

第一章 整除

计算证明

1. 计算下面整数对的最大公因子和最小公倍数。

(1) $(202, 242)$

(2) $(666, 1416)$

(3) $(98, 105, 280)$

2. 求下面整数的标准分解式。

(1) 78

(2) 328

(3) 13288

(4) 21054

3. 若 $a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $a^4 - 3a^2 + 9$ 是质数还是合数?

4. 证明每个奇数的平方都具有 $8k + 1$ 的形式。

5. 证明若 $(m - p)|(mn + pq)$, 则 $(m - p)|(mq + np)$ 。

6. 证明若 k 为正整数, 那么 $3k + 2$ 与 $5k + 3$ 互素。

7. 证明 $12|n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n, n \in \mathbb{Z}$ 。

8. 证明在 $1, 2, 3, \dots, 2n$ 中任取 $n + 1$ 个数, 其中至少有一个能被另一个整除。

9. 证明 n 的标准分解式中次数都是偶数当且仅当 n 是完全平方数。

10. 证明 $\sqrt{5}$ 是无理数。 *并将其表示为简单连分数的形式。 (*标注表示不作强制要求)

11. *求证任意 n 个连续的正整数乘积都被 $n!$ 整除。 (写出严谨的证明过程)

编程练习 (基于C/C++)

1. 编程程序使用 Eratosthenes 筛法打印 $1,000,000$ 内所有素数的个数, 效果如图所示。 (*思考: a.

