显著异于零及其正负,可以验证中国市场波动率风险的系统性和正负性。同时作为对比,本文将考察美国市场的 S&P500 指数与其波动率变化之间的关系。

为了保证研究结果的稳健性,本文同时采用常见的两种波动率:基于股票高频数据计算的日内已实现波动率和期权市场的隐含波动率⁴。由于使用高频数据同时也可能引入了市场微观噪音,因此本文借鉴 Jiang 和 Tian^[22], Hansen 和 Lunde^[23],已实现波动率 (realized volatility, RV) 采用带自相关修正项的以下计算公式⁵:

$$RV_{t,t+\tau} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n R_i^2 + \frac{2}{\tau} \sum_{h=1}^l \left(\frac{n}{n-h} \right) \sum_{i=1}^{n-h} R_i R_{i+h}}. \quad (2)$$

其中 n 是计算期间 $[t, t+\tau]$ 内的总的采样个数, $R_i = \ln S_{i+1} - \ln S_i$, l 是股票收益率的自相关阶数,等式右边括号内第二项 $\frac{2}{\tau} \sum_{h=1}^l \left(\frac{n}{n-h} \right) \sum_{i=1}^{n-h} R_i R_{i+h}$ 是基于自相关的修正项。式中的自相关阶数 l 通过计算股票收益率的自相关系数得到,如果收益率序列在某滞后阶数上存在较大的自相关,则需要相应的对其做出修正

1. 由于本文研究的是波动率的风险溢价(不确定性),是波动率这个标的的不确定性变化,因此需要考察波动率的收益率(变化率)和指数收益率之间的相关性,这在 Bakshi 和 Kapadia^[4]的模型中也有相关讨论。

2. 一般认为沪深 300 指数更能反映中国 A 股市场的整体状况,但由于本文后续研究中使用的期权是上证 50ETF 期权,而上证 50 与沪深 300 指数又具有高度相关性(例如 2005 年 2 月 23 日至 2016 年 7 月 8 日的简单线性相关高达 0.9748),因此本文以上证 50 指数作为中国 A 股整体市场的代表。

3. 本文采用冯志新等^[21]的协方差 U 统计量检验法来对协方差做检验。

4. 实际上最为常见的波动率估计方法是基于股票日对数收益率的标准差波动率。但由于本文的样本期不长,要估计每天波动率与收益率的相关性,标准差方法是基于一段时间的历史数据估计而得,估计每天的相关性会存在样本重叠 (overlapping) 的问题,严重影响相关系数的可靠性,因此本文不使用标准差方法。

5. 关于已实现波动率的计算,较为常见的方法还有 HAR-RV,如文风华等^[24],贺志芳等^[25],龚旭等^[26],刘晓倩等^[27],陈声利等^[28],陈声利等^[29]。但该方法通常用来构建已实现波动率预测模型,而本文只是将已实现波动率作为实际波动率的代理变量来考察波动率风险,因此直接采用日内高频数据计算的已实现波动率。

从而减少高频噪音的影响。而出于稳健性的考虑, 本文同时也考察了不同自相关阶数修正下的结果。而在隐含波动率指标方面, 由于其“无模型”(model-free)⁶的特征, 相较于 Black-Scholes-Merton (以下简称 B-S-M) 隐含波动率, VIX 类指数⁷是隐含波动率的更好指标, 因此本文分别以中国上证 50ETF 期权市场的 iVX 指数和美国 CBOE 的 S&P500 指数期权市场的 VIX 指数作为中美两个市场的隐含波动率的代表。

3.2 期权隐含的波动率风险溢价的存在性与正负性

期权是波动率的主要交易工具, 也是对冲和管理波动率风险的主要产品。从理论上说, 如果波动率是系统性风险因子, 期权价格中必然蕴涵着波动率风险溢价的信息。

如第 2 部分所述, 估计波动率风险溢价的方法主要有三种: 测度转换法, delta 中性组合法和随机波动率模型法。前文已经提及, 随机波动率模型法的最大不足在于其是严重模型依赖的 (model-dependent), 客观上存在着较大的模型风险, 本文不拟采用这一方法。

测度转换方法源于资产定价的基本原理。现实测度与风险中性测度的区别在于, 在风险中性测度下人们承担风险不要求风险溢价, 因此两个测度的波动率期望值之差就是相应的波动率风险溢价 (Carr 和 Wu^[5]), 即:

$$VRP_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}[\sigma_{t,T}] - \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\sigma_{t,T}]. \quad (3)$$

其中 VRP_t 表示 t 时刻的波动率风险溢价 (volatility risk premium), $\mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}[\cdot]$ 和 $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ 分别表示现实测度和风险中性测度下 t 时刻的条件期望值, $\sigma_{t,T}$ 表示 t 到 T 期间的波动率。在实际计算中, 由于“无模型”的 VIX 类指数就是风险中性测度下的波动率期望值, 因此本文分别以中国上证 50ETF 期权市场的 iVX 指数和美国 CBOE 的 S&P500 指数期权市场的 VIX 指数作为中美两个市场的风险中性波动率预期值; 而现实测度下的波动率预期值, 则一般都在理性预期假设下以实现值作为预期值的代表, 本文使用上证 50ETF 和 S&P500 指数一个月的实际波动率作为分别作为中美两国现实测度下的波动率期望的代理变量。通过提取现实测度和风险中性测度下的波动率期望值之差来得到波动率风险溢价。为保证结论的稳健性, 本文同时使用了基于 5 分钟, 15 分钟和 30 分钟高频的一个月已实现波动率作为实际波动率的代理变量, 计算三种情形下的波动率风险溢价⁸。已实现波动率的公式如式 (2) 所示⁹。

可以看出, 测度转换方法具有良好的理论基础, 并且具有“无模型”的良好性质, 因此是估计期权隐含的波动率风险溢价的最好方法。但此方法的不足在于对数据要求较高, 当数据质量不佳时可能会造成较大的误差。而上证 50ETF 期权行权价设定较为稀疏, 据此计算得到的 iVX 指数可能会存在一定的离散误差和截断误差。为了保证研究结论的可靠性和稳健性, 本文同时运用不需要使用 iVX 数据的 delta 中性方法来考察期权隐含的波动率风险溢价。

Delta 中性方法是源于以下的思想: 标的资产价格和波动率的随机性是影响期权价格的公认两大风险源, delta 中性组合¹⁰对冲了来自标的资产价格的风险, 如果针对波动率这一风险源不存在相应的风险溢价, 则 delta 中性组合应获得无风险收益; 若 delta 中性组合的收益显著异于无风险收益, 则是波动率风险溢价存在的证据, 一般认为, 扣除无风险收益后的超额收益主要受波动率风险溢价的影响¹¹。

本文借鉴陈蓉和方昆明^[10]的离散方法, 将离散间隔设定为一个交易日, 计算每天每个期权 delta 中性组合的日超额收益, 从中提取出该组合的波动率风险溢价, 进而对所有期权的波动率风险溢价平均后得到每日的波动率风险溢价时间序列¹²。其基本思路是: 构造一个自融资的 delta 中性期权投资组合, 该组合包含一

6. Britten-Jones 和 Neuberger^[30]最早提出“无模型”的概念, 即计算过程不依赖于特定期权定价模型。

7. 2003 年 CBOE 推出的 VIX 指数是基于无模型方法计算的隐含波动率指数, 已公认为市场隐含波动率的量化指标。2015 年上交所也发布了基于类似算法的中国波动率指数 iVX。

8. 本节估计的是一个半月已实现波动率, 与日内已实现波动率不同的是其包含了隔夜波动, 且 15 分钟/30 分钟频度的数据采样足够保证结果的精度。

9. 根据中美市场的惯例, 本文中美国市场一年的交易日天数按 252 天计算, 一个月的交易日取 21 天; 中国市场的交易日较少, 我们取一年的交易日为 242 天, 一个月的交易日为 20 天。

10. 即买入或卖出期权的同时运用现货或期货使得整个组合始终保持动态的 delta 中性。

11. 如果还有其他系统性风险 (如跳跃风险), 超额收益部分可能还受到跳跃风险溢价。但本文不研究跳跃风险, 因此采用 Coval 和 Shumway^[3], Bakshi 和 Kapadia^[4], 陈蓉和方昆明^[10]的做法, 将其视为仅受波动率风险溢价影响。

12. 附录中提供了这一原理相应的数学推导。

单位看涨 (或看跌) 期权的多头和 $\Delta_t = \frac{\partial f_t}{\partial S_t}$ 份动态调整的标的资产空头, 其中 f_t 和 S_t 分别表示期权价格和标的资产价格, Δ_t 就是期权的 delta 值. 相应地, delta 中性组合在 $[t, t + \tau]$ 期间的超额收益 $\Pi_{t,t+\tau}$ 可由下式计算得到:

$$\Pi_{t,t+\tau} = f_{t+\tau} - f_t - \int_t^{t+\tau} \Delta_u dS_u - \int_t^{t+\tau} r_u (f_u - \Delta_u S_u) du. \quad (4)$$

其中 r_t 为无风险利率. 附录中推导了 delta 中性组合超额收益 $\Pi_{t,t+\tau}$ 与波动率风险溢酬的关系式. 从附录可知, 如果假设除了资产价格涨跌风险之外只有波动率风险, delta 中性组合超额收益 $\Pi_{t,t+\tau}$ 主要受到波动率风险溢酬 $\Lambda_t(\sigma_t)$ 的影响, 其预期值 (平均值) 中蕴涵着波动率风险溢酬的平均值的信息.

