

# 傅里叶变换

刘润

2020 年 5 月 11 日

## 1 三角函数正交性

### 1.1 三角函数系集合

以下是三角函数的集合：

$\{0(\sin 0x), 1(\cos 0x), \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots\}$

### 1.2 正交

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = 0 \quad n \neq m \quad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = 0 \quad n \neq m \quad (2)$$

三角函数的正交性可以通过积化和差公式来证明。

## 2 周期为“ $2\pi$ ”的函数展开为傅里叶级数

周期为  $2\pi$  的函数表示为  $f(x) = f(x + 2\pi)$ 。由傅里叶级数可知，任何一个满足狄利赫里条件的周期信号都可以分解为直流分量和许多的正弦、余弦分量，这些正余弦分量的频率是基频  $f_1$  的整数倍，用公式表达即为：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \sin nx \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx \end{aligned} \quad (3)$$

i. 找  $a_0$ ：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx dx \quad (4)$$

由于  $\sin nx$  和  $\cos nx$  在  $-\pi, \pi$  周期内积分都为 0, 所以原式即为:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \end{aligned} \quad (5)$$

如果  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ , 则  $f(x)$  表达式为:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) \quad (6)$$

ii. 找  $a_n$  和  $b_n$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \cos mx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx \cdot \cos mx dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx \cdot \cos mx dx \end{aligned} \quad (7)$$

根据三角函数的正交性和周期性, 该式在  $m = n$  时  $\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx \cdot \cos mx dx$  项不等于 0, 则该式为:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cdot \cos nx \cdot \cos nx dx \\ &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx \\ &= a_n \cdot \pi \end{aligned} \quad (8)$$

则:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx \quad (9)$$

同理可得:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx \quad (10)$$

所以周期为 “ $2\pi$ ” 的周期函数的傅里叶级数表达式为:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x + 2\pi) \quad T = 2\pi \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) \\
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx
\end{aligned} \tag{11}$$

### 3 周期为“ $2L$ ”的函数展开为傅里叶级数

函数周期为“ $2L$ ”可以表示为  $f(t) = f(t + 2L)$ ，使用“换元法”得到周期为  $2\pi$  的函数。具体做法为，设换元之后的变量为  $x$ ，则  $x$  关于  $t$  的表达式为  $x = \frac{\pi}{L}t$ ，则  $t = \frac{L}{\pi}x$ ，所以  $f(t) = f(\frac{L}{\pi}x) = g(x)$ 。

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) \tag{12}$$

将  $x = \frac{\pi}{L}t$  带入公式之后，可以得到  $\cos nx = \cos \frac{n\pi}{L}t$ ， $\sin nx = \sin \frac{n\pi}{L}t$ ， $\int_{-\pi}^{\pi} dx = \int_{-L}^L \frac{\pi}{L} dt$ ，由此可以得到：

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{L} \int_{-L}^L f(t) dt = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \tag{13}$$

综上可得：

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos \frac{n\pi}{L}t + b_n \cdot \sin \frac{n\pi}{L}t) \\
a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cdot \cos \frac{n\pi}{L}t dt \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cdot \sin \frac{n\pi}{L}t dt
\end{aligned} \tag{14}$$

在工程中， $t$  一般从 0 开始，周期为  $T = 2L$ ， $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}$ ，所以  $\int_{-L}^L dt \rightarrow \int_0^{2L} dt \rightarrow \int_0^T dt$ 。所以：

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \\
a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^T f(t) dt \\
a_n &= \frac{2}{L} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t dt \\
b_n &= \frac{2}{L} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t dt
\end{aligned} \tag{15}$$

当  $T \rightarrow \infty$ ,  $f(t)$  不是周期函数, 此时的变换即为傅里叶变换。

## 4 傅里叶级数的复数形式

根据欧拉公式可得:

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\
\cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
\sin\theta &= -\frac{1}{2}i(e^{i\theta} - e^{-i\theta})
\end{aligned} \tag{16}$$

将上式带入 (15) 式可得:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \frac{1}{2}(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) - \frac{1}{2}ib_n \cdot (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t})] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega t}
\end{aligned} \tag{17}$$

如果对于上式第三项中  $n \rightarrow -n$ , 则:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{in\omega t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}
\end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ \frac{a_n - ib_n}{2} & n > 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases} \tag{19}$$

在已知  $a_n$  和  $b_n$  的情况下, 可以推出  $c_n$  的公式:

$$c_{n=0} = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (20)$$

$$\begin{aligned} c_{n>0} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t dt - i \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (\cos n\omega t - i \sin n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) [\cos(-n\omega t) + i \sin(-n\omega t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} c_{n<0} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(-n\omega t) dt + i \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot (-\sin n\omega t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) [\cos(-n\omega t) + i \sin(-n\omega t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt \end{aligned} \quad (22)$$

