（同济线性代数）

lecture0、行列式

行列式性质

记:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

- 行列式与它的转置行列式相等，即$D=D^T$

  行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立
- 互换行列式的两行（列），行列式变号，$D=-D$
- 如果行列式两行（列）完全相同，行列式为 零
- 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个倍数k，等于k乘以此行列式 。

  $$D1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=kD$$
- 行列式的某一行（列）中的所有元素的公因子可以提到 行列式 符号的外面
- 行列式中如果有两行（列）的元素成比例，则此行列式 为零
- 行列式的某一行（列）的元素都是两数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- 行列式的某一行（列）的各个元素乘以同一个倍数，然后加到另一个行（列）对应的元素上去，行列式不变。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

余子式和代数余子式

余子式：

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划走后，留下来的n-1阶行列式解开叫做元素a_{ij}的**余子式**，记作M_{ij}。

代数余子式：

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的代数余子式。

【引理】：

一个n阶行列式，如果其中第i行的所有元素除a_{ij}外都是零，那么这个行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的成绩，即$D=a_{ij}A_{ij}$。

行列式按行（列）展开法则

【定理】：

行列式等于它的任意一row（column）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即：

$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$

【推论】:

行列式任意一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即:

$D = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0\ (i \neq j)$

克拉默法则

如果线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式不等于零,即:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n} \neq 0$$

那么线性方程组(1)有解,并且解唯一,解可以表示成:

$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$ (2)

其中D_j是把系数行列式D中的第j列的元素用方程组右端的常数项代替后得到的n阶行列式,即:

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

关于克拉默法则的等价说法:

- 如果线性方程组(1)系数行列式不等于零 ,则该线性方程组一定有解 ,而且解唯一
- 如果线性方程组无解或有两个或以上的不同解,则它的系数行列式比为零

齐次和非齐次线性方程组

假设线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

常数项全为零的线性方程组称为齐次线性方程组，否则称为非齐次线性方程组。

齐次线性方程组总有解，（0，0，……，0）就是一个解，称为**零解**，即一定有零解，不一定有非零解。

【定理】:

- 如果齐次线性方程组的系数行列式$D \neq 0$，则齐次方程组只有零解，没有非零解（**充要条件**）
- 如果齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式必定为零

lecture1、矩阵

概念

- 两个矩阵的行数相等，列数相等， 称为同型矩阵
- 两个矩阵$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$是同型矩阵，并且对应的元素相等，即$a_{ij} = bij(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$

  称：矩阵A和矩阵B相等，A=B
- 不同型的零矩阵不相等

矩阵运算

1. 加法

   全部的对应元素相加（和行列式不同）

   必须是同型矩阵才能进行加法运算

2. 数与矩阵相乘

   数λ与矩阵A相乘，则λ与矩阵A的所有元素相乘

3. 矩阵与矩阵相乘

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

【结论】：

- 只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘。
- 矩阵乘法运算不一定满足交换律
- $A\neq 0, B\neq 0$,可以有$AB=0$；但是不能由$AB=0$得出$A=0$或者$B=0$

【运算规律】：

- 乘法结合律
- 数乘和乘法结合律
- 乘法对加法的结合律
- 单位矩阵在矩阵乘法中的作用相当于1
- 矩阵的幂：

  若A时n阶方阵，定义：$A^k=\underbrace{AA\ldots A}_{k}$，显然有：

  $A^kA^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl}$

矩阵的转置

定义：矩阵A的行换成同序数的列得到新的矩阵，记为A^T。

性质：

- $(A^T)^T=A$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(\lambda A)^T=\lambda A^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$

对称阵

定义：设A为n阶方阵。若满足$A=A^T$,即$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\ldots,n)$，称为**对称矩阵。**

若$A=-A^T$，矩阵A称为反对称阵。

方阵的行列式

定义：由n阶方阵的元素组成的行列式，称为方阵A的行列式，记为|A|或detA。

性质：

- $|A^T|=|A|$
- $|\lambda A|=\lambda^n|A|$
- $|AB|=|A||B|$
- $|AB|=|BA|$,其中A,B必须为同阶方阵。

伴随矩阵

定义：

行列式|A|的各个元素的**代数余子式** A_{ij}所构成的如下矩阵：

$$A^*=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

注 意 ：a_{ij}的 代 数 余 子 式 A_{ij}位 于 第 j行 第 i列

称为矩阵A的伴随矩阵。

性质：

$AA^*=A^*A=|A|E$

> *proof:*
>
> $$AA^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
> $$=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}=|A|E$$
>
> *其中:*
>
> *行列式等于它的任意一row（column）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即:*

> $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \ (i = 1, 2, \ldots, n) = |A|$
>
> *行列式任意一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即：*
>
> $D = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \ (i \neq j)$

共轭矩阵

定义：

$A = (a_{ij})$为复数矩阵，用$\overline{a_{ij}}$表示a_{ij}的共轭复数，记：$\overline{A} = \overline{a_{ij}}$

$\overline{A}$表示为A的共轭矩阵。

性质：

假设A,B为复矩阵，λ为复数，且运算都是可行的，有：

- $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$
- $\overline{\lambda A} = \overline{\lambda} + \overline{A}$
- $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$

