第五章

整 数 规 划

第 1 节

整数规划问题的提出

问题提出

- 在某些场合下的线性规划问题，要求解必须为整数，称为整数规划
  - 纯整数规划
  - 混合整数规划
  - 0-1规划

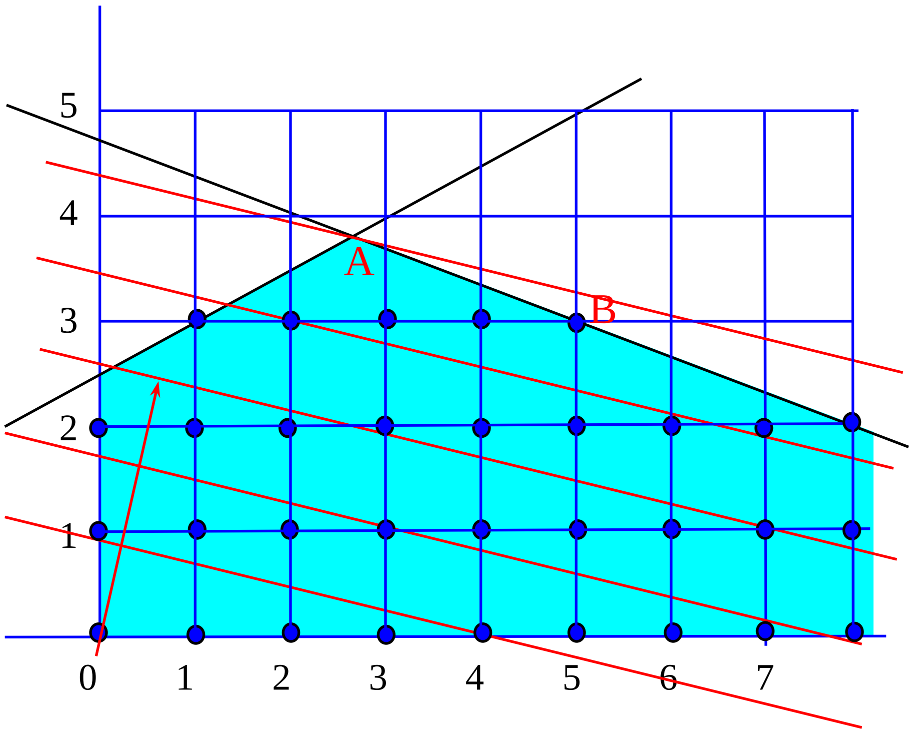
$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \; & x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 14x_1 + 42x_2 \le 196 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 5 \\
& x_1, \; x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

x_1、x_2为非负整数

例子

线性规划的最优解位于A点（2.6，3.8），最优解的目标函数值为z=17.8

整数规划的最优解位于B点（5，3），最优解的目标函数值为z=17



注：简单地将线性规划的非整数的最优解，用四舍五入或舍去尾数的办法得到整数解，一般情况下并不能得到整数规划的最优解。

第 2 节

分支定界法

分支定界法（Branch & Bound）

- 对于可行域有界的整数规划问题，可以使用穷举法。但当规模一大，穷举法不可行。
  - n项任务指派n个人完成，方案有 n! 种

- 60‘s Land Doig, Dakin 提出分支定界法
  - 给出目标值的上下界，逐步去掉分支，并修正上下界，直到获得最优解
  - 对于最大化IP问题，对应线性规划问题LP

例子

求解IP问题 A： $\max Z = x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且全为整数} \end{cases}$$

