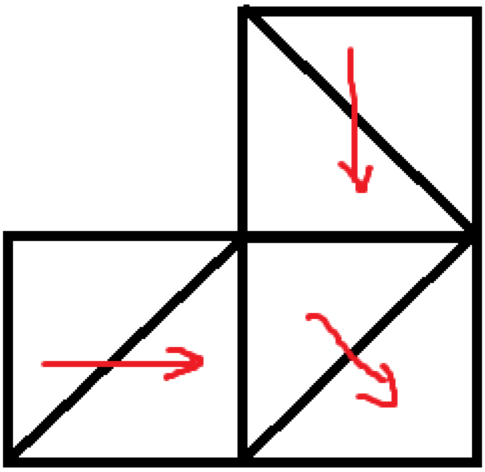
20220222省选 总结

三明治

比赛的时候没有想出怎么搜索，现在想来真是太蠢了，写了个完全没有正确性的水法，搞了个20pts。

其实已经发现了最关键的性质：若(x,y)这个格子是先删左边再删右边，那么$(x,y-1)$也是如此。但是没有想这个性质怎么用。

其实可以推广一下，格子(x,y)删除的方向也是逆过去那两个格子删除的方向，这个可以很简单的证明，用图来说明就是如下：



有了上面的性质，假如知道了一个格子删除的方向，就可以逆推为了删除这个格子而要删除的格子的删除方向，就可以dfs出所有要删的格子。

再观察一下，就可以知道对于一行的格子，如果(x,y)是从左往右删，那么要先删$(x,y-1)$并且方向也是从左往右，以此类推，左边的都是如此（这个就是上面的性质的应用），所以为了删除(x,y)而要删除的格子的集合肯定包含为了删除$(x,y-1)$而删除的格子的集合，那么根据这个dfs就是$O(n^3)$的，从右往左也是类似，这样就求出答案了。

呵呵

看到生成树计数，第一思路是矩阵树定理，但是发现$\prod_{i=1}^n d_i$这个权无法放进去计数，所以换一个思路，根据$\prod_{i=1}^n d_i$这个形式容易想到prufer序列。

根据prufer序列的各种性质，可以知道当各点的度数为d_i时，生成树有$\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n (d_i-1)!}$种，但是这个是没有重边的，这题点与点之间选的边不同是有区别的，这看起来似乎比较难计算，但是仔细观察可知：若i,j在选则方案中练了边，那么要乘上$w_i w_j$，发现各部分之间都是用乘法连接，所以可以交换顺序和合并，最后可以发现w_i会计算d_i次，所以一个合法的度数序列对应的生成树个数与权一并的计数为$\prod_{i=1}^n d_i \prod_{i=1}^n w_i^{d_i} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n (d_i-1)!}$。这个可以把与$d_i$有关的合在一起算，那么就可以$O(n^3)$的dp出来。

考虑把它优化成$O(n^2)$的dp。

$$\sum_{\sum_{i=1}^n d_i=2n-2,\forall 1\le i\le n,d_i\ge 1}\prod_{i=1}^n d_iw_i^{d_i}\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n(d_i-1)!}$$
$$(n-2)!\prod_{i=1}^n w_i\sum_{\sum_{i=1}^n d_i=n-2,\forall 1\le i\le n,d_i\ge 0}\prod_{i=1}^n\frac{(d_i+1)w_i^{d_i}}{d_i!}$$

这一步是把d_i先减一，使其取得范围是非负数，这个范围更大更全较易化简，还有就是把无关的项提出去，减少计算量。

下面关于不写的d的限制就是同上，然后把(d_i+1)这种东西拆开，对于各个单项式分别算。

$$\sum_d\prod_{i=1}^n\frac{(d_i+1)w_i^{d_i}}{d_i!}$$
$$\sum_d\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_k\le n,0\le k\le n}\prod_{i=1}^k d_{p_i}\prod_{i=1}^n\frac{w_i^{d_i}}{d_i!}$$
$$\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_k\le n,0\le k\le n}\sum_{\sum d=n-2-k}\prod_{i=1}^k w_{p_i}\prod_{i=1}^n\frac{w_i^{d_i}}{d_i!}$$

这个就是把p和d交换求和顺序，并且把提出来的d_{p_i}和分母上的阶乘抵消，但是为了好看还是把d_{p_i}减一，同时把少算的w_{p_i}提出来。

下面是把$\prod w$给提到外面，因为和d无关，剩下的部分看着比较像指数生成函数。

不妨把后面的$\sum_{\sum d=n-2-k}\prod_{i=1}^n\frac{w_i^{d_i}}{d_i!}$用生成函数来推，对于每个$i$，其生成函数就是$F_i(x)=\sum_{j\ge 0}\frac{w_i^jx^j}{j!}=e^{w_ix}$，那么前面的和式就是$[x^{n-2-k}]\prod_{i=1}^n F_i(x)$，也就是要求$[x^{n-2-k}]e^{(\sum w)x}$，展开就是$\frac{(\sum w)^{n-2-k}}{(n-2-k)}!$，所以最后答案就是如下式子：

$$\sum_{k\ge 0}\sum_p\left(\prod w_{p_i}\frac{(\sum w)^{n-2-k}}{(n-2-k)}\right)$$

这个就可以$O(n^2)$的dp了。

回转寿司

考场上想用线段树上的暴力骗分，没想到数据这么强。

从部分分入手，可以发现对于$\forall i,s_i=1,t_i=n$的情况每次被换出来的数就是现在的最大值。

正解是分块，如果一个块从来都没有被当作散块来查询，那么其实块内的数到底在什么位置是不重要的，只需要用上面的做法即可维护，但是现实显然不能这么美好，所以要考虑当被当散块来处理时应该怎样重构。

把每次的查询的p挂在这个区间上作为tag，那么当要重构时，把这些p放入小根堆中，从前往后扫这个区间，那么显然第一个位置会尝试和这些p中的最小值做交换，如果可以就把最小的p放在第一个位置上，把第一个位置上的数放入堆中，这个正确性比较好证明。

那么分析复杂度，假设分的块长度为B，那么查询的复杂度就是$O(q\frac{n}{B}\log\frac{n}{B})$，散块重构的复杂度是$O(qB\log q)$，当$B=\sqrt{n}$时时可以的，但由于$n,q$有一些不同且各部分的常数不一样，所以把块长调大似乎会快一些?