逆矩阵

定义：

n阶**方阵**A可逆，如果有n阶方阵B，使得：

$AB = BA = E_n(\text{或} \ I_n)$

其中$E_n(\text{或} \ I_n)$是n阶单位矩阵。

矩阵B称为A的逆矩阵，记为：A^{-1}。

注意：

- 必须是方阵，才能进行矩阵乘法，满足上式
- 对于任意的n阶方阵A，适合上述等式的矩阵B是唯一的（如果存在的话）

逆矩阵求法

结论：

$AA^* = A^*A = |A|E$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

定理：

若$|A| \neq 0$,则方阵A可逆，并且：$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

推论：

若$|A| \neq 0$,则：$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

说明：

$|A| \neq 0 \iff 方阵A可逆$

此时，矩阵A称为**非奇异矩阵**

定理：

方阵A可逆，则$|A| \neq 0$，有:对于n阶方阵A,B，若满足$AB = E$，那么A,B都是可逆矩阵，并且互为逆矩阵。

推论：

如果n阶方阵A,B可逆，那么$A^{-1}, A^T, \lambda A(\lambda \neq 0)$与$AB$也可逆，且：

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (AB)^T = B^TA^T$

分块矩阵

思想：

对于行数和列数较高的矩阵A，运算时采用分块法，可以使得大矩阵的运算化成小矩阵的运算，化整为零。

运算规则：

1、分块矩阵的加法

若矩阵A,B是同型矩阵，且采用相同的分块法，有：

$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\dots&A_{1r}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{s1}&\dots&A_{sr}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_{11}&\dots&B_{1r}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ B_{s1}&\dots&B_{sr}\end{pmatrix}$则有：

$$A+B=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11}&\dots&A_{1r}+B_{1r}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{s1}+B_{s1}&\dots&A_{sr}+B_{sr}\end{pmatrix}$$

2、分块矩阵的数乘

若λ是数，且$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\dots&A_{1r}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{s1}&\dots&A_{sr}\end{pmatrix}$,则有：

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda A_{11}&\dots&\lambda A_{1r}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda A_{s1}&\dots&\lambda A_{sr}\end{pmatrix}$$

3、分块矩阵的转置

若$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\dots&A_{1r}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{s1}&\dots&A_{sr}\end{pmatrix}$, 则有： $A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&\dots&A_{1r}^T\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{s1}^T&\dots&A_{sr}^T\end{pmatrix}$

4、分块对角矩阵

A的分块矩阵只有对角线上有非零子块，其余子块都是零矩阵，对角线上的子块都是方阵，形如：

$$A=\begin{pmatrix}A_1&0&\dots&0\\ 0&A_2&\dots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&\dots&A_s\end{pmatrix}$$

性质：

- $|A|=|A_1||A_2|\dots|A_s|$
- 若$|A_s|\neq 0$, 则 $|A|\neq 0$,并且;

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

lecture2、矩阵的初等变换与线性方程组

回顾克拉默法则

矩阵的初等行（列）变换

- 调换两行，$r_i \leftrightarrow r_j$
- 以非零常数k乘上某一行的所有元素，$r_i * k$
- 某一行加上另一行的k倍，$r_i + k * r_j$

行row换成列column，得到初等列变换。

初等变换包括 “初等行变换+初等列变换”。

矩阵之间的等价关系

- 矩阵A经过有限次初等行变换得到B，行等价，记为$A \overset{r}{\sim} B$
- 矩阵A经过有限次初等列变换得到B，列等价，记为$A \overset{c}{\sim} B$
- 矩阵A经过有限次初等变换得到B，等价，记为$A \sim B$

几种矩阵类型：

- 行阶梯形矩阵
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  可画出一条阶梯线，线的下方全为零；每个台阶只有一行；阶梯线的竖线后面全是非零行的第一个非零元素。
- 行最简形矩阵
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

非零行的第一个非零元素为1；这些非零元素所在的列的其它元素都为零。

- 标准形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左上角是一个单位矩阵，其它元素全为零。

一般形式：

$$F = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m*n}$$

标准形矩阵由m、n、r三个参数完全确定，其中r就是行阶梯形矩阵中的非零行的函数。

初等变换与矩阵乘法的关系

初等矩阵

定义：

由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

- 对调单位阵的第i,j行（列），记作：$E_m(i,j)$
- 以常数k≠0乘单位阵第i行（列），记作：$E_m(i(k))$
- 以k乘单位阵第j行加到第i行，记作：$E_m(ij(k))$

结论：(左乘行变换，右乘列变换)

- $E_m(i,j)A_{m*n}$，把矩阵A的第i行与第j行对调，即$r_i \leftrightarrow r_j$
- $A_{m*n}E_n(i,j)$，把矩阵的第i列与第j列对调，即$c_i \leftrightarrow c_j$
- $E_m(i(k))A_{m*n}$，把非零常数k乘矩阵A的第i行，即$r_i * k$
- $A_{m*n}E_n(i(k))$，把非零常数k乘矩阵A的第i列，即$c_i * k$
- $E_m(ij(k))A_{m*n}$，把矩阵A的第j行乘以非零常数k加到矩阵A的第i行，即$r_i + r_j * k$
- $A_{m*n}E_n(ij(k))$，把矩阵A第i列乘以非零常数k加到矩阵A的第j列，即$c_j + c_i * k$

性质：

- 假设A是一个m*n矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A左乘相应的m阶初等矩阵

- 假设A是一个m*n矩阵，对A施行一次初等列变换，相当于在A右乘相应的n阶初等矩阵
- $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$
- $E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$
- $E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$
- 方阵A可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵$P_1,P_2,...,P_l$，使得$A=P_1P_2...,P_l$,即表明：**可逆矩阵的标准形矩阵是单位阵，可逆矩阵的行最简形也是单位矩阵**
- 推论：方阵A的可逆的充要条件$A\overset{r}{\sim}E$（有限次初等行变换，行等价）
- 推论：方阵A与B等价的充要条件是存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使得$PAQ=B$

初等变换的应用

1、求逆矩阵

> $|A|\neq 0,$由$A=P_1P_2...P_l,$有：
>
> $P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}...P_1^{-1}A=E, A^{-1}A=E$，*有：*
>
> $P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}...P_1^{-1}E=A^{-1},$
>
> $\therefore P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}...P_1^{-1}$（$A|E)=(P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}...P_1^{-1}A|P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}...P_1^{-1}E)=(E|A^{-1})$
>
> *即：对$n*2n$矩阵（$A|E$）施行**初等行变换**，得到（$E|A^{-1}$）*

2、利用**初等行变换**求逆矩阵的方法，求矩阵$A^{-1}B$

> $(A|B)=(E|A^{-1}B)$
>
> *e.g. 求矩阵X，使得AX=B，其中*$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$
>
> *若A可逆，则*$X=A^{-1}B$
>
> $(A|B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&0&1&3\end{pmatrix}$
>
> $\therefore X=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}$