在运用 delta 中性组合方法基于式 (A.6) 分析波动率风险溢酬时, Bakshi 和 Kapadia^[4], 陈蓉和方昆明^[10] 采用了不同的离散方法¹³. Bakshi 和 Kapadia^[4] 将 τ 设定为样本中每个期权合约的剩余期限, 针对每个期权合约估计其在剩余期限内 delta 中性组合超额收益在时间序列上的均值, 基于式 (A.6) 推断波动率风险溢酬均值的性质. 这一方法的不足之处在于无法将波动率风险溢酬的信息单独估计出来. 由附录中的式 (A.7)~(A.9) 可知, 当离散间隔 τ 足够小时, 可以将波动率风险溢酬近似地单独估计出来. 陈蓉和方昆明^[10] 正是采用这一做法, 将 τ 设定为一个交易日, 计算每天每个期权 delta 中性组合的日超额收益和 $\Lambda_t(\sigma_t)$, 对所有期权的 $\Lambda_t(\sigma_t)$ 进行平均, 进而形成一个基于所有期权计算得到的波动率风险溢酬时间序列, 可以考察其均值是否显著异于零, 是正是负. 由于 50ETF 有卖空限制, 我们在构造 delta 中性组合时使用上证 50 期货来对冲, 而上证 50 指数期货早于 50ETF 期权数日交割, 如果使用 Bakshi 和 Kapadia^[4] 的方法计算 delta 中性组合到期超额收益则需要在期货交割日前选择更换主力合约, 会导致结果出现偏差¹⁴. 而陈蓉和方昆明^[10] 方法通过计算每日 delta 中性组合的超额收益得到波动率风险溢酬, 通过剔除临近交割的期权可以避免该问题. 因此本文采用陈蓉和方昆明^[10] 方法进行研究. Bakshi 等^[31], Bakshi 和 Kapadia^[4] 指出, 在实际市场中, 深度实值期权通常流动性较差, 流动性导致的定价误差会使得 delta 对冲收益增大. 借鉴他们的做法, 在具体估计中, 本文选择平价附近的期权和虚值期权作为考察对象.

可以看出, delta 中性方法的不足之处在于, delta 中性仅对冲了资产价格的风险, 这意味着 delta 中性组合的超额收益不一定完全是波动率风险溢酬, 也可能包含了其他未识别的风险溢酬. 相比较而言, 测度转换法更具有严谨性和理论基础, 因此本文以测度转换法为主, 再用 delta 中性法验证结论的稳健性.

3.3 Buy-Write 策略

Buy-Write 策略的本质是长期持续进行的 covered call (有保护的看涨期权) 策略. 其操作思路是在不断在卖出看涨期权的同时买入相应数量的标的资产, 并持有到期. 若到期被行权, 则按约定的行权价卖出持有的标的资产; 到期不被行权, 则获得期权费. 在理性预期下, 期权价格在理论上已经包含了关于市场未来涨跌的概率和盈亏信息. 因此在一个合理定价的市场, 长期持续卖出期权从概率上不会占优; 而如果期权定价被系统性高估, 那么持续卖出期权从概率上就是占优的策略. 而由于本文发现中国股票现货市场上的波动率风险并非显著为负的系统性风险, 然而期权隐含的波动率风险溢酬却显著为负, 这很可能意味着中国的 50ETF 期权定价偏高. 因此本文通过构造 Buy-Write 策略进一步验证期权定价是否偏高. 该策略的核心是长期持续卖出期权, 从而可以帮助检验长期持续卖出期权是否会在概率上占优, 是否会获得额外收益. 如果持续卖出期权从概率上是占优的, 则意味着期权定价存在高估. 而 Buy-Write 交易策略同时包含一份看涨期权空头和一份标的资产多头, 即使小概率事件发生, Buy-Write 交易也不会破产, 从而可以持续卖出期权¹⁵.

在美国市场上, 已经有基于这一策略的指数, 即 Buy-Write 指数, 直接考察这一指数就可以了解美国市场上 Buy-Write 策略的表现. 由于中国市场不存在相似的指数, 本文构造了相应的策略, 对历史数据进行回溯, 并区分不同交易费用对该策略在中国市场上的历史表现进行了深入和多角度的考察.

13. 但无论在哪个方法下, delta 和 vega 都是由 B-S-M 公式计算得到的.

14. 偏差来自两个方面, 一是市场中投资者更换主力合约时机有一定主观性, 存在更换时间的偏差; 二是更换后的期货合约是下月合约, 与当月上证 50ETF 期权合约存在严重的期限偏差.

15. 也可以构造 Cash-Secured Put 组合, 即每卖出一份看跌期权的同时将单位现金投资于国债, 到期若被行权, 可以保证有足够现金行权不会倒闭. 由于中国期权市场对 covered-call 策略给予特殊的政策倾斜, 不收取维持保证金, 相对 Cash-Secured Put 是更好的策略选择, 本文针对 Buy-Write 策略进行考察.

4 数据描述

本文考察波动率风险和风险溢酬需用到期权, 相应现货和期货数据. 由于本文实证分为几个部分, 具体使用的数据和处理方法不尽相同, 本文将在后文相应部分对其作深入介绍, 此处仅对数据做概括性介绍. 由于中国市场只有 2015 年 2 月 9 日开始交易的上证 50ETF 期权, 因此本文使用的中国数据为 2015 年 2 月 9 日至 2016 年 7 月 8 日的上证 50ETF 期权收盘价, 50ETF 收盘价和高频数据, iVX 指数数据, 2015 年 4 月 16 日至 2016 年 7 月 8 日的上证 50 期货收盘价¹⁶, 由于这一样本期偏短, 在无需受期权数据约束的部分, 本文使用了 2010 年 1 月 4 日至 2016 年 7 月 8 日的上证 50 指数收盘价和高频数据¹⁷. 美国市场上交易量最大的期权是在 CBOE 交易的 S&P500 指数期权, 因此本文的美国数据采用 S&P500 指数期权收盘价, S&P500 指数收盘价, S&P500 高频数据, VIX 指数和 BXM 指数数据. 美国期权市场的历史较长, 由于 VIX 指数从 2003 年开始采用无模型的计算方式, 本文选取的美国 S&P500 指数收盘价, S&P500 高频数据, VIX 指数和 BXM 指数数据样本期从 2004 年 1 月 2 日至 2016 年 7 月 8 日, S&P500 期权数据样本期从 2004 年 1 月 2 日至 2014 年 8 月 29 日¹⁸, 涵盖了不同的市场状况, 特别是次贷危机, 具有较好的代表性. 本文数据来源于 Wind 数据库和 CBOE.

5 实证结果: 波动率风险与波动率风险溢酬

5.1 股票现货市场: 波动率风险的系统性与正负性

本小节采用的中国数据为 2010 年 1 月 4 日至 2016 年 7 月 8 日的上证 50 指数收盘价和 5 分钟高频数据¹⁹, 以及 2015 年 2 月 9 日至 2016 年 7 月 8 日的 iVX 收盘价²⁰. 美国数据采用的是 2004 年 1 月 2 日至 2016 年 7 月 8 日的 S&P500 指数收盘价, 5 分钟高频数据和 VIX 收盘价. 由于受中国市场高频数据可得性的约束, 选取 2010 年作为中国样本期起点, 而 VIX 指数从 2003 年开始采用无模型的计算方式, 本文选取 2004 年作为美国样本期起点²¹. 数据来源于 Wind 数据库和 CBOE.