所以上式可以使用一个式子表达, 一个周期为  $T$  的周期函数展开为傅里叶级数, 其复数形式为:

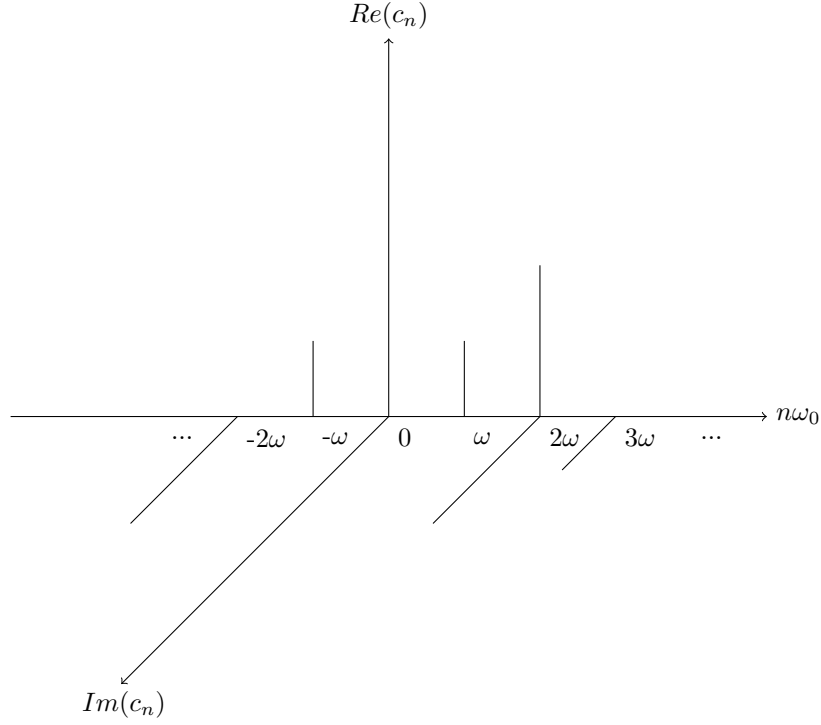
$$\begin{cases} f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega t} \\ c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \end{cases} \quad (23)$$

## 5 傅里叶变换

由上一节可知, 周期函数  $f(t) = f(t+T)$  的傅里叶级数可以由下表示:

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega_0 t} \\ c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \end{cases} \quad (24)$$

其中  $\omega_0$  是基频率, 上式表明, 在不同的基频率的倍数上, 函数具有在复平面上的振幅, 具体可见下图:



上图的意义为，周期函数就是一系列频率为其基频倍数的信号的组合。对于非周期函数，可以视为  $T \rightarrow \infty$  的周期函数，即  $\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t)$ 。则  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ ，所以不同频率点之间会靠的越来越近，离散的形式变成了连续的形式。此时的  $\omega_0$  也变成了  $\Delta\omega$ ， $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ 。

$$\begin{aligned}
 f_T(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cdot e^{-in\omega_0 t} dt e^{in\omega_0 t} \\
 &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cdot e^{-in\omega_0 t} dt e^{in\omega_0 t}
 \end{aligned} \tag{25}$$

由于  $T \rightarrow \infty$ ，所以  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dt$ ，将离散频率点变成连续频域之后，变量也从  $n\omega_0$  变成  $\omega$ ，所以  $\sum_{-\infty}^{\infty} \Delta\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$ 。综上，原式变为：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega \tag{26}$$

$$\begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt & FT \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega & IFT \end{cases} \tag{27}$$

以上即为傅里叶正反变换公式。

## 6 知识点总结

对于傅里叶变换的公式推导，主要的知识点逻辑线为：三角函数正交性，周期为“ $2\pi$ ”的周期函数展开为傅里叶级数，周期为“ $2L$ ”的周期函数展开为傅里叶级数，傅里叶级数复指数表达形式，非周期函数的傅里叶变换。由 1-5 小节又可得到下面的表格：

