Linear Algrabra

高等代数作业

作者：JJK

组织：Jiang Xi science and technology University

时间：June 2, 2019

版本：1.00

ElegantLATEX Program

Even though the truth is not a happy time, we have to be honest ,because more effort needed to cover the truth. — Bertr Russell

第 1 章 高等代数

1.1 作业

练习 1.1 用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ 为标准型, 并给出所用的正交变换.

证明 这个实二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}.$$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&2-4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7).$$

$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值是 2(二重),-7.

对特征值 2, 求出 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的基础解系:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

对特征值-7, 求出 $(-7\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的基础解系:

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}.$$

得到三个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)} - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 单位化得 $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3$ 即

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = diag\{2, 2, -7\}$.

令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

则

$$f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2.$$

练习 1.2 设 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 = 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

证明 因为标准型为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ 所以 $det(\boldsymbol{A}) = 0$ 得 $a = 2$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = (\lambda - 6)(\lambda + 3)\lambda = 0$$

$\lambda = 6, \lambda = -3, \lambda = 0$ 的特征向量分别为:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化, 即得:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = diag\{6,-3,0\}$.
令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

则

$$f(y_1,y_2,y_3) = 6y_1^2 - 3y_2^2.$$

✍ **练习 1.3** 用正交变换化二次型

$$f(x_1,\cdots,x_4) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_3x_4)$$

为标准型, 并给出所用的正交线性变化.

证明 二次型方程的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda-1)^2.$$

$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值是 3,1.
对特征值 3, 求出 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = 0$ 的基础解系:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

把 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 单位化, 得
对特征值 1, 求出 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = 0$ 的基础解系:

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 已经为正交向量组, 即正交化得:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} = diag(3,3,1,1);$$

令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

则

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 3y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

练习 1.4 求一个正交变换将二次型

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$$

化成标准形.

证明 二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

解得 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ 以及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化得:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} = diag(5, 2, 1);$$

令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

则

$$f(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2.$$

练习 1.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶正定矩阵，则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| > 1$。

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个实特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$
有正交矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1}$

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}' + \boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}' + \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'| = |\boldsymbol{C}||\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}' + \boldsymbol{C}'| = |\boldsymbol{D} + \boldsymbol{E}||\boldsymbol{C}|^2 = (\lambda_1 + 1)\cdots(\lambda_n + 1) > 1$$

且 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$ 即

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| > 1.$$

✍ **练习 1.6** 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定，证明 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

证明 存在实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{C}^{-1})'$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1} \backsimeq \boldsymbol{I}$ 得 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定的.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^* &= |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} \\ &= |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{C}^{-1})' \\ &= (\sqrt{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{C}^{-1})'\boldsymbol{I}(\sqrt{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{C}^{-1})'\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A} \backsimeq \boldsymbol{I}$

✍ **练习 1.7** 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{A}'$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

证明 已知 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}$

由于 $|\lambda \boldsymbol{I}| = |(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})'| = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}'| = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}^{-1}||\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| =$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\frac{1}{\lambda}(-1)^n|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$$

所以 $\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\frac{1}{\lambda}(-1)^n = 1$, 而 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'| = |\boldsymbol{A}|^2 = 1$, 所以 $|\lambda| = 1$

✍ **练习 1.8** 设 $f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是一实二次型, 若存在 n 维实向量

$$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, s.t., \boldsymbol{X}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 > 0, \boldsymbol{X}_2^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 < 0,$$

证明: 存在 n 维实向量 $\boldsymbol{a}, s.t., \boldsymbol{a}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = 0$.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 作实非退化线性替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 将 f 化为规范形

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 (r = p + q)$$

由于存在两个向量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$, 使 $\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 > 0, \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 < 0$,, 从而可得 $p > 0, q > 0$.
令

$$y_1 = y_{p+1} = 1, y_2 = \cdots = y_p = y_{p+2} = \cdots = y_{p+q} = 0,$$

取 n 维列向量

$$\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{C}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

中间的 1 位于第 $p+1$ 行.