样本期内, 上证 50 指数在 5 分钟高频下的收益率的一阶和二阶自相关系数分别为 -0.048 和 -0.015 , 高阶自相关都小于 0.03 , 而 S&P500 指数在 5 分钟高频下的收益率的一阶和二阶自相关系数分别为 0.003 和 -0.025 , 其高阶自相关也都小于 0.03 , 因此本节计算中美市场的日内已实现波动率时都取自相关阶数 $l = 0$ 为主. 表 1 给出了中美两国股票指数收益率和波动率的描述性统计结果. 图 1 展示了中美两国股票指数与波动率的时间序列走势, 可以大致看出, 美国市场 S&P500 指数与两个波动率指标都呈现较为明显的负相关关系, 而中国市场上证 50 指数与两个波动率指标的相关性有时为正有时为负, 难以直观判断.

表 1 中美股票指数收益率与波动率的描述性统计

		样本数	均值	标准差	偏度	峰度
中国市场	上证 50 指数收益率 (%)	1582	$-9.946e-03$	1.659	-0.420	4.576
	RV	1582	18.461	10.951	3.079	14.154
	iVX	345	34.404	9.833	0.643	0.158
美国市场	S&P500 指数收益率 (%)	3151	$2.073e-02$	1.218	-0.335	11.295
	RV	3151	14.092	10.727	3.641	21.886
	VIX	3151	19.316	9.185	2.564	8.717

16. 上证 50 期货于 2015 年 4 月 16 日上市交易.

17. 选择 2010 年 1 月作为上证 50 指数高频数据样本期起点, 主要是受高频数据可得性的约束.

18. 选择 2014 年 8 月作为 S&P500 期权数据样本期终点, 主要是受 S&P500 期权数据可得性的约束.

19. 国内相关研究估计日内已实现波动率的数据频度一般采用 5 分钟高频, 如叶五一和缪柏其^[32], 陈浪南和杨科^[33], 魏宇等^[34], 15 分钟和 30 分钟高频由于采样点过少而缺乏精度, 影响结果可靠性.

20. 由于中国期权市场开始较晚, 受限于期权数据样本期较短, 本文在后面计算波动率风险溢酬时只能用较短的样本期. 而在这里研究波动率风险是否系统性风险时, 本文既对这个短的样本期做了检验, 也对更长期的一般现象做了检验.

21. 关于两个市场样本期不一致的说明: 本文研究的是两个市场上的一般现象, 考察市场波动率风险与风险溢酬的整体现象, 或者说长期来看的一个整体特征, 在数据可得的情况下本文尽量取较长的样本期进行考察, 对结论不会产生影响.

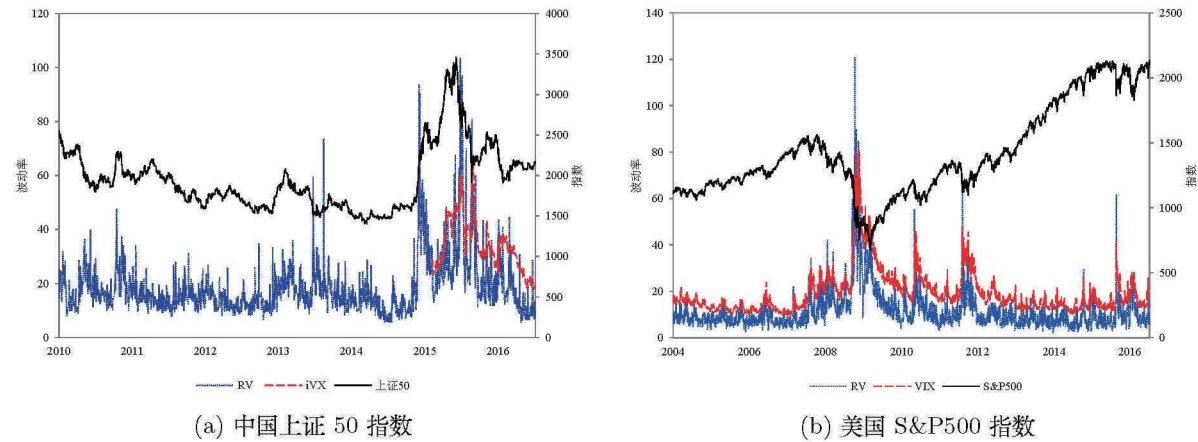


图 1 中美股票指数与波动率的时间序列

表 2 中美股票指数收益率与波动率变化率的相关性与协方差检验

	全样本		暴跌/危机样本		非暴跌/危机样本	
	相关性	协方差	相关性	协方差	相关性	协方差
中国上证 50 指数:						
RV ($l = 0$)	-0.0099	-5.3798E-05	-0.4617***	-5.7733E-03***	0.0522**	2.5378E-04*
RV ($l = 1$)	0.0183	1.1858E-04	-0.4056***	-6.6162E-03***	0.0830**	4.8035E-04*
RV ($l = 2$)	0.0322	2.6907E-04	-0.4670***	-8.0243E-03***	0.0978**	7.3882E-04*
iVX	0.0171	2.4184E-05	0.1454	4.6112E-04	-0.0902	-7.5269E-05
美国 S&P500 指数:						
RV ($l = 0$)	-0.2813***	-1.0383E-03***	-0.2286***	-1.5828E-03***	-0.3286***	-9.6766E-04***
RV ($l = 1$)	-0.2268***	-0.9846E-03***	-0.2080***	-1.6495E-03***	-0.2587***	-8.9860E-04***
RV ($l = 2$)	-0.1868***	-0.9171E-03***	-0.1591***	-1.4077E-03***	-0.2167***	-8.5289E-04***
VIX	-0.7541***	-6.4568E-04***	-0.8257***	-1.5699E-03***	-0.7905***	-5.2749E-04***

注: ***, ** 和 * 分别对应 1%, 5% 和 10% 的显著性水平。

表 2 详细报告了中美市场的整体和分样本结果²²。从资产定价原理来看, 一个风险因子是否系统性, 考察的是其变化对指数收益率的影响, 因此表 2 报告的是指数收益率与波动率变化率的相关性和协方差检验结果。考虑到暴跌和危机期间市场波动率可能出现异常现象, 因此在全样本之外, 本文将中美样本都进一步划分为暴跌/危机样本和非暴跌/危机样本。为了保证结果的稳健性, 本文也同时考察了其他不同自相关阶数 ($l = 1, 2$) 修正下的日内 RV, 实证结果一起列在表 2 中。

从中国市场来看, 本文样本期内最大的暴跌发生在 2015–2016 年, 但并非连续暴跌。2015 年 6 月 9 日上证 50 指数见顶 3494 点, 随后在监管层清查配资, 杠杆融资退潮引发的平仓盘推动下, 股指先后经历两轮暴跌, 在 8 月 26 日跌至 1874 低点后企稳回升; 2015 年 12 月 28 日, 上证 50 指数见顶后回落, 随后在熔断机制的作用下持续暴跌, 监管层叫停熔断机制后仍跌势不止, 最后在 2016 年 1 月 29 日企稳回升。因此本文将 2015/6/9–2015/8/25 和 2015/12/28–2016/1/28 这两段样本划为暴跌样本。

从美国市场来看, 样本期内最大的危机就是次贷危机, 一般公认次贷危机于 2007 年下半年开始, 2009 年 3 月度过最危险的时刻, 从 S&P500 的走势来看, 2007/10/11–2009/3/9 是主要的持续下跌时段, 本文将其划为美国市场的危机样本。

表 2 的研究结果表明, 无论在全样本和分样本中, 无论以实际的已实现波动率还是隐含波动率作为指标, 美国市场上 S&P500 指数与波动率都呈现显著为负的相关性和协方差。也就是说, 在美国股票市场上, 波动率风险是负的系统性风险, 这与国外关于美国和其他发达国家市场的已有研究结论是一致的。

然而, 从表 2 的结果可以看到, 中国市场呈现出与其他市场不同的特征, 从全样本来, 无论以实际的已实现波动率还是隐含波动率作为指标, 上证 50 指数与波动率的相关性和协方差都不显著异于零, 这意味着

22. 鉴于上证 50ETF 期权的标的资产为上证 50ETF, 笔者也基于上证 50ETF 计算了日内 RV, 结论基本一致。样本期为 2014 年 1 月 2 日 (受限于 50ETF 高频数据的可得性) 至 2016 年 7 月 8 日。

从整体而言, 中国股票市场上的波动率并非系统性风险. 但从分样本的检验结果来看, 在暴跌期间, 上证 50 指数与已实现波动率呈现显著为负的相关性与协方差, 也就是说, 市场越下跌, 波动率越大; 而在非暴跌期间, 这两者却呈现显著为正的的相关性和协方差, 市场越上涨, 波动率越大. 波动率与市场指数的相关性和协方差呈现出明显的时变性. 显然, 正是这样两种相反的结论导致了全样本的不显著.