时域		频域
连续周期	→ 傅里叶级数	→ 离散非周期
连续非周期	→ 傅里叶变换	→ 连续非周期

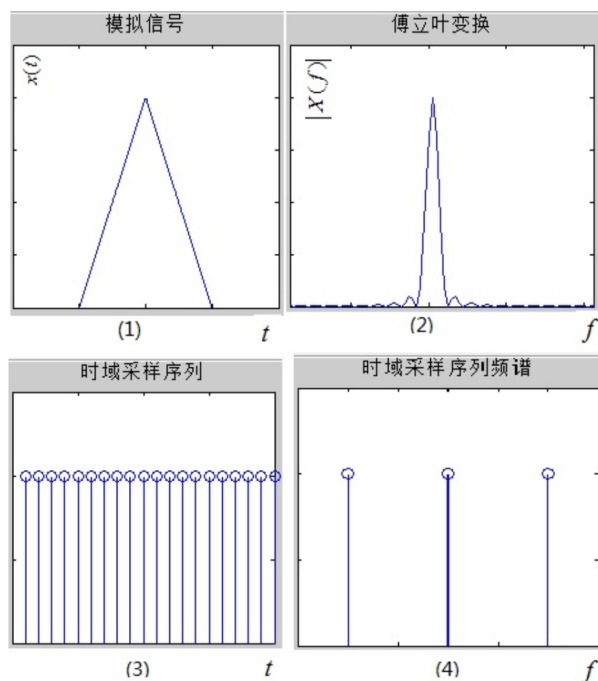
## 7 DTFT、DFT、DFS 感性认识

首先需要了解到，通过时域卷积和频域卷积定理我们可以得到两个性质：

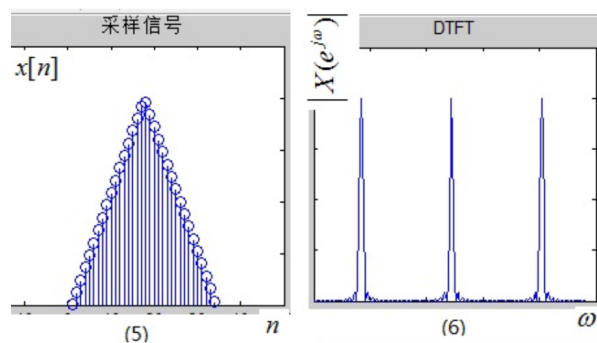
1. 在一个域的相乘等于在另一个域的卷积；
2. 在一个域中与脉冲信号的卷积，就是在另一个域中对波形的镜像。

具体的证明可见任何一本信号与系统书籍。

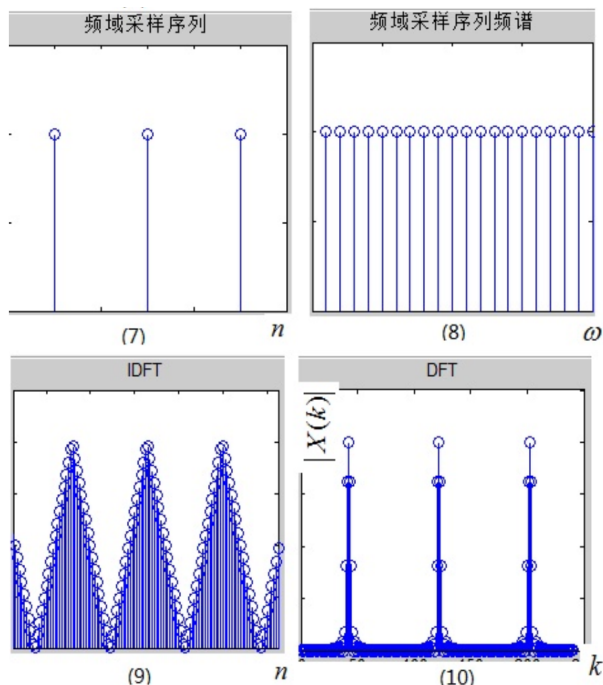
通过 FT(傅里叶变换) 已经可以得到非周期连续信号的频谱，但是计算机只可以处理数字信号。所以首先需要将原时域连续信号离散化，即在时域对其采样，该采样信号的频谱也是一系列脉冲信号。所谓时域采样，就是在时域对两个信号进行相乘。图 (1) 和图 (3) 相乘之后就可以得到离散信号  $x[n]$ ，如图 (5) 所示。



由前面的性质 1 可得，时域相乘等同于频域卷积，那么图 (2) 和图 (4) 的卷积由性质 2 可知会在各个脉冲点出现镜像，于是得到图 (6)。它就是图 (5) 所示的离散时间信号  $x[n]$  的傅里叶变换，即 DTFT(离散时间傅里叶变换)。这里强调的是**离散时间**四个字，注意此时时域是离散的，频域依然是连续的。



因为频域连续且周期循环，所以计算机依然不能计算，所以自然想到在频域进行采样，这样时域、频域都离散。频域采样的信号频谱如图 (8) 所示，其在时域的波形如图 (7) 所示。若在频域采样，即是在频域相乘，得到图 (10)，根据性质 1、2，频域相乘，将在时域进行卷积，并且在脉冲点进行镜像重复，所以得到图 (9)。