对应的LP问题 B： $\max Z = x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

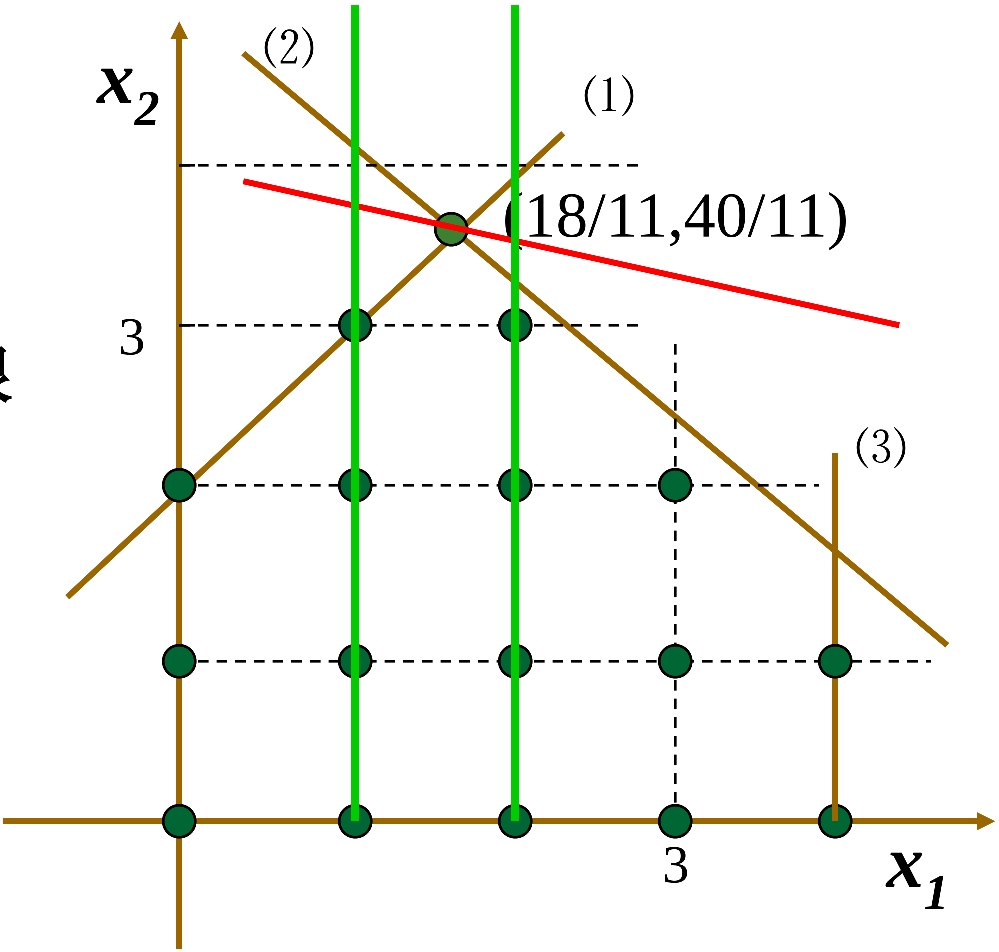
LP问题解

最优解：

$x_1 = 18/11$， $x_2 = 40/11$

$Z^{(0)} = 218/11 \approx 19.8$

即$Z^{(0)}$是（IP）最大值的上限



x_1 非整数

取 $x_1 \leqslant 1$， $x_1 \geqslant 2$

先将（LP）划分为

（LP1）和（LP2）

一次划分

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(\text{IP1})\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