与已实现波动率的结果不同, 无论是整体样本还是分样本, 上证 50 指数与隐含波动率指数 iVX 的相关性和协方差都不显著. 本文认为可能的原因有二: 第一, 从其计算原理来说, iVX 指数的计算要求对不同行权价下的期权价格进行积分, 尽管实际市场中不可能有无穷多个行权价, 但行权价也应该尽量密集和区间广泛, 而 iVX 所基于的上证 50ETF 期权的行权价设定相当稀疏且区间狭窄, 这很可能影响了 iVX 指数的代表性; 第二, 由于截至本文研究时, 中国的上证 50ETF 期权仅交易了一年多, 上证 50 指数与 iVX 相关性的研究期偏短, 与之相比, 上证 50 指数与已实现波动率的相关性样本期从 2010 年开始, 结果相对更具可信度.

总之, 基于股票现货市场的研究表明, 波动率风险在美国市场上是显著为负的系统性风险, 在中国市场上却呈现非股灾期间显著为正, 股灾期间显著为负, 总体非系统性风险的特征. 这意味着在美国市场上, 市场上涨时波动率下降, 市场下跌时波动率上升. 由于期权价格与波动率呈正向关系, 在控制了价格涨跌的影响之后, 期权价格也将与市场指数呈现负相关. 这意味着在市场下跌和财富水平下降时, 期权组合构造的波动率衍生品多头能够从期权价格上升中获利进行对冲, 期权是具有“雪中送炭”良好性质的“好资产”, 投资者自然愿意为其支付较高的价格. 因此, 如果市场定价合理, 美国期权市场中隐含的波动率风险溢价也应当显著为负. 而在中国市场上, 由于波动率风险总体而言不是显著的系统性风险, 期权价格与大盘没有显著的正向或反向涨跌关系, 期权不再是能够对冲风险的好资产. 投资者购买期权并不会承担或对冲系统性风险, 总体而言不应要求波动率风险溢价. 以此类推, 在暴跌和非暴跌阶段, 由于中国市场上的波动率风险是分别显著为负和为正的 systemic 风险, 合理定价的期权价格中隐含的波动率风险溢价就应该是显著为负和为正的.

基于上述分析, 从理论上说, 美国市场上期权隐含的波动率风险溢价应该为负, 而中国市场上期权隐含的波动率风险溢价应该总体不显著异于零. 那么实际情况是否如此呢? 本文接下来对此进行实证研究.

5.2 期权隐含的波动率风险溢价: 测度转换法

本节使用的中国数据为 2015 年 2 月 9 日至 2016 年 7 月 8 日的上证 50ETF 收盘价和 5 分钟, 15 分钟, 30 分钟高频数据, 以及上交所发布的 iVX 指数. 美国数据采用的是 2004 年 1 月 2 日至 2016 年 7 月 8 日的 S&P500 指数收盘价和 5 分钟, 15 分钟, 30 分钟高频数据, 以及 VIX 指数. 数据来源于 Wind 数据库和 CBOE.

样本期内, 上证 50ETF 在 5 分钟, 15 分钟和 30 分钟高频下的一阶自相关系数分别为 -0.057 , 0.027 和 0.041 , 二阶自相关系数分别为 0.007 , 0.000 和 -0.053 , 高阶自相关都小于 0.03 , 而 S&P500 指数在 5 分钟, 15 分钟和 30 分钟高频下的收益率的一阶自相关系数分别为 0.003 , 0.002 和 0.018 , 二阶自相关系数分别为 -0.025 , 0.000 和 -0.023 , 其高阶自相关也都小于 0.03 , 因此本节计算中美市场的一个月已实现波动率时仍以自相关阶数 $l=0$ 为主. 由于得到的结果类似, 图 2 以 5 分钟高频已实现波动率 ($l=0$) 为例, 报告了计算

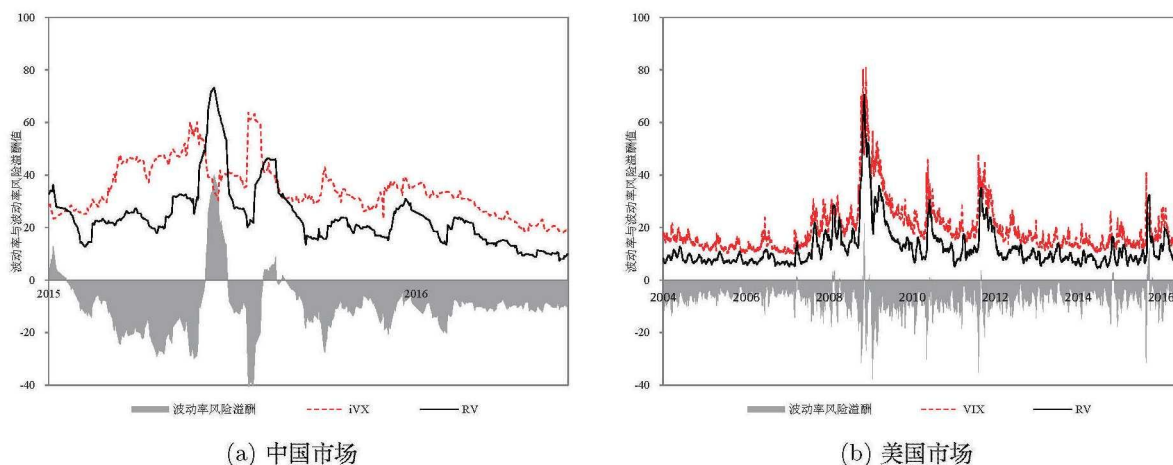


图 2 中美波动率风险溢价时间序列

表 3 中美市场波动率风险溢价均值 (测度转换法)

	中国市场			美国市场		
	全样本	暴跌样本	非暴跌样本	全样本	危机样本	非危机样本
5 分钟频率计算 RV:						
$l = 0$	-10.4888***	-6.6477***	-11.6109***	-7.0114***	-8.9640***	-6.7641***
$l = 1$	-9.1726***	-4.5402***	-10.5259***	-6.9650***	-9.1583***	-6.6872***
$l = 2$	-10.4442***	-6.6356***	-11.5568***	-7.1886***	-9.9948***	-6.8331***
15 分钟频率计算 RV:						
$l = 0$	-9.8429***	-5.8584***	-11.0070***	-7.1235***	-9.3831***	-6.8373***
$l = 1$	-9.1517***	-5.1394***	-10.3239***	-7.0751***	-9.5783***	-6.7581***
$l = 2$	-8.9757***	-5.8613***	-9.8856***	-7.0729***	-9.7940***	-6.7283***
30 分钟频率计算 RV:						
$l = 0$	-9.3742***	-7.0618***	-10.5149***	-7.1410***	-9.5144***	-6.8404***
$l = 1$	-8.9867***	-5.3615***	-10.0458***	-7.0471***	-9.3736***	-6.7524***
$l = 2$	-10.1397***	-8.3788***	-10.6541***	-7.1337***	-10.1863***	-6.7471***

注: ***, ** 和 * 分别对应 1%, 5% 和 10% 的显著性水平。

得到的中美市场波动率风险溢价时间序列。从图中可以看出, 无论是中国还是美国市场, 隐含波动率均普遍高于实际波动率, 根据式 (2) 可知, 这意味着两国的波动率风险溢价均为负。