3、求$Y=CA^{-1}$

> *可对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$作初等**列变换**，即$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \overset{初等列变换}{\sim} \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}$即可得$Y = CA^{-1}$.*
>
> *或者改为对(A^T, C^T)作**初等行变换**，即$(A^T, C^T) \overset{初等行变换}{\sim}$ （$E, (A^T)^{-1}C^T$）.*

矩阵的秩

矩阵子式：在m*n矩阵A中，任取k行k列（k≤m,k≤n），位于这些行列交叉处的k^2个元素，不改变它们在矩阵A的所处的次序而得到的**k阶行列式**，称为矩阵A的k阶子式。

定义：

设矩阵A中有一个不等于零的r阶子式D，且所有r+1阶子式（如果存在的话）全等于零，称：

D为矩阵A的最高非零子式

数r为矩阵A的秩，记作$R(A)$

规定：**零矩阵的秩等于零**

性质：

- 矩阵A的秩就是A中非零子式的最高阶数，所有高于$r+1$阶子式（若存在）都等于零
- 若矩阵A的某个s阶子式不等于零，则$R(A) \geq s$，若所有t阶子式等于零，则$R(A) < t$
- 若A为n阶矩阵，则A的n阶子式只有一个，即$|A|$.

  当$|A| \neq 0$时，$R(A) = n$,即可逆矩阵（非奇异矩阵）又称为满秩矩阵

  当$|A| = 0$时，$R(A) < n$,即不可逆矩阵（奇异矩阵）又称为降秩矩阵
- 若A为m*n矩阵，则$0 \leq R(A) \leq min(m, n)$
- $R(A^T) = R(A)$
- $A \sim B, R(A) = R(B)$,当行数和列数较高时，通过初等变换将一般矩阵化为行阶梯型矩阵，行阶梯矩阵的秩就是非零行的行数。
- 若P, Q可逆，则$R(PAQ) = R(B)$
- $max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$

  特别地，当B=b为非零列向量时，有$R(A) \leq R(A, b) \leq R(A) + 1$
- $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$

- $R(AB) \le min\{R(A), R(B)\}$
- $A_{m*n}B_{n*l} = 0,$ 则 $R(A) + R(B) \le n$

线性方程组的解

设有n个未知数的m个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

定义：线性方程组如果有解，称是相容的，如果无解，称不相容的

定理：

n元线性方程组$Ax = b$

- 无解的充要条件是$R(A) < R(A, b)$
- 有唯一解的充要条件是$R(A) = R(A, b)$
- 有无限多解的充要条件是$R(A) = R(A, b) < n$

> *e.g. 求解非齐次线性方程组*
>
> $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$
>
> *解：* $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{初等行变换}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
>
> $R(A) = R(A, b) = 3 < n = 4$*,故原线性方程组有无穷多的解。*
>
> *即得与原线性方程组同解的方程组：*
>
> $$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$
>
> *选取x_3自由变量【自由变量数= n-R(A)】，则*

> $$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$
>
> *方程组的通解可以表示为* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

lecture3、向量组的线性相关性

概念

- 给定向量组$A : a_1, a_2, \ldots, a_m$，对于任意一组实数$k_1, k_2, \ldots, k_m$,表达式：

  $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m$，

  称为向量组A的一个**线性组合。**

  $k_1, k_2, \ldots, k_m$,称为这个线性组合的系数。

- 给定向量组$A : a_1, a_2, \ldots, a_m$，和向量b，如果存在一组实数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$,使得：

  $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m$，

  则向量b为向量组A的线性组合，

  此时称**向量b能由向量组A线性表示**

- 向量b能由向量组A线性表示 $\Longleftrightarrow$ 线性方程组$Ax = b$有解 $\Longleftrightarrow$ $R(A) = R(A, b)$

- 向量组A与向量组B等价 $\Longleftrightarrow$ $R(A) = R(B) = R(A, B)$

线性相关性

定义：

给定向量组$A : a_1, a_2, \ldots, a_m$，对于任意一组**不全为零**实数$k_1, k_2, \ldots, k_m$,表达式：

$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0$（零向量）

则称：向量组A是线性相关的，否则是线性无关的。

即：向量组$A:a_1,a_2,...,a_m$线性相关 $\Longleftrightarrow$ m元其次线性方程组$Ax=0$有非零解 $\Longleftrightarrow R(A)<m$

说明：

- 给定向量组，线性相关或线性无关两者必居其一
- 向量组$A:a_1,a_2,...,a_m$（$m\geq 2$）线性相关，也就是向量组A中，至少有一个向量能由其余m-1个向量线性表示

向量组线性相关性判定：

向量组$A:a_1,a_2,...,a_m$线性相关

$\Longleftrightarrow$ 存在不全为零的实数$k_1,k_2,...,k_m$，使得$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0$（零向量）

$\Longleftrightarrow$ m元齐次方程组$Ax=0$有非零解

$\Longleftrightarrow$ 矩阵$A=(a_1,a_2,...,a_m)$的秩小于向量的个数m

$\Longleftrightarrow$ 向量组A中至少有一个 向量能由其余m-1个向量线性表示

定理：

- 若向量组$A:a_1,a_2,...,a_m$线性相关，则向量组$B:a_1,a_2,...,a_m$，a_{m+1}也线性相关；逆否命题也成立。
- m个n维向量组成的向量组，当维数n小于向量个数m时，一定线性相关；特别地，n+1个n维向量一定线性相关。
- 设向量组$A:a_1,a_2,...,a_m$线性无关，而向量组$B:a_1,a_2,...,a_m$，b线性相关，则向量b必定能由向量组A线性表示，且表示法唯一。