$$\min Z = x_1 + 5x_2$$

$$(\text{IP2})\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

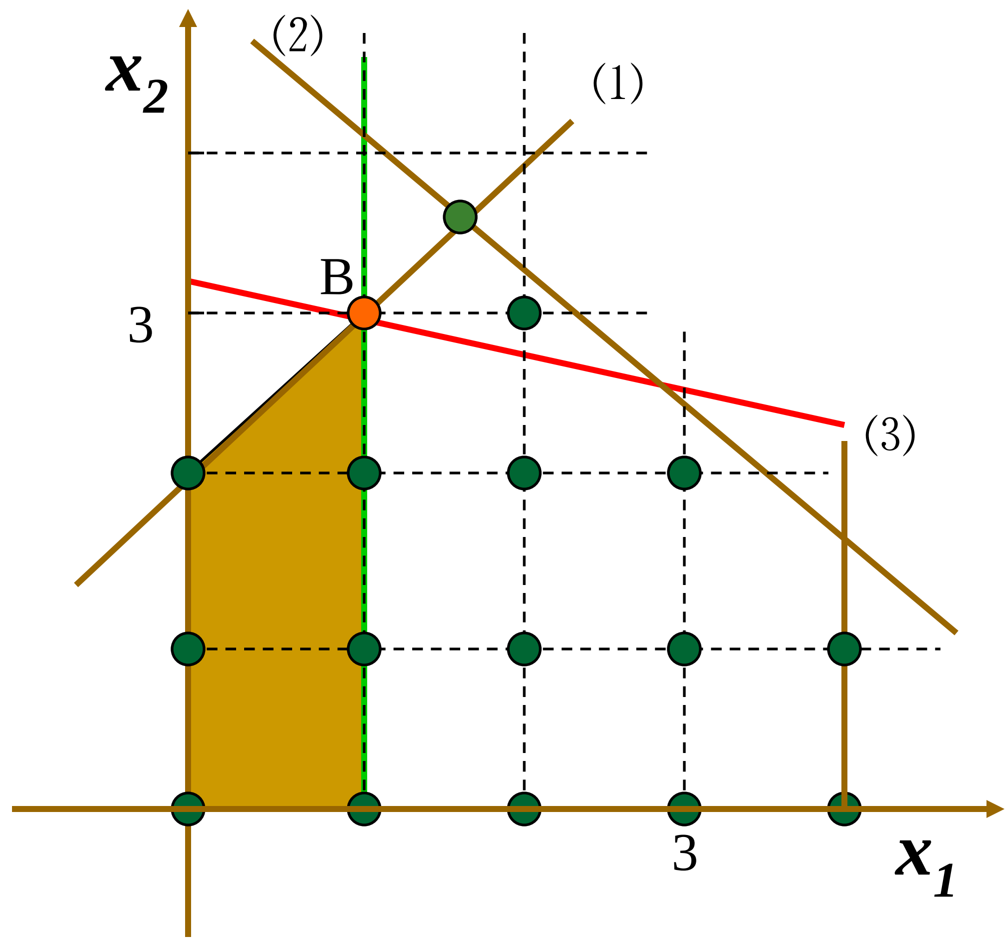
注：划分不影响原（IP）问题的最优解

LP1 的解

先求（LP1）,如图所示。
此时B 在点取得最优解。

$x_1=1, x_2=3, Z^{(1)}=16$

找到整数解，问题已探明，
此支停止计算



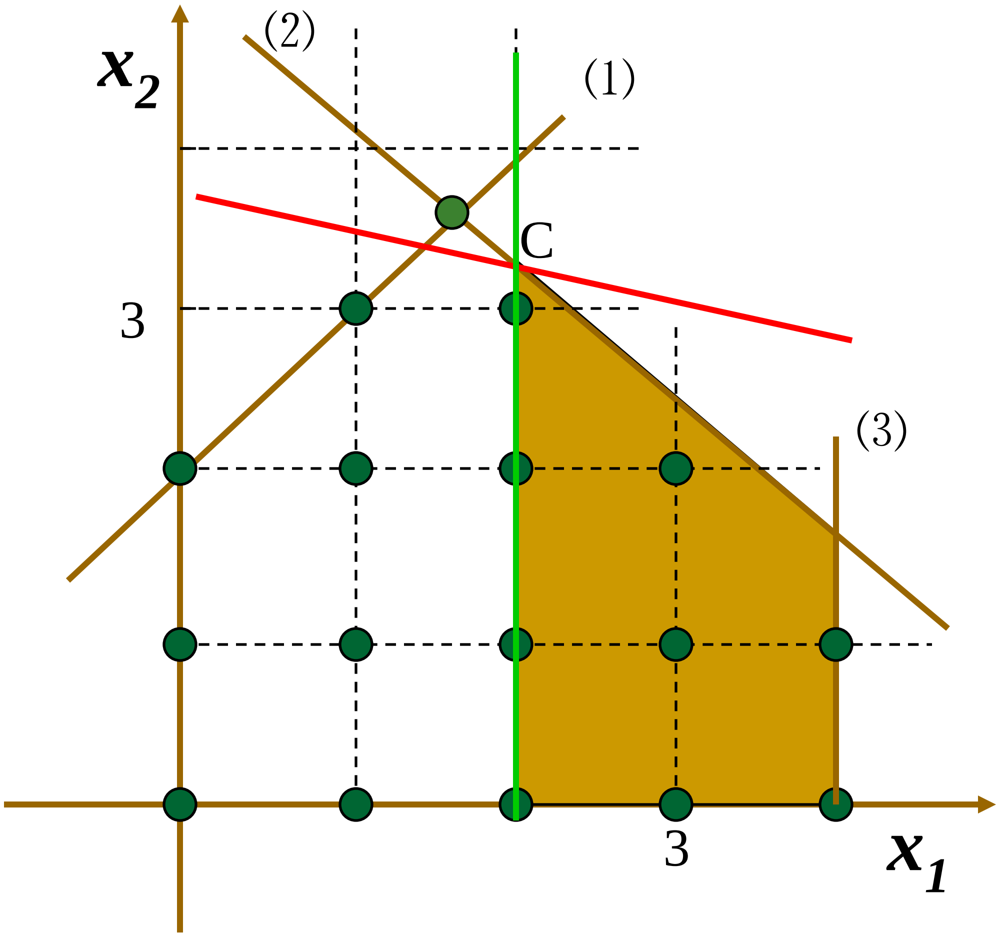
LP2 的解

再求（LP2）,如图所示。

此时C在点取得最优解。

$x_1=2$, $x_2=10/3$,

$Z^{(2)}=56/3\approx 18.7$



$Z^{(2)} > Z^{(1)}$

x_2 不是整数，加入条件$x_2\leqslant 3$，$x_2\geqslant 4$

将（LP2）继续划分为(LP3)，(LP4)