本节进一步对中美波动率风险溢价进行了 t 检验, 为了与表 1 中的分样本研究相对应, 本节也分别进行了全样本和分样本的检验, 结果报告在表 3 中。与上一节相同, 为了保证结果的稳健性, 本节也考察了其他不同自相关阶数 ($l = 1, 2$) 修正下已实现波动率的实证结果。可以看出, 无论用哪种方法计算的实际波动率, 无论什么样的市场状况, 中美期权价格中隐含的波动率风险溢价均显著为负。从全样本来看, 美国市场的波动率风险溢价平均在 -7 左右; 中国市场的波动率风险溢价平均也达到 -10 左右。而从分样本来看, 美国市场的波动率风险溢价在危机/非危机样本中均显著为负; 中国市场的波动率风险溢价在暴跌/非暴跌样本中也都显著为负。

也就是说, 测度转换法的结果表明, 中美市场上的期权隐含波动率风险溢价均显著为负。在美国市场上, 负的波动率风险溢价与其负的波动率系统性风险是一致的, 因而是合理的。然而, 在波动率风险并不是显著的系统性风险的情况下, 中国市场上的期权隐含波动率风险溢价却显著为负, 这与金融原理显然是不符的。这意味着, 在中国市场上, 面对非系统性风险, 理论上不需要承担风险补偿的期权投资者, 却还愿意承担显著为负的风险溢价, 支付相对较高的期权价格。这意味着中国期权价格可能存在系统性的高估。由于测度转换法的这一结论主要基于 iVX 数据, 为了保证 iVX 的数据质量不损害结论的可靠性和稳健性, 本文接下来引入不需要使用 iVX 数据的 delta 中性方法, 对中美期权隐含的波动率风险溢价再次进行考察。

5.3 期权隐含的波动率风险溢价: Delta 中性法

本小节采用的中国数据为 2015 年 4 月 16 日至 2016 年 7 月 8 日的上证 50ETF 期权收盘价和上证 50 期货收盘价。美国数据采用的是 2004 年 1 月 2 日至 2014 年 8 月 29 日的 S&P500 指数收盘价和 S&P500 期权收盘价。中国的无风险利率使用对应期限的中债国债即期收益率, 美国的无风险利率则使用对应期限的 LIBOR。由于使用上证 50 期货作为上证 50ETF 期权的对冲标的, 而上证 50 期货于 2015 年 4 月 16 日上市, 因此本文选取 2015 年 4 月 16 日作为中国样本期的起点。而受到 S&P500 期权数据可得性的约束, 本文选取 2014 年 8 月作为美国样本期的终点。数据来源于 Wind 数据库和 CBOE。

借鉴现有文献的做法, 本节实证中期权数据的处理方法为:

- 1) 为尽量减少定价偏误的影响, 本文剔除了违反上下限条件导致隐含波动率小于零的期权, 也剔除了隐含波动率超过 100% 或者小于 1% 的期权;
- 2) 因为剩余期限过短的期权易受行权换仓等因素影响, 剩余期限较长的期权则易受到随机利率和随机股利的影响, 本文剔除了剩余期限小于 7 天和大于 60 天的期权;
- 3) 为尽量减少流动性风险的影响, 本文剔除了深度实值期权合约和成交量小于 5 张的期权合约。具体而

言, 本文剔除了 K/F 比率²³在 $[0.97, 1.1]$ 之外的看涨期权和 $[0.90, 1.03]$ 之外的看跌期权。

经过筛选之后, 可能出现选出的期权在其第二个交易日因不符合条件而被剔除, 从而无法计算该组合的当日 Δ 对冲收益。在这种情况下该组合不再加入当日波动率风险溢价的计算。

表 4 报告了中美两个市场运用 Δ 中性组合方法得到的波动率风险溢价的分析结果。与前文的分样本研究相对应, 本文同样也进行了全样本和分样本的检验, 并按照期权在值程度分别考察了平价和虚值的看涨/看跌期权样本。从表 4 可以看到, 无论是在全样本和分样本中, 无论是平价或虚值看涨/看跌期权样本, 美国市场上的波动率风险溢价均显著为负。中国市场从全样本和非暴跌样本来看, 波动率风险溢价也都显著为负, 而在暴跌样本中, 平价/虚值的看涨期权和平价看跌期权样本的波动率风险溢价也都显著为负, 只有虚值看跌期权样本的结果不显著。本文认为这与上证 50ETF 期权的行权价设定稀疏且区间狭窄有关, 在暴跌中, 由于行权价区间狭窄, 经常会出现虚值看跌期权合约过少的情形 (甚至如 2015 年 8 月 24 日当天出现无虚值看跌期权可供交易的情形), 这可能导致了结果的偏差。

表 4 中美市场波动率风险溢价均值 (Δ 中性法)

期权在值程度 ($K/F - 1$)	中国市场			美国市场		
	全样本	暴跌样本	非暴跌样本	全样本	危机样本	非危机样本
平价看涨期权 (-3% to 3%)	-1.9042***	-2.7225***	-1.6377***	-0.3818***	-0.8443***	-0.3144***
虚值看涨期权 (3% to 10%)	-1.8716***	-2.0506***	-1.8102***	-0.3012***	-0.5365***	-0.2665***
平价看跌期权 (-3% to 3%)	-1.7272***	-1.9368**	-1.6596***	-0.4449***	-0.6096***	-0.4208***
虚值看跌期权 (-10% to -3%)	-1.3878***	-1.2452	-1.4263***	-0.4908***	-0.6586***	-0.4657***

注: ***, ** 和 * 分别对应 1%, 5% 和 10% 的显著性水平。

总之, Δ 中性组合法与测度转换法的结论是一致的。在美国市场上, 期权所隐含的波动率风险溢价显著为负, 这与美国股票市场上负的波动率系统性风险是一致的, 是符合金融学原理的合理现象。但中国市场却呈现出奇怪的现象, 整体而言, 中国股票现货市场上的波动率风险不是显著的系统性风险, 但期权隐含的波动率风险溢价却持续显著为负。接下来, 本文对中国市场的这一异常现象加以讨论。

5.4 中国市场异常现象分析

可以看出, 中国市场的异常现象实际上包含两个方面: 第一, 与美国市场不同, 在中国市场上, 总体而言波动率风险并不是显著的系统性风险, 并且呈现出暴跌阶段显著为负, 其他时期显著为正的时变特征; 第二, 尽管如此, 中国期权隐含的波动率风险溢价却始终显著为负。

对于第一个异常现象, 本文认为正是暴跌阶段显著为负, 其他时期显著为正的时变特征导致了波动率风险的整体不显著。而在剔除 2015–2016 年的暴跌时段之后, 在大多时候, 中国股票市场呈现的波动率风险显著为正, 本文认为其最重要的原因可能来自中国特殊的投资者结构。在中国市场上, 个人投资者 (散户) 占比极高。根据上海证券交易所公布的统计年鉴 (2015 卷) 可知, 个人投资者 (自然人投资者) 交易金额占比为 85.19%, 而专业机构占比仅为 11.60%。这与国外股票市场以专业机构投资者为主的市场结构是迥然不同的。与专业机构投资者必须遵守一定的投资纪律和风控要求不同, 一旦出现市场下跌, 个人投资者由于没有盯市要求, 通常不会出现大规模和系统性的减仓和平仓行为, 反而更容易产生“损失厌恶” (loss-aversion) 的现象, 即不愿意平仓实现亏损; 反之, 在上涨时个人投资者容易出现分化, 在市场上同时存在追涨和落袋为安等行为, 从而导致上涨时波动较大, 而下跌时波动较小, 使得波动率风险体现为正的 systemic 风险。

而在 2015–2016 年的暴跌之前, 中国股票现货市场出现了前所未有的杠杆交易行为。事实上, 众所公认, 大量的股票现货配资和融券交易是股市泡沫的重要来源。一旦出现下跌, 大量首次进行杠杆交易的现货投资者被迫强制平仓, 进一步引发了踩踏和暴跌, 自然使得市场呈现出越下跌波动率越大的特征, 从而使得暴跌阶段的波动率风险显著为负。

对于第二个现象, 其异常之处在于, 期权市场隐含的波动率风险溢价显著为负与波动率风险并非显著的系统性风险相矛盾, 这意味着中国市场上期权价格很可能长期被系统性高估。其中的逻辑如前文所述, 如果市场的波动率风险呈现时变性, 并且总体不显著异于零, 就意味着风险厌恶的投资者在购买期权时, 不会要

23. K 为行权价, F 为远期价格, 这两者之比是期权在值程度的公认指标。该比率等于 1 的期权为平值期权。

求风险溢价作为承担风险的补偿,相应地期权的隐含波动率应与真实波动率大致相当.但 5.2 节和 5.3 节的实证研究表明,无论是用测度转换法还是用 Δ 中性法,中国期权市场上隐含的波动率风险溢价都是显著为负的,隐含波动率明显高于真实波动率,这意味着中长期期权买方可能支付了过高的价格而承担了负的风险回报.换言之,中国市场上很可能存在着期权价格长期被系统性高估的现象.