截取图 (10) 周期序列的主值序列，记为  $X(k)$ ，它就是序列  $x[n]$  的 DFT(离散傅里叶变换)。可见，DFT 就是为了计算机处理方便，在频域对 DTFT 进行采



样并截取主值而已。对图 (10) 进行 IDFT, 得到的是原离散序列  $x[n]$  的周期性延拓, 对  $n$  的取值区间进行限制, 取该延拓的主值区间, 得到的就是原序列信号。

DFS(离散傅里叶序列) 是针对于时域周期信号提出的, 如果对图 (9) 这样的离散周期信号进行 DFS, 就会得到图 (10), 只要截取其主值区间, 则与 DFT 是完全的一一对应的精确关系, 所以 DFS 和 DFT 本质上是完全一样的, 只不过描述的方法不一样而已。

## 8 DTFT、DFT、DFS 公式推导

序列的傅里叶变换也称为离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, 缩写为 DTFT), 通常用以下符号分别表示对  $x(n)$  取傅里叶正变换或逆变换:

$$\begin{aligned} DTFT[x(n)] &= X(e^{j\omega}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} IDTFT[X(e^{j\omega})] &= x(n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \end{aligned} \quad (29)$$

$X(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的复函数, 可以表示为:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)} \\ &= Re[X(e^{j\omega})] + jIm[X(e^{j\omega})] \end{aligned} \quad (30)$$

$X(e^{j\omega})$  表示  $x(n)$  的频域特性, 也称为  $x(n)$  的频谱,  $|X(e^{j\omega})|$  为幅度谱,  $\varphi(\omega)$  为相位谱, 二者都是  $\omega$  的连续函数。由于  $e^{j\omega}$  是变量  $\omega$  以  $2\pi$  为周期的周期函数, 所以  $x(n)$  的频谱都是周期的。

在进一步分析中, 需要引入一些符号说明:  $t$ : 连续时间变量

$x(t)$ : 连续时间函数

$T_s$ : 抽样时间间隔

$T_1$ : 函数  $x(t)$  的周期

$n$ :  $x(t)$  的样本序号

$x(nT_s)$ : 离散时间函数

$f$ : 连续频率变量

$X(f)$ :  $x(t)$  的傅里叶变换

$f_1$ : 抽样频率间隔

$f_s$ : 函数  $X(f)$  的周期

$k$ :  $X(f)$  的样点序号

$X(kf_1)$ : 离散频率函数

$N$ : 在  $0 \leq t < T_1$  之内的抽样数, 也等于  $0 \leq f < f_s$  之内的抽样数。

傅里叶级数公式如下:

$$DFS[x_p(n)] = X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)W^{nk} \quad (31)$$

$$IDFS[X_p(k)] = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)W^{-nk} \quad (32)$$

其中符号  $W$  或者  $W_N$  代表的是  $W = W_N = e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$ ,  $W^{nk}$  表示的就是  $W^{nk} = W_N^{nk} = e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk}$ , 其中  $n$  表示的是时域信号的序列,  $k$  表示的是频域值的序列。  
 $x_p(n)$  代表的是  $n$  点非周期序列的周期延拓, 变成离散非周期序列。

这里给出有限长序列离散傅里叶变换的定义。设有限长序列  $x(n)$  长度为  $N$  (在  $0 \leq n < N-1$  范围内), 它的离散傅里叶变换  $X(k)$  任然是一个长度为  $N$  (在  $0 \leq k < N-1$  范围内) 的频域有限长序列, 正逆变换的关系式为:

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk} \quad (33)$$

$$(0 \leq k < N-1)$$

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W^{-nk} \quad (34)$$

$$(0 \leq n < N-1)$$

比较 DFT 变换对于 DFS 变换对的表达式不难发现,  $W^{nk}$  代表的意义是一致的, 并且只要把  $x(n)$ ,  $X(k)$  分别理解为  $x_p(n)$ ,  $X_p(k)$  的主值序列, 那么, 两种变换对的表达式是完全相同的。实际上, DFS 是按照傅里叶分析严格定义的, 而我们规定的 DFT 是一种工程上的形式, 是为了计算方便。有限长序列  $x(n)$  是非周期的, 故其傅里叶变换应当是连续、周期性的频率函数, 现在人为地把  $x(n)$  周期延拓成  $x_p(n)$ , 使  $x(n)$  充当其主值序列, 于是  $x_p(n)$  的变换式  $X_p(k)$  就成为离散、周期性的频率函数, 借用  $X_p(k)$  的主值序列  $X(k)$  定义为“离散傅里叶变换 (DFT)”, 这样做的主要目的是使傅里叶分析可以利用计算机。其变换公式也可以变成如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^{1 \times 1} & W^{2 \times 1} & \dots & W^{(N-1) \times 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W^0 & W^{1 \times (N-1)} & W^{2 \times (N-1)} & \dots & W^{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (35)$$

