

Linear Algrabra

高等代数作业

作者: JJK

组织: Jiang Xi science and technology University

时间: June 2, 2019

版本: 1.00



Even though the truth is not a happy time, we have to be honest ,because more effort needed to cover the truth. — Bertr Russell

第1章 高等代数

1.1 作业

练习 1.1 用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 为标准型, 并给出所用的正交变换.

证明 这个实二次型的矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & 2 - 4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 7).$$

A 的全部特征值是 2(二重),-7.

对特征值 2, 求出 (2I - A)X = 0 的基础解系:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

对特征值-7, 求出 (-7I - A)X = 0 的基础解系:

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

得到三个线性无关的特征向量

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交化

1.1 作业

$$\beta_{1} = \alpha_{1} = \begin{bmatrix} 2\\0\\1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_{2} = \alpha_{2} - \frac{(\alpha_{2}, \beta_{1})}{(\beta_{1}, \beta_{1})} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}\\0\\\frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

$$\beta_{3} = \alpha_{3} - \frac{(\alpha_{3}, \beta_{2})}{(\beta_{2}, \beta_{2})} - \frac{(\alpha_{3}, \beta_{1})}{(\beta_{1}, \beta_{1})} = \begin{bmatrix} 0\\-2\\1 \end{bmatrix}$$

再将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化得 μ_1, μ_2, μ_3 即

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

则 T 是正交矩阵, 且 $T^{-1}AT = diag\{2,2,-7\}$.

令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

则

$$f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$$
.

练习 1.2 设 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 = 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 x = Qy 下的标准型为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

证明 因为标准型为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ 所以 det(A) = 0 得 a = 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 6)(\lambda + 3)\lambda = 0$$

 $\lambda = 6, \lambda = -3, \lambda = 0$ 的特征向量分别为:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.1 作业 -3/9-

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, 即得:

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

则 T 是正交矩阵, 且 $T^{-1}AT = diag\{6, -3, 0\}$.

令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

则

$$f(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 - 3y_2^2.$$

▲ 练习 1.3 用正交变换化二次型

$$f(x_1, \dots, x_4) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_3x_4)$$

为标准型,并给出所用的正交线性变化.

证明 二次型方程的矩阵 A 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 1)^2.$$

A 的全部特征值是 3,1.

对特征值 3, 求出 (3I - A)X = 0 的基础解系:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

把 α_1, α_2 单位化, 得

对特征值 1, 求出 (I - A)X = 0 的基础解系:

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1.1 作业 -4/9-

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 已经为正交向量组, 即正交化得:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \qquad T'AT = D = diag(3, 3, 1, 1);$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

则

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 3y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

▲ 练习 1.4 求一个正交变换将二次型

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$$

化成标准形.

证明 二次型矩阵 A 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

解得 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$ 以及对应的特征向量 α_1 , α_2 , α_3 为:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

对 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化得:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad T'AT = D = diag(5, 2, 1);$$

\$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

则

-5/9-

$$f(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2.$$

△ 练习 1.5 设 A 是一个 n 阶正定矩阵,则 |A + E| > 1。

证明 设 A 的 n 个实特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 有正交矩阵 C 使得 $A = (C')^{-1}DC^{-1}$

$$|A + E| = |CDC' + E| = |CDC' + CC'| = |C||DC' + C'| = |D + E||C|^2 = (\lambda_1 + 1) \cdots (\lambda_n + 1) > 1$$

且 $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ 即

$$|A + E| > 1$$
.

△ 练习 1.6 设n 阶实对称矩阵 A 正定,证明 A^* 也是正定矩阵,其中 A^* 表示 A 的伴随矩阵.