向量组的秩

定理：

- 向量组$A:a_1,a_2,...,a_m$**线性相关**的充要条件是矩阵$A=(a_1,a_2,...,a_m)$的秩**小于**向量的个数m。

- 向量组$A:a_1,a_2,...,a_m$**线性无关**的充要条件是矩阵 $A=(a_1,a_2,...,a_m)$的秩**等于**向量的个数m。

定义：

设有向量组A，如果在A中能选出r个向量$a_1,a-2$，$...,a_r$满足：

- 向量组$A_0:a_1,a_2,...,a_r$线性无关
- 向量组A中的任意r+1个向量（若存在）都线性相关

称向量组A_0是 向 量 组 A的一个最大无关向量组。

> *e.g.求矩阵*$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$*的秩，并求A的一个最高阶非零子式。*
>
> *解：使用初等行变换把矩阵化成行阶梯型矩阵，即：*
>
> $$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{初等行变换}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$
>
> *行阶梯型矩阵有三个非零行，故*$R(A)=3$.
>
> *选取行阶梯型矩阵中非零的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵A的第一、二、四列，即：*
>
> $$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{初等行变换}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$
>
> $R(A_0)=3$*,计算*A_0*的前三行构成的子式：*
>
> $$D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\end{vmatrix}=-8\neq0$$
>
> *因此这就是A的一个最高阶非零子式。*

结论：

- 矩阵的秩=矩阵中最高阶非零子式的阶数=矩阵对应的行阶梯型矩阵的非零行的行数=它的列向量组的秩=它的行向量组的秩。
- 矩阵的最高阶非零子式一般不是唯一的，即 向量组的最大无关组一般是不唯一的；但是矩阵的秩一定是唯一的。

线性方程组的解的结构

回顾：

线性方程组的解的判定：

- 包含n个未知数的齐次线性方程组$Ax=0$有**非零解**的充要条件是：系数矩阵的秩$R(A)<n$
- 包含n个未知数的非齐次线性方程组$Ax=b$有**解**的充要条件是：系数矩阵的秩$R(A)=R(A,b)$

  并且：

  - 当$R(A)=R(A,b)=n$时，方程组有**唯一解**
  - 当$R(A)=R(A,b)<n$时，方程组有**无穷多个解**

解向量定义：

设齐次线性方程组$Ax=0$,如果$x_1=\xi_{11},x_2=\xi_{21},\dots,x_n=\xi_{n1}$为该方程组的解，则

$\xi=\begin{pmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{21}\\ \vdots\\ \xi_{n1}\end{pmatrix}$称为方程组的**解向量**

齐次线性方程组的解的性质：

- 若$x=\xi_1,x=\xi_2$是齐次线性方程组$Ax=0$的解，则：

  $x=\xi_1+\xi_2$还是它的解。
- 若$x=\xi$是齐次线性方程组$Ax=0$的解，k为实数，则：

  $x=k\xi$还是它的解。
- 若$x=\xi_1,x=\xi_2,\dots\xi_t$是齐次线性方程组$Ax=0$的解，则：

  $x=k\xi_1+k\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$还是它的解。

基础解系

定义：

齐次线性方程组$Ax=0$的一组解向量：$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r$,满足：

- $\xi_1,\xi_2,...,\xi_r$线性无关
- 方程组中的任意一个解都可以表示为$\xi_1,\xi_2,...,\xi_r$的线性组合

称这组解是齐次线性方程组的一个**基础解系。**

即：齐次线性方程组的解集的最大无关组称为齐次线性方程组的基础解系。

> *e.g.求解齐次线性方程组：*
>
> $$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$$
>
> *法一：先求通解，再求基础解系*
>
> $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
>
> $$\begin{cases} x_1-3x_3+4x_4=0 \\ x_2+2x_3-3x_4=0 \end{cases} \text{即：}$$
>
> $$\begin{cases} x_1=3x_3-4x_4 \\ x_2=-2x_3+3x_4 \end{cases}$$
>
> *令$x_3=c_1,x_4=c_2$,得到通解表达式：*
>
> $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c_1-4c_2 \\ -2c_1+3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=c_1\xi_1+c_2\xi_2$$
>
> *方程组的任意一个解都可以表示为ξ_1,ξ_2的线性组合*
>
> *ξ_1,ξ_2的四个分量不成比例，所以ξ_1,ξ_2线性无关，即ξ_1,ξ_2是原方程组的基础解析。*
>
> *法二：先求基础解系，再写出通解*
>
> $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
>
> $$\begin{cases} x_1-3x_3+4x_4=0 \\ x_2+2x_3-3x_4=0 \end{cases} \text{即：}$$
>
> $$\begin{cases} x_1=3x_3-4x_4 \\ x_2=-2x_3+3x_4 \end{cases}$$
>
> 令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,得$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

> *合起来便得到基础解析：*
>
> $$\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
>
> *同理，也可以将x_1, x_2作为自由变量。*

非齐次线性方程组的解的性质

- 若$x = \eta_1, x = \eta_2$是非齐次线性方程组$Ax = b$的解，则：

  $x = \eta_1 - \eta_2$是对应的齐次线性方程组$Ax = 0$的解

  > $A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = 0$

- 若$x = \eta^*$ 是非齐次线性方程组$Ax = b$的解，$x = \xi$是$Ax = 0$的解，则：

  $x = \xi + \eta^*$还是$Ax = b$得解。
- 设$Ax = 0$得通解为$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$，则：

  $\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$是$Ax = b$的通解。

> *e.g.求线性方程组：*
>
> $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases} \text{的 通 解}$$
>
> *解：容易看出*$\eta^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*是方程组的一个特解*
>
> *其对应的齐次线性方程组为：*
>
> $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$
>
> *根据前面的计算结果有：*
>
> *基础解系为*$\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
>
> *所以原方程组的与通解为：*

> $$\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \eta^* = c_1\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

向量空间

封闭的概念：指集合中任意两个元素作某一运算得到的结果仍属于该集合

向量空间的概念:

设V是n维向量的结合，如果:

- 集合V非空
- 集合V对于向量的加法和数乘两种运算封闭，即
  若$a \in V, b \in V,$则 $a + b \in V$
  若$a \in V, \lambda \in \mathbb{R},$则 $\lambda a \in V$