LP3 与 LP4

(LP4) 无可行解，不再分支

再求 (LP3)，在D点取最优值

$x_1 = 12/5 \approx 2.4$, $x_2 = 3$,

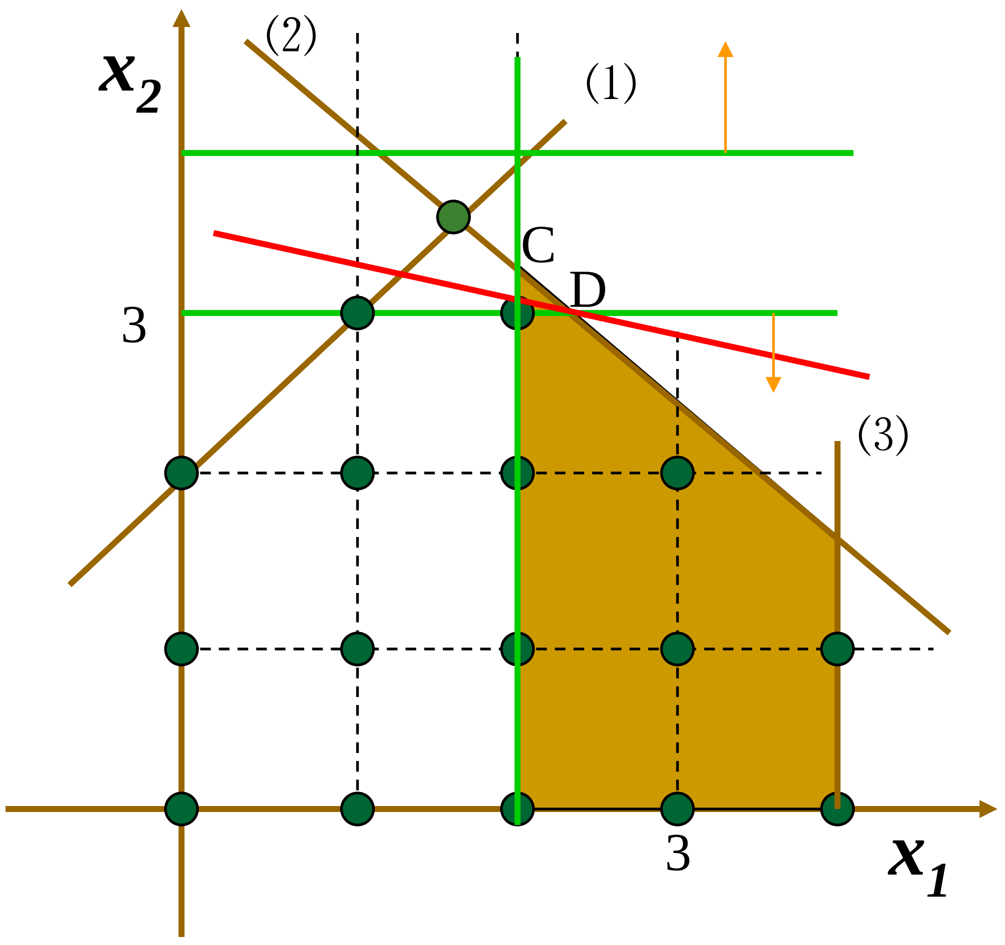
$Z^{(3)} = 87/5 \approx 17.4$

$Z^{(3)} > Z^{(1)} = 16$

但$x_1 = 12/5$不是整数，可继续分枝。

即$x_1 \le 2$, $x_1 \ge 3$

划为 (LP5)，(LP6)。



LP5 与 LP6

（ LP5 ），如 图 所 示：
在E点取得最优解。

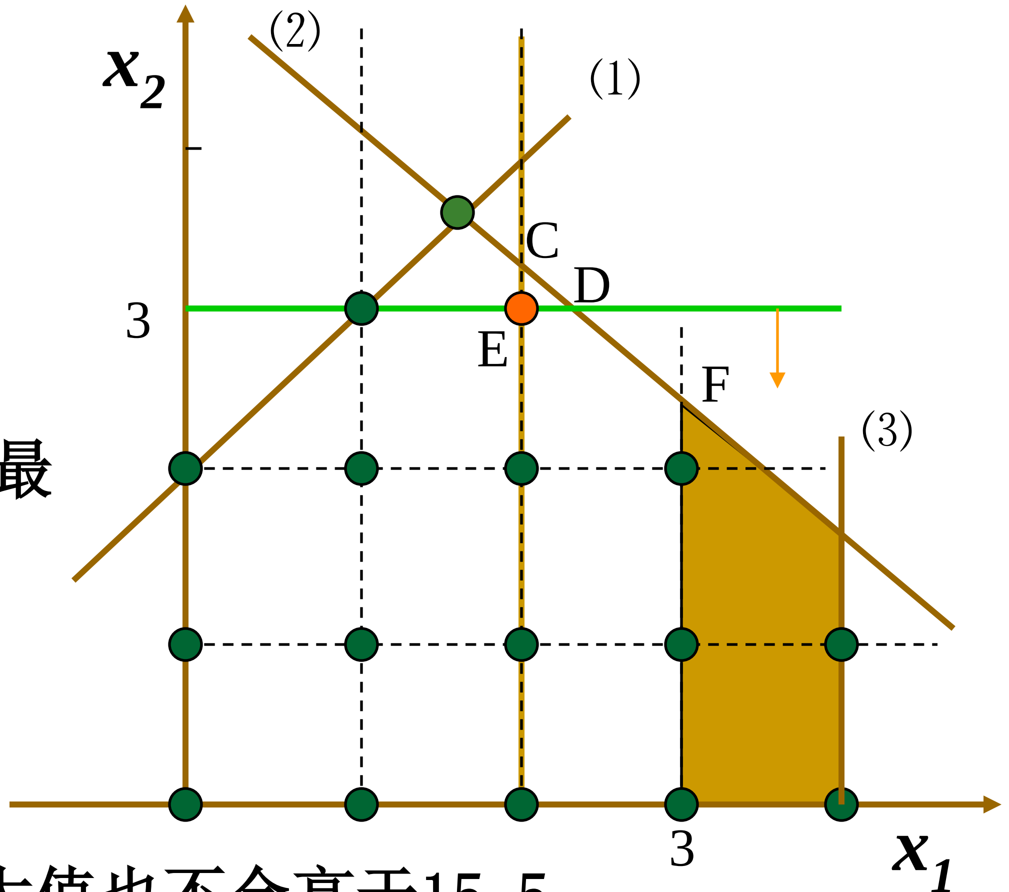
$x_1=2, x_2=3, Z^{(5)}=17$

找到整数解，问题已探明，
此枝停止计算。

再求（LP6），在F点取得最优解。

$x_1=3, x_2=2.5,$

$Z^{(6)}=31/2\approx 15.5 < Z^{(5)}$



如对 $Z^{(6)}$ 继续分解，其最大值也不会高于15. 5 ，问题探明，剪枝。

计算步骤

1. 求解伴随规划问题B，可能的情况有：
   - B没有可行解，这时A也没有可行解，停止
   - B有最优解，且符合A的整数条件，则也是A的最优解，停止
   - B有最优解，但不符合A的整数条件，记它的目标函数值为z*
2. 利用观察法找出A的一个整数可行解，求得目标函数值 $\underline{z}$, 则A的最优解z满足 $\underline{z} \leq z \leq z^*$,进行迭代:

分支

- 在B的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为b_j，
- 构造两个约束条件$x_j \le [b_j]$ 和 $x_j \ge [b_j]+1$，加入问题 B，得到两个分枝B_1和B_2，求解

定界

- 在各分枝的解中，找出最优目标函数值最大者，更新为上界z^*
- 在符合整数条件的解中，找出目标函数值最大者，更新为下界$\underline{z}$

比较与剪支

- 最优目标函数小于$\underline{z}$者，剪掉，以后不予考虑

- 若大于$\underline{z}$，且不符合整数条件，则重复分支定界

- 过程重复，直到$z^*=\underline{z}$

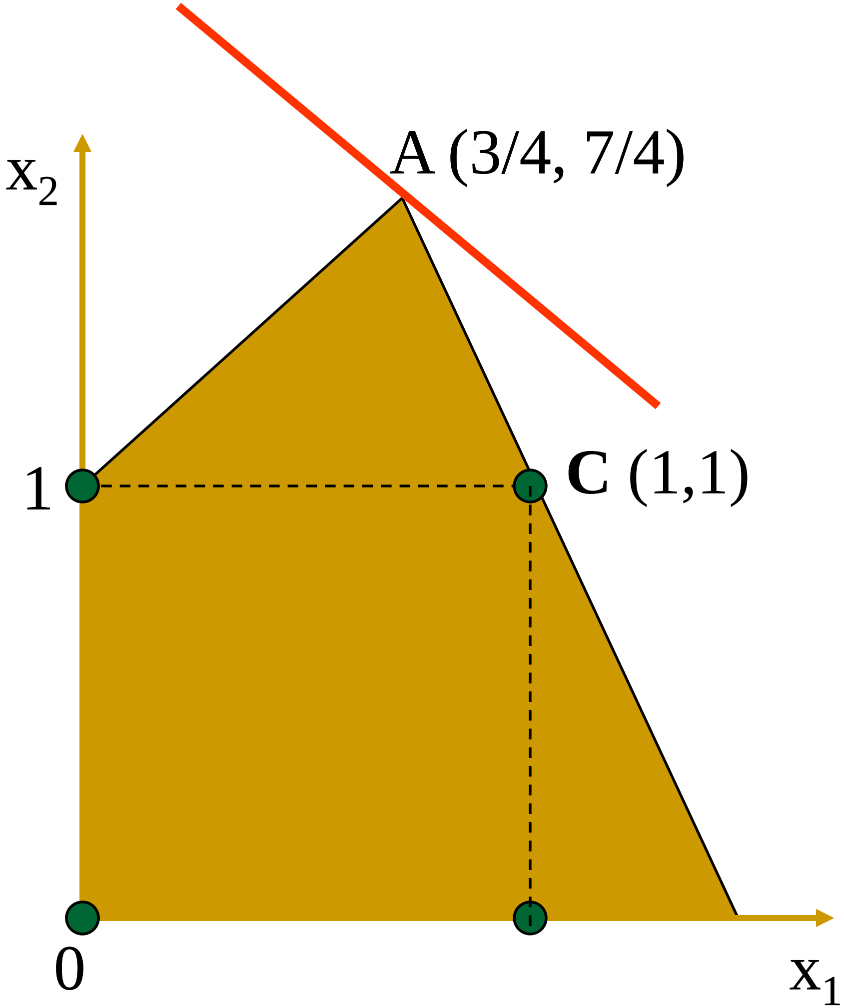
第 3 节

割平面解法

例子

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



对应松弛问题的最优解：

x_1=3/4

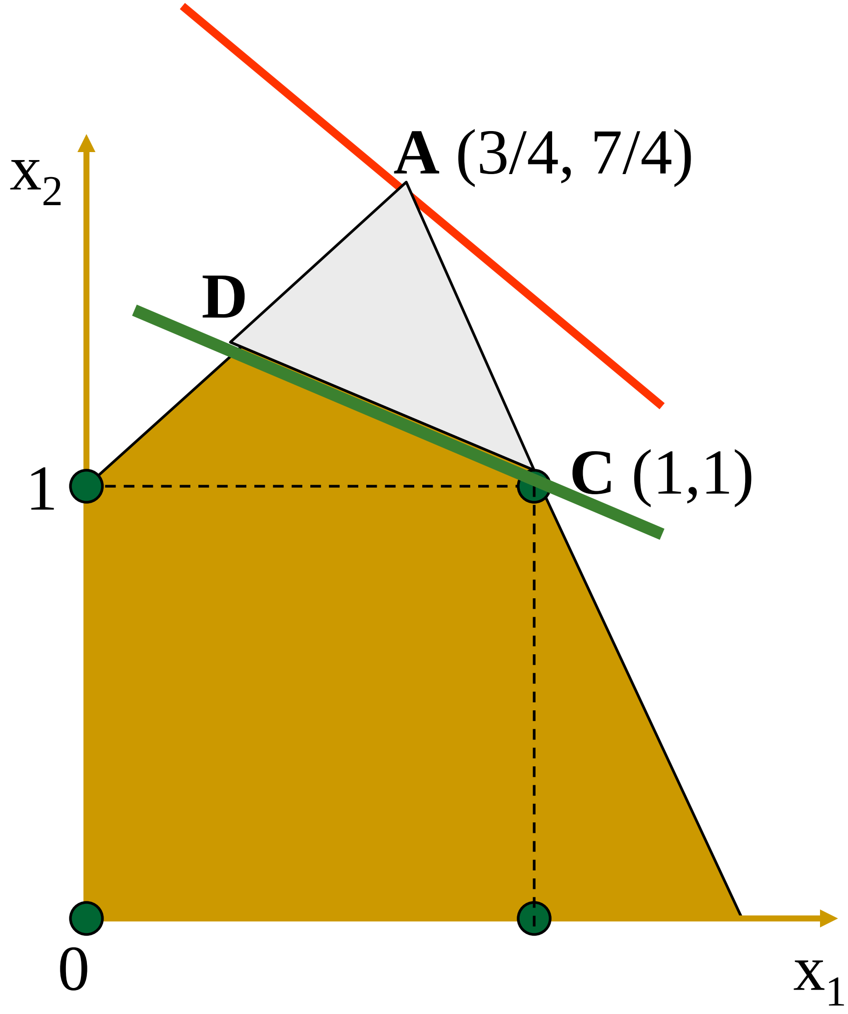