证明 存在实矩阵 C, 使得

$$A = C'C$$
, $A^{-1} = C^{-1}I(C^{-1})'$

即 $A^{-1} \simeq I$ 得 A^{-1} 是正定的.

$$A^* = |A|A^{-1}$$

$$= |A|C^{-1}I(C^{-1})'$$

$$= (\sqrt{|A|}C^{-1})'I(\sqrt{|A|}C^{-1})'$$

即 $A \subseteq I$

练习 1.7 设 n 阶方阵 A 满足条件 A'A = E, 其中 A' 是 A 的转置矩阵,E 为单位矩阵,证明 A 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

证明 已知 $A' = A^{-1}$

由于
$$|\lambda I| = |(\lambda I - A)'| = |\lambda I - A'| = |\lambda I - A^{-1}| = |A^{-1}||\lambda I - A| =$$

$$\frac{1}{|A|}\frac{1}{\lambda}(-1)^n|\lambda I - A|$$

所以 $\frac{1}{|A|} \frac{1}{\lambda} (-1)^n = 1$, 而 $|AA'| = |A|^2 = 1$, 所以 $|\lambda| = 1$

4 练习 1.8 设 $f(x_1, \dots, x_n) = X^T A X$ 是一实二次型, 若存在 n 维实向量

$$X_1, X_2, s.t., X_1^T A X_1 > 0, X_2^T A X_2 < 0,$$

证明: 存在 n 维实向量 a, s.t., a'Aa = 0.

证明 内容...

△ 练习 1.9 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 证明:

$$\exists c > 0, s.t., \forall X \in \mathbb{R}^n, |X^T A X| \leq c X^T X.$$

1.1 作业 -6/9-

证明 设 A 的全部特征值是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. 则 tI + A 的全部特征值为 $t + \lambda_1, \dots, t + \lambda_n$, 当 $t > S_r(A)$ 时.

$$t + \lambda_i \ge t - |\lambda_i| \ge t - S_r(A) > 0, i = 1, \dots, n.$$

即 tI + A 为正定矩阵. 同理 tI - A 也为正交矩阵.

任意一个实 n 阶向量 X, 都有.

$$X'(cI + A)X \geqslant 0, \ X'(cI - A) \geqslant 0$$

$$-cX'X \leqslant X'AX \leqslant cX'X$$

即

$$|X'AX| \leqslant cX'X$$

练习 1.10 (1) 证明: 如果 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j (a_{ij} = a_{ji})$ 是正定二次型. 那么

$$f(y_1, \dots, y_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{bmatrix}$$

是负定二次型;
(2) 如果
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
 是正定矩阵,那么
$$|\mathbf{A}| \leq a_{nn} \mathbf{P}_{n-1},$$

$$|A| \leq a_{nn} P_{n-1}$$
,

其中 P_{n-1} 是 A 的 n-1 阶顺序主子式;

 $(3)|A| \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

证明 (1) 作变换 Y = AZ 即

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

1.1 作业 -7/9-

则

$$f(y_{1}, \dots, y_{n}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}z_{1} + \cdots + a_{1n}z_{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}z_{1} + \cdots + a_{nn}z_{n} \\ y_{1} & \cdots & y_{n} & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{c_{n}-z_{n}c_{i}}{(i=1,\dots,n-1)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ y_{1} & \cdots & y_{n} & -(y_{1}z_{1} + \cdots + y_{n}z_{n}) \end{vmatrix}$$

$$= -|A|(y_{1}z_{1} + \cdots + y_{n}z_{n})$$

$$= -|A|(y_{1}z_{1} + \cdots + y_{n}z_{n})$$

$$= -|A|(y_{1}z_{1} + \cdots + y_{n}z_{n})$$

由 A 为正定矩阵知, $f(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})$ 为负定二次型.

证明 (2) 记

$$g'(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

由 (1) 可知, $g'(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ 负定

$$|A| = g'(a_{n1}, \cdots, a_{n,n-1}) + a_{nn}P_{n-1}$$

由于 $g'(a_{n1}, \dots, a_{n,n-1}) < 0$, 所以 $|A| \le a_{nn} \cdot P_{n-1}$.

证明 (3) 由 (2), 得

$$|A| \le a_{nn}, |P_{n-1}| \le a_{nn}a_{n-1,n-1}, |P_{n-2}| \le \cdots \le a_{nn}a_{n-1,n-1} \cdots a_{11}$$

- △ 练习 1.11 设 A, B 都是 $n \times n$ 实对称矩阵, 且 A 正定,
 - (1) 证明: 存在实可逆矩阵 T, 使得 T'(A+B)T 为对角矩阵;
 - (2) 假设 **B** 也正定. 证明:|**A** + **B**| ≥ |**A**| + |**B**|.
 - (3) 假设 B 也正定, 且 AB = BA, 证明 AB 也是正定矩阵.