和

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^{-1 \times 1} & W^{-1 \times 2} & \dots & W^{-1 \times (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W^0 & W^{-(N-1) \times 1} & W^{-(N-1) \times 2} & \dots & W^{-(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} \quad (36)$$

简写作

$$\begin{aligned} X(K) &= W^{nk} x(n) \\ x(n) &= \frac{1}{N} W^{-nk} X(k) \end{aligned} \quad (37)$$

由此可以看出离散傅里叶变换的特点：所谓  $N$  点 DFT 实质上就是时域信号一个周期内有  $N$  个点，在变换时与  $N \times N$  矩阵进行相乘，得到的任然是  $N$  个频域的值。这个矩阵包含实数域和虚数域的信息。时域离散信号经过 DTFT 之后，选取频域部分的主值部分得到频域的数值。经过  $N$  点 DTFT 之后，得到频域  $N$  点的数值。频域的数值是复数，复数的特殊性质可以表示幅值和相位，即对数值点进行取模操作和相位变化操作。把  $N$  点数值都进行取模和求相位之后，可以得到幅度谱和相位谱。具体可见式 (30)

下面给出 DFT 实例应用，利用矩阵表示法求  $x(n) = R_4(n)$  的 DFT。再由所得  $X(k)$  经 IDFT 反求  $x(n)$ ，验证结果的正确性。

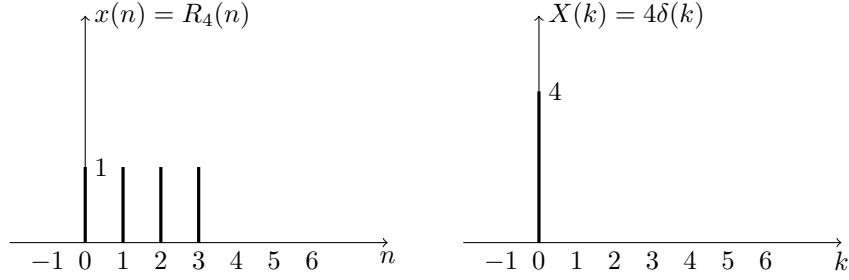
由  $N = 4$  得到  $W = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

再求逆变换

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3} \\ W^0 & W^{-2} & W^{-4} & W^{-6} \\ W^0 & W^{-3} & W^{-6} & W^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

下图就是其时域图和频域图。



## 9 FFT 原理

对于  $N$  的 DFT，输入的  $N$  点时域离散数据需要和一个  $N \times N$  矩阵进行相乘，得到  $N$  点的离散频域数值，所以需要  $N^2$  次复数乘法 and  $N(N-1)$  次复数加法。在计算中，我们注意到对于固定了  $N$  数值的 DFT，其  $W = e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$  是一个定值，并且对于不同的  $nk, W^{nk}$  可能会有相同的数值，这样就为我们简化运算提供了可能。所以接下来证明 DFT 运算公式的周期性和对称性。

### 9.1 周期性和对称性

#### 9.1.1 $W^{nk}$ 的周期性

由于  $W = e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$ ，所以可以看出，该公式是以  $N$  为周期的旋转因子，所以有：

$$W^{nk} = W^{((nk))_N} \quad (40)$$

符号  $((nk))_N$  表示  $nk$  除以  $N$  所得之余数，也就是  $nk$  的模  $N$  运算。同理可得：

$$\begin{aligned} W^{n(N-k)} &= W^{-nk} \\ W^{k(N-n)} &= W^{-nk} \end{aligned} \quad (41)$$

#### 9.1.2 $W^{nk}$ 的对称性

因为  $W^{\frac{N}{2}} = -1$ ，所以可以得到：

$$W^{(nk + \frac{N}{2})} = -W^{nk} \quad (42)$$

### 9.2 DFT 运算的分解

首先将  $N$  点的 DFT 运算分解为两组  $\frac{N}{2}$  的 DFT 运算，然后取和。对于序列  $x(n)$  取  $N$  点 DFT，假定  $N$  是 2 的整数次方，即  $N = 2^M$ ，其中  $M$  是正整数。把  $x(n)$  的 DFT 运算按照  $n$  为偶数和  $n$  为奇数分解为两个部分，即：

$$\begin{aligned}
X(k) &= DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \\
&= \sum_{\text{偶数 } n} x(n)W_N^{nk} + \sum_{\text{奇数 } n} x(n)W_N^{nk}
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)(W_N^2)^{rk} \\
&\quad (0 \leq r \leq \frac{N}{2} - 1)
\end{aligned} \tag{44}$$