x_2=7/4

Z=10/4

例子

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



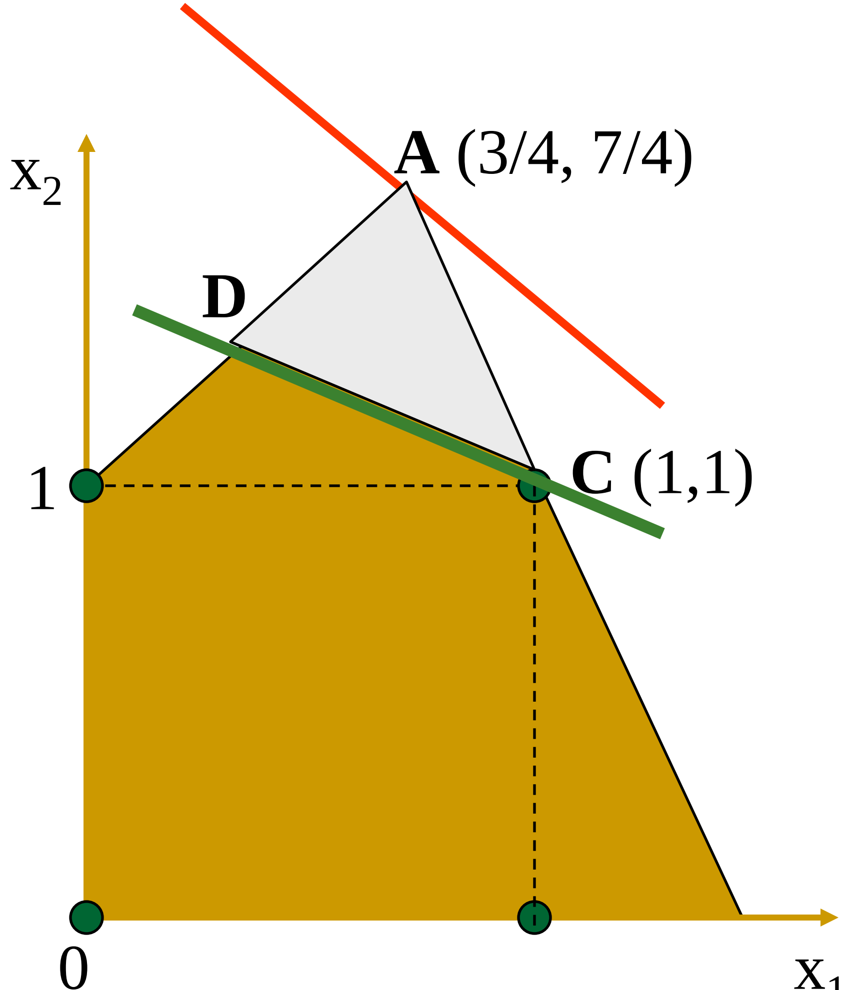
加上约束 CD之后，松弛问题最优解为C点，恰好为整数解。

CD称为割平面。

例子

1、割去了非整数最优解

2、没有切割掉整数解



加上约束 CD之后，松弛问题最优解为C点，恰好为整数解。

CD称为割平面。

如何求得割平面？

最终单纯形表

C_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
$-Z$		-5/2	0	0	-1/2	-1/2

有：$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$　　　移项，得：

整数

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right) \geq 0 \quad \leq 0$$