证明 (3) 存在一个 n 级正交矩阵 T, s.t.

$$T'AT = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$
 $T'BT = diag\{\mu_1, \dots, \mu_n\}.$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 **A** 的全部特征值, μ_1, \dots, μ_n 是 **B** 的全部特征值.**A**,**B** 都是正定矩阵,由于:

$$T'(AB)T = (T'AT)(T'BT) = diag\{\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_n\mu_n\}$$

1.1 作业

即 AB 合同与 $diag\{\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n\}$, 所以 AB 是正定矩阵.

△ 练习 1.12 化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$$

为标准型并写出线性变换.

证明 二次型 f 的矩阵 A, 以及 A 的全部特征值以及特征向量为:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix};$$

 λ_1 的特征值为 10, 特征向量为

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

λ2 的特征值为 1, 特征向量为

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ3 的特征值为 1,特征向量为

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2\\1\\0 \end{bmatrix}$$

△ 练习 1.13 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

- (1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值:
- (2) 若二次型的规范性为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值和各特征值的一个特征向量.
- ▲ 练习 1.14 若 *n*×*n* 矩阵 *A* 可逆.
 - (1) 证明 A'A 正定.
 - (2) 证明: 存在正交矩阵 P,Q,使得

$$P'AQ = diag(a_1, \dots, a_n), where a_i > 0, i = 1, \dots, n.$$

- 练习 1.15 求线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3_3x_3 x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 2x_4 = 0 \end{cases}$ 的解空间 W 及其正交补空间 W^{\perp} .
- **练习 1.16** 设 σ 是有限维线性空间 V 的可逆线性变换. 设 W 是 V 中 σ 不变子空间, 证明:W 是 V 中 σ -1- 不变子空间.
- 4 练习 1.17 设 σ 是正交变换, 证明: σ 的不变子空间的正交补也是 σ 的不变子空间.

1.1 作业 -9/9-

- ▲ 练习 1.18 证明: 反对称矩阵的特征值为 0 或者纯虚数。
- **练习 1.19** 如果 λ 是正交矩阵 **A** 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 也是正交矩阵 **A** 的特征值.

证明 设 λ 是 A 的特征值, 已知 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, 由于 A 是正交矩阵, $A' = A^{-1}$, 所以 λ^{-1} 是 A' 的特征值. 因为 A 与 A' 有相同的特征值, 所以 λ^{-1} 也是 A 的特征值.

练习 1.20 设 A, B 都是实对称矩阵, 证明: 存在正交矩阵 $Q, s.t., Q^{-1}AQ = B$ 的充要条件为 A, B 的特征多项式的根全部相同.

证明 设 A 是反对称实矩阵, λ 是 A 的一个特征值, ξ 为相应的特征向量, 即 $A\xi = \lambda \xi$, 则

$$\bar{\xi}'A\xi = \bar{\xi}'(-A')\xi = -\bar{\xi}'A'\xi = -(A\bar{\xi})'\xi = -(\overline{A\xi})'\xi$$

即有 $\lambda \bar{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\xi} = -\bar{\lambda} \bar{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\xi}$, 从而 $\lambda = -\bar{\lambda}$.

令 $\lambda = a + ib$, 代入上式得 a + ib = -(a - ib), 即有 a = 0. 故 $\lambda \neq 0$ 或纯虚数.

△ 练习 1.21 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = A$. 证明: 存在正交矩阵

$$Q, s.t., Q^{-1}AQ = diag(1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

证明 设 λ 是 A 的任意特征值, ξ 是属于 λ 的特征向量, 则 $A\xi = \lambda \xi$, 从而

$$A^{2}\xi = A(A\xi) = A(\lambda\xi) = \lambda A\xi = \lambda^{2}\xi.$$

又由于 $A^2 = A$, 所以有 $\lambda^2 \xi = A^2 \xi = A \xi = \lambda \xi$, 即 $(\lambda^2 - \lambda) \xi = 0$, 因为 $\xi \neq 0$, 故 $\lambda^2 - \lambda = 0$, 从而 $\lambda = 0$ 或 1, 再由定理 7 知, 存在正交矩阵 O. 使

在上式中的对角线元素中,1 的个数为 A 的特征值 1 的个数,0 的个数为 A 的特征值 0 的个数.