

# Analysis Test

Ⅷ

2019 年 12 月 15 日

1. 已知  $x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{x_0^3 + 4}, x_2 = \frac{1}{x_1^3 + 4}, \dots, x_{n+1} = \frac{1}{x_n^3 + 4}, \dots$ . 求证:

(a) 数列  $\{x_n\}$  收敛.

(b)  $\{x_n\}$  的极限值  $a$  是方程  $x^4 + 4x - 1 = 0$  的唯一正根.

2. 求下列极限.

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x^\alpha}}} - \sqrt{x} \right)$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} e^{-x}$

3. 设  $n \in \mathbf{N}$ , 求证:  $e < \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$ .

4. 求和函数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$ .

5. 计算如下积分:

(a)  $\int \frac{1}{1 + a \cos x} dx \quad (a > 0)$

(b)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}$

6. 判定下列数列级数的收敛性:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n^2 \ln \frac{n^2+3}{n^2}}}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{\sin nx}{n} \quad x \in (0, \pi)$