式中的  $W_N^2$  可以转化为  $W_{\frac{N}{2}}$ ，这是因为：

$$W_N^2 = e^{-j(\frac{2\pi}{N})2} = e^{-j(\frac{2\pi}{\frac{N}{2}})} = W_{\frac{N}{2}} \tag{45}$$

所以式 (44) 可以写成：

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)(W_{\frac{N}{2}})^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)(W_{\frac{N}{2}})^{rk} \\
&= G(k) + W_N^k H(k)
\end{aligned} \tag{46}$$

式中

$$\begin{aligned}
G(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)(W_{\frac{N}{2}})^{rk} \\
H(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)(W_{\frac{N}{2}})^{rk}
\end{aligned} \tag{47}$$

其中  $G(k)$  和  $H(k)$  都是  $\frac{N}{2}$  点的 DFT，所以一个  $N$  点的 DFT 被分解成了两个  $\frac{N}{2}$  的 DFT。但是需要注意的是  $G(k)$  和  $H(k)$  都只有  $\frac{N}{2}$  个点，即  $r = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ ，但是  $X(k)$  需要的是  $N$  个点，即  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ，如果使用  $G(k)$  和  $H(k)$  表达全部  $X(k)$ ，应该利用  $G(k)$  和  $H(k)$  的周期性，由周期性可知：

$$\begin{aligned}
G(k + \frac{N}{2}) &= G(k) \\
H(k + \frac{N}{2}) &= H(k)
\end{aligned} \tag{48}$$

并且对于  $W_N$  有：

$$W_N^{\frac{N}{2}+k} = W_N^{\frac{N}{2}} \cdot W_N^k = -W_N^k \tag{49}$$

所以综上可得：

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} X\left(\frac{N}{2} + k\right) &= G\left(\frac{N}{2} + k\right) - W_N^k H\left(\frac{N}{2} + k\right) \\ &= G(k) - W_N^k H(k) \end{aligned} \quad (51)$$

其中  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ，式 (50) 和式 (51) 分别给出了  $X(k)$  的前  $\frac{N}{2}$  点和后  $\frac{N}{2}$  的数值，总共有  $N$  个数值。为便于理解，再次使用  $N = 4$  为例解释，此时有：

$$\begin{cases} X(0) = G(0) + W_4^0 H(0) \\ X(1) = G(1) + W_4^1 H(1) \\ X(2) = G(0) - W_4^0 H(0) \\ X(3) = G(1) - W_4^1 H(1) \end{cases} \quad (52)$$

可以使用流程图来进行表示，如图 1 所示，自左向右进行计算，两条线的汇合点表示两个数值相加，线旁标注加权系数（复数  $W$ ），表示与相应的数值作乘法运算。在这种流程图中，基本运算单元呈现蝴蝶型，例如图 2(a)。初看上去，一个蝴蝶型流程运算包括两次复数乘法和两次复数加法，然而这里有重复，可以简化。 $H(0)$  与  $W_4^0$  相乘，可以改成只和  $W_4^0$  相乘，再分别进行加减，这样就是运算量减少至只有一次复数乘法和两次复数加（减）法。按此原理可把图 2(a) 所示的蝶形运算表示为图 2(b) 所示的蝶形结，此图的含义是：入端的  $H(0)$  先于  $W_4^0$  相乘，再与入端的  $G(0)$  分别进行加减运算，得到输出  $X(0)$  和  $X(2)$ 。所以，我们可以得到如下结论：由  $G(k)$  和  $H(k)$  获得  $X(k)$  的过程中，共包括  $\frac{N}{2}$  个蝶形运算，因此，共需要  $\frac{N}{2}$  次复数乘法和  $N$  次复数加减法（对于  $N = 4$ ，为 2 次乘法，4 次加法）。

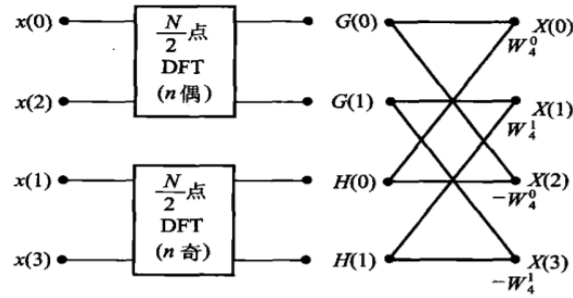


图 1: 将  $N$  点 DFT 分解为两个  $\frac{N}{2}$  点 DFT 的流程图 ( $N=4$ )