为进一步验证期权价格是否存在长期系统性的高估,本文接下来构建 Buy-Write 策略,考察这一策略从长期来看,在概率上是否总体占优,能否在相对低的风险下获取相对于标的资产更高的收益.

6 Buy-Write 交易策略

如第 3 部分所述, Buy-Write 策略的本质就是有保护的持续卖出期权策略.如果期权定价合理,平均而言该策略与直接投资标的相比,应该不存在系统性的占优.但如果实证发现平均而言这一策略的效果优于标的资产本身,就意味着期权价格存在长期系统性的高估,可以视为期权定价长期系统性偏高的一个有力佐证.

CBOE 于 2002 年推出了基于 S&P500 股指期权的 Buy-Write 指数 BXM,本文首先通过 BXM 来考察美国市场上 Buy-Write 策略的表现.图 3 和表 5 分别报告了美国市场 2004 年 1 月 2 日至 2016 年 7 月 8 日的 BXM 和 S&P500 单位净值走势和回溯绩效.可以看出,在样本期内从长期看, BXM 更为稳定,平均收益与 S&P500 指数相近但有更小的标准差,夏普比率高于 S&P500 指数,其最大回撤率也相对较小.也就是说,尽管美国市场上的波动率风险溢价本就应为负,期权定价偏高一些本身就是合理的,但 Buy-Write 策略依然表现良好,这意味着美国期权的定价比其合理价格还要高,从而使得长期卖期权的策略能获得较好的夏普比率.本文认为,这可能与期权卖方需要承担小概率下的黑天鹅风险有关系,期权价格必须略高于合理价格,才能吸引投资者承担期权空头.

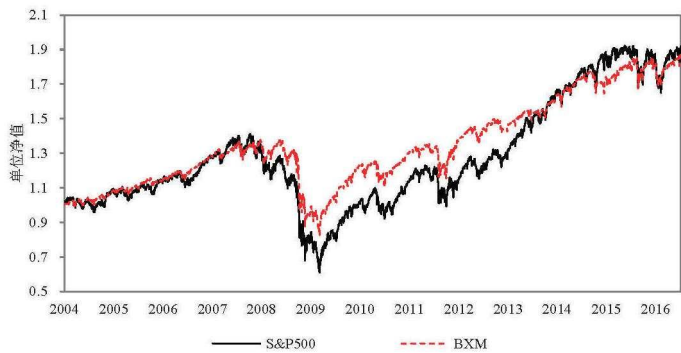


图 3 美国市场 Buy-Write 指数 (BXM) 和 S&P500 单位净值走势

表 5 美国市场 BXM 和 S&P500 绩效				
	年平均 收益	年标 准差	夏普 比率	最大回撤
S&P500	7.37%	19.31%	0.382	56.77%
BXM	7.00%	13.93%	0.502	40.14%

注: 为简化起见,在计算夏普比率时取无风险利率为 0,但这一简化并不影响比较结果.

由于中国市场没有类似的 BXM 指数,本文自己构建了类似的基于上证 50ETF 及其期权的 Buy-Write 策略,具体操作如下:买入 50ETF,同时卖一个近月的平值或者浅虚值看涨期权²⁴.随着 50ETF 价格的变动,原本卖出的期权合约可能变为实值合约.本文分两种情况做历史回溯:

- 1) 滚动移仓 (Buy-Write1): 当标的价格变动时,如果原来的合约已经不是行权价平值或者最大虚值看涨期权,平掉原来的合约,然后重新卖出近月的平值或者浅虚值看涨期权,从而实现滚动交易.
- 2) 到期移仓 (Buy-Write2): 期权到期之前不换仓,持有直至期权到期,到期时交割掉原来的合约,同时再卖出近月的平值或者浅虚值看涨期权.

由于中国市场交易费用较高,考虑交易费用后可能会使得结论发生较大的变化,为保证结论的稳健性,本文分别在无交易费用和有交易费用的情况下进行了考察.不仅如此,由于中国市场各级投资者的交易费用不一,对于有交易费用的情形,本文又具体分为三档来考察: 1) 做市券商: 每张期权交易手续费 0.3 元; 2) 非做市券商: 每张期权的手续费 2.3 元; 3) 普通投资者: 每张期权的手续费 12.3 元²⁵.

24. 中国期权市场刚刚起步,流动性相对不佳,平价期权与浅虚值期权流动性相对较好,因此本文以此作为研究对象.
25. 每张期权手续费包括交易所收取的经手费 2 元,中国结算公司收取 0.3 元,以及各券商收取的费用 (一般 5~15 元不等,本文取中间值 10 元).由于做市商达到做市评价标准会返还经手费,因而做市商手续费仅 0.3 元,非做市券商则为 2.3 元,普通投资者为 12.3 元.

图 4 和表 6 是中国市场 2015 年 2 月 9 日至 2016 年 7 月 8 日 Buy-Write 策略与 50ETF 单位净值走势以及策略的回测绩效. 由于结论基本一致, 图 4 中本文仅给出了无交易费用的情形. 可以看出, 在整段样本期间, 在无交易费用, 交易费用相对较低的做市券商和非做市券商三种情形下, 两种 Buy-Write 策略都明显强于 50ETF 的表现. 样本期内 50ETF 的年化收益率为 -4.65% , 而大多 Buy-Write 交易策略达到 1% 以上, 相对表现显著高于 50ETF. 虽然样本期内熊市阶段相比牛市较长, 但正如前面所分析的, 只要进入下跌阶段, 在合理定价的市场上, 看涨期权的低行权概率就会体现在期权价格中, 期权卖方所得的期权费也会很低, 无法解释如此之高的相对表现, 因此定价高估是更加合理的解释.

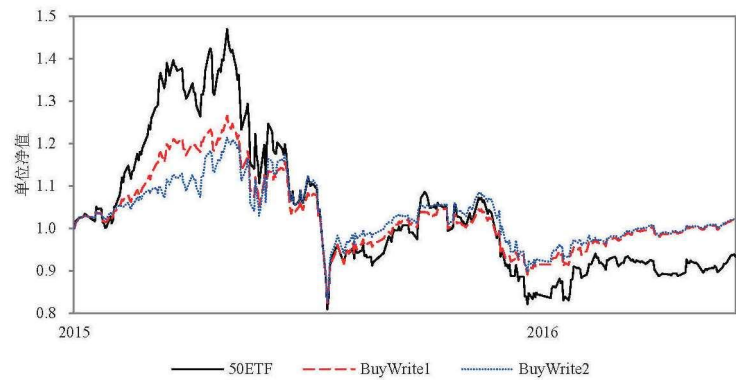


图 4 中国市场 Buy-Write 策略和上证 50ETF 单位净值走势 (无交易费用)

表 6 中国市场 Buy-Write 策略和上证 50ETF 绩效				
	年平均收益	年标准差	夏普比率	最大回撤
50ETF	-4.65%	35.03%	-0.133	44.97%
无交易费用:				
Buy-Write1	1.22%	24.06%	0.051	34.87%
Buy-Write2	1.39%	27.96%	0.050	31.91%
做市券商:				
Buy-Write1	1.10%	24.08%	0.046	34.92%
Buy-Write2	1.36%	2.797%	0.049	31.92%
非做市券商:				
Buy-Write1	0.31%	24.24%	0.013	35.30%
Buy-Write2	1.16%	27.99%	0.042	31.98%
普通投资者:				
Buy-Write1	-3.65%	25.06%	-0.146	37.20%
Buy-Write2	0.16%	28.14%	0.006	32.27%

注: 为简化起见, 在计算夏普比率时取无风险利率为 0, 但这一简化并不影响比较结果.