称集合V为**向量空间**

向量空间的定义:

把集合

$L = \{\lambda a + \mu b | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

称为由向量a,b所生成的向量空间。

一般地:

$L = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m | \lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}\}$

称为由向量$a_1, a_2, \ldots, a_m$所生成的向量空间。

结论：**等价的向量组所生成的空间相等**

子空间概念:

如果向量空间V的非空子集合V1对于V中所定义的 加法和乘法两种运算是封闭的，称V1是V的子空间。

> *e.g.n维向量的全体$\mathbb{R}^n$*
>
> *集合$V_1=\{(0,x_2,\ldots,x_n)^T|x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}$，*
>
> *集合$V_2=\{(1,x_2,\ldots,x_n)^T|x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}$*
>
> *其中V1是$\mathbb{R}^n$的子空间，V2不是，它不满足加法和乘数也属于向量空间*

向量空间的基的概念

设向量空间V，如果能在V中选出r个向量$a_1,a_2,\ldots,a_r$,满足：

- $a_1,a_2,\ldots,a_r$线性无关
- V中的任意一个向量都能由$a_1,a_2,\ldots,a_r$线性表示

称向量组$a_1,a_2,\ldots,a_r$是向量空间V的一个**基**

r是向量空间的维数，并称V是r维向量空间。

即：

- 向量空间 →向量组
- 向量空间的基→向量组的最大无关组
- 向量空间的维数→向量组的秩

定义：

如果在向量空间V中取定一个基$a_1,a_2,\ldots,a_r$，那么V中任意一个向量可唯一表示为：

$x=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ra_r$

数组$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$称为向量x在基$a_1,a_2,\ldots,a_r$中的**坐标**

> $E=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$*的列向量组是$\mathbb{R}^3$的一个基，那么*
>
> $b=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2e_1+3e_2+7e_3$
>
> *其中b在基e_1,e_2,e_3中的坐标为（2，3，7）*

lecture4、相似矩阵及二次型

向量内积

定义：

设有n维向量$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

令$[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

[x,y]称为向量x和y的内积。

内积是一个实数

性质：

- 对称性：$[x,y]=[y,x]$
- 线性：$[\lambda x,y]=\lambda[x,y]$

  $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$
- 当$x=0$（零向量），$[x,x]=0;$

  当$x\neq 0$（零向量），$[x,x]>0$
- 施瓦兹（Schwarz）不等式

  $[x,y]^2\leq[x,x][y,y].$

向量的长度（范数）

定义：

令$||x||=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\geq 0$

称：$||x||$为n维向量x的 **长度（或范数）**

当$||x||=1$，称为单位向量。

性质：

- 非负性：

  当$x = 0$（零向量），$||x|| = 0;$

  当$x \neq 0$（零向量），$||x|| > 0$
- 齐次性：

  $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
- 三角不等式

  $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

向量的正交性

对于向量x,y，有：

$[x, y]^2 \leq [x, x][y, y] = ||x||^2 ||y||^2$

当$x \neq 0, y \neq 0$时，$|\frac{[x,y]}{||x|| \cdot ||y||}| \leq 1$

令向量x和向量y的夹角为θ

$\theta = arccos \frac{[x,y]}{||x|| \cdot ||y||}$

结论：

- 两两正交的非零向量组成的向量组称为**正交向量组**
- 若n维向量a_1，$a_2, \dots, a_r$是一组两两正交的非零向量，则a_1，$a_2, \dots, a_r$ **线性无关。**

  > *proof:*
  >
  > *设*$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_r a_r = 0$(零向量)，*那么：*
  >
  > $0 = [a_1, 0] = [a_1, k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_r a_r]$
  >
  > $= k_1 [a_1, a_1] + k_2 [a_1, a_2] + \dots + k_r [a_1, a_r]$
  >
  > $= k_1 [a_1, a_1] + 0 + \dots + 0$
  >
  > $= k_1 ||a_1||^2$
  >
  > 即$k_1 = 0$，同理可证，$k_2 = k_3 = \dots = k_r = 0$
  >
  > 综上所述，$a_1, a_2, \dots, a_r$线性无关

- n维向量$e_1, e_2, \dots e_r$是向量空间$V \subset \mathbb{R}^n$中的向量，满足：
  - $e_1, e_2, \dots, e_r$是向量空间V总的一个基（最大无关组）
  - $e_1, e_2, \dots, e_r$两两正交

- $e_1, e_2, ..., e_r$都是单位向量

称$e_1, e_2, ..., e_r$是V的一个**规范正交基**

> *如：* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
>
> *是*$\mathbb{R}^4$的一个规范正交基

求规范正交基的方法

基→正交基→规范正交基

- 第一步：正交化——施密特正交化

> *设*$a_1, a_2, ..., a_r$是向量空间V的一个基，
>
> $b_1 = a_1$
>
> $b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$
>
> $b_3 = a_3 - c_{31} - c_{32} = a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2$
>
> $...$
>
> $b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1} r, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1}$

- 第二步：单位化

> 设$b_1, b_2, ..., b_r$是向量空间V中的一个正交基，令：
>
> $e_1 = \frac{1}{||b_1||} b_1, e_2 = \frac{1}{||b_2||} b_2, ..., e_r = \frac{1}{||b_r||} b_r,$
>
> *因为：*
>
> $[e_1, e_1] = [\frac{1}{||b_1||} b_1, \frac{1}{||b_1||} b_1] = \frac{1}{||b_1||^2} [b_1, b_1] = \frac{||b_1||^2}{||b_1||^2} = 1$
>
> $||e_1|| = \sqrt{[e_1, e_1]} = 1$
>
> 从而$e_1, e_2, ..., e_r$是向量空间V中的一个规范正交基

