Linear Algebra Test

ℵ

2019 年 12 月 15 日

1. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad a_i \neq 0\ (1 \leq i \leq n)$$

2. 设整系数多项式 $f(x)$ 满足 $f(1) = f(2) = f(3) = p$, p 为素数,证明不存在整数 m 使得 $f(m) = 2p$.

3. 设 n 为奇数, A, B 为两个实 n 阶方阵,且 $BA = 0$.记 $A + J_A$ 的特征值集合为 S_1 , $B + J_B$ 的特征值集合为 S_2 ,其中 J_A, J_B 分别表示 A 和 B 的Jordan标准型.求证 $0 \in S_1 \cup S_2$.

4. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足

   (a) $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = a > 0$;

   (b) 对于每个 $i\ (1 \leq i \leq n)$,有 $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}| < 4a$.

   求 $f(x_1, \cdots, x_n) = X'AX$ 的规范形,其中 $X = (x_1, \cdots, x_n)'$.

5. 设 σ 是有理数域上的线性空间 V 的线性变换, $g(x) = x(x^2 + x - 1)$.证明:若 $g(\sigma) = 0$,则 $V = \mathrm{Im}\ \sigma \oplus \mathrm{Ker}\ \sigma$.

6. 设 $A_1, \cdots, A_{2019}$ 为2018阶实方阵.证明关于 $x_1, \cdots, x_{2019}$ 的方程 $\det(x_1A_1 + \cdots + x_{2019}A_{2019}) = 0$ 至少有一组非零实数解,其中 det 表示行列式.