由此可见, 中国市场的 Buy-Write 策略结果仍支持上证 50ETF 期权被持续高估的结论. 那么为何会存在持续的系统性高估? 本文认为一部分可能原因与美国相似, 由于出售期权有发生小概率巨额亏损的可能, 期权空方往往相比理性状态更不愿意卖出期权, 因而需要给予期权空方一定的额外报酬才可能吸引他们卖出期权. 而另一方面, 中国市场作为一个新兴市场, 其与美国市场的一些不同特点也有可能 会导致期权价格高估, 其中包括: 1) 套利机制不健全; 2) 投资者非理性程度高; 3) 市场流动性不足; 4) 交易费用偏高. 在交易费用方面, 本文考虑了不同类别投资者的交易费用, 在较大程度上控制了这一因素的影响. 在流动性方面, 本文采用流动性相对较好的平值或浅虚值期权进行 Buy-Write 策略的研究, 也在一定程度上尽量减少了这一因素的影响. 但由于流动性会同时影响期权买方和期权卖方, 流动性不足到底是会引起期权价格高估还是期权价格低估, 需要深入探索, 难以简单论断. 相对而言, 套利机制不健全和投资者理性程度相对不足, 是公认中国市场目前的重要特征, 而这两个特征必然会引起期权价格非理性高估, 而且不容易得到平抑. 首先, 完善的套利机制是保证期权价格不会长期偏离其理论价格的基础. 美国市场经过长久的发展已形成相对健全的

套利机制, 现货做空和日内 T+0 交易机制使得投资者能够在期权市场和现货市场之间顺畅的进行套利交易, 当期权价格被错误定价或偏离合理价格时, 投资者的套利行为能够快速有效的将其修正. 而中国市场存在现货卖空限制和 T+1 交易机制, 这在一定程度上制约了投资者的套利交易, 使得市场的套利力量无法在期权价格偏离时正常发挥作用; 其次, 作为成熟的市场, 美国市场的投资者结构中机构投资者占绝大多数, 投资者相对较为理性. 而在中国市场的投资者构成中, 散户占比较高, 使得市场的非理性程度也相对较高. 许多投资者在交易中更倾向于将期权作为放大杠杆的工具去做方向性交易, 他们对购买期权的相对热衷使得市场上有时甚至出现部分期权合约被爆炒的现象. 这些非理性的投资者行为成为期权价格高估的一个重要推手, 而套利机制的不完善又使得这一高估长期无法得到平抑.

7 结论

本文从资产定价的基本原理出发, 对中美两个市场的波动率风险和波动率风险溢价进行了深入的实证比较研究. 本文发现中国市场上存在着一个波动率风险溢价的异象: 尽管波动率风险在中国市场上并非系统性风险, 投资者承担这一风险, 不应获得超额收益, 但投资者却可以通过期权交易获取波动率风险溢价这一额外收益. 这与美国市场现象存在显著差异, 且与理论不符.

首先, 不管是在暴跌/危机样本还是非暴跌/危机样本下, 本文发现美国股票现货市场上的波动率风险都是显著为负的系统性风险. 与之相一致的是, 美国期权市场所隐含的波动率风险溢价也是显著为负的, 美国市场的隐含波动率就应略高于真实波动率, 但即使如此, Buy-Write 策略的研究结果表明, 美国期权市场仍然比其合理价格更为高估.

与美国市场不同, 本文发现中国股票市场上的波动率风险整体而言并非系统性风险, 而是呈现出暴跌时期显著为负, 非暴跌时期显著为正的明显时变特征. 本文认为在非暴跌时期显著为正的波动率风险可能是中国以散户为主的投资者结构造成的, 而 2015–2016 年暴跌时期显著为负的波动率风险则是前所未有的杠杆交易导致的强制平仓所带来的.

其次, 与波动率风险特征不一致, 本文在研究中发现中国期权隐含的波动率风险溢价持续显著为负, 可能意味着中国期权价格存在系统性高估, 进一步的 Buy-Write 策略研究结果证实了这一现象, 说明中国期权价格的确存在持续的系统性高估. 本文认为其主要原因在于中国期权市场上套利机制的不健全和市场投资者理性程度不足, 投资者热衷于购买期权使得期权价格被高估, 而套利机制的不健全又使得期权价格的系统性高估无法通过市场套利行为得以修正. 随着中国股票市场和期权市场的发展, 这些异常现象是否会有所变化, 是一个值得关注的问题.

参考文献

- [1] 丛明舒. 中国场内期权市场研究 —— 基于中美关于期权隐含方差的差异 [J]. 金融研究, 2018(12): 189–206.
Cong M S. Research on China's option market: Based on two empirical differences about option-implied variances between China and US[J]. Journal of Financial Research, 2018(12): 189–206.
- [2] Cochrane J H. Asset pricing[M]. Princeton: Princeton University Press, 2001.
- [3] Coval J D, Shumway T. Expected option returns[J]. Journal of Finance, 2001, 56(3): 983–1009.
- [4] Bakshi G, Kapadia N. Delta-hedged gains and the negative market volatility risk premium[J]. Review of Financial Studies, 2003, 16(2): 527–566.
- [5] Carr P, Wu L. Variance risk premiums[J]. Review of Financial Studies, 2009, 22(3): 1311–1341.
- [6] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637–654.
- [7] Bollerslev T, Gibson M, Zhou H. Dynamic estimation of volatility risk premia and investor risk aversion from option-implied and realized volatilities[J]. Journal of Econometrics, 2011, 160(1): 235–245.
- [8] 陈蓉, 曾海为. 波动率风险溢价: 基于香港和美国期权市场的研究 [J]. 商业经济与管理, 2012, 1(2): 53–59.
Chen R, Zeng H W. Volatility risk premium: A study on Hongkong and American option markets[J]. Journal of Business Economics, 2012, 1(2): 53–59.
- [9] Bekaert G, Hoerova M. The VIX, the variance premium and stock market volatility[J]. Journal of Econometrics, 2014, 183(2): 181–192.