正交矩阵

定义：

如果n阶矩阵A满足$A^TA=E$（E为n阶单位阵），即$A^{-1}=A^T$

称：矩阵A为正交矩阵，即**正交阵**

- **方阵A为正交阵的充要条件是A的 列向量 都是 单位向量，且 两两相交，即A的列向量组构成R的规范正交基。**
- **方阵A为正交阵的充要条件是A的 行向量 都是 单位向量，且 两两相交，即A的行向量组构成R的规范正交基。**

性质：

- 若A是正交阵，则A^T或A^{-1}也是正交阵，且$|A|=1$或-1
- 若A,B是正交阵，则AB也是正交阵
- $A^T=A^{-1}$
- $A^TA=AA^T=E$(n阶单位阵)
- 实对称阵对应不同的特征值的特征向量正交

正交变换

定义：

若P是正交阵，则线性变换$y=Px$称为正交变换

$$||y||=\sqrt{y^Ty}=\sqrt{(Px)^T(Px)}=\sqrt{x^TP^TPx}=\sqrt{x^Tx}=||x||$$

经过正交变换，线段的长度保持不变【正交变换的优良特性】

方阵的特征值与特征向量

基本概念

定义：

设A是n阶矩阵，如果数λ和n维非零向量x满足：

$$Ax=\lambda x$$

那么称这样的数λ为矩阵A的特征值，非零向量x称为A对应于特征值λ的特征向量

即：

$Ax = \lambda x = \lambda Ex$

$\Longleftrightarrow$ 非零向量x满足$(A-\lambda E)x=0$（向量）

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组有非零解

$\Longleftrightarrow$ 系数行列式$|A-\lambda E|=0$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

特征方程$|A-\lambda E|=0$

特征多项式$|A-\lambda E|$

性质：

- 在复数范围内n阶矩阵A有n个特征值（重根按重数计算）
- 设n阶矩阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$,则
  - $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$(即对角线元素之和)
  - $\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n = |A|$
- 若λ是A的一个特征值，则齐次线性方程组的基础解系就是对应于特征值λ的全体特征向量的最大无关组。
- λ是方阵A的特征值，非零向量P是A对应于特征值λ的特征向量，λ^2是A^2的特征值，对应的特征向量也是P
- λ是方阵A的特征值，非零向量P是A对应于特征值λ的特征向量,当A可逆时，$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值,对应的特征向量仍为P
- 若λ是A的一个特征值，则$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\dots+a_m\lambda_m$是矩阵多项式$\varphi(A)=a_0+a_1A_1+\dots+a_mA_m$的特征值。

定理：

假设$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$是方阵A的特征值，$p_1,p_2,...,p_m$依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$各不相同，则$p_1,p_2,...,p_m$线性无关。

相似矩阵

定义：

设A,B都是n阶矩阵，若有可逆矩阵P满足：

$P^{-1}AP=B$

则称B为矩阵A的相似矩阵，即矩阵A和B相似。

其中，对A进行$P^{-1}AP$运算称为对A进行**相似变换**；可逆矩阵P为把A变成B的**相似变换矩阵**

定理：

- 若n阶矩阵A和B相似，则A和B的特征多项式相同，从而A和B的特征值相同

> *proof:*
>
> *存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$,于是：*
>
> $|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|P^{-1}||A-\lambda E||P|=|A-\lambda E|$

推论：

若n阶矩阵A和B相似，则A的多项式$\varphi(A)$和B的多项式$\varphi(B)$相似。

- 设n阶对角矩阵 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$则$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$就是$\Lambda$的$n$个特征值。

> $$|\Lambda-\lambda E|=|\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda & & & \\ & \lambda_2-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n-\lambda\end{pmatrix}|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)...(\lambda_n-\lambda)$$
>
> *故$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$是$\Lambda$的$n$个特征值*

对称矩阵的对角化

定理：

- 设$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$是方阵A的特征值,$p_1,p_2,...,p_m$依次是与之相对应的特征向量,如果$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$各不相同,则$p_1,p_2,...,p_m$各不相同
- n阶矩阵A和对角阵相似(即A能对角化)的充要条件是A有n个线性无关的特征向量
- 如果A有n个不同的特征值,则A和对角阵相似,即,若有可逆矩阵P满足：$P^{-1}AP=B$
- 如果A的特征方程有重根时,就不一定有n个线性无关的特征向量,从而不一定能对角化

- 设λ_1,λ_2是对角阵A的特征值,p_1,p_2是对应的特征向量,如果$\lambda_1\neq\lambda_2$,则p_1,p_2正交
- 设A为n阶对称阵,则必有正交阵P,使得$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$,其中Λ是以A的n个特征值为对角元的对角阵(不唯一)
- 设A为n阶对称阵,λ是A的特征方程的k重根,则:

  矩阵$A-\lambda E$的秩等于$n-k$

  恰好有k个线性无关的额特征向量与特征值λ对应

对称阵A对角化的步骤

【对角阵】：矩阵元素关于主对角线对称

1、求出A的所有各不相同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$，它们的重数依次为$k_1,k_2,\ldots,k_s$(其中$k_1+k_2+\ldots k_s=n$)

2、对每一个k_i重特征值λ_i，求方程组$|A-\lambda_iE|=0$的基础解系，得到k_i个线性无关的特征向量

把k_i个线性无关的特征向量正交化、单位化，得到k_i个两两正交的吖单位特征向量

因为$k_1+k_2+\cdots+k_s=n$，总共得到n个两两正交的单位特征向量。

3、这n个两两正交的单位特征向量构成正交阵P，便有:

$P^{-1}AP=\Lambda$其中Λ中对角元排列次序和列向量的排列次序对应

> *【e.g.1】设$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求正交阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$对角阵。*
>
> *解：因为A是对称阵（关于主对角线元素对称），所以A可以对角化。*
>
> $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}\overset{利用行列式性质简化计算}{=}\begin{vmatrix}0&\lambda-1&1-\lambda^2\\0&1-\lambda&1-\lambda\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$
>
> *得到A的特征值为*$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$
>
> *当*$\lambda_1=-2$时，解方程组$(A+2E)x=0$
>
> $$A+2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\overset{初等行变换}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},得到特征向量\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$
>
> *当*$\lambda_1=\lambda_2=1$时，解方程组$(A-E)x=0$

