# 第一章 整除

## 计算证明

1. 计算下面整数对的最大公因子和最小公倍数。

(1) $(202, 242)$　　$2, 24442$

(2) $(666, 1416)$　　$6, 157176$

(3) $(98, 105, 280)$　　$7, 5880$

2. 求下面整数的标准分解式。

(1) $78$　　$78 = 2^1 * 3^1 * 13^1$

(2) $328$　　$328 = 2^3 * 41$

(3) $13288$　　$13288 = 2^3 * 11^1 * 151^1$

(4) $21054$　　$21054 = 2^1 * 3^1 * 11^2 * 29$

3. 若$a \in Z^+ \cup \{0\}$，$a^4 - 3a^2 + 9$是质数还是合数?

> 解：$a^4 - 3a^2 + 9 = [(a+1)(a+2)+1][(a-1)(a-2)+1]$
> 当$a = 0$时，$a^4 - 3a^2 + 9 = 9$，那么，$a^4 - 3a^2 + 9$是合数;
> 当$a = 1$或$2$时，$(a-1)(a-2)+1 = 1$，此时，$(a+1)(a+2)+1 = 7$或$13$，那么，$a^4 - 3a^2 + 9$是质数;
> 当$a > 2$时，$(a-1)(a-2)+1 > 1$，$(a+1)(a+2)+1 > 1$，那么，$a^4 - 3a^2 + 9$是合数。

4. 证明每个奇数的平方都具有$8k+1$的形式。

> 证明：设奇数为$2n+1$。有 $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1$，$n$ 和 $n+1$ 中一定有一个偶数，所以$8|4n(n+1)$，所以可以写成$8k+1$的形式。

5. 证明若$(m-p)|(mn+pq)$，则$(m-p)|(mq+np)$。

> 证明：易知 $(m-p)|(m-p)(n-q)$，又 $(m-p)|(mn+pq)$，而 $-(m-p)(n-q) + (mn+pq) = mq + np$，则 $(m-p)|(mn+pq)$，证毕。

6. 证明若 $k$ 为正整数，那么 $3k+2$ 与 $5k+3$ 互素。

> 证明：$(3k+2, 5k+3) = (3k+2, 2k+1) = (2k+1, k+1) = (k, k+1) = 1$
> 所以，$3k+2$ 与 $5k+3$ 互素。

7. 证明$12|n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n, n \in Z$。

> 证明：$n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n = (n-1)n(n+1)(n+2) + 12n(n+1)$
> 连续四个整数中一定有两个偶数，也一定有至少一个3的倍数（严谨证明可以使用数学归纳法），
> 故$12|n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n, n \in Z$。

8. 证明在$1, 2, 3, \ldots, 2n$中任取$n+1$个数，其中至少有一个能被另一个整除。

> 证明：每个正整数都可以唯一地写成 $2^k * a$ 的形式，$k$ 为非负整数，$a$ 为该正整数的最大奇约数。由于$S = \{1, 2, \ldots, 2n\}$中奇数只有 $n$ 个，所以从 $S$ 中任选 $n+1$个数里面至少有两个的最大奇约数相同，则会令此二数为 $2^{k_1} * a$ 与 $2^{k_2} * a$，且 $k_1 \neq k_2$。设 $k_1 < k_2$，则 $2^{k_1} * a | 2^{k_2} * a$。证毕。

9. 证明 $n$ 的标准分解式中次数都是偶数当且仅当 $n$ 是完全平方数。

证明：充分性：设 $n=m^2$，由算术基本定义有

$$\begin{cases} n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}, p_i\text{是素数且}p_i<p_j(0<i<j\leq s) \\ m=q_1^{\beta_1}\cdots q_t^{\beta_t}, q_i\text{是素数且}q_i<q_j(0<i<j\leq t) \end{cases}$$

由算术分解的唯一性可得

$$\begin{cases} s=t \\ p_i=q_i, 0<i\leq s \\ \alpha_i=2\beta_i, 0<i\leq s \end{cases}$$

必要性：设 $n=p_1^{2\alpha_1}\cdots p_s^{2\alpha_s}$，$p_i$ 是素数且 $p_i<p_j(0<i<j\leq s)$，取 $m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 即可满足 $n=m^2$ 。证毕。

10. 证明 $\sqrt{5}$ 是无理数。*并将其表示为简单连分数的形式。（*标注表示不作强制要求）

> 证明：反证法：反设 $\sqrt{5}=\frac{p}{q}$，其中 $p,q\in Z^+,(p,q)=1$。得 $p^2=5q^2$，则 $5|p$。可设 $p=5m$，代入得 $q^2=5m^2$，同理 $5|q$。则 $(p,q)=5\neq 1$ 矛盾，故反设不成立，证毕。
>
> $\sqrt{5}=[2;\overline{4}]$

11. *求证任意 $n$ 个连续的正整数乘积都被 $n!$ 整除。（写出严谨的证明过程）

**证明　数学归纳法.**

记任意 $n$ 个连续的正整数分别为 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ . 其中 $a_i=m+i\ (m\in\mathbb{N})$ , 乘积记为 $T_m$.

当 $m=1$ 时，$T_1=n!$ ，$n!\mid T_1$ 成立 .

假设当 $m=k\ (k\in\mathbb{N})$ 时，$n!\mid T_k$ ，即 $n!\mid k(k+1)\cdots(k+n-1)$ 成立 .

那么当 $m=k+1$ 时，有 $T_{k+1}=\prod_{i=0}^{n-1}a_i=(k+1)(k+2)\cdots(k+n)=k(k+1)\cdots(k+n-1)+n(k+1)\cdots(k+n-1)$ .

只需证 $n!\mid n(k+1)\cdots(k+n-1)$ ，即$(n-1)!\mid(k+1)\cdots(k+n-1)$ .

取 $n$ 为 $n-1$ ，$m$ 为 $k$ ，重复上述证明过程.

易知经过有限步后，$n=1$ ，而 $\forall m\in\mathbb{N},\ 1\mid m$ ，假设成立，证毕.