由于 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 非退化, 故 $\boldsymbol{X}_0 \neq \boldsymbol{0}$, 且有

$$\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = 0$$

✍ **练习 1.9** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 证明:

$$\exists c > 0, s.t., \forall \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n, |\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}| \leq c\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}.$$

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 则 $t\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $t+\lambda_1,\cdots,t+\lambda_n$, 当 $t > S_r(\boldsymbol{A})$ 时.

$$t+\lambda_i \geq t-|\lambda_i| \geq t-S_r(\boldsymbol{A}) > 0,\ i=1,\cdots,n.$$

即 $t\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵. 同理 $t\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 也为正交矩阵.

任意一个实 n 阶向量 $\boldsymbol{X}$, 都有.

$$\boldsymbol{X}'(c\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} \geqslant 0,\ \boldsymbol{X}'(c\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \geqslant 0$$

$$-c\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \leqslant c\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$$

即

$$|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}| \leqslant c\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$$

✍ **练习 1.10** (1) 证明: 如果 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型. 那么

$$f(y_1,\ldots,y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型;

(2) 如果 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 是正定矩阵, 那么

$$|\boldsymbol{A}| \leq a_{nn}\boldsymbol{P}_{n-1},$$

其中 $\boldsymbol{P}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n-1 阶顺序主子式;

(3)$|\boldsymbol{A}| \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证明 (1) 作变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$ 即

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

则

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}z_1+\cdots+a_{1n}z_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}z_1+\cdots+a_{nn}z_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[(i=1,\cdots,n-1)]{c_n-z_nc_i}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ y_1 & \cdots & y_n & -(y_1z_1+\cdots y_nz_n) \end{vmatrix}$$

$$=-|\boldsymbol{A}|(y_1z_1+\cdots y_nz_n)$$

$$=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Z}=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$$

由 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵知,$f(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$ 为负定二次型.

证明 (2) 记

$$g'(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

由 (1) 可知,$g'(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$ 负定

$$|\boldsymbol{A}|=g'(a_{n1},\cdots,a_{n,n-1})+a_{nn}\boldsymbol{P}_{n-1}$$

由于 $g'(a_{n1},\cdots,a_{n,n-1})<0$, 所以 $|\boldsymbol{A}|\le a_{nn}\cdot\boldsymbol{P}_{n-1}$.

证明 (3) 由 (2), 得

$$|\boldsymbol{A}|\le a_{nn},|\boldsymbol{P}_{n-1}|\le a_{nn}a_{n-1,n-1},|\boldsymbol{P}_{n-2}|\le\cdots\le a_{nn}a_{n-1,n-1}\cdots a_{11}$$

✍ **练习 1.11** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times n$ 实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 正定,

(1) 证明: 存在实可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵;

(2) 假设 $\boldsymbol{B}$ 也正定. 证明:$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\ge|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

(3) 假设 $\boldsymbol{B}$ 也正定, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 也是正定矩阵.

证明 (1)

$\boldsymbol{A}$ 正定, 所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}'$ 使得,

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=diag(a_1,\cdots,a_n),$$

$a_1,\cdots,a_n>0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 也是对称矩阵, 且与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. 所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}'$ 使得,

$$\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q}=diag(b_1,\cdots,b_n),$$

其中 $b_1,\cdots,b_n$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值. 所以:

$$\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q}=diag(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n).$$

所以存在实可逆矩阵 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{PQ}$, 使得 $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.

证明 (2)

$\boldsymbol{B}$ 也正定, 因此 $b_1,\cdots,b_n>0$.