$A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\overset{初等行变换}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得到特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

显然，必有$\xi_1\perp\xi_2,\xi_1\perp\xi_3$,但是$\xi_2\perp\xi_3$未必成立

注意，基础解系必须是两两正交的，所以需要对ξ_2,ξ_3*正交化。*

$\eta_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\eta_3=\xi_3-\frac{[\xi_3,\eta_2]}{[\eta_2,\eta_2]}\eta_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

此时$\xi_1\perp\eta_2,\xi_1\perp\eta_3,\eta_2\perp\eta_3$

单位化：

当$\lambda_1=-2$时，*对应的特征向量为*$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

单位化得$p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，*对应的特征向量为*$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

单位化得$p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

于是p_1,p_2,p_3*构成正交阵*$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

从而$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【e.g.2】设$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$,*求*$A^n$

思路: $A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^nP^{-1}$

A是对称阵，所以A可以对角化。

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

> 求得A得特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=3$
>
> 所以$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},\Lambda^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}$
>
> 下面求满足$P^{-1}AP=\Lambda$的可逆矩阵P
>
> 当$\lambda_1=1$时，解方程组$(A-E)x=0$
>
> $A-E=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\overset{初等行变换}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$,得到特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
>
> 当$\lambda_2=3$时，解方程组$(A-3E)x=0$
>
> $A-3E=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\overset{初等行变换}{\sim}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,得到特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
>
> 显然，这两个特征向量是正交的，单位化得：
>
> $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$
>
> 不需要单位化
>
> $P^{-1}=\frac{1}{|P|}P^*$
>
> $P^{-1}=-\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$
>
> $A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^nP^{-1}=-\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$
>
> .

二次型及其标准形

概念：

二阶方阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$对应于：

$$\begin{cases}x_1=x\\y_1=0\end{cases}$$

是一种投影变换。

二阶方阵$\begin{pmatrix}cos\varphi&-sin\varphi\\sin\varphi&cos\varphi\end{pmatrix}$对应于：

$$\begin{cases} x = x_1 cos\varphi - y_1 sin\varphi, \\ y = x_1 sin\varphi + y_1 cos\varphi, \end{cases}$$

是以原点为中心逆时针旋转φ角的旋转变换。

定义：

还有n个变量的$x_1, x_2, \ldots, x_n$的二次齐次函数：

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$

$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$

$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n$

$+a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n$

$+\ldots$

$+a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$

$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

称为**二次型。**

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^TAx$

其中$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$称为**二次型矩阵。**

对称阵A的秩也叫做二次型函数f的秩。

标准形：只含有**平方项**的二次型称为二次型的标准形（或法式），即：

$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$

规范形：标准形系数$k_1, k_2, \ldots, k_n$只在-1，0，1三个数中取值。

相似：设A,B都是n阶矩阵，若有可逆矩阵P满足：$P^{-1}AP = B$,称矩阵A和B相似。

合同：设A,B都是n阶矩阵，若有可逆矩阵C满足：$C^TAC=B$,称矩阵A和B合同。

> *$B^T=(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=C^TAC=B$,即若A为对称阵，则B也为对称阵（转置相等）。*
>
> *$R(A)=R(B)$*
>
> *经过可逆变换后，二次型f的矩阵由A变为与A合同的矩阵C^TAC，且二次型的秩不变。*

二次型f经过可逆变换$x=Cy$变成标准形，即：

$$f=x^TAx=(Cy)^TA(Cy)=y^T(C^TAC)y=k_1y_1^2+k_1y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

$$=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

即对于对称阵A，寻找可逆矩阵C，使得C^TAC为对角阵，把**对称阵合同对角化。**

定理：

- 如果n阶矩阵A满足$A^TA=E$（单位阵），则称矩阵A为正交矩阵，简称**正交阵。**
- 设A为n阶对称阵，则必有正交阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$,其中Λ是A的n个特征值为对角元的对角阵（不唯一）。
- 任给二次型$f(x)=x^TAx$(其中$A=A^T$)，总存在正交变换$x=Py$，使得f化为标准形：

$f(Py)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$,其中$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$是f的矩阵A的**特征值。**

- 任给二次型$f(x)=x^TAx$(其中$A=A^T$)，总存在正交变换$x=Cz$，使得$f(Cz)$化为规范形。

> *e.g. 求一个正交变换$x=Py$，把二次型：$f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$化为标准形。*
>
> *解：*
>
> *二次型矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*

因为A是对称阵（关于主对角线元素对称），所以A可以对角化。

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}\overset{\text{利用行列式性质简化计算}}{=}\begin{vmatrix}0 & \lambda-1 & 1-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

得到A的特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$

当$\lambda_1=-2$时，解方程组$(A+2E)x=0$

$$A+2E=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\text{得到特征向量}\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，解方程组$(A-E)x=0$

$$A-E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\text{得到特征向量}\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

显然，必有$\xi_1\perp\xi_2,\xi_1\perp\xi_3$，但是$\xi_2\perp\xi_3$未必成立

注意，基础解系必须是两两正交的，所以需要对ξ_2,ξ_3正交化。

$$\eta_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\eta_3=\xi_3-\frac{[\xi_3,\eta_2]}{[\eta_2,\eta_2]}\eta_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

此时$\xi_1\perp\eta_2,\xi_1\perp\eta_3,\eta_2\perp\eta_3$

单位化：

当$\lambda_1=-2$时，对应的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

单位化得$p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，对应的特征向量为$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

单位化得$p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

于是p_1,p_2,p_3构成正交阵$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

> 从而$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
>
> 于是正交变换$x=Py$把二次型化为标准形：
>
> $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$
>
> 令：
>
> $$\begin{cases}y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1\\y_2=z_2\\y_3=z_3\end{cases}$$
>
> 则可以转化为规范形：
>
> $f=-z_1^2+z_2^2+z_3^2$