- [10] 陈蓉, 方昆明. 波动率风险溢价: 时变特征及影响因素 [J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(4): 761–770.
Chen R, Fang K M. Volatility risk premium in Hong Kong stock market[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2011, 31(4): 761–770.
- [11] Chernov M, Ghysels E. A study towards a unified approach to the joint estimation of objective and risk neutral measures for the purpose of options valuation[J]. Journal of Financial Economics, 2000, 56(3): 407–458.
- [12] Pan J. The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study[J]. Journal of Financial Economics, 2002, 63(1): 3–50.
- [13] Duan J C, Yeh C Y. Jump and volatility risk premiums implied by VIX[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2010, 34(11): 2232–2244.
- [14] 吴鑫育, 周海林. 波动率风险溢价 —— 基于 VIX 的实证 [J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(s1): 1–11.
Wu X Y, Zhou H L. Volatility risk premia: Evidence from VIX[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(s1): 1–11.
- [15] Glosten L R, Jagannathan R, Runkle D E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks[J]. Journal of Finance, 1993, 48(5): 1779–1801.
- [16] Engle R F, Ng V K. Measuring and testing the impact of news on volatility[J]. Journal of Finance, 1993, 48(5): 1749–1778.
- [17] Bollerslev T, Litvinova J, Tauchen G. Leverage and volatility feedback effects in high-frequency data[J]. Journal of Financial Economics, 2006, 4(3): 353–384.
- [18] 郑振龙, 汤文玉. 波动率风险及风险价格 —— 来自中国 A 股市场的证据 [J]. 金融研究, 2011(4): 143–157.
Zheng Z L, Tang W Y. Volatility risk and risk price: Evidence form the Chinese A-share stock market[J]. Journal of Financial Research, 2011(4): 143–157.
- [19] Black F. Studies of stock price volatility changes[C]// Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics, 1976, 81: 177–181.
- [20] Christie A C. The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects[J]. Journal of Financial Economics, 1982, 10(4): 407–432.
- [21] 冯志新, 王丹, 宋立新. 关于协方差的 U 统计量检验法 [J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2013, 36(5): 1–6.
Feng Z X, Wang D, Song L X. U-Statistic testing method about the difference of covariance[J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University, 2013, 36(5): 1–6.
- [22] Jiang G, Tian Y. The model-free implied volatility and its information content[J]. Review of Financial Studies, 2005, 18(4): 1305–1342.
- [23] Hansen P R, Lunde A. Realized variance and market microstructure noise[J]. Journal of Business and Economic Statistics, 2006, 24(2): 127–161.
- [24] 文凤华, 唐海如, 刘晓群, 等. 中国证券市场的 HAR-BACD-V 模型及其应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(3): 608–613.
Wen F H, Tang H R, Liu X Q, et al. HAR-BACD-V model and its application to Chinese stock market[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(3): 608–613.
- [25] 贺志芳, 杨鑫, 龚旭, 等. 股指期货市场波动率的预测研究 [J]. 系统科学与数学, 2016, 36(8): 1160–1174.
He Z F, Yang X, Gong X, et al. Predicting stock index futures market volatility[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2016, 36(8): 1160–1174.
- [26] 龚旭, 文凤华, 黄创霞, 等. HAR-RV-EMD-J 模型及其对金融资产波动率的预测研究 [J]. 管理评论, 2017, 29(1): 19–32.
Gong X, Wen F H, Huang C X, et al. The HAR-RV-EMD-J model and its application to forecasting the volatility of financial assets[J]. Management Review, 2017, 29(1): 19–32.
- [27] 刘晓倩, 王健, 吴广. 基于高频数据 HAR-CVX 模型的沪深 300 指数的预测研究 [J]. 中国管理科学, 2017, 25(6): 1–10.
Liu X Q, Wang J, Wu G. The forecasting analysis of HS300 index based on HAR-CVX model of high frequency data[J]. Chinese Journal of Management Science, 2017, 25(6): 1–10.
- [28] 陈声利, 李一军, 关涛. 基于四次幂差修正 HAR 模型的股指期货波动率预测 [J]. 中国管理科学, 2018, 26(1): 57–71.
Chen S L, Li Y J, Guan T. Forecasting realized volatility of Chinese stock index futures based on approved HAR models with median realized quarticity[J]. Chinese Journal of Management Science, 2018, 26(1): 57–71.
- [29] 陈声利, 关涛, 李一军. 基于跳跃、好坏波动率与百度指数的股指期货波动率预测 [J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(2): 299–316.
Chen S L, Guan T, Li Y J. Forecasting realized volatility of Chinese stock index futures based on jumps, good-bad volatility and Baidu index[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2018, 38(2): 299–316.
- [30] Britten-Jones M, Neuberger A. Option prices, implied price processes, and stochastic volatility[J]. Journal of Finance, 2000, 55(2): 839–866.
- [31] Bakshi G, Cao C, Chen Z. How often does the call move in the opposite direction to the underlying?[J]. Review of Financial Studies, 2000, 13: 549–584.
- [32] 叶五一, 缪柏其. 已实现波动与日内价差条件下的 CVaR 估计 [J]. 管理科学学报, 2012, 15(8): 60–71.
Ye W Y, Miao B Q. Estimating of CVaR with consideration of realized volatility and price range[J]. Journal of

Management Sciences in China, 2012, 15(8): 60–71.

- [33] 陈浪南, 杨科. 中国股市高频波动率的特征、预测模型以及预测精度比较 [J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(2): 296–307.
Chen L N, Yang K. High-frequency volatility features, forecast model and performance evaluation[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(2): 296–307.
- [34] 魏宇, 马锋, 黄登仕. 多分形波动率预测模型及其 MCS 检验 [J]. 管理科学学报, 2015, 18(8): 61–72.
Wei Y, Ma F, Huang D S. Multi-fractal volatility forecasting model and its MCS test[J]. Journal of Management Sciences in China, 2015, 18(8): 61–72.

附录 A 运用 delta 中性方法提取期权隐含的波动率风险溢价

假设标的资产价格服从以下随机波动率模型:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t(S_t, \sigma_t) dt + \sigma_t dW_{S,t}, \quad (\text{A.1})$$

$$d\sigma_t = \theta_t(\sigma_t) dt + \eta_t(\sigma_t) dW_{\sigma,t}. \quad (\text{A.2})$$

其中, S_t 为标的资产价格, $\mu_t(S_t, \sigma_t)$ 和 σ_t 分别为资产收益率的漂移率和波动率, $\theta_t(\sigma_t)$ 和 $\eta_t(\sigma_t)$ 分别为波动率的漂移率和波动率, 这两者均与 S_t 无关. $dW_{S,t}$ 和 $dW_{\sigma,t}$ 分别为影响标的资产价格和波动率的布朗运动, 相关系数为 ρ . 从伊藤引理可知, 资产 S_t 的期权价格的随机过程为:

$$f_{t+\tau} = f_t + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial f_u}{\partial S_u} dS_u + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial f_u}{\partial \sigma_u} d\sigma_u + \int_t^{t+\tau} \left(\frac{\partial f_u}{\partial u} + \frac{1}{2} \sigma_u^2 S_u^2 \frac{\partial^2 f_u}{\partial S_u^2} + \frac{1}{2} \eta_u^2 \frac{\partial^2 f_u}{\partial \sigma_u^2} + \rho \eta_u \sigma_u S_u \frac{\partial^2 f_u}{\partial S_u \partial \sigma_u} \right) du. \quad (\text{A.3})$$

运用类似 B-S-M 偏微分方程的推导思路, 在无套利和完全市场假设下, 期权价格应满足如下偏微分方程:

$$\frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \eta_t^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial \sigma_t^2} + \rho \eta_t \sigma_t S_t \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t \partial \sigma_t} + r_t S_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} + (\theta_t - \Lambda_t(\sigma_t)) \frac{\partial f_t}{\partial \sigma_t} + \frac{\partial f_t}{\partial t} - r_t f_t = 0, \quad (\text{A.4})$$

其中 $\Lambda_t(\sigma_t)$ 就是波动率风险溢价. 将其代入 (A.3) 和 delta 中性组合超额收益 $\Pi_{t,t+\tau}$ 的定义式 (4), 可以得到:

$$\Pi_{t,t+\tau} = \int_t^{t+\tau} \Lambda_u \frac{\partial f_u}{\partial \sigma_u} du + \int_t^{t+\tau} \eta_u \frac{\partial f_u}{\partial \sigma_u} dW_{\sigma,u}. \quad (\text{A.5})$$

进一步由维纳过程的鞅性质有

$$\mathbb{E}_t(\Pi_{t,t+\tau}) = \int_t^{t+\tau} \mathbb{E}_t \left(\Lambda_u \frac{\partial f_u}{\partial \sigma_u} \right) du. \quad (\text{A.6})$$

式 (A.6) 清晰地表明, 如果假设除了资产价格涨跌风险之外只有波动率风险, delta 中性组合超额收益 $\Pi_{t,t+\tau}$ 主要受到波动率风险溢价 $\Lambda_t(\sigma_t)$ 的影响. 当波动率风险不被定价时, delta 中性组合的平均超额收益应当为 0; 反之, delta 中性组合的超额收益将由波动率风险溢价 $\Lambda_t(\sigma_t)$ 和期权的 $\text{Vega}(\frac{\partial f_t}{\partial \sigma_t})$ 决定. 也就是说, 可以从 delta 中性组合的超额收益中提取波动率风险溢价的信息.

当离散对冲间隔 τ 足够小时, 自融资 delta 中性组合的收益可以近似地表示为

$$\Pi_{t,t+\tau} \approx \Lambda_t(\sigma_t) \frac{\partial f_t}{\partial \sigma_t} \tau + \eta_t(\sigma_t) \frac{\partial f_t}{\partial \sigma_t} \Delta_t W_{\sigma,t}. \quad (\text{A.7})$$

相应地, 波动率风险溢价可以近似地表示为

$$\Lambda_t(\sigma_t) \approx \frac{\Pi_{t,t+\tau}}{\tau \times \frac{\partial f_t}{\partial \sigma_t}} - \frac{\eta_t(\sigma_t) \Delta_t W_{\sigma,t}}{\tau}. \quad (\text{A.8})$$

因有

$$\mathbb{E}_t[\Lambda_t(\sigma_t)] = \mathbb{E}_t \left[\frac{\Pi_{t,t+\tau}}{\tau \times \frac{\partial f_t}{\partial \sigma_t}} \right]. \quad (\text{A.9})$$