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q}|&=|diag(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)|\\&=\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\\&>\prod_{i=1}^{n}a_i+\prod_{i=1}^{n}b_i\\&=|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}|+|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|.$$

证明 (3) 存在一个 n 级正交矩阵 $\boldsymbol{T}, s.t.$

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{AT}=diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\quad\boldsymbol{T}'\boldsymbol{BT}=diag\{\mu_1,\cdots,\mu_n\}.$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值,$\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值.$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵, 由于:

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{AT})(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{BT})=diag\{\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n\}$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 合同与 $diag\{\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n\}$, 所以 $\boldsymbol{AB}$ 是正定矩阵.

✍ **练习 1.12** 化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$$

为标准型并写出线性变换.

证明 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 以及 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值以及特征向量为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix};$$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征值分别为 10,1,1 特征向量分别为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 正交化, 单位化得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$:

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{5}{3\sqrt{5}}\\\frac{4}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{3\sqrt{5}}\\-\frac{2}{3}&0&\frac{5}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{D}=diag(10,1,1);$$

令

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}.$$

则

$$f(y_1,y_2,y_3)=10y_1^2+y_2^2+y_3^2.$$

练习 1.13 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型的规范性为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值和各特征值的一个特征向量.

证明 (1) 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{bmatrix}\ |\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&0&-1\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-(a-1)\end{vmatrix}$$

解得 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征值分别为 $a-2,a,a+1$, 特征向量分别为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

证明 (2) 若规范性为 $y_1^2+y_2^2,a$ 只能为 2, 即:
$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征值分别为 0, 2, 3, 特征向量分别为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

练习 1.14 若 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

(1) 证明 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 正定.

(2) 证明: 存在正交矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = diag(a_1,\cdots,a_n), where\ a_i > 0, i = 1,\cdots,n.$$

证明 (1)

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}$$

因此 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 合同与单位矩阵, 即 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 正定.

证明 (2) $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 正定, 因此存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = diag(b_1,\cdots,b_n), where\ b_i > 0, i = 0,\cdots,n.$$

令

$$\boldsymbol{D} = diag(\sqrt{b_1},\cdots,\sqrt{b_n}),\ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{D},$$

容易求得

$$\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{D})'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_n,$$

因此矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵, 令 $a_i = \sqrt{b_i}, i = 1\cdots,n$. 则

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D} = diag(a_1,\cdots,a_n).$$

✍ **练习 1.15** 求线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3_3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ 的解空间 W 及其正交补空间 $W^{\perp}$.

证明 系数矩阵作初等行变换得:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此, 方程组的两个线性无关的向量为:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$W = L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$. 设正交补空间 $W^{\perp}$ 的任一向量为 $\boldsymbol{\beta} = (y_1,y_2,y_3,y_4)'$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_1'\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_2'\boldsymbol{\beta} = 0$. 即

$$\begin{cases} y_2 + y_4 = 0 \\ -6y_1 + 9y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

因此, 上面的方程组的两个线性无关的向量为:

$$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\6\\0\end{bmatrix},\ \beta_2=\begin{bmatrix}-3\\-2\\0\\2\end{bmatrix}.$$

所以, 正交补空间 $W^{\perp}=L(\beta_1,\beta_2)$.

✍ **练习 1.16** 设 σ 是有限维线性空间 V 的可逆线性变换. 设 W 是 V 中 $\sigma-$ 不变子空间, 证明:W 是 V 中 $\sigma^{-1}-$ 不变子空间.

证明 已知 $\alpha\in W,\sigma(\alpha)\in W$.
设 $\sigma(\alpha)=\beta$, 因 σ 可逆, 即若:

$$\sigma^{-1}(\beta)=\alpha \qquad \beta\ and\ \sigma^{-1}(\beta)\in W$$

所以 W 是 V 中 $\sigma^{-1}-$ 不变子空间

下证 σ 为双射:

证明 设 σ 为可逆变换, 它的逆变换为 σ^{-1}.
任取 $\xi,\eta\in W$, 且 $\xi\neq\eta$, 则必有 $\sigma(\xi)\neq\sigma(\eta)$. 不然, 设 $\sigma(\xi)=\sigma(\eta)$, 两边左乘 σ^{-1}, 有 $\xi=\eta$, 这与条件矛盾, 所以 σ 是单射.
其次, 对任一向量 $\xi\in W$, 必有 η 使 $\sigma(\xi)=\eta$, 事实上, 令 $\sigma^{-1}(\eta)=\xi$ 即可, 所以 σ 是满射, 故 σ 是双射, 即 $\sigma^{-1}(\beta)=\alpha$.