即切割方程：　$-3x_3 - x_4 \leq -3$，加入上表计算

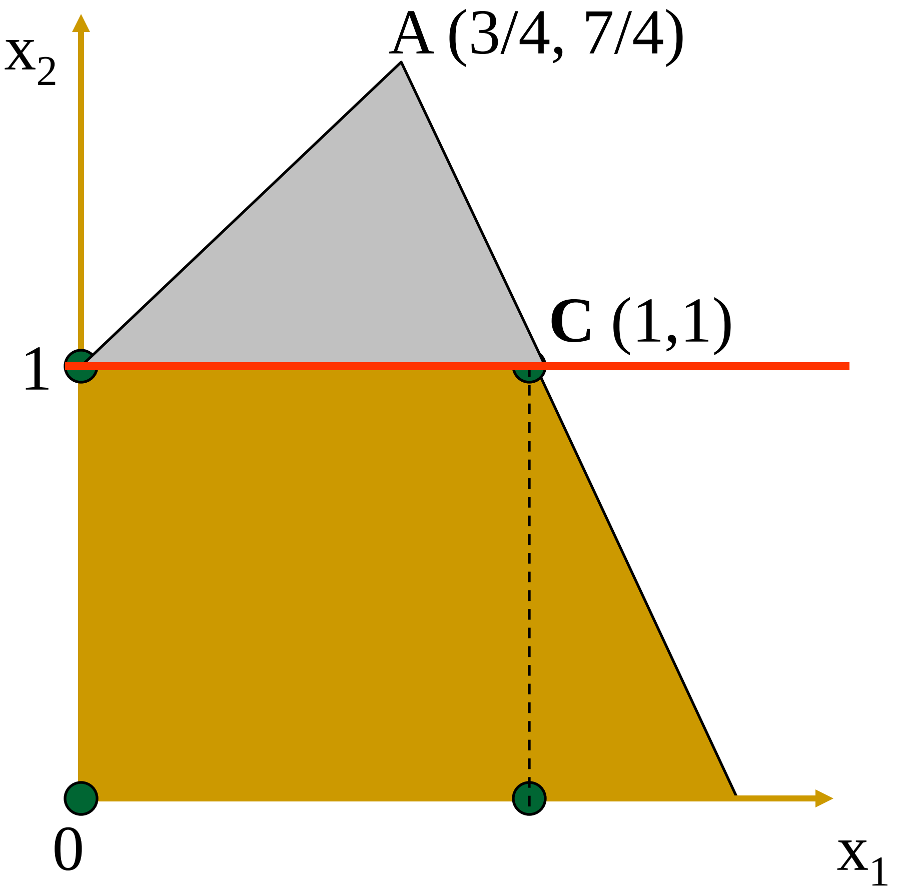
加入切割方程

由对偶单纯形法得最优解：

$x_1=1$

$x_2=1$

获得了整数解！



计算步骤

1. 用单纯形法求解(IP)对应的松弛问题(LP)：

   (1). 若(LP)没有可行解，则(IP)也没有可行解，停止计算。

   (2). 若(LP)有最优解，并符合(IP)的整数条件，则即为(IP)的最优解，停止计算。

   (3). 若(LP)有最优解，但不符合(IP)的整数条件，转入下一步。

计算步骤

2. 从(LP)的最优解中，任选一个不为整数的分量 x_r,由最优单纯形表得： $x_r + \sum_j a_{rj} x_j = b_r$

将系数 a_{rj} 和 b_r 分解为整数部分和小数部分之和，作割平面方程：

$$\underbrace{f_r}_{b_r\text{ 的小数部分}} - \sum_{j=m+1}^{n} \underbrace{f_{rj}}_{a_{rj}\text{的小数部分}} x_j \le 0$$

注：割平面方程不唯一！

计算步骤

3. 将所得的割平面方程作为一个新的约束条件置于最优单纯形表中，用对偶单纯形法求出新的最优解，返回1。

注1:　割平面未必一步求得！

注2：由于收敛不快，至今应用很少，可与分支定界法配合使用。

第 4 节

0—1型整数规划

相互排斥的计划

- 拟从7个位置A_i(i=1,2…7)选择建立东、西、南三区门市部。规定：
  - 在东区，由A_1, A_2, A_3三处至多选择两处；
  - 在西区，由A_4, A_5两处至少选择一处；
  - 在南区，由A_6, A_7两处至少选择一处。
  - 选用A_i点，投资为b_i元，获利 c_i元
  - 投资总额不超过 B 元
- 问应如何选择使年利润最大?

相互排斥的约束条件

- 某厂用车运和船运两种方式运送甲乙两种货物，每箱体积、重量、利润及限制条件如下表：

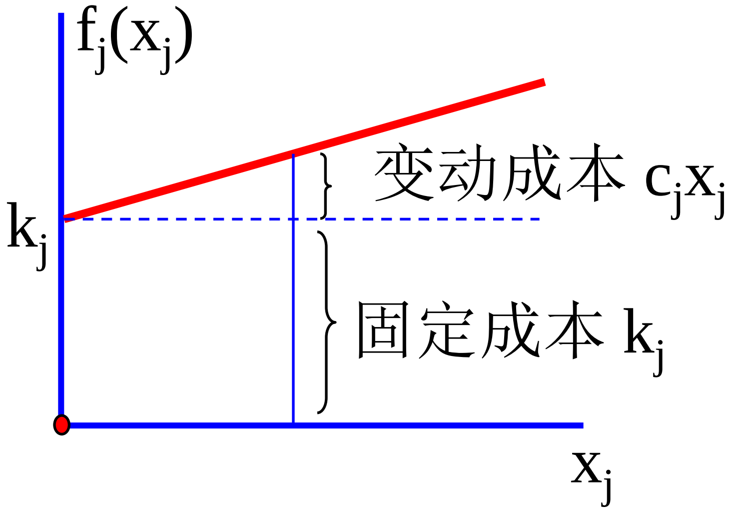
	体积 (车)	体积 (船)	重量	利润
甲	5	7	2	20
乙	4	3	5	10
限制	24	45	13	