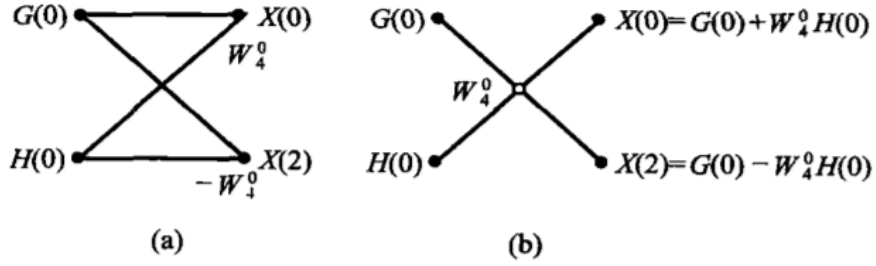


图 2: 蝶形运算单元

由图 1 可以看出，为了从  $x(n)$  中求出  $G(k)$  和  $H(k)$ ，按照  $n$  的奇偶性分别组合两个  $\frac{N}{2}$  的 DFT 运算，利用式 (47) 可得：

$$\begin{cases} G(0) = x(0) + W_2^0 x(2) \\ G(1) = x(0) - W_2^0 x(2) \\ H(0) = x(1) + W_2^0 x(3) \\ H(1) = x(1) - W_2^0 x(3) \end{cases} \quad (53)$$

按照同样原理，把这些运算也画成蝶形图，于是图 1 可以具体化图 3(在此图中省略了加权系数  $W_2$  的小标，以  $w$  表示，下面继续用此简化符号)。

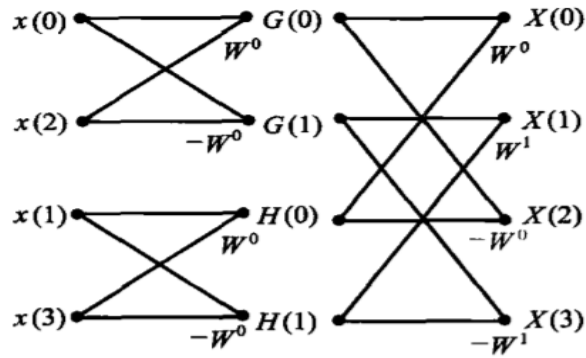


图 3: N=4 的 FFT 流程图

很明显，左半边的流程图，由式 (53) 可以看出需要 2 次乘法和四次加减法。即左半边流程图仍然由  $\frac{N}{2}$  个蝶形结组成，因此，运算量还是  $\frac{N}{2}$  次乘法， $N$  次加法。右半边的流程图，由式 (52) 可得需要 2 次乘法和四次加减法。这样，完成图 3 的运算需要  $2 \times \frac{N}{2} = 4$  次乘法和  $2 \times N = 8$  次加法。所以可以看出，经过分组简化后构成的快速算法其运算量显著减少。

对于  $N = 2^2 = 4$  的情况，只进行了一次奇偶分解，把全部运算过程分为了两级蝶形流程图（即图 3 的左右两级）。对于  $N = 2^M$  的任意情况，可将这种奇偶分解逐级进行下去。当  $N = 2^3 = 8$  时，分组运算的方框图如图 4。按照同样原理，把它画成蝶形流程图如图 5 所示。这里，共分成了三级蝶形运算。每组需要  $\frac{N}{2}$  乘法和  $N$  次加减法。全部运算量是  $3 \times \frac{N}{2} = 12$  次乘法， $3 \times N = 24$  次加减法；而直接 DFT 运算量是  $N^2 = 64$  次乘法和  $N(N-1) = 56$  次加法。