✍ **练习 1.17** 设 σ 是正交变换, 证明:σ 的不变子空间的正交补也是 σ 的不变子空间.

证明 设 W 是 σ 的任意一个不变子空间, 取 W 的一组标准正交基 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$, 把它扩成 V 的一组标准正交基 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_m,\epsilon_{m+1},\cdots,\epsilon_n$, 由

$$dim(W)+dim(W^{\perp})=n$$

$$W=L(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_m),\ W^{\perp}=L(\epsilon_{m+1},\cdots,\epsilon_n).$$

又 σ 是正交变换, 则 $\sigma(\epsilon_1),\cdots,\sigma(\epsilon_n)$ 也是标准正交基, 由于 W 是 σ 的不变子空间, 所以 $\sigma(\epsilon_1),\cdots,\sigma(\epsilon_m)\in W$. 且为 W 的一组标准正交基, 从而 $\sigma(\epsilon_{m+1},\cdots,\sigma(\epsilon_n))\in W^{\perp}$
任取 $\alpha\in W^{\perp}$ 则

$$\alpha=k_{m+1}\epsilon_{m+1}+\cdots+k_n\epsilon_n\in W^{\perp},$$

所以

$$\sigma(\alpha)=k_{m+1}\epsilon_{m+1}+\cdots+k_n\sigma(\epsilon_n)\in W^{\perp}.$$

$W^{\perp}$ 是 σ 的不变子空间.

✍ **练习 1.18** 证明: 反对称矩阵的特征值为 0 或者纯虚数。

证明 设 A 是反对称实矩阵,λ 是 A 的一个特征值,ξ 为相应的特征向量, 即 $A\xi=\lambda\xi$, 则

$$\bar{\xi}'A\xi=\bar{\xi}'(-A')\xi=-\bar{\xi}'A'\xi=-(A\bar{\xi})'\xi=-(\overline{A\xi})'\xi$$

即有 $\lambda\bar{\xi}\xi=-\bar{\lambda}\bar{\xi}\xi$, 从而 $\lambda=-\bar{\lambda}$.

令 $\lambda = a + ib$, 代入上式得 $a + ib = -(a - ib)$, 即有 $a = 0$. 故 λ 是 0 或纯虚数.

练习 1.19 如果 λ 是正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 也是正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 已知 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}$, 所以 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}'$ 的特征值. 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 有相同的特征值, 所以 λ^{-1} 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

练习 1.20 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵, 证明: 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}, s.t., \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}$ 的充要条件为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征多项式的根全部相同.

证明 必要性. 若 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同, 所以它们的特征根相同.
充分性. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值, 由 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$, 使

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$$

于是

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1} = \boldsymbol{B}$$

令 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$, 由 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 是正交矩阵知,$\boldsymbol{T}$ 也是正交矩阵, 且有 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B}$.

练习 1.21 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. 证明: 存在正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}, s.t., \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = diag(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0).$$

证明 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值,$\boldsymbol{\xi}$ 是属于 λ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda^2\boldsymbol{\xi}.$$

又由于 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 所以有 $\lambda^2\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 即 $(\lambda^2 - \lambda)\boldsymbol{\xi} = 0$, 因为 $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}$, 故 $\lambda^2 - \lambda = 0$, 从而 $\lambda = 0$ 或 1, 再由定理 7 知, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = diag(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0).$$

在上式中的对角线元素中,1 的个数为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1 的个数,0 的个数为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 0 的个数.