- 运送方式相互排斥，如何构造约束条件？
  - 推广至m个互相排斥的约束条件？

固定费用问题

- **设第 j 种设备（j=1，2，…，n）运行的固定成本为k_j，运行的变动成本为 c_j，则生产成本与产量 x_j 的关系为**

$$f_j(x_j)=\begin{cases} 0 & \text{当} x_j = 0 \\ k_j + c_j x_j & \text{当} x_j > 0 \end{cases}$$



隐枚举法

- **0-1规划取值特殊，考虑枚举**
  - 数量为 2^n，n较大时不可行
- 只检查取值组合的一部分
  - 建立过滤条件
  - 模型标准化，建立隐枚举树

例子

$$\max Z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 3 & (3) \\ 4x_2 + x_3 \le 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0\text{或}1 \end{cases}$$

x_1. x_2. x_3	(1)	(2)	(3)	(4)	是∨ 否×	Z 值
(0. 0. 0)	0	0	0	0	∨	0
(0. 0. 1)	−1	1	0	1	∨	5
(0. 1. 0)	2	4	1	4	∨	−2
(1. 0. 0)	1	1	1	0	∨	3
(0. 1. 1)	1	5	1	5	∨	3
(1. 0. 1)	0	2	1	1	∨	8
(1. 1. 0)	3				×	
(1. 1. 1)	2	6			×	

改进

$$\max Z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 3 & (3) \\ 4x_2 + x_3 \le 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0或1 \end{cases}$$

加入约束:

$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \ge 5$

x_1. x_2. x_3	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	是∨ 否×	Z 值
(0. 0. 0)	0	0	0	0	0	∨	0
(0. 0. 1)	5	−1	1	0	1	∨	5
(0. 1. 0)	−2					×	
(1. 0. 0)	3					×	
(0. 1. 1)	3					×	
(1. 0. 1)	8	0	2	1	1	∨	8
(1. 1. 0)	1					×	
(1. 1. 1)	4					×	

第 5 节

指派问题

问题提出

设 n 个人被分配去做 n 件工作，已知第 i 个人去做第 j 件工作所需时间为 c_{ij} (i=1.2…n; j=1.2…n) 并假设$c_{ij}\geq 0$。

问应如何分配才能使所用时间最少？

- n条航线，指派n艘船运输，总收入最大？
- 一种特殊的运输问题

问题提出

设 n 个人被分配去做 n 件工作，已知第 i 个人去做第 j 件工作所需时间为 c_{ij} (i=1.2…n; j=1.2…n) 并假设 $c_{ij} \geq 0$。

设决策变量

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{分配第} i \text{个人去做第} j \text{件工作} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

数学模型：

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1.2.\cdots.n) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1.2.\cdots.n) \\ x_{ij} = 0\text{或}1 (i, j = 1.2.\cdots.n) \end{cases}$$

匈牙利法

- 库恩(W.W. Kuhn)于1955年提出
- 从系数矩阵(c_{ij})的一行各元素减去a，得到新的矩阵(b_{ij})，那么以(b_{ij})为系数矩阵求得的最优解和原系数矩阵求得的最优解相同
  - 若乘上一个常数呢？
- 变换系数矩阵，使得在不同行不同列中至少有一个零元素（独立0元素）
  - 令对应独立0元素位置 $x_{ij}=1$, 其余 $x_{ij}=0$，得到最优分配方案

第一步

- 变换系数矩阵，使各行各列都出现0元素

1. 每行元素减去该行的最小元素
2. 再每列元素减去该列的最小元素

第二步

- 试求最优解（寻找n个独立0元素）
  1. 由零元素最少的行（或列）开始，圈出一个零元素，用◎表示
  2. 划去同行同列的其他零元素，用Ø表示
  3. 重复1、2，直至无法再划

- 若得到 n个◎，则得到了最优解：对应◎位置 $x_{ij}=1$, 其余 $x_{ij}=0$
- 若圈出的◎数目不够n个

为何未能找到n个◎？

- 没找对？
  - 回第二步重新试探
- 找不到？
  - 重新变换系数矩阵

- 关键：当前矩阵的独立0元素最多个数？
  - 康尼格：该数目等于能覆盖所有0元素的最少直线数。

第三步

- 作最少直线覆盖所有零元素

1. 对没有◎的行打√
2. 对打√行上所有含Ø元素的列打√
3. 再对打√的列含◎元素的行打√
4. 重复2,3直到得不出新的打√的行、列为止
5. 对没有打√的行画横线，打√的列画纵线，即得到覆盖所有0元素的最少直线数 l

- 若$l=n$，返回第二步
- 若$l<n$，转第四步

第四步

- 变换矩阵增加0元素

1. 在没有被直线覆盖的部分找出最小元素
2. 在打√ 行各元素都减去这个最小元素
3. 在打√列各元素都加上这个最小元素（保证原0元素不变）
4. 新系数矩阵若得到n个独立0元素，求解完成；否则，回第三步。

进一步讨论

- 某个系数$c_{ij}<0$？
  - 变换系数矩阵，使得$c_{ij}\geq 0$
- 求目标函数最大值问题?
  - 系数取反，转化为最小值问题
- n个任务分配给m个人员的问题?
  - 类似产销不平衡问题处理