（MIT线性代数课程）

lecture1、方程组的几何解释

以二元线性方程组为例：

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=l\\a_2x+b_2y=m\end{cases}$$

如果两条直线相交，那么交点的坐标(x^*,y^*)即为方程组的解。

即从行的角度来看：

- 如果两条直线相交于一点，那么该方程有且仅有一个解，即为交点的坐标。
- 如果两条直线重合，方程有无数组解
- 如果两条直线平行，方程无解

从列的角度，上述二元线性方程组可以写成：

$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$

类似，对于三元一次方程组：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = l \\ a_2x + b_2y + c_2z = m \\ a_3x + b_3y + c_3z = n \end{cases}$$

行的角度：

三个三元一次方程组表示三维空间中的三个平面，如果三个平面相交于一点，那么交点的坐标即为方程组的解。

即：

- 三个平面有且仅有一个交点，方程组有且仅有一个解，即为交点坐标
- 三个平面相交于一条直线，那么这条直线上所有的点均为方程组的解
- 三个平面重合，那么平面上的所有点的坐标均为方程组的解
- 三个平面没有公共的交点，那么方程无解

列的角度：

对于一般的n维线性方程组$Ax = b$，其中A是n*n维度=系数矩阵，x是n维列向量，b是方程组右端的n维列向量。

假设$\alpha_1, \alpha_2，\ldots, \alpha_n$是A的n个列向量，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，则方程组$Ax = b$可以表示为：

$(\alpha_1, \alpha_2，\ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$

即：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$

因此对于$Ax = b$可以理解为：

是否存在合适的线性组合系数，使得A的列向量的线性组合恰好为b。如果存在，线性组合的系数为多少？这些线性组合系数就构成了Ax=b的解向量x

【问题】：

线性方程组$Ax = b$在什么情况下有解？

当x取到所有n维列向量时，Ax就能取遍所有A的列向量的线性组合，即，所有的Ax就构成了A的列向量张成的线性空间$V = span\{\alpha_1, \alpha_2, \ ..., \alpha_n\}$。所以：

$Ax = b$有解 $\iff b \in span\{\alpha_1, \alpha_2, \ ..., \alpha_n\} \iff rankA = rank(A, b)$。

特别的，如果A的n个列向量线性无关，那么这n个列向量就构成了n维向量空间$\mathbb{R}^n$的一组基。

对于任意的$b \in \mathbb{R}^n$均可由A的列向量线性表示，即$Ax = b$一定有解。

理解矩阵乘法：

假设：

$A = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$，

其中，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$是A的n个列向量

有：

$$Ax = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n。$$

考虑行向量y^T左乘矩阵$A \in \mathbb{R}^{n*n}$，其中$y \in \mathbb{R}^n$

假设：

$y^T = (y_1, y_2, ..., y_n)$

有：

$$y^T A = (y_1, y_2, ..., y_n)\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} = y_1\alpha_1^T + y_2\alpha_2^T + \cdots + y_n\alpha_n^T。$$

综上所述：

列向量x右乘矩阵A相当于对A的列向量作线性组合，x的各分量即为线性组合的系数；

行向量y^T左乘矩阵A相当于对A的行向量作线性组合，y^T的各分量即为线性组合系数。

lecture2、矩阵消元

对于线性方程组：

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+8y+z=12 \\ 4y+z=2 \end{cases}$$

考虑方程组的系数矩阵A及其右端向量b：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

称：

$(A|b)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$为增广矩阵

通过行变换可得：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第一行乘以-3加到第二行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第二行乘以-2加到第三行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

由第三行（0 0 5 -10）可知，$5z=-10 \iff z=-2$

代入第二行可得$y=1$，一起带入第一行可得$x=2$。

即方程组的解为：

$x=2, y=1, z=-2$

其中上三角矩阵（upper triangular）记为U，$U=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$。

从矩阵乘法角度说明A是如何变成U的：

A的第一行的-3倍加到第二行；

行变换。

lecture3、乘法和逆矩阵

矩阵乘法

1、定义：

设$C = AB$，则矩阵C的（i，j）元为A的第i行和B的第j列的各元素相乘之和，即：

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$。

2、从列的角度来看：

$AB = A(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \ldots, A\beta_n)$，

矩阵B右乘矩阵A所得到的矩阵的每一列都是A的线性组合，线性组合系数分别是矩阵B的各列分量。

3、从行的角度来看：

设：

$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}$,其中$\alpha_1^T, \alpha_2^T, \ldots, \alpha_n^T$是A的n个行向量。

则：

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1^T B \\ \alpha_2^T B \\ \vdots \\ \alpha_n^T B \end{pmatrix}.$$

矩阵A左乘矩阵B所得到的矩阵每一行都是B的行的线性组合，线性组合的系数分别是A的各行分量。

4、分块乘法（block multiplication）

矩阵的乘法同样可以分块相乘，但是分块的大小必须相互匹配。

$$AB=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4\\ A_3B_1+A_4B_3 & A_3B_2+A_4B_4\end{pmatrix}.$$

矩阵的逆

定义：

如果存在矩阵B使得$AB=BA=I$，称矩阵B为A的逆矩阵（inverse matrix），记为A^{-1}。

> *proof:*
>
> *由于*$1=det(AB)=det(A)det(B)$*,因此*$det(B)\neq 0$*，故B可逆；*
>
> *由于*$AB=I$*，则*$B=B(AB)=(BA)B$*,因此*$(BA-I)B=0$.
>
> *再有B可逆，可得*$BA=I$*。*

判断矩阵可逆：

- 从行列式角度来看，矩阵A的行列式为零，则矩阵A不可逆
- 如果存在向量$x\neq 0$,使得$Ax=0$，那么A不可逆

  > *假设A可逆，那么*$Ax=0$*两边同乘以*A^{-1}*，得到x=0，矛盾。*

求解矩阵的逆

[同济线性代数课件]（https://wenku.baidu.com/view/72d8b24d31b765ce050814f8.html）