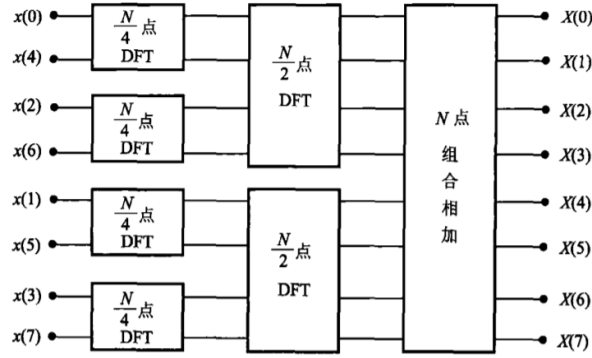


图 4:  $N=8$  的 DFT 运算逐级分解为两个  $\frac{N}{2}$ 、四个  $\frac{N}{4}$  点的 DFT 运算

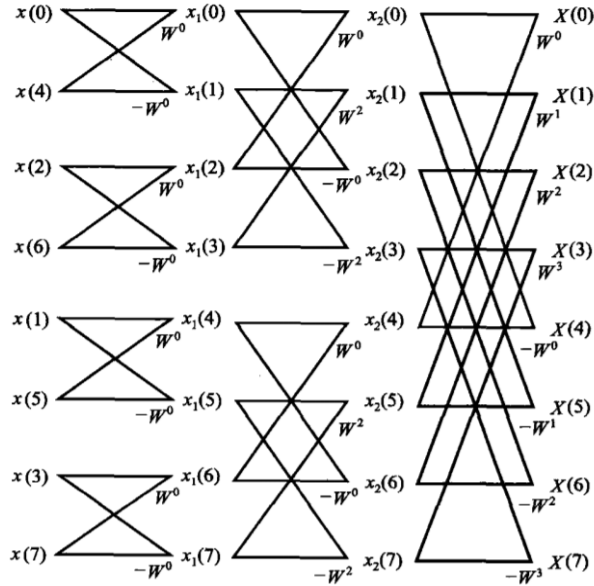


图 5:  $N=8$  的 FFT 流程图

所以可以给出 FFT 计算量的通用公式：当  $N = 2^M$  时，由于每一级按照奇偶性分类的特性，全部 DFT 运算可以分解为  $M$  级蝶形流程图；因为每一级加减运



算的运算数有重复, 可见式 (52), 所以其中每级都包含  $\frac{N}{2}$  乘法; 由于每一级输出都为  $N$ , 所以每一级有  $N$  次加减法。综上, 快速算法的全部运算工作量为:

复数乘法:  $\frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2} \log_2 N$  次

复数加法:  $NM = N \log_2 N$  次

而原始的直接 DFT 方法需要:

复数乘法:  $N^2$  次

复数加法:  $N(N-1)$  次

对此, 我们可以对 FFT 的规律总结如下:

- (1) 全部计算分解为  $M$  级 (也称  $M$  次迭代)。
- (2) 输入序列  $x(n)$  按码位倒读顺序排列, 输出序列  $X(k)$  按自然顺序排列。
- (3) 每级 (每次迭代) 都包含  $\frac{N}{2}$  个蝶形单元, 但其几何图形各不相同。自左向右第 1 级的  $\frac{N}{2}$  个蝶形单元分布为  $\frac{N}{2}$  个“群”, 第 2 级则分为  $\frac{N}{4}$  个“群”, ..., 第  $i$  级则分为  $\frac{N}{2^i}$  个“群”, ..., 最后一级只有  $\frac{N}{2^M}$  个, 也即一个“群”。
- (4) 每个蝶形单元都包含  $W^{nk}$  和  $W^{-nk}$  的运算 (简化为乘  $W^{nk}$  与加减法各一次)。
- (5) 同一级中的各个“群”的系数  $W$  分布规律完全相同。
- (6) 各级的  $W$  分布顺序自上而下按如下规律排列:

第 1 级:  $W_N^0$

第 2 级:  $W_N^0, W_N^{\frac{N}{4}}$

第 3 级:  $W_N^0, W_N^{\frac{N}{8}}, W_N^{\frac{2N}{8}}, W_N^{\frac{3N}{8}}$

.....

第  $i$  级:  $W_N^0, W_N^{\frac{N}{2^i}}, W_N^{\frac{2N}{2^i}}, \dots, W_N^{(2^{i-1}-1)\frac{N}{2^i}}$

.....

第  $M$  级:  $W_N^0, W_N^1, W_N^2, W_N^3, \dots, W_N^{\frac{N}{2}-1}$

对于 (6) 我们需要进行一点说明, 在图 5 中, 按照公式第 2 级运算的系数应该是  $W_4^0$  和  $W_4^1$ , 但是图中却为  $W^0$  和  $W^2$ , 这是因为图中已经将系数  $W$  全部转换为以 8 为基准, 即  $W_8$ , 所以图中系数实质上是  $W_8^0$  和  $W_8^2$ 。如规律 (6) 所示, 因为由式 (45) 可得:

$$W_{\frac{N}{2}}^n = e^{-j(\frac{2\pi}{N})n} = e^{-j(\frac{2\pi}{N})2n} = W_N^{2n} \quad (54)$$

所以我们可以得到  $W_4^1 = W_8^2$ , 在图 3 中也是如此。