对比筛法与普通算法的性能差异; b. 递归调用该算法求更大范围素数进行优化; c. 求更大的素数

(如 2^{512} 数量级) 该方法是否使用? 会引入哪些新的问题?)

```
Microsoft Visual Studio 调试控制台 + v
Please input the range: 1-10000000
-----
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 1
63 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 3
37 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 5
21 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 7
19 727 733 739 743 751 757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 9
29 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997 1009 1013 1019 1021 1031 1033 1039 1049 1051 1061 1063 1069 1087 1091 1093 10
97 1103 1109 1117 1123 1151 1153 1163 1171 1181 1187 1193 1201 1213 1217 1223 1229 1231 1237 1249 1259 1277 1279 12
83 1289 1291 1297 1301 1303 1307 1319 1321 1327 1361 1367 1373 1381 1399 1409 1423 1427 1429 1433 1439 1447 1451 1453 14
59 1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511 1523 1531 1543 1549 1553 1559 1567 1571 1579 1583 1597 1601 1607 1609 1613 16
19 1621 1627 1637 1657 1663 1669 1693 1697 1699 1709 1721 1723 1733 1741 1747 1753 1759 1777 1783 1787 1789 1801 18
11 1823 1831 1847 1861 1867 1871 1873 1877 1879 1889 1901 1907 1913 1931 1933 1949 1951 1973 1979 1987 1993 1997 1999 20
03 2011 2017 2027 2029 2039 2053 2063 2069 2081 2083 2087 2089 2099 2111 2113 2129 2131 2137 2141 2143 2153 2161 2179 22
03 2207 2213 2221 2237 2239 2243 2251 2267 2269 2273 2281 2287 2293 2297 2309 2311 2333 2339 2341 2347 2351 2357 2371 23
77 2381 2383 2389 2393 2399 2411 2417 2423 2437 2441 2447 2459 2467 2473 2477 2503 2521 2531 2539 2543 2549 2551 2557 25
79 2591 2593 2609 2617 2621 2633 2647 2657 2659 2663 2671 2677 2683 2687 2689 2693 2699 2707 2711 2713 2719 2729 2731 27
41 2749 2753 2767 2777 2789 2791 2801 2803 2819 2833 2837 2843 2851 2857 2861 2879 2887 2897 2903 2909 2917 2927 29
39 2953 2957 2963 2969 2971 2999 3001 3011 3019 3023 3037 3041 3049 3061 3067 3079 3083 3089 3109 3119 3121 3137 3163 31
67 3169 3181 3187 3191 3203 3209 3217 3221 3229 3251 3253 3257 3259 3271 3299 3301 3307 3313 3319 3323 3331 3343 33
47 3359 3361 3371 3373 3389 3391 3407 3413 3433 3449 3457 3461 3463 3467 3469 3491 3499 3511 3517 3527 3529 3533 3539 35
41 3547 3557 3559 3571 3581 3583 3593 3607 3613 3617 3623 3631 3637 3643 3659 3671 3673 3677 3691 3697 3701 3709 3719 37
27 3733 3739 3761 3767 3769 3779 3793 3797 3803 3821 3823 3833 3847 3851 3853 3863 3877 3881 3889 3907 3911 3917 3919 39
23 3929 3931 3943 3947 3967 3989 4001 4003 4007 4013 4019 4021 4027 4049 4049 4057 4073 4079 4091 4093 4099 4111 4127 41
29 4133 4139 4153 4157 4159 4177 4201 4211 4217 4219 4229 4231 4241 4243 4253 4259 4261 4271 4273 4283 4289 4297 4327 43
37 4339 4349 4357 4363 4373 4391 4397 4409 4421 4423 4441 4447 4451 4457 4463 4481 4483 4493 4507 4513 4517 4519 4523 45
47 4549 4561 4567 4583 4591 4597 4603 4621 4637 4639 4643 4649 4651 4657 4663 4673 4679 4691 4703 4721 4723 4729 4733 47
51 4759 4783 4787 4789 4793 4799 4801 4813 4817 4821 4861 4871 4877 4883 4893 4909 4919 4931 4933 4937 4943 4951 4957 49
67 4969 4973 4987 4993 4999 5003 5009 5011 5023 5039 5051 5059 5077 5081 5087 5099 5101 5107 5113 5119 5147 5153 51
67 5171 5179 5189 5197 5209 5227 5231 5233 5237 5261 5273 5279 5281 5297 5303 5309 5323 5333 5347 5351 5381 5387 5393 53
```

```
Microsoft Visual Studio 调试控制台 + v
1 994549 994559 994561 994571 994579 994583 994603 994621 994657 994663 994667 994691 994699 994709 994711 994717 994723
994751 994769 994793 994811 994813 994817 994831 994837 994853 994867 994871 994879 994901 994907 994913 994927 994933
994949 994963 994991 994997 995009 995023 995051 995053 995081 995117 995147 995167 995173 995219 995227 995237 9
95243 995273 995303 995327 995329 995339 995341 995347 995363 995369 995377 995381 995399 995431 995443 995447 99
5461 995471 995513 995531 995539 995549 995551 995567 995573 995587 995591 995593 995611 995623 995651 995663 995
669 995677 995699 995713 995719 995737 995747 995783 995791 995801 995833 995881 995887 995903 995909 995927 995941 995
57 995959 995983 995987 995989 996001 996001 996019 996049 996067 996103 996109 996119 996143 996157 996167 99616
9 996173 996187 996197 996209 996211 996253 996257 996263 996271 996293 996301 996311 996323 996329 996361 996367 996403
996407 996409 996431 996461 996487 996511 996529 996539 996551 996563 996571 996599 996601 996617 996629 996631 996637
996647 996649 996669 996703 996739 996763 996781 996803 996811 996841 996847 996857 996859 996871 996881 996883 996887 9
96899 996953 996967 996973 996979 997001 997013 997019 997021 997037 997043 997057 997069 997081 997091 997097 997099 99
7103 997109 997111 997121 997123 997141 997147 997151 997153 997163 997201 997207 997219 997247 997259 997267 997273 997
279 997387 997399 997401 997403 997405 997407 997409 997411 997413 997415 997417 997419 997421 997423 997425 997427 997429 997431 997433 997435 997437 997439 997441 997443 997445 997447 997449 997451 997453 997455 997457 997459 997461 997463 997465 997467 997469 997471 997473 997475 997477 997479 997481 997483 997485 997487 997489 997491 997493 997495 997497 997499 9974
41 997547 997553 997573 997583 997589 997597 997609 997627 997637 997649 997651 997663 997681 997693 997699 997727 99773
9 997741 997751 997769 997783 997793 997807 997811 997813 997817 997827 997831 997837 997841 997847 997851 997857 997863 997869 997875 997881 997887 997893 997899 997905 997911 997917 997923 997929 997935 997941 997947 997953 997961 997963 997967 997973 997979 997985 997991 998009 998017 998027 998029 998069 998071 998077 998083 998111 998117 998147 998161 998167 998197 998201
998213 998219 998237 998243 998273 998281 998287 998311 998329 998353 998377 998381 998399 998411 998419 998423 998429 99843 998443 998471 998497 998513 998527 998539 998551 998561 998617 998623 998629 998633 998651 998653 998681 998687 998689 998717 998737 998743 998749 998759 998779 998813 998819 998831 998839 998843 998857 998861 998867 998897 998909 998917 998927 998941 998947 998951 998957 998969 998983 998989 999007 999023 999029 999043 999049 999067 999083 999091 999101 9991
33 999149 999169 999181 999199 999217 999221 999233 999239 999269 999287 999307 999329 999331 999359 999371 999377 99938 999431 999433 999437 999451 999491 999521 999529 999541 999553 999563 999599 999611 999613 999623 999631 999653 999667 999671 999683 999721 999727 999749 999763 999769 999773 999809 999853 999863 999883 999907 999917 999931 999953
99959 99961 99979 99983
```

Total:

2. 编写程序计算最大公因数和最小公倍数，效果如图所示。

```
Microsoft Visual Studio 调试控制台 + v
a=9876
b=6789
gcd(a, b)=3
lcm(a, b)=22349388
```

3. 编写程序实现算术基本定理，效果如下所示。

```
Microsoft Visual Studio 调试控制台 + v
Please input n(n>0) : 888
888=2^3*3^1*37^1
```